Affinità omologiche generali e speciali.
di Maurizio Santangelo (approfondimento tratto dal testo: Maraschini-Palma, Format, ed.Paravia,Vol.I)

Introduzione.

Le affinità omologiche generali e quelle speciali costituiscono argomenti di un certo interesse nell'ambito dei programmi di matematica del terzo anno del liceo scientifico, sia tradizionale che sperimentale e tecnologico, difatti tali argomenti sono stati scelti in passato come temi di maturità scientifica per lo scritto di matematica.
Le affinità omologiche generali e speciali possono essere inquadrate in una programmazione didattica annuale in cui si dedica una prima u.d. della durata di quattro ore alle affinità omologiche generali, ed una seconda u.d. della durata di due ore alle affinità omologiche speciali. Tali argomenti è opportuno svolgerli, nell'ambito di un modulo dedicato allo studio delle trasformazioni geometriche lineari, dopo le affinità (in generale),le omotetie, le isometrie, le similitudini e prima dei gruppi di trasformazioni e delle trasformazioni proiettive.

1) Generalità sulle affinità omologiche generali.

Sia dato un piano cartesiano ortogonale xOy di assi coordinati x ed y ed origine O(0,0) ed una coppia di equazioni scalari del tipo:

$$1')\quad x' = ax + by + p \qquad\qquad 1'')\quad y' = cx + dy + q$$

con a,b,c,d,p,q numeri reali tali che ad-bc diverso da zero(affinchè sia assicurata l'invertibilità delle 1') ed 1'')): allora si dice che le equazioni suddette rappresentano una affinità in cui si corrispondono i punti P(x,y) e P'(x',y').
Si ricorda che in un'affinità valgono le seguenti proprietà:

1) a rette corrispondono rette
2) a rette parallele corrispondono rette parallele
3) il rapporto tra l'area della figura trasformata e quella di partenza è pari al numero reale: ad-bc.

Un'affinità omologica generale(da ora in poi si abbrevierà con a.o.g.) è caratterizzata, inoltre, dal possedere:

1) una retta di punti uniti, denominata asse dell'a.o.g., (di equazione : y=mx+h)
2) una direzione privilegiata di coefficiente angolare k, cioè una qualunque coppia di punti P(x,y) e P'(x',y') che si corrispondono in tale affinità e che non appartengono all'asse, giacciono su una medesima retta del fascio di rette parallele di coefficiente angolare k.
3) Un rapporto r=P'Q/PQ con P e P' una coppia di punti, distinti dall'asse, che si corrispondono nell' a.o.g e Q il punto d'intersezione dell'asse con la retta PP';

se r>0 i due punti P e P' sono situati nello stesso semipiano rispetto all'asse, se r<0 i due suddetti punti sono situati da parti opposte rispetto all'asse.

…

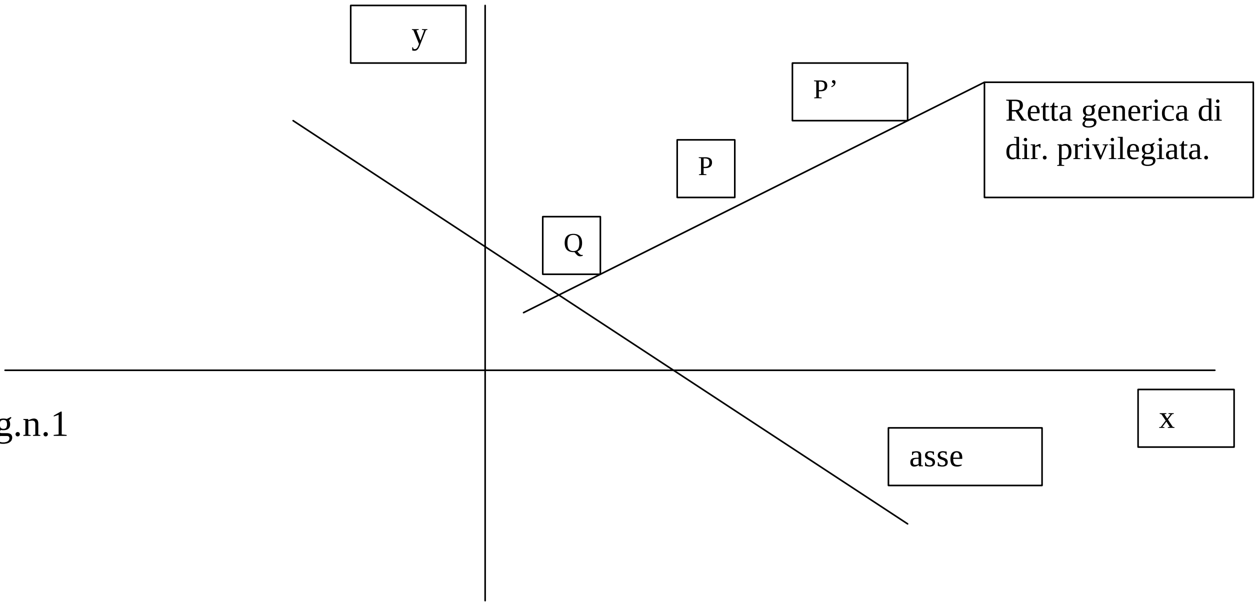

Fig.n.1

2) <u>Affinità omologiche generali</u>

Ci si domanda a quali condizioni debbono sottostare i coefficienti a,b,c,d,p,q delle equazioni 1’) ed 1’’) affinché si verifichino le condizioni 1),2) e 3).
Per poter imporre la condizione 1) si deve procedere alla determinazione dei punti uniti della trasformazione di equazioni 1’) e 1’’) ponendo x’=x ed y’=y, da cui le equazioni:

2’) $(a-1)x+by+p=0$;   2’’) $cx+(d-1)y+q=0$

Affinchè la trasformazione di partenza ammetta una retta di punti uniti, le due rette di equazioni 2’) e 2’’) debbono coincidere, cioè deve risultare:

2’’’) $(a-1)/c=b/(d-1)=p/q$

Sotto queste condizioni le equazioni 1’) ed 1’’) possono rappresentare un’a.o.g.
Le 2’) e 2’’) si possono scrivere sotto la forma:

$$3')\quad y=\frac{1-a}{b}x-\frac{p}{b}\ ;\qquad 3'')\quad y=\frac{c}{1-d}x-\frac{q}{d-1}$$

ed affinché le due rette di equazioni 3’) e 3’’) coincidano con la retta(asse) di equazione $y = m x + h$ deve risultare:

