Polarità rispetto ad una conica e problema delle tangenti

(a cura di Santangelo Maurizio).

Ringraziamenti

Questi appunti non sarebbero stati pubblicati senza la partecipazione dell'ottimo Prof. Spagnolo Filippo del GRIMM di Palermo; essi sono stati controllati dal caro e validissimo Prof. Perez Emanuele con profonda e certosina attenzione. In ogni caso ovviamente l'autore si prende tutte le responsabilità per eventuali errori.

Indice

<u>Polarità rispetto ad una conica e problema delle tangenti.</u>
<u>di Santangelo Maurizio</u>

Introduzione.

In questi appunti l'autore si propone di studiare le proprietà della retta polare di un punto rispetto ad una conica reale a punti reali non degenere, utilizzando soltanto le coordinate cartesiane non omogenee; in queste pagine sono utilizzati argomenti e formule che si studiano in un triennio di scuola superiore. Nel caso di punto esterno P alla conica è possibile determinare le equazioni delle due rette tangenti ad essa condotte da P scrivendo l'equazione della retta polare di P rispetto alla conica e trovando le equazioni delle due rette che uniscono il punto P con ciascuno dei due punti di intersezione tra conica e retta polare. Appare evidente che in qualche pagina si perviene a calcoli laboriosi, e ciò induce a preferire sicuramente lo studio del problema affrontato con la geometria proiettiva che risulta più agevole ed elegante rispetto a quello utilizzato in questi appunti con le coordinate non omogenee. Sono presenti alcuni esempi numerici come applicazioni degli argomenti trattati.
A conclusione di queste poche pagine è riportata una raccolta epistemologica dei metodi più importanti utilizzati per la risoluzione del problema affrontato in questi appunti.

Polarità rispetto ad una conica e problema delle tangenti.
(di Santangelo Maurizio).

<u>1. Determinazione dell'equazione della retta tangente ad una conica reale non degenere in un suo punto.</u>

Assegnata in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale piano monometrico xOy una conica reale C non degenere di equazione:

$$1)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad \text{con} \quad a_{ij} = a_{ji} \ \ (i, j = 1,2,3), \text{ numeri reali}$$

$$\text{ed} \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

si voglia determinare inizialmente l'equazione della retta tangente alla conica C in un suo punto $P(x_o,y_o)$; pertanto per la 1) varrà:

$$2)\quad a_{11}x_o^2 + a_{22}y_o^2 + 2a_{12}x_oy_o + 2a_{13}x_o + 2a_{23}y_o + a_{33} = 0$$

L'equazione del fascio di rette passanti per il punto P è:

$$3)\qquad y - y_0 = m(x - x_0)$$

con m coefficiente angolare della retta generica del fascio.

Sottraendo la 2) dalla 1) si ottiene:

$$4)\quad a_{11}(x^2 - x_o{}^2) + a_{22}(y^2 - y_o{}^2) + 2a_{12}(xy - x_o y_o) + 2a_{13}(x - x_o) + 2a_{23}(y - y_o) = 0$$

ed utilizzando la 3) segue:

$$5)\quad a_{11}(x + x_o)(x - x_o) + a_{22}(y + y_o)m(x - x_o) + 2a_{12}(x(y_o + m(x - x_o)) - x_o y_o) + 2a_{13}(x - x_o) + \\ + 2a_{23}m(x - x_0) = 0$$

da cui segue:

$$6)\quad (x - x_0)[a_{11}(x + x_0) + a_{22}m(y + y_0) + 2a_{12}(y_0 + mx) + 2a_{13} + 2a_{23}m] = 0\ .$$

L'equazione 6) in cui x ed y rappresentano le coordinate dei punti di intersezione tra la retta generica del fascio di centro $P(x_o,y_o)$ appartenente alla conica C e la C stessa, ammette come soluzione $x=x_o$, ovviamente; affinché il valore di m che compare nella 6) rappresenti il coefficiente angolare m_t della retta tangente in P alla conica C assegnata, deve verificarsi che i due punti di intersezione tra retta e conica siano coincidenti, cioè nell'equazione ottenuta ponendo il fattore in parentesi quadra uguale a zero deve valere $x=x_o,y=y_o$, cioè:

$$7)\quad a_{11}x_o + a_{22}m_t y_o + a_{12}y_0 + a_{12}m_t x_0 + a_{13} + a_{23}m_t = 0$$

da cui, isolando m_t si ottiene:

$$8)\quad m_t = -\frac{a_{11}x_o + a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}$$

Ugualmente alla formula 8) si può pervenire considerando il sistema tra le equazioni 1) e 3) e nell'equazione di secondo grado in x ottenuta si può imporre ovviamente che una soluzione sia $x=x_o$; si può pertanto abbassare di grado l'equazione dividendo il polinomio in x per $x\text{-}x_o$ ed imponendo nuovamente $x = x_o$ si ottiene la formula 8). Tale procedimento alternativo però è più lungo e laborioso del precedente.
Sostituendo la 8) nella 3) si ottiene l'equazione della retta tangente t) richiesta:

$$9)\quad (a_{11}x_o + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_o) + (a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23})(y - y_0) = 0\ .$$

La 9) può assumere diverse forme equivalenti: sviluppandola ed utilizzando la 2) si ottiene la formula

$$10)\quad (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

od anche:

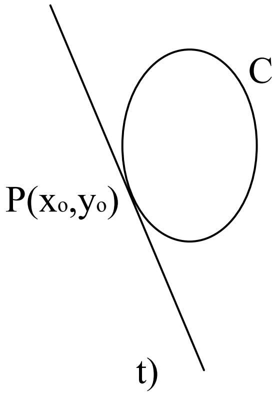
$$11)\quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_o + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

Ancora:

$$12)\qquad a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{12}(x_oy + y_ox) + a_{13}(x + x_o) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0\quad .$$

Quest'ultima è denominata formula dello sdoppiamento(in riferimento alla 1)) .

Fig.n.1



Avendo determinato l'equazione della retta t) tangente alla conica C assegnata nel punto $P(x_o,y_o,)$, che presenta una delle forme equivalenti 9),o 10) o 11) oppure 12),se in una di queste x_o ed y_o non rappresentano più le coordinate di un punto P appartenente alla conica C assegnata ma bensì un punto qualunque del piano contenente la conica, allora le suddette equazioni rappresentano una retta, denominata retta polare p del punto $P(x_o,y_o)$, denominato polo) rispetto alla conica C, che assume una ben determinata posizione geometrica con delle particolari proprietà che si vedranno in questi appunti.

2. Proprietà della retta polare p del punto P rispetto alla conica reale C .

Tale retta ha quindi equazione 9)(od una equivalente alla data, come visto precedentemente), e si supponga il punto $P(x_o,y_o)$ esterno alla conica reale non degenere C, cioè il punto è situato nel semipiano concavo determinato da C: ciò è valido sia per coniche chiuse (ellissi) che per coniche aperte (parabole ed iperboli). Mentre un qualunque punto appartenente al semipiano convesso è interno alla conica. Si studino i punti di intersezione tra la retta p polare di P esterno alla conica e la conica C stessa; i punti di intersezione sono due reali, $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ dato che alla retta corrisponde un'equazione di primo grado e alla conica un'equazione di secondo grado ed il sistema di secondo grado risolvente il problema ammette due soluzioni: pertanto il sistema

$$13)\quad \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})x + (a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23})y + a_{31}x_o + a_{32}y_o + a_{33} = 0 \end{cases}$$

ammetterà le soluzioni $x=x_1$, $y=y_1$, ed $x=x_2$, $y=y_2$, reali. Soffermandosi sul punto P_1 il sistema 13) diviene:

$$14)\quad \begin{cases} a_{11}x_1^{\ 2} + a_{22}y_1^{\ 2} + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0 \\ (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})x_1 + (a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23})y_1 + a_{31}x_o + a_{32}y_o + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e sottraendo membro a membro si ha:

$$a_{11}x_1(x_1 - x_o) + a_{22}y_1(y_1 - y_o) + a_{12}(2x_1y_1 - x_oy_1 - x_1y_o) + a_{13}(x_1 - x_o) + a_{23}(y_1 - y_o) = 0$$

cioè

$$a_{11}x_1(x_1 - x_o) + a_{22}y_1(y_1 - y_o) + a_{12}(y_1(x_1 - x_o) + x_1(y_1 - y_o)) + a_{13}(x_1 - x_o) + a_{23}(y_1 - y_o) = 0$$

da cui segue:

$$15)\quad (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})(x_1 - x_o) + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})(y_1 - y_o) = 0$$

La formula 15) rappresenta una relazione tra le coordinate x_o,y_o ed x_1,y_1, rispettivamente dei punti P e P_1 .Se nella 15) si sostituisce x_1 con x ed y_1 con y si ottiene l'equazione:

$$16)\quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})(x - x_o) + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})(y - y_o) = 0$$

(che si ottiene dalla 9) cambiandola di segno e scambiando x ed y con x_o ed y_o (vedere appendice 1). La 16) rappresenta una nuova forma dell'equazione della retta polare p del punto $P(x_o,y_o)$ rispetto alla conica C(vedere appendice 1).Più velocemente si può pervenire alla formula 15) scrivendo l'equazione della polare del punto P rispetto alla conica C ed imponendo che tale retta passi per il punto P_1. Adesso si consideri la retta passante per i punti P e P_1 e ci si chiede se tale retta è secante o tangente alla conica C. Pertanto si determini l'equazione della retta passante per i punti P e P_1 da comporre a sistema con l'equazione 1), da cui il sistema algebrico di secondo grado:

