Le affinità piane applicate alla teoria delle coniche

. **di Santangelo Maurizio**

Ringraziamenti dell'autore

Ringrazio il Prof. Zarbo Piero, mio caro e molto valente collega dell'ITIS "A.Volta", per avermi sollecitato ad affrontare alcuni problemi con l'utilizzo del calcolo matriciale al fine di snellire notevolmente alcuni calcoli, anche se in tal modo questi appunti risultano di più difficile comprensione per studenti di scuola superiore.
Inoltre ringrazio l'ottimo Prof. Spagnolo Filippo del G.R.I.M. dell'Università di Palermo per aver reso possibile la pubblicazione di questi appunti e per avermi suggerito di dedicare uno spazio (l'ultimo paragrafo della prima parte e l'ultimo della seconda parte) sulla raccolta di metodi per lo studio delle coniche.
Particolari ringraziamenti sono indirizzati al caro collega Prof. Perez Emanuele che ha controllato gli appunti con meticolosa cura. In ogni caso l'autore si assume tutte le responsabilità per eventuali errori rimasti negli appunti.

Indice

Parte prima (di Santangelo Maurizio).

Le affinità piane applicate alla teoria delle coniche.

Introduzione

In questi appunti si affronterà il problema dell'applicazione della teoria delle trasformazioni geometriche lineari piane(con piani e sistemi di riferimento cartesiani ortogonali coincidenti) alla teoria delle coniche.
Molto è stato scritto sullo studio delle coniche mediante cambiamenti di riferimento per rotazione e traslazione, ma per quanto riguarda le applicazioni delle trasformazioni geometriche alla teoria delle coniche non si trova molto materiale in giro, ad eccezione di qualche libro pur valido e molto chiaro, utilizzato come testo in qualche scuola superiore al fine di essere compreso dalla maggioranza degli alunni.
Un testo universitario molto apprezzato e conosciuto che affronta il problema è il Sernesi: Geometria 1, Bollati Boringhieri, che però mantiene un livello molto elevato e non è facilmente comprensibile a livello di scuola superiore. Pur essendo l'argomento " trasformazioni geometriche" molto noto ed ampiamente trattato in molti libri, a conoscenza dello scrivente non allo stesso modo è trattato l'argomento suddetto applicato alla teoria delle coniche. Non che lo scrivente , insegnante di matematica nella scuola superiore (attualmente all'I.T.I.S. A.Volta di Palermo) , abbia minimamente la pretesa di aggiungere qualcosa di importante e di nuovo a quanto già si conosce, ma ha sentito l'esigenza culturale di mettere a fuoco alcuni aspetti riguardante il rapporto tra le due teorie e di studiare in modo completo ed organico,per quanto possibile per l'autore, una conica reale non degenere mediante la teoria delle trasformazioni geometriche lineari piane, dato che oltretutto questo argomento ha una sua rilevanza negli istituti informatici e nei licei scientifici tradizionali e non. E' da sottolineare, inoltre, il collegamento esistente tra cambiamento di riferimento cartesiano e trasformazione geometrica, che sostanzialmente conduce sovente a calcoli algebrici molto simili, ma nonostante ciò la teoria delle trasformazioni geometriche, mediante le regole di composizione, maggiormente si presta secondo lo scrivente ad un più facile ed immediato studio delle coniche. In questi appunti si farà vedere come le coniche trasformate mediante isometrie conservano gli invarianti. In questi appunti si parlerà soprattutto di isometrie; si introdurrà la simmetria assiale obliqua(affinità omologica generale con rapporto uguale a -1) in modo tale che , applicandola ad una conica, si possa giungere all'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati e quindi anche all'equazione degli assi e degli asintoti di una conica, indipendentemente dalla teoria delle coordinate omogenee che frequentemente nella scuola superiore non si studia.
A conclusione della prima parte è riportata una raccolta di metodi per la determinazione del centro, degli assi e degli asintoti in una conica a centro, sotto il