*) $(1-a)/b = c/(1-d) = m$;   **) $-p/b = q/(1-d) = h$

(notare che per risultare m finito deve essere : b<>0, d<>1)
da cui si ottengono le formule:

4) $a=1-mb$; 4’) $c =m(1-d)$; 4’’) $p =- b h$; 4’’’) $q =h(1-d)$

cioè le equazioni dell'a.o.g. per quanto riguarda il punto 1) (imposizione che l'asse abbia equazione y= m x + h) debbono essere del tipo :

5') $x' = (1-mb)x + by - bh$; 5") $y' = m(1-d)x + dy + h(1-d)$

Per quanto riguarda il punto 2) siano P(x,y) e P'(x',y') una coppia di punti che si corrispondono nella trasformazione in questione ed appartenenti ad una retta del fascio di direzione privilegiata con coefficiente angolare k, ed inoltre sia $Q(x_Q, y_Q)$ il punto di intersezione della retta PP' con l'asse della trasformazione; l'equazione della retta PP' è:

$$y' - y = k(x' - x)$$

da cui utilizzando le 5) si ottiene:

$$m(1-d)x + d\,y + h(1-d) - y = k[(1-mb)x + by - b\,h - x\,]$$

da cui segue immediatamente:

$$(1-d)(\,m\,x - y + h\,) = -\,b\,k\,(\,m\,x - y + h\,)$$

e dividendo ambo i membri per mx-y+h<>0(cioè P non appartiene all'asse), con l'utilizzo delle 2''') si ha:

7) $k = (d-1)/b = c/(a-1) = q/p$

Per quanto riguarda il terzo punto r=P'Q/PQ e per la similitudine applicata ai due triangoli rettangoli di ipotenuse P'Q e PQ e cateti le rispettive proiezioni sugli assi x ed y, si ha:

8) $r = P'Q/PQ = (y' - y_Q)/(y - y_Q) = (x' - x_Q)/(x - x_Q)$

cioè:

8') $x' - x_Q = r(x - x_Q)$; 8'') $y' - y_Q = r(y - y_Q)$

Affinchè i punti Q,P e P' siano allineati occorre che si verifichino le condizioni:

$$(y' - y_Q)/(x' - x_Q) = k = (y - y_Q)/(x - x_Q)$$

ovvero:

9') $y' - y_Q = k(x' - x_Q)$ 9") $y - y_Q = k(x - x_Q)$

Dalla formula 8') segue, per la 5'):

$$(1-mb)x+by-bh-x_Q=r(x-x_Q)$$

cioè:

$$(x-x_Q)-b(mx-y+h)=r(x-x_Q)$$

$$10)\quad mx- y+ h =(1-r)(x -x_Q)/b$$

Dalle formule 8") e 5''), e per la: $y_Q=mx_Q+h$ si ha:

$$m(1-d)x +dy +h(1-d)-mx_Q-h =r(y -y_Q)$$

e, svolgendo:

$$m(x-x_Q)+d(-mx+y-h)=r(y-mx_Q+h)$$

da cui ottengo:

$$11)\quad mx-y+h=[m(x-x_Q)-r(y-y_Q)]/d$$

Per confronto tra le 10) e 11) si ottiene:

$$d(1-r)(x -x_Q)/b= m(x -x_Q)-r(y-y_Q)$$

e dividendo per $x -x_Q$ mediante la 9") si ottiene:

$$12)\quad d(1-r)/b= m- rk.$$

<u>Problema diretto</u>: noti m, h, k, r determinare a, b, c, d, p, q.
Dalla formula 7) si ottiene:

$$13)\quad b=(d-1)/k$$

e sostituendo nella 12) si determina d:

$$14)\quad d=(rk -m)/(k -m)$$

Noto d si calcola b mediante la 13) e quindi a, b, c, p, q tramite le 4): il problema diretto è risolto.

<u>Problema inverso</u>: nota l'affinità di partenza(cioè noti i coefficienti a, b, c, d, p, q), stabilire se le equazioni rappresentative possono essere le equazioni di un ' a. o. g., e quindi in caso affermativo procedere alla determinazione di m, h, k, r.
Affinché la trasformazione sia un ' a. o. g. deve risultare:

$$15)\quad (a-1)/c=b(d-1)=p/q$$

e quindi :

$$16)\quad m=(1-a)/b=c/(1-d) \qquad 16')\quad h=-p/b=q/(1-d)$$

$$16'')\quad k=(d-1)/b= c/(a-1)=q/p$$

cioè m,h e k sono calcolati.
Dalla 12) si determina r:

$$r=(bm-d)/(bk-d).$$

E' stato determinato r, quindi il problema inverso si considera risolto.

Studio delle a.o.g. con asse di equazione x=n. Se m tende ad infinito, cioè 1/m tende a zero, allora per le formule *) e **) si ha : b=0, d=1 con a<>1 e c<>0
e quindi per la 7)

$$17)\quad k =c/(a-1)=q/p$$

escludendo la possibilità di esprimere k in funzione di d e b, data l'espressione indeterminata a cui si perverrebbe: tale formula può essere determinata inoltre con un procedimento analogo al caso generale che tra poco sarà proposto in questi appunti.
Adesso si procederà alla determinazione di alcune condizioni tra i coefficienti a, c, p, q in modo tale che determinando i punti uniti dell'affinità di equazioni 1') ed 1''), si ottenga la retta(asse) di equazione : x=n.
Imponendo in tali equazioni x'=x ed y'=y, si ottiene:

$$x= p/(1-a)=-q/c$$

e confrontando con l'equazione dell'asse(x=n) :

$$p/(1-a)=-q/c=n$$

Da cui le equazioni dell' a.o.g. in questione diventano:

$$18')\quad x'=ax+n(1-a)\ ; \qquad 18'')\quad y'=cx+y-nc$$

Per quanto riguarda la determinazione di k si è visto che è valida la 17) a cui si può pervenire mediante il seguente procedimento dedotto dal caso generale: si scrive l'equazione della retta passante per i punti P(x ,y) e P'(x', y')

$$y' -y= k(x' - x)$$

ed utilizzando le 18') e 18'') si ottiene:

$$c(x - n)=k(a - 1)(x - n)$$

e dividendo m.a.m. per x- n<>0,seguono direttamente le 17).