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_o} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_o} \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}$$

che si risolve isolando dalla prima equazione(lineare) una delle due incognite e sostituendo nella seconda equazione pervenendo ad una equazione di secondo grado; il procedimento anche se concettualmente semplice, implica calcoli molto lunghi e laboriosi. Si sa comunque che una eventuale soluzione deve essere : $x=x_1$, $y=y_1$. Se si otterranno due soluzioni reali e distinte, significa geometricamente che la retta PP_1 risulterà secante alla conica C, se si otterranno due soluzioni reali coincidenti significherà che la retta PP_1 risulta tangente alla conica C nel punto P_1. Non si possono trovare due soluzioni complesse coniugate perché P è esterno alla conica per ipotesi. Il sistema 17) può essere semplificato abbinando alla prima equazione dello stesso sistema scritta sotto la forma:

$$18) \qquad y - y_1 = (x - x_1)\frac{(y_1 - y_o)}{(x_1 - x_0)}$$

ed una seconda equazione differenza tra l'equazione della conica e la seguente:

$$19) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0$$

dato che il punto $P_1(x_1,y_1)$ appartiene alla conica C, ottenendo

$$20) \quad a_{11}(x^2 - x_1^2) + a_{22}(y^2 - y_1^2) + 2a_{12}(xy - x_1y_1) + 2a_{13}(x - x_1) + 2a_{23}(y - y_1) = 0$$

Utilizzando la 18), la 20) diventa:

$$20') \quad a_{11}(x - x_1)(x + x_1) + a_{22}(y + y_1)\frac{(x - x_1)(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o} + 2a_{12}(xy_1 + x\frac{(x - x_1)(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o} - x_1y_1) +$$
$$+ 2a_{13}(x - x_1) + 2a_{23}\frac{(x - x_1)(y_1 - y_o)}{(x_1 - x_o)} = 0$$

da cui segue il sistema di secondo grado:

$$21) \begin{cases} y - y_1 = \dfrac{(x - x_1)(y_1 - y_o)}{(x_1 - x_o)} \\ (x - x_1)(a_{11}(x + x_1) + a_{22}\dfrac{(y + y_1)(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o} + 2a_{12}(y_1 + \dfrac{x(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o}) + 2a_{13} + 2a_{23}\dfrac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}) = 0 \end{cases}$$

che ammette la soluzione: $x=x_1,y=y_1$. E' un risultato che si poteva prevedere, dato che il sistema 21) rappresenta l'intersezione tra la retta PP_1 e la conica C, essendo P_1 un punto appartenente alla conica. L'altra soluzione si ottiene risolvendo il sistema di primo grado :

$$22) \begin{cases} y - y_1 = \dfrac{(x - x_1)(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o} \\ a_{11}(x + x_1) + a_{22}\dfrac{(y + y_1)(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o} + 2a_{12}(y_1 + \dfrac{x(y_1 - y_o)}{x_1 - x_o}) + 2a_{13} + 2a_{23}\dfrac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = 0 \end{cases} .$$

Isolando la y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda equazione, si ottiene, dopo semplici passaggi:

$$
\begin{aligned}
23)\quad & a_{11}x(x_1 - x_o)^2 + a_{22}(y_1 - y_o)^2 x + 2a_{12}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)x = -a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 + \\
& - 2a_{13}(x_1 - x_o) - 2a_{22}y_1(y_1 - y_o)(x_1 - x_o) + a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + \\
& - 2a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 - 2a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) \quad .
\end{aligned}
$$

Dalla 15) si ottiene:

$$
24)\quad (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})(x_1 - x_o)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) = 0
$$

e la 23) diventa:

$$
\begin{aligned}
25)\quad & a_{11}(x_1 - x_o)^2 x + a_{22}x(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}x(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) = a_{21}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + \\
& - a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 - a_{13}(x_1 - x_o)^2 - a_{22}y_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 - a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)
\end{aligned}
$$

Tenendo conto che la 24) si può scrivere sotto la forma:

$$
\begin{aligned}
26)\quad & a_{21}x_1(y_1 - y_o)(x_1 - x_o) - a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 - a_{13}(x_1 - x_o)^2 - a_{22}y_1(y_1 - y_o)(x_1 - x_o) + \\
& - a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) = a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 + 2a_{12}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)x_1
\end{aligned}
$$

dalla 25) segue l'equazione in x:

$$
\begin{aligned}
27)\quad & a_{11}x(x_1 - x_o)^2 + a_{22}x(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}x(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) = \\
& a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 + a_{22}x_1(x_1 - x_o)^2 + 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)
\end{aligned}
$$

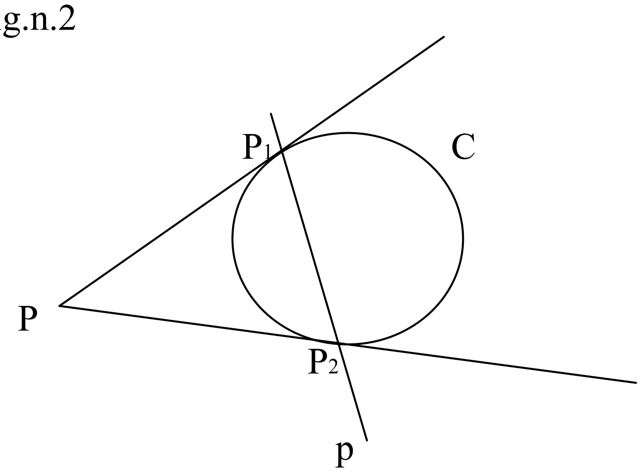
da cui $x=x_1$; pertanto il sistema di primo grado 22) ammette la soluzione $x=x_1$, $y=y_1$, ed il sistema di secondo grado 21) ammette la medesima soluzione coincidente contata due volte. Nell'appendice 2 è riportato un metodo alternativo per la risoluzione del sistema 17).

Osservazione - Al fine di risolvere il sistema di primo grado 22), si può procedere, alternativamente a quanto visto precedentemente, nel seguente modo molto più rapido, anche se meno diretto. Si risale al significato geometrico di tale sistema,(cioè il sistema 22) rappresenta le coordinate del secondo punto di intersezione tra la conica assegnata e la retta PP_1), e si nota che, se la soluzione è $x=x_1$, $y=y_1$, ciò significa che la retta PP_1 presenta due punti di intersezione coincidenti in P_1 con la conica , cioè la retta PP_1 è tangente alla conica C nel punto P_1, altrimenti tale retta è secante la conica e la soluzione del sistema 22) rappresenta le coordinate del secondo punto di intersezione distinto da P_1. Si noti che, se $x=x_1$,$y= y_1$ è la soluzione del sistema 22), la seconda equazione del suddetto sistema, dopo aver diviso per 2 ambo i membri e moltiplicato per x_1-x_o diverso da zero diventa:

$$28)\quad a_{11}x_1(x_1 - x_o) + a_{22}y_1(y_1 - y_o) + a_{12}[y_1(x_1 - x_o) + x_1(y_1 - y_o)] + a_{13}(x_1 - x_o) + a_{23}(y_1 - y_o) = 0$$

da cui la 15) che rappresenta la corretta formula che lega tra di loro x_o,y_o e,x_1,y_1, rispettivamente coordinate dei punti P e P_1. Pertanto si è verificato che la soluzione del sistema 22) è $x=x_1$, $y=y_1$, cioè la retta PP_1 è tangente alla conica C nel punto P_1.
Lo stesso procedimento si può utilizzare per l'altro punto P_2 di intersezione della retta polare p con la conica assegnata C: continuano ad essere valide tutte le formule dalla 15) alla 28), dove al posto di x_1 si sostituisce x_2 ed al posto di y_1 y_2. Allo stesso modo si perviene al risultato che la retta PP_2 è tangente alla conica nel punto P_2 . Pertanto segue la figura n.2:

Fig.n.2



La figura n.2 mostra che, se il punto P è esterno alla conica, la retta polare p del polo P rispetto alla conica C assegnata interseca la stessa conica in due punti P_1 e P_2 tali che le rette PP_1 e PP_2 risultano tangenti alla conica rispettivamente nei punti P_1 e P_2.
Per il teorema di reciprocità, se la polare di P rispetto a C passa per P_1, allora la polare di P_1 (sempre rispetto a C) passa per P, se la polare di P passa per P_2 allora la polare di P_2 passa per P, pertanto la polare di P rispetto a C passa per i due punti P_1 e P_2 . Può capitare che il sistema 13) non ammetta soluzioni reali, nel qual caso non si può ipotizzare l'esistenza di due punti reali P_1 e P_2 di intersezione tra retta polare p e conica C, (p esterna a C) e ciò si verifica quando il polo P è interno alla conica C(per esclusione, per quanto studiato precedentemente). Difatti se il punto P risulta interno alla conica da esso non si possono tracciare rette tangenti alla conica dato che tutte le rette del fascio risultano secanti ,e quindi, non esistendo in questo caso i punti di tangenza P_1 e P_2 reali, la retta polare p non può intersecare la conica assegnata, ma risulterà esterna.
Assegnati in un piano una retta p ed una conica non degenere C, il polo di p rispetto a C è unico(vedere appendice n.3) .