suggerimento del Prof. Spagnolo Filippo. Le coniche inizialmente sono date sotto forma generale, e quindi tramite le trasformazioni isometriche si giunge alla forma canonica di cui sono noti tutti gli elementi, e successivamente, mediante le trasformazioni isometriche inverse è possibile risalire agli elementi corrispondenti della conica generale proposta. Per concludere lo scrivente sottolinea che, volendo essere questi appunti diretti anche a studenti di scuola superiore-post diploma, inizialmente si era orientato ad utilizzare soltanto il calcolo algebrico tradizionale; ma successivamente, avendo incontrato calcoli particolarmente laboriosi, ha deciso di utilizzare anche il calcolo matriciale, come suggeritogli dal Prof. Zarbo. La seconda parte presenta diversi esempi numerici riguardanti le trasformazioni di coniche.

I . Affinità piane.

Dati due piani con due rispettivi sistemi di riferimento cartesiani ortogonali piani monometrici xOy ed x'O'y', dicesi t.g.l.p. un insieme di due equazioni algebriche lineari in x, y, x' ed y' tali che al punto generico P(x,y) corrisponda in modo biunivoco il punto P'(x',y') (cioè al punto P' deve corrispondere il punto P tramite la trasformazione inversa). In generale una t.g.l.p è rappresentata algebricamente da un sistema di equazioni lineari del tipo:

$$\text{I.1)}\quad \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad \text{con } ad - bc \neq 0,$$

affinchè il sistema sia invertibile; il sistema 1), che rappresenta una t.g.l.p. denominata , ad esempio, T , consente di passare dal punto P(x,y) al punto P'(x',y') tramite T, ovvero dal punto P'(x',y') si può passare al punto P(x,y) tramite la trasformazione inversa rappresentata dal sistema 1) risolto rispetto ad x ed y:

$$\text{I.2)}\qquad T^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{d}{ad-bc}x' - \dfrac{b}{ad-bc}y' + \dfrac{bq-dp}{ad-bc} \\ y = -\dfrac{c}{ad-bc}x' + \dfrac{a}{ad-bc}y' + \dfrac{cp-aq}{ad-bc} \end{cases} \quad \text{dove } T^{-1} \text{ indica la trasformazione inversa di } T.$$

Se i due piani ed i rispettivi sistemi di riferimento cartesiano coincidono, allora la tglp si denomina affinità piana , detta anche trasformazione geometrica lineare dei punti di un piano in se stesso. Se, assegnata un'affinità piana e scelti due generici punti P e Q, i due punti corrispondenti nell'affinità sono P' e Q' tali che PQ=P'Q'(cioè le distanze rimangono inalterate), allora la trasformazione in questione si chiama isometria piana. Affinchè il sistema 1) possa rappresentare un'isometria devono verificarsi notoriamene le seguenti condizioni:

$$\text{I.3)}\quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \;;\; ab + cd = 0 \quad \text{e da queste si ottengono:}$$

$$ac + bd = 0 \;;\; a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \;;\; ad - bc = \pm 1$$

Le formule I.3 si possono ottenere velocemente col calcolo matriciale, indicando con

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la matrice ortogonale del sistema I.1 ed imponendo :

$A \cdot {}^{t}A = {}^{t}A \cdot A = I$ con $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice identica del secondo ordine.