Per quanto riguarda la determinazione di r si considerano le formule 8') e 18') , con $x_Q=n$, da cui segue:

$$ax+n(1-a)-n=r(x-n)$$

cioè:

$$a(x - n)=r(x - n)$$

e, dividendo m.a.m. per $x-n<>0$, si ottiene:

$$19) \qquad r=a$$

Allo stesso risultato si può pervenire utilizzando la 8”) e la 18”) con $x_Q = n$ ed y_Q generico, da cui:

$$c(x-n)+y-y_Q=r(y-y_Q)$$

e utilizzando la 9”) e dividendo m.a.m. per $x-n<>0$, segue:

$$c+k=rk$$

cioè:

$$19') \quad r=c/k+1$$

e per le 17) e 19’) si ha ovviamente la 19).

<u>Problema diretto</u>: noti l’asse di equazione $x =n$, la direzione privilegiata di coefficiente angolare k ed il rapporto di omologia r, determinare le equazioni dell’a.o.g.

Si sa che $b=0$, $d=1$ e $a= r$, pertanto le 1) diventano:

$$20') \quad x'= r x +p \qquad\qquad 20'') \quad y'= cx + y +q$$

e quindi, imponendo che l’asse sia di equazione $x=n$, si ottiene:

$$p/(1-r)=n=-q/c$$

cioè:

$$p=n(1-r) \qquad q=-nc$$

Per determinare c si può utilizzare la 17) con $a=r$, da cui

$$q= kn(1-r) \qquad c= -q/n =k(r-1)$$

e per concludere:

$$x'=rx+n(1-r) \qquad\qquad y'=k(r-1)x+y+kn(1-r)$$

<u>Problema inverso</u>: date le equazioni di un’a.o.g. determinare $x=h$, la direzione privilegiata di coefficiente angolare k, ed il rapporto di omologia r.
Per avere la trasformazione richiesta la retta di equazione $x=n$ come asse, deve risultare $b=0$, $d=1$, cioè l’a.o.g. deve avere equazioni del tipo:

$x'=ax+p \qquad\qquad y'=cx+y+q$

con: $p/(1-a)=-q/c$
Se x=0 allora deve risultare: $p=q=0$
Si ha subito: $r=a$ ed inoltre: $k=c/(a-1)$
Per concludere, si può calcolare n mediante le formule: $n= p/(1-a)=-q/c$
Il problema in questione è risolto.
<u>Caso dell' a.o.g. le cui equazioni rappresentative posseggono termini noti nulli. (p=q=0).</u>
Si ricorda che per risultare m finito deve essere b<>0 e d<>1; allora per le **) se p=q=0 segue h=0 e l'asse assume un'equazione del tipo: y= mx , con m espresso dalla formula *) .
Il coefficiente k si determina mediante la formula: $k=(d-1)/b =c/(a-1)$ a cui si perviene rifacendo tutto il procedimento già visto con p=q=0.
Per quanto riguarda il coefficiente r, effettuando il procedimento già visto con p=q=0 si perviene alla medesima formula 12). I problemi diretto ed inverso sono analoghi a quelli riportati alle pagg. 4 e 5 ma con p, q ed h nulli.

3) <u>Studio di un' affinità omologica generale (senza termini noti) effettuato con il metodo degli autovalori e degli autovettori</u>.

Sia data un'affinità di equazioni:

22') $x'= ax+ by$ 22") $y'= cx + dy$

Ponendo:

$$v'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \; ; \quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; ; \quad v=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \; .$$

Le 22) notoriamente equivalgono alla formula vettoriale:

$$23) \quad v'= Av \; .$$

Si pone adesso il problema di determinare quello scalare t tale che i due vettori v e v' Risultino in linea, cioè tale che: v'= tv , e quindi per la 23) deve risultare:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

E sotto forma scalare l'ultima formula diviene:

$$24') \ (a-t)x+by=0 \quad ; \quad 24'') \ cx+(d-t)y=0$$

Questo sistema ammette soluzioni diverse dalla banale se e solo se:

$$25) \quad \begin{vmatrix} a - t & b \\ c & d - t \end{vmatrix} = 0$$

Da cui l’equazione di secondo grado in t:

$$26) \quad t^2 - (a + d)t + ad - bc = 0$$

I valori di t (t_1e t_2) che verificano la 25), ovvero la 26), si denominano notoriamente gli autovalori della matrice A, e rappresentano da un punto di vista geometrico due coefficienti di stiramento tali da mutare il vettore v nel vettore v’ avente la stessa direzione del primo.
Notare che il verificarsi della 25) equivale alla condizione:

$$(a - t)/c = b/(d - t)$$

cioè le equazioni 24’) e 24”) sono le medesime, a meno di un coefficiente di proporzionalità, rappresentando la stessa retta. I vettori v di componenti x ed y, tali che :

$$Av=tv$$

cioè tali da verificare le 24’) e le 24”) si denominano notoriamente autovettori associati agli autovalori t_1 e $t_2$della matrice A: quindi l’autovettore v associato al- l’autovalore t_1 della matrice A è quel vettore v tale che

$$27') \quad (a-t_1)x+by=0 \quad ; \quad 27'') \quad cx+(d-t_1)y=0$$

Il valore t_1 determina quindi una retta la cui direzione non è altro che il coefficiente angolare di una delle 27’) e 27”); tale direzione si denomina direzione privilegiata relativa al coefficiente di stiramento t_1(ovvero autovalore t_1).
Le 27’) e 27”) equivalgono alle:

$$28') \quad y = \frac{t_1 - a}{b} x \quad ; \qquad 28'') \quad y = \frac{c}{t_1 - d} x \quad ;$$

Indicando con m_1 il coefficiente angolare di una delle due rette, si può scrivere:

$$28''') \qquad m_1=(t_1-a)/b=c/(t_1-b)$$

ed esso risulta pure il coefficiente angolare della retta associata al coefficiente di stiramento t_1 .
Analogamente, per $t=t_2$:

$$29') \quad (a-t_2)x+by=0 \quad ; \quad 29'') \quad cx+(d-t_2)y=0$$

che rappresentano la medesima retta, da cui

$$29') \quad y=\frac{t_2-a}{b}x \quad ; \quad 29'') \quad y=\frac{c}{d-t_2}x \quad ;$$

e $29''')$ $m_2=(t_2-a)/b=c/(t_2-d)$ è il coefficiente angolare della retta associata al coefficiente di stiramento t_2 , ovvero m_2 è il coefficiente angolare relativo alla seconda direzione privilegiata dell'affinità.