3. Applicazioni: tangenti ad una conica e formula di sdoppiamento.

Il contenuto di questo paragrafo è facilmente proponibile a studenti del terzo anno di scuola superiore in cui è previsto lo studio delle coniche .
La formula di sdoppiamento, applicata ad una equazione di secondo grado in x ed y, che rappresenta una conica C reale non degenere, si ottiene sostituendo

$$\text{ad } x^2 \to x_o x \text{ ; ad } y^2 \to y_o y \text{ ; ad } xy \to \frac{x_0 y + x y_0}{2};$$

$$\text{ad } x \to \frac{x + x_0}{2} \text{ ; ad } y \to \frac{y + y_0}{2}.$$

dove x_o ed y_o sono le coordinate del punto generico P. La formula che si ottiene è di primo grado e rappresenta graficamente una retta: se P appartiene alla conica la formula di sdoppiamento rappresenta l'equazione della retta tangente in P alla conica C, se P non appartiene alla conica C l'equazione ottenuta rappresenta graficamente la retta polare del punto P rispetto alla conica assegnata C . Di seguito si passeranno in rassegna i casi più consueti di equazioni di coniche che usualmente si studiano nella scuola superiore, determinando l'equazione delle rette tangenti alle rispettive coniche in un suo punto, la formula dello sdoppiamento e l'equazione della retta polare. Ovviamente tutti i coefficienti che compaiono nelle equazioni delle coniche devono essere numeri reali.

- Equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. Essa è del tipo:

$$29) \quad y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq o .$$

Sia dato un punto $P(x_o,y_o)$ appartenente alla parabola assegnata: pertanto vale

$$30) \quad y_o = ax_o^2 + bx_o + c$$

L'equazione del fascio di rette di centro P e di coefficiente angolare generico m è:

$$31) \qquad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Sottraendo la 30) dalla 29) ed utilizzando la 31) si ottiene:

$$32) \quad (x - x_o)[a(x + x_o) + b - m] = o \ .$$

Nell'equazione 32) l'incognita x rappresenta l'ascissa dei punti d'intersezione della retta generica del fascio di centro P con la parabola; una soluzione è $x=x_o$, difatti il punto P appartiene alla parabola. Affinchè l'altro punto d'intersezione tra retta e parabola sia ancora P(cioè retta tangente alla parabola con coefficiente angolare m_t) si deve porre $x=x_o$ nel secondo fattore della 32), ottenendo:

$$32')\qquad m_t = 2ax_0 + b$$

da cui l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$32'')\qquad y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

Applicando alla formula 29) la formula dello sdoppiamento si ottiene:

$$33)\qquad \frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c$$

E' immediato verificare che, utilizzando la 30), le formule 32") e 33) sono equivalenti. La formula 32") comunque è significativa perché pone in evidenza l'espressione molto nota del coefficiente angolare di una retta tangente alla parabola in un suo punto. Se il punto $P(x_o,y_o)$ non appartiene alla parabola l'equazione 33) rappresenta graficamente la retta polare di polo P rispetto alla parabola assegnata.
Se il punto P è esterno alla parabola la retta polare è secante alla parabola, ed i due punti d'intersezione P_1 e P_2 sono tali che le rette PP_1 e PP_2 risultano tangenti alla parabola rispettivamente nei punti P_1 e P_2 .

- Equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle x. Essa è del tipo

$$34)\quad x = ay^2 + by + c \quad \text{con } a \neq o\ .$$

Se si vuole determinare l'equazione della retta tangente alla parabola assegnata in un suo punto $P(x_o,y_o)$, si noti che vale la

$$35)\quad x_o = ay_o{}^2 + by_o + c$$

Sottraendo la 35) dalla 34) ed utilizzando la 31) si ottiene:

$$36)\qquad (y - y_0)[am(y + y_0) + mb - 1] = 0$$

Una soluzione è $y=y_o$ .Affinchè la retta di coefficiente angolare m_t risulti tangente in P alla parabola 34) deve risultare $y=y_o$ nel secondo fattore, cioè:

$$37)\quad m_t = \frac{1}{2ay_o + b}$$

E pertanto l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$38)\quad y - y_o = \frac{1}{2ay_o + b}(x - x_o)$$

Applicando la formula dello sdoppiamento alla 34) si ottiene:

$$39)\qquad \frac{x + x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y + y_0}{2} + c$$

che equivale alla 38) se si utilizza la 35). Se $P(x_o,y_o)$ appartiene alla parabola assegnata, la 39) rappresenta l'equazione della retta tangente alla parabola in P, se P non appartiene alla parabola assegnata la 39) rappresenta l'equazione della retta polare di polo P rispetto alla parabola assegnata.
Coniche a centro(ellissi ed iperboli) con centro nell'origine degli assi coordinati
La loro equazione è del tipo:

$$40)\quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sia $P(x_o,y_o)$ un punto appartenente alla conica di equazione 40): determinare l'equazione della retta tangente alla conica nel punto P. Dalla 40) seguono:

$$40')\quad b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

$$40'')\quad b^2{x_o}^2 \pm a^2{y_o}^2 = a^2b^2$$

Sottraendo la 40") dalla 40') si ottiene:

$$41)\quad b^2(x - x_o)(x + x_o) \pm a^2(y - y_o)(y + y_o) = 0$$

ed utilizzando nella 41) l'equazione 31) del fascio di rette di centro P, si deduce:

$$42)\quad (x - x_o)(b^2(x + x_o) \pm a^2m(y + y_o)) = 0$$

Imponendo che entrambi i punti di intersezione tra la retta generica del fascio e la conica coincidano con $P(x_o,y_o)$, la retta diventa tangente con coefficiente angolare m_t, e dalla 42) segue:

$$43)\quad m_t = \mp \frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}$$

da cui l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$44)\quad y - y_o = \mp \frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x - x_o)$$

od anche, dopo semplici passaggi:

$$44')\quad \frac{x_o x}{a^2} \pm \frac{y_o y}{b^2} = \frac{x_o^{\,2}}{a^2} \pm \frac{y_o^{\,2}}{b^2} \quad .$$

Dato che il punto $P(x_o,y_o)$ appartiene alla conica, il secondo membro della 44') vale 1, e pertanto dalla 44') segue:

$$45)\quad \frac{x_o x}{a^2} \pm \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

che rappresenta l'equazione della retta tangente richiesta alla conica di equazione 40) in un suo punto $P(x_o,y_o)$. Se il punto $P(x_o,y_o)$ non appartiene alla conica, la retta di equazione 45) rappresenta l'equazione della retta polare di polo P rispetto alla conica C.

- Circonferenza generica (reale) e ricerca delle rette tangenti.- Sia data una circonferenza C di equazione :

$$46)\quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 - 4c > 0$$

ed un punto $P(x_o,y_o)$ appartenente alla circonferenza data C, cioè vale la :

$$47)\quad x_o^{\,2} + y_o^{\,2} + ax_o + by_o + c = 0 \ .$$

Per determinare l'equazione della retta tangente in P alla conica C, col solito procedimento si sottrae la 47) dalla 48), e tenendo conto della 31) si deduce:

$$48)\quad (x - x_o)(x + x_o + m(y + y_o) + a + mb) = 0 \ .$$

Affinchè la retta di centro P risulti tangente in P alla conica C, l'equazione 48) deve ammettere la soluzione $x=x_o, y=y_o$ due volte coincidenti, cioè:

$$49)\qquad 2x_0 + 2m_t y_0 + a + m_t b = 0$$

ed isolando m_t si ottiene:

$$50) \qquad m_t = -\frac{a+2x_0}{b+2y_0}$$

e sostituendo nella 31) si ottiene l'equazione della retta tangente richiesta:

$$51) \qquad (b+2y_0)(y-y_0)+(a+2x_0)(x-x_0)=0$$

La 51) si può scrivere anche sotto la forma:

$$52) \qquad 2xx_0+2yy_0+a(x+x_0)+b(y+y_0)+2c=0$$

Difatti sviluppando la 51), sommando e sottraendo $2ax_0+2by_0+2c$ ed utilizzando la 47) si ottiene la formula 52), nota come formula dello sdoppiamento dell'equazione della circonferenza. Se P appartiene alla circonferenza la 52) rappresenta l'equazione della retta tangente in P alla circonferenza, se P non appartiene alla circonferenza la 52) rappresenta l'equazione della retta polare di polo P rispetto alla circonferenza assegnata.

- Iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi coordinati.
Una tale iperbole ha equazione del tipo:

$$53) \qquad xy=k$$

Assegnato un punto $P(x_0,y_0)$ appartenente all'iperbole data, varrà la formula:

$$54) \qquad x_0y_0=k$$

Se si vuole determinare l'equazione della retta tangente in P all' iperbole assegnata, sottraendo la 54) dalla 53) e considerando la 31) si ottiene:

$$55) \qquad (x-x_0)(y_0+mx)=0$$

e si deve imporre che i punti di intersezione siano due volte coincidenti in P, cioè deve risultare

$$56) \qquad m_t=-\frac{y_0}{x_0}$$

da cui, sostituendo la 56) nella 31) si ottiene l'equazione della retta tangente richiesta:

$$57) \qquad x_0 y + x y_0 - 2 x_0 y_0 = 0$$

e per la 54) la 57) diventa:

$$58) \qquad \frac{x_0 y + x y_0}{2} = k$$

nota come formula dello sdoppiamento della 53) . A secondo se P appartiene o non appartiene all'iperbole data, l'equazione 58) rappresenta rispettivamente o l'equazione della retta tangente o della retta polare rispetto all'iperbole.