Si ricorda che una matrice si definisce ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta. Inoltre il valore assoluto del determinante è uguale ad uno. In base alla definizione di isometria è chiaro che una qualunque curva(e quindi anche una conica) sottoposta ad una tale trasformazione non si deforma, cioè si mantiene uguale, come forma, alla curva di partenza potendosi le due curve sovrapporre. Le isometrie utilizzate in questi appunti sono:

<u>Le traslazioni</u>: dicesi traslazione una isometria che trasforma il punto P(x,y) in un punto P'(x',y') tale che P rappresenti l'origine e P' l'estremità di un vettore assegnato v di componenti a e b; la traslazione si può indicare con T(v) od anche T(a,b) ed è rappresentata dal sistema di equazioni:

$$\text{I.4)}\quad T : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

e la trasformazione inversa che nel caso specifico si può pure indicare pure con T(-v)=T(-a,-b), è rappresentata dal sistema di equazioni:

$$\text{I.5)}\quad T^{-1} : \begin{cases} x = x'-a \\ y = y'-b \end{cases}$$

Mediante le I.4), equazioni della traslazione diretta, è possibile noto il punto P determinare il punto P'; viceversa è possibile noto P' determinare P tramite le I.5),equazioni della traslazione inversa.-

N.B.:da ora in poi, in conformità a quanto usualmente utilizzato, una qualunque trasformazione inversa si indica col simbolo della trasformazione elevato a –1.

<u>Le simmetrie centrali</u>: dato in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale piano monometrico un punto $C(x_o,y_o)$, dicesi simmetria centrale di centro C quella trasformazione piana S_c che associa al punto P(x,y) il punto P'(x',y') tale che il segmento PP' abbia C come punto medio: da cui il sistema di equazioni:

$$\text{I.6)}\quad S_C : \begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases}$$

e l'affinità inversa è:

$$\text{I.7)}\quad S_C^{-1} : \begin{cases} x = 2x_C - x' \\ y = 2y_C - y' \end{cases}$$

Notare che la 7) si ottiene dalla 6) semplicemente scambiando x con x' ed y con y', e le equazioni formalmente rimangono le stesse; ciò significa che mediante la S_c si passa da P a P' ed anche da P' a P, e pertanto vale anche:

$$\text{I.8)}\quad S_C = S_C^{-1} \qquad \text{od anche} \qquad \text{I.8')}\quad S_C \circ S_C^{-1} = I$$

Il tondino indica l'operatore composizione di affinità e la I l'affinità identica, cioè quella affinità che fa corrispondere ad un qualunque punto P del piano il punto P' coincidente con P stesso:

$$I: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Quando valgono le considerazioni sopra viste e le 8) si dice che l'affinità (in questo caso la S_c) è involutoria. Il vantaggio di tale proprietà è che, comunque complicate siano le equazioni delle affinità involutorie, le loro inverse si ottengono semplicemente scambiando x ed y ordinatamene con x' ed y'.
E' interessante osservare che ,confrontando le 1) con le 6) si ha: a=-1, b=c=0 , d=-1 e valgono le 3) quindi le simmetrie centrali sono isometrie piane; inoltre ad-bc=1 e la simmetria si definisce non invertente, cioè terne di punti corrispondenti si inseguono nello stesso verso(orario od antiorario).
<u>Le simmetrie assiali (rette)</u>: si ricorda che si definisce asse di un'affinità quella retta luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità in esame.
Dato in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale piano monometrico una retta di equazione a) y=mx+p, dicesi simmetria assiale di asse a) quella trasformazione geometrica piana S_a che associa al punto P(x,y) il punto P'(x',y') tale che:1) il segmento PP' risulti ortogonale all'asse a 2) il punto medio del segmento PP' appartenga all'asse. Da quanto detto seguono le note equazioni:

$$\text{I.9)}\quad S_a : \begin{cases} x' = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{2pm}{1+m^2} \\[2ex] y' = \dfrac{2m}{1+m^2}x - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + \dfrac{2p}{1+m^2} \end{cases}$$

Dal confronto tra le 1) e le 9) si nota che valgono le 3) e quindi la simmetria assiale è un'isometria; inoltre ad-bc=-1, cioè una generica simmetria assiale è una trasformazione invertente, cioè ad una terna di punti P,Q,R corrispondono nella trasformazione assegnata i punti P',Q',R' che si inseguono in verso opposto. Inoltre è evidente, in base a semplici considerazioni geometriche, che a P corrisponde P' nella isometria S_a , e nella medesima trasformazione a P' corrisponde P, cioè S_a è involutoria; ciò significa che, per determinare le equazioni della trasformazione inversa di S_a si possono semplicemente scambiare x con x' ed y con y' invece di risolvere il sistema 9) rispetto ad x ed y.