Ricordando che nell'a.o.g. è previsto
1) un'asse di equazione $y= mx$, ed inoltre essendo l'asse il luogo dei punti uniti, il coefficiente di stiramento relativo è uguale ad 1
2) una direzione privilegiata di coefficiente angolare k
3) un rapporto di omologia $r(<>1)$ che costituisce il coefficiente di stiramento relativo alla direzione privilegiata di coefficiente angolare k,

nel caso in esame si ha:

$$30) \quad m_1=m \qquad t_1=1 \qquad m_2=k \qquad t_2=r \ .$$

Quindi , imponendo nell'equazione 26) che gli autovalori siano $t_1=1$ e $t_2=r$, segue per le regole di Cartesio relative all'equazioni di secondo grado:

$$30') \quad 1+r=a+d \qquad 30'') \quad r= ad-bc$$

cioè $r=a+d-1$

$$31') \quad r-a=d-1 \qquad 31'') \quad r-d=a-1$$

ed inoltre, per $t_1=1$ la formule 28''') divengono:

$$m=(1-a)/b=c/(1-d)$$

e sostituendo nella 29''') ad m_2 k ed a t_2 r si ottiene:

$$k= (r-a)/b= c/(r-d)$$

e dalle 31) segue:

$$32)\quad k= (d-1)/b= c/(a-1).$$

Tutte queste formule sono già state determinate in precedenza nel caso p=0 e q=0 (a.o.g. senza termini noti).
Il metodo degli autovalori e degli autovettori associati, seppur molto elegante, non è applicabile al caso generale di un’a.o.g. le cui equazioni presentano termini noti(p e q); in quest’ultimo caso, comunque, in alternativa al metodo basato su considerazioni di carattere analitico riportato al paragrafo n.2 ,si può procedere in una prima fase applicando il metodo degli autovalori e degli autovettori come se fosse p=0 e q=0, e successivamente considerando che la 25) equivale ad affermare che le due equazioni 24’) e 24”) sono rappresentative della medesima retta(asse dell’a.o.g.), anche con p,q<>0 tale due rette debbono coincidere, da cui si deduce che nel caso generale debbono valere le relazioni:

$$p/q= (a-1)/c= b/(d-1)$$

già incontrate in precedenza, e quindi seguono tutte le formule già incontrate nel paragrafo n.2.
Se k=-1/m la direzione privilegiata è perpendicolare all’asse e la trasformazione in esame si denomina affinità omologica generale ortogonale.
<u>Caso in cui l’asse è verticale(m tende ad infinito):</u> si è visto che, se p, q sono diversi da zero allora l’asse verticale può avere equazione x=n con n<>0, altrimenti se p=q=0 l’equazione dell’asse è x=0. In questo caso 1/m tende a zero, da cui

$$b/(1-a)=(1-d)/c=0 \quad ,$$

cioè b=0, d=1, con a<>1, c<>0.
Per la 32) nel caso in questione vale la:

$$33)\quad k=c/(a-1) .$$

Per le 31) segue 1+r=a+1 cioè r=a; si perviene allo stesso risultato considerando la 30”) con b=0 e d=1, difatti r=a-0=a

4) Generalità sulle affinità omologiche speciali.

Un’affinità omologica speciale(da ora in poi si riporterà in forma abbreviata con a.o.s.) è caratterizzata dalla coincidenza tra la direzione dell’asse e la direzione privilegiata che identifica un fascio di rette parallele su una delle quali è posizionata una coppia di punti P(x,y) e P’(x’,y’) che si corrispondono nell’a.o.s..

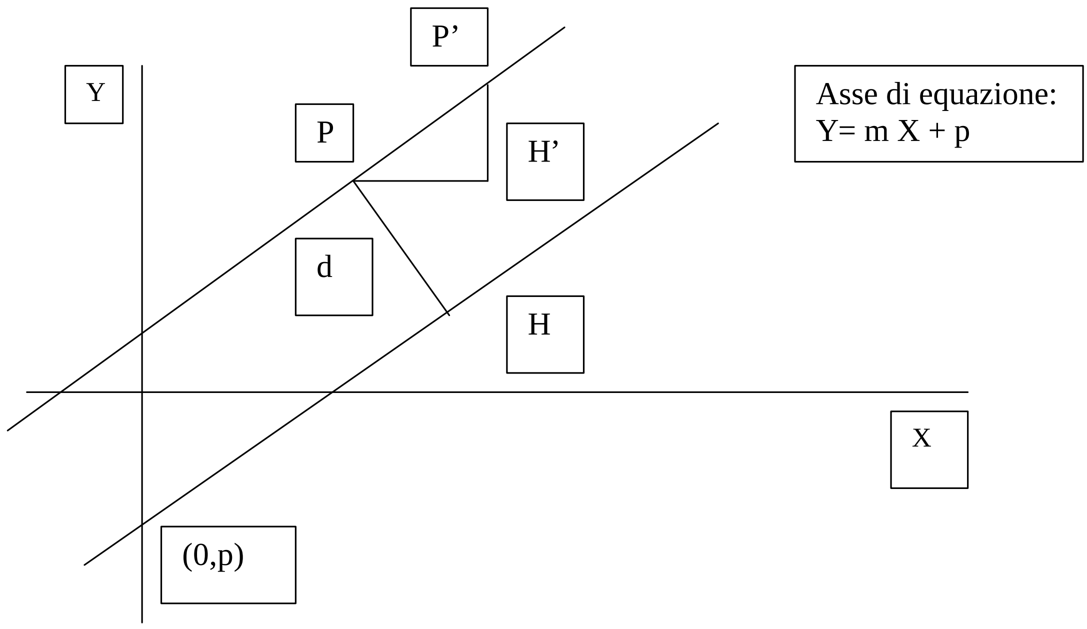

Fig. n. 2

Posto d=PH con H il piede di perpendicolare condotta dal punto P all’asse, e k il coefficiente caratterizzante l’a.o.s., la scelta del punto P’ corrispondente a P è basata sulla condizione: PP’=kd, con P’ situato sulla parallela all’asse passante per P. L’equazione dell’asse è:

$$34)\qquad Y = mX + p$$

con

$$m = \mathrm{tg}\,a \qquad \text{essendo} \qquad a = P'\hat{P}H'$$

La distanza tra la retta PP’ e l’asse vale:

$$35)\quad d = \frac{|mx - y + p|}{\sqrt{m^2 + 1}}\ .$$

Tale distanza potrà risultare positiva o negativa concordemente con la convenzione relativa alla a.o.s. il cui asse è coincidente con l’asse delle x, riportata in figura n. 3 (vedere FORMAT VOL.I), di equazioni:

$$36')\quad X' = X + kY \qquad ; \qquad 36'')\quad Y' = Y$$

Dalle formule 36) si evince che i due punti P(X,Y) ed il corrispondente P’(X’,Y’) posseggono la medesima ordinata e che, se P è situato nel primo o nel secondo quadrante(Y>0), P’ possiede ascissa maggiore di quella di P se k>0, P’ possiede ascissa minore se k<0, mentre se P è situato nel terzo o quarto quadrante (Y<0) il punto P’ possiede ascissa maggiore di quella di P se k<0, viceversa se k>0; tutto ciò è rappresentato in fig.n.3. Se si rototrasla tale figura si ottiene una configurazione generale del tipo rappresentato in fig. n.2, dove quindi si tiene conto delle posizioni

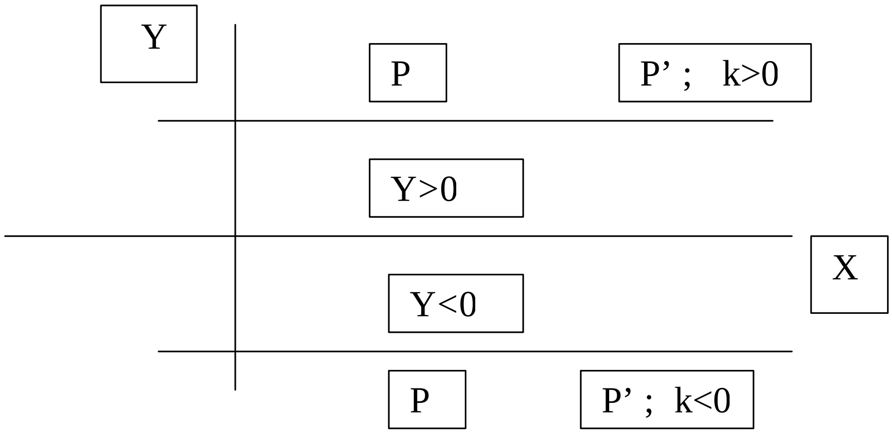

Fig.n.3

di P’ rispetto a P conseguentemente al segno di k e di d. E’ importante notare che <u>d</u> rappresenta l’ordinata del punto P rototraslata e non la distanza del punto P dall’asse X ,quindi la d che compare nella formula 35) non indica la distanza del punto P dall’asse, ma viceversa; la conseguenza di ciò è che, se si vuole orientare tale distanza d non si può utilizzare la nota convenzione della normale, bensì si tiene conto della ordinata rototraslata. Inoltre in questi appunti si intende che il punto P è superiore all’asse quando l’ordinata di P è maggiore dell’ordinata del punto dell’asse avente la medesima ascissa di P, e viceversa.
Per quanto riguarda d si deve poter scrivere per ogni caso (ve ne sono otto) la 35) senza valore assoluto e con un proprio segno + o – anteposto a secondo il segno di d e se il punto P è situato sopra o sotto l’asse; il metodo consiste nel condurre per P la retta PP’ parallela all’asse di equazione:

$$Y-y=m(X-x)$$

e confrontare l’ordinata del punto di intersezione di tale retta PP’ con l’asse y , che è ovviamente $Y=-mx+y$, con p che rappresenta l’ordinata all’origine dell’asse. In base al fatto che il punto P sia situato al di sopra o al di sotto dell’asse risulterà rispettivamente $-mx+y>p$ ovvero $-mx+y<p$, cioè $mx-y+p>0$ ovvero $mx-y+p<0$; considerato il segno di d relativo al caso in questione si può determinare il segno da attribuire alla formula 35) . Indicati quindi con:

α l'angolo formato tra l'asse a orientato e l'asse x orientato,
α' l'angolo acuto formato tra l'asse a e l'asse delle x,

si può passare ad esaminare i seguenti otto casi:

1) P superiore all'asse, $0<\alpha<\pi/2$, $d>0$

Essendo in questo caso $mx-y+p<0$, si ha

$$d=-\frac{mx-y+p}{\sqrt{m^2+1}}$$

$m = \text{tg}\, a > 0$, $\text{sen}\, a > 0$, $\cos a > 0$ cioè

$$\text{sen}\, a = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \quad , \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \quad ,$$

$$x' = x + kd \cos a \quad , \quad y' = y + kd\, \text{sen}\, a \ .$$

In ogni caso occorre esprimere x' ed y' in funzione di a.

2) P inferiore all'asse, $0 < a < p/2$, $d < 0$.

Essendo $mx - y + p > 0$ si ha $d = -\dfrac{mx - y + p}{\sqrt{m^2+1}}$

$m = \text{tg}\, a > 0$, $\text{sen}\, a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}} > 0$, $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}} > 0$,

$x' = x + kd \cos a$, $y' = y + kd\, \text{sen}\, a$.