Esempio numerico n.1: parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate.
Assegnato su un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico xOy la parabola di equazione:

$$59) \quad y = x^2 - 4x + 3$$

ed i punti P(1,0) ed S(1.5,-3), determinare 1) l' equazione della retta tangente nel punto P alla parabola assegnata 2) le equazioni delle rette passanti per il punto S e tangenti alla parabola assegnata. Si nota che il punto P appartiene alla parabola, mentre il punto S è esterno alla parabola.
Risoluzione del quesito 1)
Per determinare l'equazione della retta tangente in P(1,0) alla parabola data, si applica la 33) con $x_o = 1$, $y_o = 0$, da cui l'equazione:

$$60) \qquad \frac{y}{2} = x - 2(x+1) + 3$$

e pertanto l'equazione della tangente richiesta è:

$$60') \qquad y = -2x + 2.$$

Risoluzione del quesito 2)
Per determinare le equazioni delle due rette tangenti passanti da S(1.5,-3), occorre scrivere l' equazione della retta polare di polo S rispetto alla parabola : essa si ottiene utilizzando ancora la 33) ma con $x_o = 1.5$, $y_o = -3$, da cui

$$61) \qquad y = -x + 3$$

e risolvendo il sistema costituito dalle equazioni 59) e 61) si ottiene l'equazione:

$$62) \qquad x_2 - 3x = 0$$

cioè $x_1=0$, $x_2=3$; i due punti d'intersezione tra la parabola data e la retta polare di equazione 61) sono pertanto $P_1(0,3)$ e $P_2(3,0)$, e rappresentano pure, per quanto studiato teoricamente, i punti di tangenza delle rette passanti per S e tangenti alla parabola assegnata. Le rette tangenti richieste sono le rette P_1S e P_2S di equazioni rispettivamente (ottenute con la nota formula della retta passante per due punti):

$$P_1S)\quad y=3-4x \qquad ; \qquad P_2S)\quad y=2x-6 \ .$$

Esempio n.2: determinare l'equazione della circonferenza C tangente nel punto A(1,3) alla retta di equazione 63) $y=2x+1$ e passante per il punto B(1,5).
Svolgimento.-Si può utilizzare l'equazione della retta polare del punto A rispetto alla circonferenza C scritta, ad esempio con la formula dello sdoppiamento, dato che la tangente in A coincide con tale retta polare. Si supponga che l'equazione della circonferenza sia:

$$64)\quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con a,b,c parametri da determinare opportunamente. L'equazione della retta polare del punto A(1,3) (di equazione 2)) rispetto alla circonferenza C è:
65) $(a+2)x+(6+b)y+a+3b+2c=0$.
Siccome l'equazione 65) deve risultare identica alla 63) scritta sotto forma implicita, a meno di un fattore di proporzionalità k, si ottiene :

$$66)\qquad \frac{a+2}{2} = \frac{6+b}{-1} = a + 3b + 2c = k \quad \text{da cui :}$$

$a=2(k-1)$ $b=-6-k$ $c=k+10$; pertanto l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto A alla retta di equazione 1) risulta:

$$4)\quad x^2 + y^2 + 2(k-1)x - (6+k)y + k + 10 = 0$$

Imponendo il passaggio della circonferenza del fascio per il punto B(1,5), si ottiene l'equazione della circonferenza richiesta:

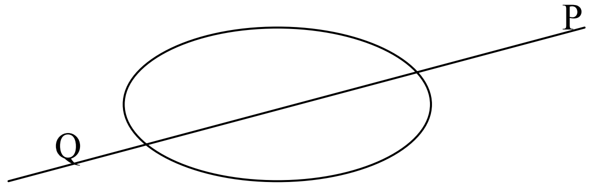
$$5)\quad x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$$

L'autore ha tratto lo spunto per questo metodo di risoluzione in seguito ad una chiacchierata avuta col bravo collega prof. D'Accardio Giuseppe.

Conclusioni: raccolta di metodi per lo studio della polarità di un punto rispetto ad una conica e per la determinazione delle rette tangenti ad una conica condotte da un punto esterno; riferimenti didattici.

In questo paragrafo conclusivo si farà un breve compendio dei metodi principali

Fig.n.3



utilizzati per lo studio della polarità rispetto ad una conica e per la determinazione delle rette tangenti ad una conica. Da quanto visto in questi appunti appare chiaro che affrontare il problema della retta polare rispetto ad una conica mediante coordinate non omogenee conduce, in certi punti, a calcoli laboriosi mentre l'utilizzo delle coordinate non omogenee è conveniente per la determinazione della retta tangente ad una conica in un suo punto. La letteratura sul problema della polarità rispetto ad una conica è molto vasta e affonda le sue origini sin dall'antica Grecia nelle figure dei due grandi matematici Apollonio da Perga(c.262-190a.C) e Pappo, vissuto circa nel III secolo d.C. Apollonio si è occupato molto, nella sua opera "Sezioni coniche", dello studio delle coniche,(già Archimede, Euclide, Aristeo (IIIsec.a.C.) e Menecmo (IVsec.a.C) , si erano interessati allo studio delle coniche anche se in modo più frammentario), ed è stato sicuramente tra i primi a studiare polo e polare rispetto ad una conica. Pappo continuò gli studi di Apollonio sulle coniche nella su opera "Collezione matematica"e fu tra i primi ad utilizzare i birapporti per lo studio della geometria. Per diversi secoli gli studi di geometria languirono mentre ripresero con forti impulsi subito dopo il rinascimento con Viete, Descartes per la geometria analitica e con sviluppi della geometria proiettiva che si suddivivisero in più filoni: inizialmente di tipo grafico (Steiner, Staudt, Desargues, Pascal, Monge, La Hire, Poncelet tutti matematici del XVII secolo) e successivamente di natura analitica (Gergonne, Mobius, Sylvester, Caley)(tutti del XVIII secolo; per approfondimenti sui Matematici [12]); tale problema è stato affrontato pure con l'analisi matematica i cui maggiori esponenti di questo filone sono stati Newton, Leibnitz, Fermat, Plucker, Eulero ,Mac Laurin e Taylor (vedere [12]). Si inizia la rassegna di questi metodi sintetizzando sul problema quanto ha scritto Guido Castelnuovo nelle sue lezioni di geometria. Si parte dalla conica reale K non degenere di equazione scritta in coordinate omogenee x, y, t

$$69)\quad f(x,y,t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

e sullo stesso piano della conica K siano dati due punti P(x,y,t) e $Q(x_Q,y_Q,t_Q)$; le coordinate generiche del punto R della retta passante per i punti P e Q sono:

$x_R=kx+x_Q$; $y_R=ky+y_Q$; $t_R=kt+t_Q$ dove k è il parametro variabile che genera tutti i punti della retta richiesta. Affinchè il punto R appartenga alla conica K deve valere: $f(x_R,y_R,t_R)=0$, cioè

$$70)\quad f(kx+x_Q,ky+y_Q,kt+t_Q)=kf(x,y,t)+2f\begin{pmatrix}x, & y, & t\\ x_Q, & y_Q, & t_Q\end{pmatrix}+f(x_Q,y_Q,t_Q)=0 \quad \text{con}$$

$$71)\quad f\begin{pmatrix}x, & y, & t\\ x_Q, & y_Q, & t_Q\end{pmatrix}=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}t)x_Q+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}t)y_Q+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}t)t_Q=$$

$$=(a_{11}x_Q+a_{12}y_Q+a_{13}t_Q)x+(a_{21}x_Q+a_{22}y_Q+a_{23}t_Q)y+(a_{31}x_Q+a_{32}y_Q+a_{33}t_Q)t=$$

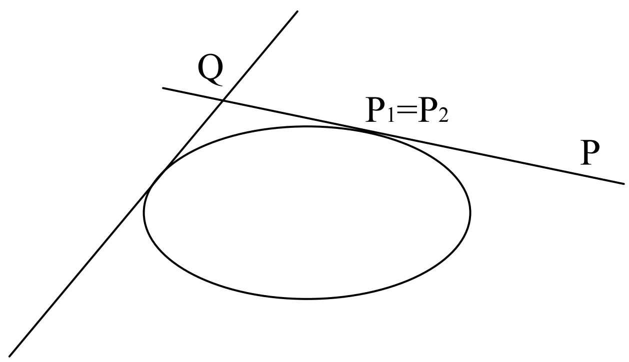
$$a_{11}xx_Q+a_{22}yy_Q+a_{12}(x_Qy+xy_Q)+a_{13}(x_Qt+xt_Q)+a_{23}(y_Qt+yt_Q)+a_{33}tt_Q \quad \text{con } a_{ij}=a_{ji} \quad i,j=1,2,3$$

La notazione che compare nella formula 71) è denominata dall'Autore "forma mista" E' importante notare che il polinomio 71)è simmetrico rispetto alle variabili x,y,t e x_Q,y_Q,t_Q; cioè nella forma mista è lecito scambiare la prima riga con la seconda. Le radici k_1 e k_2 dell'equazione di secondo grado in k sono i valori corrispondenti ai due

$$72)\quad f\begin{pmatrix}x, & y, & t\\ x_Q, & y_Q, & t_Q\end{pmatrix}=0$$

punti P_1 e P_2 di intersezione tra retta e conica in questione. Se il punto Q appartiene alla conica K, cioè $f(x_Q,y_Q,t_Q)=0$, allora l'equazione 70) di secondo grado in k diventa spuria , cioè $k_1=0$ e quindi i punti P_1 e Q sono coincidenti; se inoltre $k_2=0$, cioè:
e pertanto P rappresenta il punto generico sulla retta tangente in Q alla conica K ; quindi l'equazione 72) è l'equazione della retta tangente nel suo punto Q alla conica K.Se il punto Q non appartiene alla conica K, la retta generica per Q è tangente alla conica K quando i due punti di intersezione P_1 e P_2 tra retta e conica sono coincidenti, cioè nella 72) $k_1=k_2$