$$\text{Se } m = tg\frac{\alpha}{2} \text{ allora le 9) divengono: } \quad I.9') \quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y sen\alpha - p sen\alpha \\ y' = x sen\alpha - y\cos\alpha + 2p\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Le rotazioni: dato in un sistema di riferimento cartesiano piano ortogonale monometrico un punto O ed una certa ampiezza angolare, dicesi rotazione di centro O ed ampiezza assegnata quella affinità che consente di trasformare il punto P(x,y) nel punto P'(x',y') tale che OP=OP' e che l'angolo POP' sia di ampiezza assegnata. Si ha:

$$I.10) \quad R_{0,\alpha}: \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

La rotazione è un'isometria non invertente dato che ad-bc=1, e non è involutoria. Allora per la determinazione delle equazioni inverse delle 10) si può procedere con un qualunque metodo di risoluzione di sistemi algebrici di primo grado(ad esempio il metodo di Kramer) ovvero in questo caso si può fare un'osservazione interessante:

scambiare x con x', y con y' e α con $-\alpha$ ottenendo:

$$I.11) \quad R^{-1}_{O,\alpha}: \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y' sen\alpha \\ y = -x' sen\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

II. La simmetria assiale obliqua.

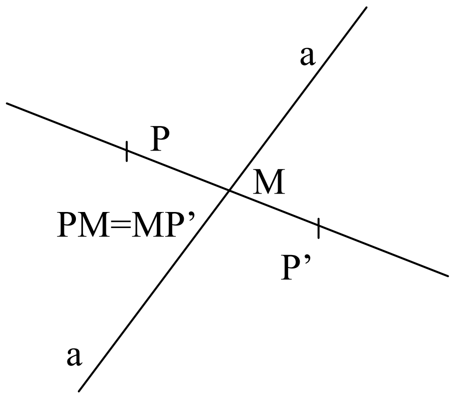
Siano dati, in un sistema di riferimento cartesiano piano ortogonale monometrico, una retta di equazione a) y=mx+p e si fissi un numero reale k finito e diverso da m: si definisce simmetria assiale obliqua S_{ao} di asse a) e direzione di coefficiente angolare k, quella affinità che associa al punto generico P(x,y) il punto P'(x',y') tale che 1) i punti P e P' stiano su una retta di coefficiente angolare k 2) il punto medio del segmento PP' appartenga all'asse.

Scrivendo le equazioni ed isolando x' ed y' si ottengono le equazioni della trasformazione richiesta S_{ao}:

$$II.1) \quad S_{ao}: \begin{cases} x' = \frac{k+m}{k-m}x - \frac{2}{k-m}y + \frac{2p}{k-m} \\ y' = \frac{2km}{k-m}x - \frac{k+m}{k-m}y + \frac{2pk}{k-m} \end{cases}$$

Per la trasformazione in esame si nota che in generale le I.3) non valgono e pertanto le simmetrie assiali oblique non sono isometrie, non conservando le distanze come è immediato verificare geometricamente: difatti, comunque scelti due punti P e Q, i due punti corrispondenti P' e Q' non sono tali che PQ=P'Q'. Ciò accade solo se la direzione di coefficiente angolare k è perpendicolare all'asse, cioè k=-1/m: con questa condizione la simmetria assiale diventa retta ed è un'isometria, difatti le I.3) in questo caso valgono. Inoltre è evidente, in base a immediate considerazioni geometriche, che le simmetrie assiali oblique sono involutorie, perché da P si passa a P'tramite la S_{ao}, e con la medesima trasformazione si passa da P' a P. Ciò vuol dire che, se si vuole determinare le equazioni della trasformazione inversa di S_{ao} , basta nelle II.1) scambiare x ed y rispettivamente con x' ed y'.