3) P superiore all'asse, $p/2 < a < p$, $d < 0$, $mx - y + p < 0$, cioè

$d = \dfrac{mx - y + p}{\sqrt{m^2+1}}$. Inoltre $m = \text{tg}\, a < 0$, $\text{sen}\, a > 0$, $\cos a < 0$,

$$\text{sen}\, a = -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \quad , \quad \cos a = -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \quad , \quad a' = p - a$$

$$\cos a' = -\cos a \quad , \quad \text{sen}\, a' = \text{sen}\, a$$

$x' = x - kd \cos a' = x + kd \cos a$, $y' = y + kd\, \text{sen}\, a' = y + kd\, \text{sen}\, a$

4) P inferiore all'asse, $p/2 < a < p$, $d > 0$, $mx - y + p > 0$ quindi :

$d = \dfrac{mx - y + p}{\sqrt{m^2+1}}$, $a' = p - a$, $\cos a' = -\cos a$, $\text{sen}\, a' = \text{sen}\, a$

$m = \text{tg}\, a < 0$, $\text{sen}\, a > 0$, $\cos a < 0$, cioè $\text{sen}\, a = -\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\cos a = -\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$,

$x' = x - kd \cos a' = x + kd \cos a$; $y' = y + kd\, \text{sen}\, a' = y + kd\, \text{sen}\, a$

5) P superiore all'asse , $p < a < \dfrac{3}{2}p$, $a' + p = a$, $d < 0$, $-mx + y > p$,

$d = \dfrac{mx - y + p}{\sqrt{m^2+1}}$, $m = \text{tg}\, a > 0$, $\text{sen}\, a < 0$, $\cos a < 0$, $\text{sen}\, a = -\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\cos a = -\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$,

$\cos a = -\cos a'$, $\text{sen}\, a = -\text{sen}\, a'$, $x' = x - kd \cos a' = x + kd \cos a$,

$$y' = y - kd\, \text{sen}\, a' = y + kd\, \text{sen}\, a$$

6) P inferiore all'asse, $p < a < \frac{3}{2}p$, $a = a'+p$, $\mathrm{d} > 0$, $\mathrm{d} = \frac{\mathrm{mx - y + p}}{\sqrt{\mathrm{m}^2 + 1}}$, $\mathrm{m = tg}\, a > 0$,

$\mathrm{sen}\, a < 0$, $\cos a < 0$, $\mathrm{sen}\, a = -\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$, $\cos a = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$, $\cos a = -\cos a'$, $\mathrm{sen}\, a = -\mathrm{sen} a'$,

$\mathrm{x' = x - kd} \cos a' = \mathrm{x + kd} \cos a$, $\mathrm{y' = y - kd\, sen}\, a' = \mathrm{y + kd\, sen}\, a$,

7) P superiore all'asse , $\frac{3}{2}p < a < 2p$, $\mathrm{d} > 0$, $\mathrm{d} = -\frac{\mathrm{mx - y + p}}{\sqrt{\mathrm{m}^2 + 1}}$, $a' = 2p - a$,

$\mathrm{m = tg}\, a < 0$, $\mathrm{sen}\, a < 0$, $\cos a > 0$, $\mathrm{sen}\, a = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$, $\cos a = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$,

$\cos a = \cos a'$, $\mathrm{sen}\, a = -\mathrm{sen}\, a'$, $\mathrm{x' = x + kd} \cos a' = \mathrm{x + kd} \cos a$,

$\mathrm{y' = y - kd\, sen}\, a' = \mathrm{y + kd\, sen}\, a$,

8) P inferiore all'asse, $\frac{3}{2}p < a < 2p$, $\mathrm{d} < 0$, $\mathrm{d} = -\frac{\mathrm{mx - y + p}}{\sqrt{\mathrm{m}^2 + 1}}$, $\mathrm{m = tg}\, a < 0$, $\mathrm{sen}\, a < 0$,

$\cos a > 0$, $a' = 2p - a$, $\cos a' = \cos a$, $\mathrm{sen}\, a' = -\mathrm{sen}\, a$, $\mathrm{sen}\, a = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$, $\cos a = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}^2+1}}$,

$\mathrm{x' = x + kd} \cos a' = \mathrm{x + kd} \cos a$, $\mathrm{y' = y - kd\, sen} a' = \mathrm{y + kd\, sen}\, a$.

5) Equazioni delle affinità omologiche speciali.

Dal paragrafo precedente si ottengono, per i vari otto casi esaminati, le medesime equazioni di x’ ed y’ in funzione di x ed y , che sono le seguenti:

$$\mathrm{x'} = (1 - \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}^2+1})\mathrm{x} + \frac{\mathrm{ky}}{\mathrm{m}^2+1} - \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^2+1} \quad , \qquad \mathrm{y'} = -\frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{m}^2+1}\mathrm{x} + (1 + \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}^2+1})\mathrm{y} - \frac{\mathrm{kmp}}{\mathrm{m}^2+1}$$

e che pertanto rappresentano le equazioni dell’a.o.s. avente come asse la retta di equazione Y=mX+p e di rapporto k.
Problema diretto: dato l’asse di equazione Y=mX+p ed il rapporto k, determinare i coefficienti a,b,c,d,r,s dell’a.o.s. di equazioni:

37') $\mathrm{x' = ax + by + r}$, 37") $\mathrm{y' = cx + dy + s}$ per cui : 38) $\mathrm{a} = 1 - \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}^2+1}$,

39) $\mathrm{b} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}^2+1}$, 40) $\mathrm{c} = -\frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{m}^2+1}$, 41) $\mathrm{d} = 1 + \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}^2+1}$,

42) $\mathrm{r} = -\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^2+1}$, 43) $\mathrm{s} = -\frac{\mathrm{kmp}}{\mathrm{m}^2+1}$,

Problema inverso: noti a,b,c,d,r,s determinare m,p(cioè l'asse) e k.
Noto b, per le 39) e 40) si ottengono:

44) $c = -bm^2$, 45) $a = 1 - bm$ da cui m: $m = \frac{1-a}{b}$. Noto m, si ha: $k = b(m^2+1)$.

Noti m e k, dalla 42) e dalla 43) si ottiene: $p = -\frac{r(m^2+1)}{k} = -\frac{s(m^2+1)}{k}$

Dalla 44) si evince, ovviamente , che c e b sono discordi.

6) Conclusioni.