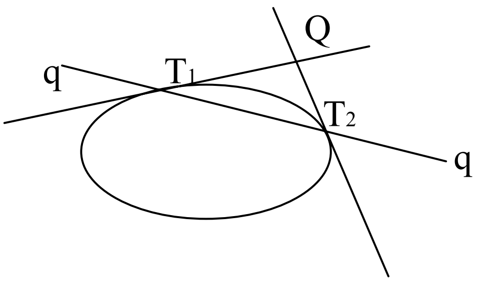
Fig.n.4



Ciò accade quando nell'equazione di secondo grado in k 72) si annulla il discriminante:

$$73)\quad f\begin{pmatrix}x, & y\ , & t\\ x_Q, & y_Q, & t_Q\end{pmatrix}^2-f(x_Q,y_Q,t_Q)\,f(x,y,t)=0$$

Tale formula è un'equazione di secondo grado nelle variabili x,y e t e rappresenta le equazioni della coppia di rette passanti per Q e tangenti alla conica data; per determinare le equazioni di ciascuna retta basta risolvere l'equazione di secondo grado 73) rispetto ad una delle variabili. Si osservi che se Q appartiene alla conica K si ottiene la 72) contata due volte, e rappresenta l'equazione della retta tangente in Q alla conica K, come visto precedentemente.
Nel caso che Q non appartenga alla conica K, se si considerano uno dei due punti P(x,y,t) di intersezione tra conica e coppia di rette tangenti da Q, per essi vale
74) $f(x,y,t)=0$ e considerando il sistema tra le 73) e 74) si ottiene la 72), che rappresenta l'equazione della retta polare q corrispondente al polo Q rispetto a K.
Notare che se in un'equazione di una curva data in coordinate omogenee x,y,t si pone t=1, si ottiene la corrispondente equazione in coordinate non omogenee.
Fig.n.5



L'Autore nel suo fondamentale testo riporta la seguente proprietà: se si traccia una qualunque retta r passante per il punto Q scelto come polo ed indicato con Q' il punto di intersezione di tale retta con la polare q e P' e P" i due punti di intersezione di r con la conica, allora (QQ'PP')=-1, cioè i quattro punti Q,Q',P,P' costituiscono un gruppo armonico di punti(per i birapporti ed i riferimenti vedere [1])

Si noti che vale:

$$75)\quad f\begin{pmatrix} x, & y, & t \\ x_Q, & y_Q, & t_Q \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} x_Q + \frac{\partial f}{\partial y} y_Q + \frac{\partial f}{\partial t} t_Q = \frac{\partial f}{\partial x_Q} x + \frac{\partial f}{\partial y_Q} y + \frac{\partial f}{\partial t_Q} t$$

e pertanto sia per le equazioni della retta tangente in un punto Q della conica che per l'equazione della retta polare di un punto Q rispetto alla conica K valgono le 75) (dove compaiono le derivate parziali) poste uguali a zero: tali formule esprimenti la condizione di tangenza di una retta ad una curva in un suo punto semplice tramite le derivate parziali in coordinate omogenee è stata utilizzata per la prima volta da Plucker. In coordinate non omogenee la 75) diventa:

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & 1 \\ x_Q, & y_Q, & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_Q}(x - x) + \frac{\partial f}{\partial y_Q}(y - y_Q)$$

Il Prof. Castelnuovo definisce il punto Q(reale) esterno rispetto ad una conica reale e non degenere un punto tale che da esso si possono condurre due rette tangenti reali alla conica , Q interno alla conica se da esso non è possibile tracciare rette tangenti reali alla conica, Q appartenente alla conica se le due rette tangenti alla conica sono reali e coincidenti ;una conseguenza di ciò è che se Q è esterno alla conica la retta polare corrispondente q seca la conica, se il punto Q è interno alla conica la retta polare q è esterna alla conica(vedere A3), se Q appartiene alla conica la retta polare q coincide con la tangente nel punto alla conica e pertanto Q appartiene alla retta polare q.
Nell'ambito di questa teoria è di rimarchevole importanza il teorema di reciprocità il cui enunciato è il seguente: assegnato in un piano una conica reale non degenere K ed un punto Q, se la polare di Q rispetto a K passa per un punto P, allora la polare di P rispetto a K passa per Q. -Dim: L'equazione della retta polare q di Q rispetto a K è:

$$76)\quad f\begin{pmatrix} x, & y, & t \\ x_Q, & y_Q, & t_Q \end{pmatrix} = 0$$

Se il punto P appartiene alla retta polare q, allora:

$$f\begin{pmatrix} x_P, y_P, t_P \\ x_Q, y_Q, t_Q \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_Q, y_Q, t_Q \\ x_P, y_P, t_P \end{pmatrix} = 0$$

e tale formula equivale a considerare la seguente:

$$78)\quad f\begin{pmatrix} x, & y, & t \\ x_P, & y_P, & t_P \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con } x = x_Q \quad , y = y_Q \quad , \ t = t_Q \ .$$

Dato che la formula 78) indica l'equazione della retta polare p del polo P rispetto alla conica K, il teorema è così dimostrato.
Un altro grande studioso di geometria del ventesimo secolo è stato Luigi Campedelli che nel suo testo( ) affronta il problema della polarità rispetto ad una conica in modo simile al Castelnuovo, utilizzando come notazione di forma mista tra i due punti P e Q l'espressione f(P,Q) che anticipa il simbolo di forma bilineare(vedere Stoka , Sernesi, Rosati).

Per concludere questa prima parte di indagine, assegnato in un piano una conica reale K, esiste una particolare trasformazione proiettiva tra piani sovrapposti (denominata polarità piana) tale che ad un punto Q(polo) corrisponde una retta q(polare) e viceversa ; il luogo geometrico dei punti autoconiugati del piano(cioè dei punti che appartengono alla propria polare) è la conica K.(per ulteriori approfondimenti si rimanda ai testi di Castelnuovo , di Dantoni-Mammana e di Campedelli).

Dagli anni ’70 in poi sono pubblicati diversi testi universitari molto validi in cui , per la risoluzione del problema della polarità rispetto ad una conica ed in generale per l’impostazione di tutta la geometria, si segue il metodo matriciale; storicamente tale metodo è stato studiato da Caley, Sylvester ,Jacobi, Hamilton e Laplace. A tal proposito l’autore di questi appunti riporta in breve il contenuto di alcuni testi scelti. Si inizia dal Rosati . Sia data una conica reale non degenere K su un piano proiettivo di equazione in coordinate omogenee 69), con

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a_{ij}=a_{ji} \quad i,j=1,2,3 \ \ , \ \det A \neq 0 \ , \ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$$

$$\text{da cui l'equazione della conica K in forma mariciale} \quad 80) \quad {}^{t}XAX=0$$

Scelti due numeri reali k ed h e due punti P e P’ le cui coordinate omogenee sono date dai due vettori colonna X ed X’, le coordinate del generico punto della retta PP’ sono: 81) kX+hX’ . Se si vogliono determinare le coordinate dei punti di intersezione tra la conica K e la retta PP’ si devono sostituire le 81) nella 80), ottenendo:

$${}^{t}(kX+hX')A(kX+hX')=0$$

e sviluppando si ottiene:

$$82)\ \ k^2\ {}^{t}XAX+kh\ {}^{t}XAX'+kh\ {}^{t}X'AX+h^2\ {}^{t}X'AX'=0$$

Si noti che

$$83)\ \ {}^{t}X'AX={}^{t}XAX'$$

essendo i due membri due numeri, ovvero due matrici di ordine 1x1, ed il primo membro è il trasposto del secondo.

Dalla 82) ed 83) segue:

$$84)\ \ k^2\ {}^{t}XAX+2kh\ {}^{t}X'AX+h^2\ {}^{t}X'AX'=0$$

La formula 83) indica l’uguaglianza tra i polinomi bilineari simmetrici in x,y,t, ed x’,y’,t’(vedere formula 71) con x’,y’,t’ al posto di x_Q,y_Q,t_Q).

$${}^{t}X'AX=(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}t')x+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}t')y+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}t')t=0$$

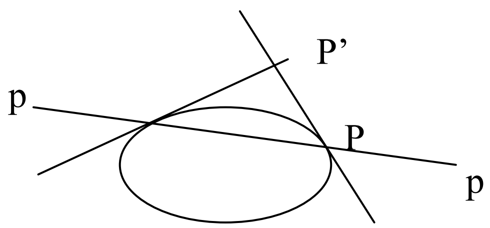
$${}^{t}XAX'=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}t)x'+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}t)y'+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}t)t'=0$$

Se nell'equazione 84) in k ed h si impone che le due soluzioni siano coincidenti con il punto P'(x',y',t') non appartenente alla conica, segue:

$$({}^{t}X'AX)^{2} - ({}^{t}XAX)({}^{t}X'AX') = 0$$

Tale equazione è di secondo grado in x,y,t e rappresenta l'equazione delle coppie di rette tangenti alla conica e passanti per P' e si può facilmente risalire a ciascuna delle equazioni delle due rette risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto ad una delle variabili. L'Autore inoltre definisce un punto esterno alla conica reale ed irriducibile se da esso si possono condurre due rette tangenti reali e distinte, un punto interno alla conica se da esso non si possono condurre tangenti reali alla conica, un punto appartenente alla conica se le rette tangenti sono due reali e coincidenti.