Fig.n.1



In questa trasformazione geometrica accade che, scelti comunque tre punti P,Q ,R e determinati i punti corrispondenti P',Q',R', si ottengono i triangoli PQR e P'Q'R' equivalenti con i vertici che si inseguono nei due triangoli in verso opposto e con una coppia di angoli supplementari ; questo è il motivo per cui in una qualunque simmetria assiale obliqua: ad-bc=-1; se la simmetria assiale in particolare è retta,i due angoli supplementari diventano retti ed i due triangoli su nominati sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Pertanto la particolare simmetria assiale ottenuta è una isometria.

III. Invarianza di una conica rispetto alle trasformazioni isometriche.

Sia data su un piano cartesiano ortogonale una conica reale K non degenere di equazione:

$$\text{III.1)} \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\text{con} \qquad \text{III.2)} \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ed} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{con } i,j = 1,2,3.$$

$$\text{III.3)} \quad I_1 = a_{11} + a_{22} \qquad ; \; \text{III.4)} \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

I_1, I_2, I_3 si denominano rispettivamente invarianti lineare, quadratico e cubico della conica assegnata. Notoriamente, affinché la conica sia non degenere, deve risultare I_3 diverso da zero. Si sviluppi il determinante simmetrico del terzo ordine, secondo l'ultima riga col primo teorema di Laplace ottenendo:

$$\text{III.5)} \qquad I_3 = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23}$$

Esiste un importante teorema sulle coniche, attribuito ad Eulero, secondo cui una qualunque conica, sottoposta a cambiamenti di riferimento per rotazione e traslazione, mantiene invariate le espressioni I_1, I_2, I_3; per tale motivo I_1, I_2, I_3 sono denominati rispettivamente invariante lineare, quadratico e cubico. Tale teorema si può applicare alla teoria delle trasformazioni geometriche giungendo ad una evidente conclusione(come osservato dal Prof. Zarbo durante una nostra chiacchierata): dato che in una isometria le distanze si conservano e una qualunque isometria è rappresentata da una matrice ortogonale col valore assoluto del determinante uguale ad uno, così come nei cambiamenti di riferimento per traslazione e rotazione(in questo caso il determinante è uguale ad uno), è ovvio che una qualunque conica trasformata mediante una qualunque isometria conserverà gli invarianti lineare, quadratico e cubico. Si proceda alla dimostrazione che una qualunque conica, di equazione III.1) e con invariante lineare I_1, sia trasformata mediante una qualunque isometria, la cui inversa è rappresentata dalle equazioni I.1(con x,y ed x',y' scambiate), in una conica di equazione:

$$\text{III.6)} \quad a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}x + 2a'_{23} + a'_{33} = 0$$

con invariante lineare $I'_1 = I_1$.

Se si sostituisce nella III.1 al posto di x l'espressione ax'+by'+p ed al posto di y cx'+dy'+q, sviluppando ed ordinando si ottiene la III.6 con

$$\text{III.7)} \quad \begin{cases} a'_{11} = a_{11}a^2 + a_{22}c^2 + 2a_{12}ac \\ a'_{22} = a_{11}b^2 + a_{22}d^2 + 2a_{12}bd \\ a'_{12} = a_{11}ab + a_{22}cd + a_{12}ad + a_{12}bc \\ a'_{13} = a_{11}ap + ca_{22}q + a_{12}aq + a_{12}pc + a_{23}c + a_{13}a \\ a'_{23} = a_{11}bp + a_{22}dq + a_{12}bq + a_{12}pd + a_{23}d + a_{13}b \\ a'_{33} = a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + 2a_{12}pq + 2a_{13}p + 2a_{23}q + a_{33} \end{cases}$$

da cui: $a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(a^2 + b^2) + a_{22}(c^2 + d^2) + 2a_{12}(ac + bd)$

e per le I.3) segue: $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$.