Prima di procedere oltre è il caso di accennare al significato di alcuni termini che si collegano agli argomenti di questi appunti: omografia ed omologia. Un'omografia è una trasformazione proiettiva tra due piani che fa corrispondere in modo biunivoco ad un punto P di un piano un punto P' dell'altro piano. Un'affinità si definisce come una omografia tra piani in cui a punti impropri in un piano corrispondono punti impropri nell'altro. Un'omologia è un'omografia tra piani sovrapposti dotata di una retta fissa denominata asse(luogo di punti uniti) e di un punto unito denominato centro : se tale centro non appartiene all'asse l'omologia si definisce generale, se il centro appartiene all'asse si è in presenza di un'omologia speciale. Se in un'omologia generale il centro è un punto all'infinito del piano(o punto improprio) allora la trasformazione si denomina affinità omologica generale, se in un'omologia speciale il centro è il punto all'infinito dell'asse (dovendo in questo caso il centro appartenere all'asse) allora la trasformazione si denomina affinità omologica speciale(vedere bibl.[2]). Questi concetti, se pur noti ad un qualunque studente universitario delle facoltà di matematica o fisica od ingegneria che abbia sostenuto l'esame di geometria I, non possono essere compresi in modo approfondito da studenti del terzo anno della scuola secondaria superiore, anche liceo scientifico o tecnico industriale, dato che tali argomenti presuppongono la conoscenza e l'uso disinvolto delle coordinate omogenee , soprattutto per quel che riguarda lo studio delle equazioni delle omografie e delle omologie; invece le equazioni delle affinità di qualunque tipo, anche omologiche generali e speciali, si possono determinare con le coordinate non omogenee, e questo tipo di studio analitico è possibile per uno studente del terzo anno della scuola superiore.
In questi appunti si è affrontato il problema della determinazione delle equazioni di generiche affinità omologiche generali e speciali (a.o.g. e s.) prendendo spunto dal contenuto dell'unità n. 23 di [1](vedere bibl.) e studiando in modo più approfondito tali argomenti. Nell'ambito delle trasformazioni geometriche le a.o.g. e s. di solito non sono considerati, relativamente ai consueti programmi della scuola media superiore, alla stessa stregua delle più comuni isometrie e similitudini, ma i Proff. Mara-

schini e Palma hanno scelto di inserire tali argomenti nel programma del terzo anno del liceo scientifico tecnologico e sperimentale presumibilmente dato che esse interagiscono strettamente con le affinità secondo un teorema in base al quale componendo un'affinità omologica con una similitudine si ottiene un'affinità, e viceversa.
Inoltre si deve notare che le affinità omologiche, più di una volta hanno costituito argomento di un tema della prova scritta proposta sia nel liceo scientifico tradizionale che in quelli tecnologici e sperimentali. E' interessante rilevare lo stretto collegamento che esiste tra calcolo matriciale e trasformazioni geometriche lineari, così come è avvenuto nello sviluppo storico e parimenti evidenziato nel testo dei Proff. Maraschini e Palma.
Comunque spesso capita di avere delle classi il cui livello medio culturale è piuttosto basso a causa di lacune pregresse non colmate in diversi degli alunni che le compongono, oppure a causa di carenze collettive dovute a fenomeni di assenteismo di intere classi che hanno inciso sensibilmente sulla normale attività didattica, per cui in questi casi risulta impossibile rispettare la programmazione iniziale, e così, imponendosi l'esigenza di alleggerire i programmi, si possono eliminare tra i primi proprio gli argomenti che sono l'oggetto principale di questi appunti (cioè le affinità omologiche) data l'importanza secondaria che essi hanno rispetto ad altri più fondamentali.
E' opportuno svolgere sempre diversi esercizi sugli argomenti teorici trattati al fine di far comprendere ed assimilare in modo più completo agli alunni la teoria utilizzando in questa fase metodi induttivi; inoltre l'esercizio ha la funzione di far comprendere loro a cosa serve la teoria e come la si applica abituandoli al ragionamento, facendo attenzione nel proporre esercizi di difficoltà via via crescente e non affrontare direttamente esercizi difficoltosi, in modo tale che gli alunni non si scoraggino . In particolare, per quanto riguarda l'a.o.s. è bene mostrare nel dettaglio le otto configurazioni geometriche relative agli otto casi del par. n. 4. dato che a proposito dell'a.o.s. la difficoltà maggiore riguarda tutte le convenzioni da rispettare tenendo contemporaneamente conto di k, di d , dell'orientamento dell'asse e della posizione del punto P rispetto all'asse. Può essere interessante portare gli alunni in laboratorio di informatica per far utilizzare loro a fini esercitativi sugli argomenti degli appunti ,il programma CABRI' od anche il foglio elettronico.

7) Modulo sulle trasformazioni geometriche lineari piane (con elementi di calcolo matriciale e vettoriale).

Per lo svolgimento di questo modulo sono previsti, come prerequisiti: elementi di geometria analitica piana(coordinate cartesiane ortogonali, equazione di una retta e suo coefficiente angolare) ed elementi di goniometria(funzioni goniometriche fondamentali e loro inverse, angoli complementari, supplementari, angoli opposti e formule parametriche in particolare per le simmetrie assiali).Le unità didattiche costituenti il modulo sono le seguenti:

1) U.d.n 1: introduzione alle trasformazioni geometriche lineari piane le cui equazioni sono scritte in coordinate non omogenee(affinità), inversa di una trasformazione data, rappresentazione matriciale ed inversa di una matrice del secondo ordine: tempo due ore.
2) U.d. n.2: determinazione dell'equazione della curva C' corrispondente ad una curva iniziale C in un'affinità assegnata, e viceversa determinazione dell' equazione della curva C nota l'affinità e l'equazione della curva C': tempo due ore
3) U.d. n.3: elementi di calcolo vettoriale piano con operazioni di addizione, sottrazione , prodotto di scalare per vettore e composizioni di vettori in un sistema di coordinate cartesiane piane, traslazioni ed omotetie : tempo tre ore.
4) U.d. n.4: elementi uniti in un'affinità(punti uniti e rette unite): tempo due ore
5) U.d. n.5: calcolo matriciale elementare (vettori colonna e vettori riga, addizione e sottrazione di matrici, prodotto di scalare per matrice, prodotti di matrici): tempo due ore
6) U.d. n.6: composizioni di trasformazioni geometriche piane lineari: tempo due ore
7) U.d. n.7: direzioni invarianti di un'affinità col metodo degli autovalori ed autovettori di una matrice quadrata di ordine due: tempo due ore.
8) U.d. n.8: le isometrie(rotazioni e simmetrie assiali): tempo sei ore
9) U.d. n.9: le similitudini: tempo sei ore
10) U.d. n. 10: le affinità omologiche generali e speciali: tempo quattro ore
11) U.d. n. 11: cenni sulle trasformazioni proiettive: tempo due ore
12) U.d. n. 12: gruppi di trasformazioni: tempo due ore.