Fig. n. 6



Il punto P(x,y,t) rappresenta il punto corrente che si muove sulle due rette tangenti alla conica passanti per P'; se P, oltre che appartenere alle due rette tangenti, appartiene anche alla conica, allora:

$$87) \quad {}^{t}X'AX = 0$$

Pertanto la formula 87) rappresenta l'equazione della retta p passante per i due punti di tangenza delle due rette tangenti condotte dal punto P' alla conica; tale retta di equazione 87) si definisce retta polare di P' rispetto alla conica.
Se il punto P' appartiene alla conica irriducibile allora continua ad essere valida la 87) che rappresenta l'equazione della retta tangente alla conica nel suo punto P'(contata due volte).
L'Autore, dopo aver affrontato il problema delle tangenti ad una conica, tratta della polarità piana rispetto ad una conica reale non degenere definendola come una corrispondenza che associa ad un punto (polo)del piano della conica una retta(polare) del medesimo piano; di seguito l'Autore riporta alcune importanti proprietà della polarità piana. Sia assegnata, in un piano, una conica reale irriducibile K di equazione matriciale 80) e siano dati due punti P'(x',y',t') e P"(x",y",t") rappresentati dai rispettivi vettori colonna X' ed X".
Scelti comunque due numeri reali k ed h , le coordinate proiettive del generico punto della retta P'P" sono espresse dal vettore colonna 88) kX'+hX"; essendo le equazioni delle rette polari dei punti P' e P" rispetto alla conica K :

$$89) \quad {}^{t}X'AX = 0 \qquad 89') \quad {}^{t}X''AX = 0$$

rispettivamente, da queste ultime segue:

$$90)\quad k\ {}^{t}X'AX + h\ {}^{t}X''AX = 0$$

La formula 90) rappresenta una combinazione lineare tra le 89) ed 89’), cioè l’equazione del fascio di rette di centro il punto P d’intersezione tra la polare di P’ e la polare di P”, e per il teorema di reciprocità tale punto P è il polo della retta p passante per i punti P’ e P”, come tra poco si proverà. Pertanto mentre il polo si muove sulla retta P’P” di coordinate omogenee 88), la corrispondente retta polare descrive un fascio di centro il polo della retta P’P”.
Altra proprietà importante è che nel piano della conica esiste una corrispondenza biiettiva tale che ad ogni punto P(polo) corrisponde una retta(polare) e viceversa.
Data la retta polare di equazione: 91) $a_1x+a_2y+a_3t=0$ od anche

$$ {}^{t}a\, X = 0 \quad \text{con } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

la polare del punto P’ generico, di coordinate x,y,t incognite, rispetto alla conica assegnata K, ha equazione 87) ; dal confronto tra le espressioni 87) e 91) si ottiene:

$$92)\quad {}^{t}X'A = r\ {}^{t}a$$

con r numero reale non nullo ; il sistema 92) ammette una ed una sola soluzione in x’,y’,t’, a meno del fattore di proporzionalità r. Viceversa, noti x’,y’,t’ si possono determinare in modo univoco a_1,a_2,a_3.
L’ultimo punto che l’Autore tratta a proposito della polarità piana è il teorema di reciprocità, il cui enunciato è il seguente: assegnata in un piano una conica reale irriducibile K, se il punto P”(x”,y”,t”) appartiene alla polare del punto P’(x’,y’,t’) rispetto a K ,allora il punto P’ appartiene alla polare di P” rispetto a K . Indicati rispettivamente con X’ ed X” i vettori colonna dei punti P’ e P”, l’equazione della retta polare p’ di P’ rispetto a K è:

$$93)\quad {}^{t}X'AX = 0$$

Nell’ipotesi che P” appartenga alla retta p’ di equazione 93) deve valere:

$${}^{t}X'AX'' = {}^{t}X''AX' = 0$$

per la 83), cioè:

$$94)\quad {}^{t}X''AX = 0 \quad \text{con } X = X'$$

ma l’equazione 94) rappresenta la retta polare p” del punto P” rispetto alla conica K, cioè il punto P’ appartiene alla retta polare p” c.v.d..

I punti P' e P" si dicono coniugati rispetto alla conica. E' interessante notare che se nella formula 93) si ipotizza l'appartenenza del punto P' alla conica, si ottiene la 80), cioè il luogo geometrico dei punti autoconiugati(cioè che appartengono alla propria polare) è la conica K stessa.
Per quanto riguarda le forme bilineari simmetriche e forme quadratiche vedere Stoka, Sernesi e Rosati. Nello Stoka si generalizza la trattazione sulle coniche e sulle quadriche trattando anche le iperquadriche(curve del secondo ordine in spazi con più di tre dimensioni) e di polarità subordinata ad una iperquadrica; l'Autore inizia con le iperquadriche per poi passare alle coniche ed alle quadriche.
Il Prof. Sernesi Edoardo affronta il problema della retta polare rispetto ad una conica non degenere K considerando inizialmente una curva algebrica piana di ordine n e definendo per essa la polare di ordine r(che in generale non è un retta ma una curva algebrica di ordine n-r) e la polare di ordine 1, che è sempre una retta; l'Autore considera l'equazione (di un curva algebrica piana) $F(X_o,X_1,X_2)=0$, dove F è un polinomio omogeneo di grado n nelle coordinate omogenee X_o, X_1,X_2, rappresentativa di una curva algebrica piana di ordine n, e scelto un punto $P(p_o,p_1,p_2)$ sul piano proiettivo , sviluppa con la formula di Taylor la funzione $F(X+tP)$ dove $(X+tP) = (X_o+tp_o,X_1+tp_1,X_2+tp_2)$. Il coefficiente relativo al grado r di t posto uguale a zero indica l'equazione della polare di ordine r, mentre il coefficiente del termine di primo grado di t posto uguale a zero indica l'equazione della retta polare, o polare del primo ordine. Essa vale: 95) $F_o(X)p_o+F_1(X)p_1+F_2(X)p_2=0$ dove $F_i(X)$ indica la derivata parziale della F rispetto alla variabile relativa all'indice i. Se il punto T è il punto d'intersezione tra la retta polare p e la conica K allora: 96) $F_o(T)p_o+F_1(T)p_1+F_2(T)p_2=0$, $F(T)=0$. Affinchè valga la 96) deve verificarsi: a) che tutte le tre derivate parziali di F nel punto T siano nulle, cioè T sia un punto singolare, ma quest'ipotesi nel caso in esame di conica non degenere K è da escludere dato che K non può possedere punti singolari b) oppure che il punto P appartenga alla retta t tangente in T alla conica, dato che l'equazione di tale retta è 97) $F_o(T)X_o+F_1(T)X_1+F_2(T)X_2=0$ e che con la sostituzione delle coordinate del punto P nella 97) si ottiene la 96). Quindi il punto T di intersezione tra retta polare p e conica K appartiene alla polare p del punto P(polo). Ciò significa che se il polo P appartiene alla conica K, la retta polare di P rispetto a K coincide con la tangente alla conica in P. Nel caso di polo P non appartenente alla conica K la polare di P passa per i due punti T_1 e T_2 di tangenza delle due rette tangenti alla conica e contenenti P. Per ulteriori approfondimenti consultare Sernesi

Per quanto riguarda il problema delle tangenti nel Dantoni-Mammana è riportato un metodo basato sul fascio delle coniche bitangenti. Data una conica reale non degenere K ed un punto P esterno alla conica, per determinare le equazioni delle due rette tangenti alla conica passanti per P, si scrive l'equazione della retta polare p di P rispetto alla conica; l'equazione del fascio di coniche bitangenti alla conica K nei punti T_1 e T_2 è:

$$98)\quad K + r\,p^2 = 0$$

dove per semplicità di rappresentazione si sono indicate le equazioni con le lettere corrispondenti alla conica ed alla retta. Imponendo che la conica generica del fascio passi per il punto P di coordinate assegnate, si determina r e quindi l'equazione di secondo grado in x,y,t si scinde nelle due componenti lineari ottenendo le equazioni delle due rette richieste.
E' interessante notare(vedere Martinelli) il forte collegamento tra il metodo del fascio delle coniche bitangenti, espresso tramite la formula 98), ed il metodo della polare rispetto alla conica al fine di determinare la coppia di rette tangenti ad una conica e passanti per un punto P; difatti indicata con f(x,y)=0 l'equazione della conica in coordinate non omogenee ed esprimendo l'equazione della retta polare di polo P con la notazione della forma mista di Castelnuovo in coordinate non omogenee(ad esempio) , la 98) diviene:

$$99)\quad f(x,y) + hf\begin{pmatrix} x, & y, & 1 \\ x_P, & y_P, & 1 \end{pmatrix}^2 = 0$$

dove h è il parametro variabile del fascio di coniche in esame. Imponendo il passaggio della conica generica del fascio per il punto P, cioè richiedendo implicitamente la determinazione della coppia di rette per P e tangenti alla conica data(conica degenere del fascio) , la 99) diviene:

$$100)\quad f(x_P, y_P) + h\,f(x_P, y_P)^2 = 0 \quad \text{da cui} \quad 100')\quad h = -\frac{1}{f(x_P, y_P)}$$

da cui, sostituendo la 100') nella 98) si ottiene:

$$101)\quad f(x,y)\,f(x_P, y_P) - f\begin{pmatrix} x & ,y, & 1 \\ x_P, & y_P, & 1 \end{pmatrix} = 0$$