Si passi a dimostrare che in seguito ad una trasformazione isometrica, $I_2 = I_2'$. A tal fine, utilizzando le prime tre formule delle III.7), si ottiene, dopo qualche passaggio:

$$\text{III.8)} \quad a'_{11}a'_{22} - a'^{2}_{12} = (ad - bc)^2(a_{11}a_{22} - a^2_{12}) \text{ e valendo in un'isometria } (ad - bc)^2 = 1$$

$$\text{da cui segue: } I_2 = I'_2 \text{ (formula di Gauss)}$$

La dimostrazione della costanza di I_2 in una conica trasformata isometricamente sarà svolta anche per via matriciale(dimostrazione presa da (1) Stoka).
Si passi a dimostrare che in seguito ad una traslazione di componenti –p e –q, $I_3=I_3'$. Questo risultato si ottiene, ponendo nelle III.7) a=d=1 , b=c=0 ed utilizzando queste ultime modificate e la III.5) .

Si passi a dimostrare che in una conica sottoposta ad una centroisometria (vedere le I.1) con p=q=0 e per convenienza x,y scambiati con x' ed y', in modo che le I.1 così modificate rappresentino l'inversa di una generica centroisometria) I_3 si mantiene costante ; si noti che III.9) $a_{33}=a'_{33}$. A tal fine si devono porre nelle III.7) p=q=0 e sostituire, nella III.5) i coefficienti con gli apici le cui formule sono riportate nelle III.7), ottenendo, dopo alcuni passaggi:

$$\text{III.10)} \quad -a'^{2}_{23}a'_{11} - a'_{22}a'^{2}_{13} + 2a'_{12}a'_{13}a'_{23} = (-a_{11}a^2_{23} - a_{22}a^2_{13} + 2a_{12}a_{13}a_{23})(ad - bc)^2 ;$$

$$\text{valendo in un'isometria } (ad - bc)^2 = 1 \text{ ed addizionando membro a membro}$$

$$a_{33}I_2 = a'_{33}I'_2 \quad \text{segue } I_3 = I'_3 .$$

Per l'invarianza di I_3 in una conica sottoposta ad una generica trasformazione isometrica è riportata nel seguito una dimostrazione matriciale.
Dimostrazioni svolte col calcolo matriciale. Si dimostri che assegnata una curva di equazione III.1) e di invariante quadratico I_2 e trasformata detta curva mediante una isometria generica con invariante quadratico I_2', allora $I_2=I_2'$.Se si sottopone la curva ad una traslazione di componenti –p e –q la sua equazione si modificherà lasciando però inalterati i coefficienti a_{11},a_{22},a_{12}, come si può osservare dalle III.7); quindi sicuramente in seguito ad una generica traslazione il parametro I_2 non varia.
Trasformando la curva C di equazione III.1 con una isometria di equazione matriciale: III.11) X'=AX con A matrice ortogonale data dalla I.3', e con X, ed X' vettori colonna dati da

$$\text{III.11)} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad ; \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Si ottiene una curva C') di equazione del tipo III.6) con i coefficienti dei termini di secondo grado mutati.

Essendo la forma quadratica:

III.13) $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y'$ rappresentata dalla matrice:

III.13') $M' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{bmatrix}$ e la forma quadratica: III.14) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$

rappresentata dalla matrice: III.14') $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ e valendo

per la forma quadratica III.14) l'espressione matriciale III.15) ${}^tXMX$,

per l'isometria si ha: III.16) $X = A^{-1}X' = {}^tAX'$ essendo la matrice A ortogonale .