Il tempo complessivo per lo svolgimento di tale modulo per come è stato programmato dallo scrivente è di circa trentacinque ore, e considerando che l'ammontare di ore annue dedicate alla matematica in un terzo liceo scientifico è di circa centoventi ore (quattro a settimana) e che tale modulo costituisce circa la quarta parte del programma complessivo(oltre alle disequazioni algebriche, elementi di geometria analitica e trigonometria), i tempi proposti sono accettabili; essi non si debbono considerare ovviamente in modo rigoroso, in quanto laddove il docente si accorge che gli alunni non hanno assimilato bene alcuni argomenti , sarà sua premura approfondirli con ulteriori chiarimenti ed esercizi.
Se inoltre, come purtroppo capita spesso ai giorni d'oggi, dovesse saltare qualche lezione, sarà cura del docente o sintetizzare alcuni argomenti od anche saltarne completamente alcuni se non sono di importanza fondamentale ai fini dello svolgimento delle successive parti del programma.

8) Note storiche.

In questi appunti si è affrontato il problema delle a.o.g. e delle a.o.s., con qualche collegamento con la teoria delle matrici e degli autovalori ed autovettori di una matrice; i Matematici che saranno chiamati in causa in questi riferimenti storici sono quindi quelli che si sono occupati di affinità e che hanno contribuito allo sviluppo della teoria delle matrici, tra i quali i più importanti sono: Felix Klein, Laplace, Cayley, Hamilton, Sylvester, Cauchy. Il primo grande genio della lista, Felix Klein(1849-1925), che era stato alunno di J.Plucker all' università di Bonn, pubblicò nel 1868 il suo trattato "Nuova Geometria", e nel 1872, quando divenne professore ad Erlangen, fece un discorso introduttivo noto sotto il nome di "programma di Erlangen" in cui Klein illustrò tutti i suoi concetti fondamentali per quel che riguarda la geometria.

Egli riesce a classificare quasi tutte le geometrie in base alle proprietà invarianti (delle figure geometriche) che caratterizzano un dato gruppo di trasformazioni: ad esempio al gruppo delle trasformazioni affini è associata la geometria affine, al gruppo delle isometrie è associata la geometria euclidea, al gruppo delle similitudini è associata la geometria elementare, al gruppo delle trasformazioni proiettive è associata la geometria proiettiva. Klein durante tutta la sua vita, diede grande importanza al concetto di gruppo intuendo il suo potere di sintetizzare ed unificare ampie teorie.

Per quanto riguarda l'algebra lineare è da rilevare che storicamente sono stati scoperti prima i determinanti (con Laplace) e poi le matrici, mentre il concetto di matrice precede quello di determinante, come appare evidente quando si affronta lo studio di tali argomenti. La teoria dei determinanti nacque originariamente come esigenza di risoluzione dei sistemi lineari di equazioni.

Gabriel Kramer(1704-1752) nel 1750 pubblicò la nota regola che porta il suo nome, utilizzata per la risoluzione di un sistema lineare con numero di equazioni uguale al numero delle incognite; già da allora fu introdotto il concetto di determinante, successivamente ripreso ed approfondito da Laplace (Beaumont eu Auge, 1749-Parigi 1827),che formulò i due fondamentali teoremi per il calcolo dei determinanti. Tale teoria era utilizzata anche per il cambiamento di riferimento di coordinate cartesiane, al fine di riportare l'equazione di una conica in forma canonica, od anche per lo studio delle forme quadratiche. Euler(Basilea 1707, Pietroburgo 1783) in particolare studiò la forma quadratica in tre variabili (equazione rappresentativa di una quadrica) e determinò quelli che in termini moderni si denominano gli autovalori associati alla forma quadratica di partenza, pervenendo così alla lunghezza degli assi della quadrica; il problema sarà comunque affrontato in modo completo da Cauchy, Cayley e Sylvester. Cauchy (Parigi 1789, Sceaux 1857) fu un grande matematico che diede forti impulsi allo studio dell'analisi matematica, e si occupò pure di determinanti gettando le basi di questa nuova teoria ; per Cauchy il determinante associato ad una forma quadratica è il suo discriminante e per primo introdusse la simbologia dei doppi pedici . Invece la simbologia delle barre verticali è stata introdotta nel 1841 da Cayley (Richmond 1821- Cambridge 1895), grande genio matematico che fra i primi introdusse il concetto di matrice. Cayley si occupò molto dello studio degli invarianti collegati ad una trasformazione lineare, e partendo da ciò trovò utile rappresentare i coefficienti di tali equazioni distribuiti secondo un certo ordine per righe e per colonne all'interno di un rettangolo, formando così una matrice rettangolare; in tal modo operando su tali matrici corrispondenti alle trasformazioni di partenza, operava sulle trasformazioni componendole tra di loro, determinandone la trasformazione inversa, e così via. Quindi storicamente il concetto di matrice è nato strettamente collegato alla problematica delle trasformazioni geometriche lineari, mentre si è introdotto il concetto di determinante per risolvere i sistemi lineari di equazioni; (in una fase successiva si è notato il forte collegamento tra matrice e determinante associato ad una matrice, se essa è quadrata, pervenendo così alla teoria moderna dell'algebra lineare). Sylvester(Londra, 1814- 1897) studiò molto i determinanti e le matrici, coniando per primo tale ultimo termine ; come Cayley si occupò molto degli invarianti delle trasformazioni lineari ed insieme giunsero alla formalizzazione degli autovalori associati ad una forma quadratica; questi due grandi matematici seguirono nel campo della ricerca dei percorsi paralleli ed entrambi contribuirono a gettare le basi per l'algebra lineare moderna, insieme ad una folta schiera di matematici tra i quali i più famosi sono: Jacob Jacobi(1804, 1851) ed Hamilton William Rowan (Dublino 1806, 1865), Charles Hermite(1822-1901), Georg Frobenius(1849-1917).,giungendo così alle conoscenze attuali riportate in un qualunque testo odierno.

Bibliografia.

1) Maraschini-Palma: Format, Spe. Vol I Edizione Paravia.
2) G.Dantoni-C.Mammana: Lezioni di geometria, Di Stefano editore-Genova
3) Morris Kleine: Storia del pensiero matematico,Vol II, biblioteca Einaudi.
4) C.B.Boyer: Storia della matematica, Oscar Mondadori.
5) U.Bottazzini: Il flauto di Hilbert, ediz. UTET