che coincide con la formula 73) scritta in coordinate non omogenee.
Un altro metodo per la determinazione delle due rette tangenti alla conica passanti per un punto P consiste nel considerare un punto indeterminato T(x',y') sulla conica assegnata, con x' ed y' incognite, ed imporre che la tangente in T alla conica passi per P; sostituendo nell'equazione della retta tangente per T alla conica la coppia di coordinate x' ed y' trovate come soluzioni del sistema di secondo grado si perviene alle equazioni delle due rette tangenti richieste (vedere Castelnuovo e Martinelli).
Diversi Autori(Castelnuovo,Campedelli, Dantoni-Mammana, Martinelli, Rosati) riportano nei loro testi la determinazione dell'equazione della retta tangente

nell'origine O degli assi ad una conica non degenere passante per O; tale metodo consiste nel porre uguale a zero la somma di tutti i termini di primo grado, e si perviene al risultato imponendo che le due intersezioni tra la conica data e la retta generica del fascio passante per O e di coefficiente angolare generico m siano coincidenti con ascissa nulla.Questo metodo è molto diffuso e si può applicare in generale a curve algebriche piane di ordine n.
Un metodo didatticamente molto valido e molto studiato nelle scuole superiori per determinare la coppia di rette tangenti ad una conica reale non degenere condotte da un punto esterno P, consiste nello scrivere l'equazione del fascio di rette di centro P e, facendo sistema con l'equazione della conica, si deve imporre che il discriminante del sistema, in cui figura il coefficiente angolare m della retta generica del fascio, risulti uguale a zero; i due valori di m trovati costituiscono i coefficienti angolari delle due rette richieste.(vedere Maraschini –Palma o Dodero -Baroncini).
Nel caso della circonferenza le equazioni delle due rette tangenti ad essa e passanti per un punto esterno assegnato si possono determinare imponendo che la generica retta del fascio di centro P abbia distanza dal centro della circonferenza pari al raggio e determinando così i due coefficienti angolari delle rette richieste; il metodo però diventa sconveniente se si devono calcolare anche le coordinate dei punti di tangenza.

Per quanto riguarda le considerazioni di carattere didattico sul metodo della retta polare di polo P rispetto ad una conica ai fini della determinazione delle due rette tangenti alla conica condotte dal punto P, bisogna sottolineare la semplicità del metodo soprattutto considerando che consente di determinare direttamente le coordinate dei punti di tangenza. Assegnati nel piano una conica non degenere K ed un punto esterno P alla conica, per determinare le equazioni delle rette tangenti da P alla conica basta scrivere l'equazione della retta polare di polo P rispetto alla conica, intersecare tale retta con la conica determinando i due punti di intersezione T_1 e T_2 , e per concludere scrivere le equazioni delle due rette passanti per T_1 e P(prima retta tangente richiesta) e per T_2 e P (seconda tangente richiesta).Inoltre il metodo della polare (ovvero utilizzo della formula dello sdoppiamento)ha il duplice aspetto che quando il polo P appartiene alla conica, la sua polare è la retta tangente in P alla conica; quindi il metodo è molto potente e molto generale, consentendo una vasta applicabilità in molti casi(cioè per tutte le coniche che si studiano al terzo anno del superiore). L'autore di questi appunti, avendo insegnato matematica nelle terze classi del liceo scientifico sperimentale e nell'informatico, ha avuto modo di appurare come gli alunni assimilino con facilità questo metodo in coordinate non omogenee; è chiaro che le considerazioni di calcolo riportate nelle prime pagine di questi appunti agli alunni non possono interessare sia perché si incontrano calcoli laboriosi, sia perchè prescindono dal metodo in sé. Può essere utile proporre il metodo agli alunni mediante un lavoro svolto nel laboratorio d'informatica; il sottoscritto usa molto il Derive facendo vedere che utilizzando la formula dello sdoppiamento nel caso di punto P(polo) appartenente alla conica si ottiene la retta tangente alla conica, se si applica la stessa formula dello sdoppiamento con un polo P esterno alla conica, si ottiene un retta che interseca la conica in due punti che vedono il punto P tangenzialmente alla conica. E’ da sottolineare comunque che gli alunni è giusto che imparino soprattutto i metodi più semplici(dal punto di vista concettuale) e quelli che traggono spunto da proprietà geometriche elementari. A tal proposito ad esempio è bene che gli alunni conoscano e sappiano applicare, per quanto riguarda la determinazione delle due rette tangenti ad una conica condotte da un punto esterno, il metodo del discriminante del sistema di secondo grado cui i perviene intersecando la conica con la retta generica passante per il punto P con il coefficiente angolare variabile; se il discriminante è maggiore, minore od uguale a zero la retta risulta rispettivamente secante, esterna o tangente alla conica. Il metodo a volte presenta calcoli laboriosi , ma è giusto che gli alunni lo conoscano perché basato su concetti elementari. Ad esempio ,nel caso di determinazione di retta tangente ad un circonferenza in un suo punto, secondo il sottoscritto è importante che gli alunni conoscano il metodo basato sulla perpendicolarità della retta tangente in un punto P della circonferenza con il raggio passane per P; determinato il coefficiente angolare della retta che unisce il punto P con il centro C della circonferenza, la retta perpendicolare (cioè il cui coefficiente angolare è l’antireciproco del precedente) passante per il punto P è la retta tangente richiesta(vedere 50)). Didatticamente è bene che gli alunni conoscano questo metodo perché basato su proprietà geometriche elementari della circonferenza.

A1. Appendice sulla formula della retta polare p (di Santangelo Maurizio).

Data la conica reale non degenere C di equazione 1) ed un punto $P(x_o,y_o)$ del piano cartesiano, un'altra forma dell'equazione della retta polare del punto P rispetto a C è:

$$\text{a)} \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})(x - x_o) + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})(y - y_o) = 0 \quad .$$

Per verificare la validità della formula a) conviene partire dalla formula di sdoppiamento 12), svilupparle entrambe e confrontarle, ottenendo:

$$\text{b)} \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = a_{33} + 2a_{11}x_o x + 2a_{22}y_o y + 2a_{12}x_o y + 2a_{12}xy_o + 2a_{13}x_o + 2a_{23}y_o \; .$$

Valendo, per l'equazione della conica C:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = -2a_{13}x - 2a_{23}y - a_{33}$$

ed utilizzando quest'ultima formula nella b), dividendo per 2 si ottiene la formula a).

A2.Risoluzione del sistema di secondo grado (di Santangelo Maurizio).

In quest'appendice si riporta un terzo metodo alternativo di risoluzione del sistema di secondo grado che consente di determinare i punti di intersezione tra la retta PP_1 e la conica reale C non degenere assegnata, dove P_1 appartiene anche alla conica C ed il punto P è esterno a C . Il sistema di secondo grado è:

$$\text{a3)}\quad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_o} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_o} \\ \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}$$

ed ammette sicuramente come soluzione $x=x_1$, $y=y_1$. Pertanto si può isolare dalla prima equazione lineare del sistema l'incognita y, l'espressione trovata sostituirla nell'equazione di secondo grado ed abbassare di grado l'equazione ottenuta in x, dividendo il polinomio per $x-x_1$ in virtù del teorema del resto: per effettuare la divisione si può utilizzare la regola di Ruffini. In tal modo si perviene all'equazione di secondo grado in x:

$$\text{b3)}\quad a_{11}x^2 + a_{22}\left(y_1 + x\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} - x_1\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}\right)^2 + 2a_{12}x\left(y_1 + x\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} - x_1\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}\right) +$$
$$+ 2a_{13}x + 2a_{23}\left(y_1 + x\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} - x_1\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}\right) + a_{33} = 0 \ .$$

Moltiplicando m.a.m. per il quadrato di x_1-x_o ed ordinando rispetto all'incognita x si ottiene la seguente equazione:

$$\text{c3)}\quad (a_{11}(x_1 - x_o)^2 + a_{22}(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o))x^2 + 2x(a_{22}y_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) +$$
$$- a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 - a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + a_{13}(x_1 - x_o)^2 +$$
$$+ a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)) + a_{22}{y_1}^2(x_1 - x_o)^2 + a_{22}x_1(y - y)^2 - 2a_{22}x_1y_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) +$$
$$+ 2a_{23}y_1(x_1 - x_o)^2 - 2a_{23}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + a_{33}(x_1 - x_o)^2 = 0$$

di cui si conosce la soluzione $x=x_1$; pertanto, abbassando di grado il polinomio di secondo grado in x mediante la regola di Ruffini, si ottiene un polinomio di primo grado del tipo : $c_o x+c_1$, dove c_o è il coefficiente del termine di secondo grado nella formula c3)e c_1 è uguale al prodotto di c_o per x_1 più il coefficiente del termine di primo grado dell'equazione c3). Posto nella c3) **a,b,c** rispettivamente i coefficienti di secondo grado, primo grado di x e termine noto, si ha: c_o=a, c_1=ax_1+b e si dimostra che

$$\text{d3)} \quad c_1 = -x_1(a_{11}(x_1 - x_o)^2 + a_{22}(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o)) = -ax_1 \ .$$

Difatti, per quanto asserito sopra, segue:

$$\begin{aligned} \text{e3)} \quad c_1 &= 2a_{22}y_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) - 2a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 + \\ &- 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + 2a_{13}(x_1 - x_o)^2 + 2a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + \\ &+ a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 + a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) \ . \end{aligned}$$