Sostituendo la III.16) nella III.15) si ottiene: ${}^tX'A\ M\ {}^tAX'$ ed imponendo l'uguaglianza

con la ${}^tX'M'X'$ che rappresenta la forma quadratica III.13) segue:

$M' = A\ M\ {}^tA$, da cui calcolando i determinanti di ambo i membri con il

teorema di Binet, essendo $\det(A) = \det({}^tA) = \pm 1$ si conclude $\det M = \det M'$

cioè $I_2 = I'_2$ c.v.d.

Questa dimostrazione è stata presa in buona parte da [1] Stoka: Lezioni di geometria ED.CEDAM riportata nella bibliografia.
Per quanto riguarda la dimostrazione matriciale del teorema che una qualunque curva di equazione III.1 trasformata mediante una generica isometria conservi il parametro I_3 , è opportuno premettere che, dato un polinomio di secondo grado di equazione III.1) e sostituito x con x+p ed y con y+q, si ottiene un nuovo polinomio di secondo grado in x ed y la cui matrice quadrata simmetrica associata ha la terza colonna combinazione lineare secondo i coefficienti p e q delle altre due colonne, e la matrice quadrata cui si perviene ha la terza riga combinazione lineare delle prime due secondo i coefficienti p e q, ottenendo la matrice associata del polinomio III.1) di partenza; cioè le due matrici quadrate associate del terzo ordine sono diverse ma hanno uguali determinanti. Per la dimostrazione dell'invarianza del parametro cubico I_3 si può procedere nel seguente modo. Si ricordi che l'equazione III.1) scritta sotto forma matriciale è la seguente(rif.bibl.[4]):

III.17) $\,{}^{t}X\,B\,X = 0$ dove B indica la matrice simmetrica il cui determinante è I_3

$$\text{e con } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dato che la matrice B è del terzo ordine e l'isometria di equazioni I.1 si può scrivere sotto forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix}$$

od anche : 18) X'=CX+P con:

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\; P = \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix}$$

essendo C matrice ortogonale, isolando X si ottiene, dalla 18)

$X = {}^{t}C\,(X'-P)$ essendo $C^{-1} = {}^{t}C$, e sostituendo X nell'equazione matriciale III.17) segue : III. 19) $\;{}^{t}(X'-P)\,C\;B\;{}^{t}C\,(X'-P) = 0$

che rappresenta l'equazione matriciale della generica curva del secondo ordine di equazione III.17) trasformata tramite l'isometria di equazione III.18).Dato che l'equazione generica della curva del secondo ordine trasformata è:

$$\text{III.20)} \quad {}^{t}X'\,B'\,X' = 0$$

dal confronto tra la III.19) e la III.20 si può asserire che, per quanto osservato preliminarmente nella pagina 11:

$$\text{III.21)} \quad B' \neq {}^{t}C\,B\,C \quad \text{ma} \quad \det(B') = \det({}^{t}C\,B\,C)$$

da cui, applicando il teorema di Binet ed essendo:

$$\det({}^{t}C) = \det(C) = \pm 1$$

segue, dalla III.21 : det(B')=det(B) cioè $I_3=I_3'$ c.v.d.
Modo alternativo di dimostrazione.
L'osservazione preliminare significa anche che, una qualunque curva del secondo ordine trasformata per traslazione(ad esempio di componenti p e q) conserva l'invariante I_3. Quindi basta dimostrare che per ogni centroisometria I_3 si conserva; le equazioni di tali trasformazioni si ottengono ponendo P=0 nelle III.18) da cui: III.22) X'=CX con C matrice ortogonale, e l'equazione inversa della centroisometria in esame è:

$$\text{III.23)}\quad X = {}^{t}C\,X' \quad .$$

Utilizzando la III.17 e la III.23, l'equazione scritta sotto forma matriciale della generica curva del secondo ordine trasformata mediante la generica centroisometria diventa:

$$\text{III.24)}\quad {}^{t}X'\ {}^{t}C\,B\,C\,X' = 0$$

e dal confronto con l'equazione matriciale III.20) segue:

$$B' = {}^{t}C\,B\,C \quad \text{da cui: } \det(B') = \det(B) \quad \text{cioè } I_3 = I_3' \ .$$