Moltiplicando per 2 la 24) ed addizionando e sottraendo il termine

$$2a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2$$

si ottiene la:

$$\begin{aligned} \text{f3)} \quad & 2a_{22}y_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) - 2a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}y_1(x_1 - x_o)^2 + \\ & - 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + 2a_{13}(x_1 - x_o)^2 + 2a_{23}(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) + \\ & + a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 + a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 + 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) = \\ & - a_{11}x_1(x_1 - x_o)^2 - a_{22}x_1(y_1 - y_o)^2 - 2a_{12}x_1(x_1 - x_o)(y_1 - y_o) \end{aligned}$$

da cui, confrontando la e3) con la f3) segue la d3).Riassumendo, si è trovato che b+ax_1=-ax_1 cioè x_1=-b/2a e pertanto l'equazione c3) presenta discriminante nullo , cioè l'equazione di secondo grado c3) possiede due radici reali e coincidenti ed uguali ad x_1 . Ciò comporta che il resto r della divisione sia sicuramente uguale a zero; difatti

$$r = c - ax_1^2 = 0 \quad \text{essendo per la seconda formula di Cartesio :}$$

$$x_1^2 = \frac{c}{a} \qquad \text{nel caso di radici reali coincidenti .}$$

Si è dimostrato che r=0 e che quindi, per il teorema del resto, il polinomio di secondo grado in x è divisibile per $x-x_1$.
Da quanto precede si ottiene che il polinomio abbassato di grado è : $ax-ax_1$, cioè l'equazione c3) abbassata di grado diventa

$$ax-ax_1=0 \quad \text{da cui segue} \quad x=x_1 \ .$$

Le due radici dell'equazione c3) sono entrambe coincidenti con $x=x_1$ e pertanto la retta PP_1 è tangente alla conica nel punto P_1 .
Osservazione.- Dalla d3) si può verificare , in modo alternativo a quanto visto in precedenza ,che il resto della divisione è zero; difatti

$$\begin{aligned} \text{g3)} \quad & a_{22}y_1^2(x_1-x_o)^2 + a_{22}x_1^2(y_1-y_o)^2 - 2a_{22}x_1y_1(x_1-x_o)(y_1-y_o) + \\ & + 2a_{23}y_1(x_1-x_o)^2 - 2a_{23}x_1(x_1-x_o)(y_1-y_o) + a_{33}(x_1-x_o)^2 - x^2(a_{11}(x_1-x_o)^2 \\ & + a_{22}(y_1-y_o)^2 + 2a_{12}(x_1-x_o)(y_1-y_o)) = 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{h3)} \quad & (a_{22}y_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} - a_{11}x_1^2)(x_1-x_o)^2 + \\ & + 2(-a_{22}x_1y_1 - a_{23}x_1 - a_{12}x_1^2)(x_1-x_o)(y_1-y_o) = 0 \ . \end{aligned}$$

Dato che il punto $P(x_1,y_1)$ appartiene alla conica assegnata C di equazione 1), vale la formula:

$$\text{i3)} \quad a_{22}y_1^2 + 2a_{23}y_1 + a_{33} - a_{11}x_1^2 = -2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) \quad .$$

Tenendo conto della formula i3) e moltiplicando per $-2x_1$ la formula 24), si deduce la formula h3) e quindi si è verificato che il resto della divisione è uguale a zero (risultato già precedentemente dimostrato).

A3:Teorema di reciprocità e corrispondenza biunivoca tra polo P e polare p rispetto ad una conica non degenere (a cura di Santangelo Maurizio).

Il teorema di reciprocità è un teorema molto importante di geometria e la dimostrazione riportata è molto conosciuta. Tale teorema si enuncia nel seguente modo: assegnato in un piano cartesiano ortogonale monometrico una conica reale non degenere K di equazione 1) ed un punto $P(x_o,y_o)$, se la retta polare p del punto P(detto polo) rispetto alla conica K passa per il punto $P_1(x_1,y_1)$,allora la retta polare p_1 del punto P_1 rispetto a K passa per il punto P. Dim: per questa dimostrazione conviene utilizzare l'equazione della polare p sotto la forma :

$$a_2)\quad (a_{11}x + a_{23}y + a_{13})x_o + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y_o + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0 \quad .$$

Se la retta p passa per il punto $P_1(x_1,y_1)$ allora deve valere la

$$b_2)\quad (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})x_o + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})y_o + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0$$

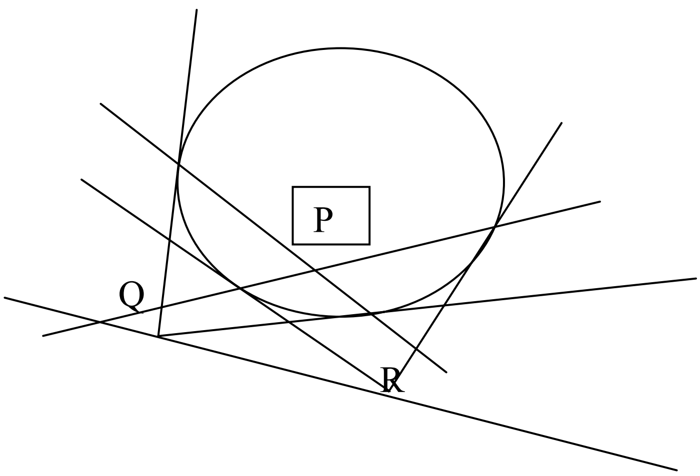
che può essere scritta nel seguente modo(si ricordi che $a_{ij}=a_{ji}$ per i,j=1,2,3):

$$c_2)\quad (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13})x_1 + (a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23})y_1 + a_{31}x_o + a_{32}y_0 + a_{33} = 0 \quad .$$

Se si vuole scrivere l'equazione della retta polare p_1 del punto P_1 rispetto a K e si impone il passaggio di tale retta per il punto $P(x_o,y_o)$ si ottiene la c_2;pertanto si è dimostrato che la polare p_1 passa per il punto P.

Una importante applicazione (grafica)di questo teorema è la costruzione della retta polare p di un punto P rispetto alla conica assegnata K quando P è interno a K. In questo caso la retta p è esterna a K e passa per due punti Q ed R tali che le rispettive rette polari si intersecano in P(vedere la fig. 3).Questo perché se la polare di Q passa per P allora la polare di P passa per Q, se la polare di R passa per P allora la polare di P passa per R; pertanto la polare di P(sempre rispetto a K) passa per i punti Q ed R.

Fig.n.3



Il caso di polo P esterno alla conica è riportato negli appunti(pag.7 fig. n.2). Si può ripetere lo stesso ragionamento di sopra dove Q ed R questa volta sono i punti d'intersezione della retta p con la conica K. Pertanto la polare di P rispetto a K è la retta passante per i due punti di tangenza della coppia di rette alla conica condotte dal punto P. Esiste una corrispondenza biunivoca tra il polo $P(x_0,y_0)$ e la sua retta polare p di equazione generica ax+by+c=0 rispetto ad una conica K non degenere di equazione 1),con almeno uno dei coefficienti a,b o c diversi da zero; cioè ad un punto P scelto come polo rispetto ad una conica, corrisponde una retta polare, ed assegnata la retta polare corrisponde rispetto ad una conica un solo polo P. Tale proposizione, per quanto riguarda la determinazione del polo P assegnata la retta polare p, si può provare immediatamente mediante considerazioni grafiche sul teorema di reciprocità testè dimostrato; occorre distinguere due casi

1) la retta polare p interna alla conica K: la retta p interseca la conica K in due punti P_1 e P_2 da cui conducendo le due rette tangenti a K si ottiene un punto di intersezione P che è il polo della retta p rispetto a K. Il polo P esiste ed è unico.

2) Retta polare p esterna alla conica K: dalla fig. n.3 presi due punti a caso Q ed R sulla retta p e conducendo la coppia di rette tangenti a K dai rispettivi punti, il polo P della retta p rispetto a K è il punto d'intersezione delle due rette passanti per i rispettivi punti di tangenza ottenuti dalle coppie di rette tangenti a K condotte ordinatamente dai due punti Q ed R; tale punto P esiste ed è unico.

Se nella fig.n.3 si traccia una qualunque retta passante per P, indicato con P' il punto di intersezione con la retta polare p di P e con P_1 e P_2 i punti di intersezione con la conica, i due punti P e P' dividono armonicamente i punti di intersezione P_1 e P_2 , cioè il birapporto dei quattro punti è uguale a –1, e si scrive:

$$(P, P', P_1, P_2) = \frac{PP_1}{P'P_1} : \frac{PP_2}{P'P_2} = -1$$

Per ulteriori approfondimenti, consultare il Castelnuovo.

Bibliografia

[1] Guido Castelnuovo: Lezioni di geometria-Casa editrice Dante Alighieri.
[2] Luigi Campedelli :Lezioni di geometria-Ed.CEDAM
[3] Dantoni- Mammana: Lezioni di geometria-Casa editrice Di Stefano
[4] Stoka: Lezioni di geometria-Ed.CEDAM
[5] Stoka-Pipitone: Lezioni ed esercizi di geometria, Vol I. Ed.CEDAM
[6] Rosati : Lezioni di geometria- Edizioni Libreria Cortina Padova
[7] Sernesi: Geometria I-Ed.Bollati Boringhieri
[8] Martinelli: Metodo delle coordinate- Roma Editrice V. Veschi
[9] Morris Kline :Storia del pensiero matematico, voll I e II-Ed EINAUDI
[10] Maraschini-Palma: Format, Vol.I SPE, Ed. Paravia.