Si è dimostrato che una qualunque curva del secondo odine di equazione III.1), trasformata mediante una generica isometria, mantiene invariati i parametri I_1,I_2,I_3 che per tale motivo si chiamano rispettivamente invarianti lineare, quadratico e cubico. Tale importante teorema dovuto ad Eulero, consente di classificare tutte le curve del secondo ordine risalendo alle forme canoniche, come si vedrà nel prossimo paragrafo. Se per ogni forma canonica cui si perverrà partendo dalla III.1) e trasformando con isometrie (in particolare traslazioni e rotazioni specifiche) si ottengono dei valori I_1,I_2,I_3,tali valori rimarranno costanti per ogni forma canonica ottenuta, e ciò accade in virtù del teorema di Eulero. Come si vedrà, la III.1) contempla anche alcuni casi di coppie di rette, dato che la loro equazione rappresentativa è di secondo grado in x ed y; per tale motivo, quando la III.1) rappresenta una coppia di rette si parla di conica degenere, ed in questo caso succede notoriamente che I_3=0.N.B.: ovviamente , siccome l'equazione III.1) è determinata a meno di una costante k diverso da zero, anche gli invarianti che si trovano sono invariati, ma subordinatamente alla scelta di K.

IV. Le equazioni delle coniche scritte in forma canonica.

Scopo di questo paragrafo è di riportare tutte le possibili coniche rappresentabili o mediante la III.1), o deducibili da tale formula per trasformazioni isometriche. In questo paragrafo si cureranno in particolare le coniche con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani , le quali si ottengono come luoghi geometrici con i fuochi posizionati su tali assi cartesiani; le equazioni di tali coniche si denominano forme canoniche . Oltre a queste equazioni si debbono considerare quelle rappresentative di coppie di rette che possono presentarsi con equazioni del tipo III.1) in seguito a trasformazioni isometriche ; esse costituiscono le coniche degeneri e sono caratterizzate dall'avere I_3=0. Si definisce conica non degenere di fuoco F e rette direttrice d il luogo geometrico dei punti P tali che il rapporto tra la distanza dal fuoco e la distanza dalla direttrice sia costante e pari ad e(eccentricità della conica: se e>1 iperbole, se e <1 ellisse, se e=1 parabola. Si riportano i vari casi di coniche le quali possono essere definite come luoghi geometrici in modo alternativo come segue.

Ellisse (a punti reali).- Si definisce ellisse di fuochi F(c,0) ed F'(-c,0) ed asse maggiore 2a, il luogo geometrico dei punti P tali che la somma delle distanze dai fuochi è costante e pari a 2a, notoriamente l'equazione cui si perviene è:(con a>b)

$$\text{IV.1)}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\text{ e }\; c=\sqrt{a^2-b^2}\;;\text{le equazioni delle rette direttrici sono : }\; x=\pm\frac{a^2}{c}\;.$$

Se a<b allora i fuochi sono F(0,c), F'(0,c) con

$$\text{IV.2)}\quad c=\sqrt{b^2-a^2}\;\;;\text{le equazioni delle rette direttrici sono : }\; y=\pm\frac{b^2}{c}$$

e l'equazione dell'ellisse è ancora la IV.1). Gli assi ovviamente hanno equazioni: x=0 ,y=0.I vertici posseggono le seguenti coordinate: V_1(a,0), V_2(0,b) , V_3(-a,0) , V_4(0,-b) .La formula IV.1) si può scrivere:

$$\text{IV.3)}\quad b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \quad \text{e quindi dalla III.1) si ha in generale:}$$
$$a_{11}=kb^2\;;\quad a_{22}=ka^2\;;\; a_{33}=-ka^2b^2\;;\quad a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$$

con k costante di proporzionalità non nulla, e dalle formule III.2), III.3) e III.4) segue:

$$\text{IV.4)}\quad I_3=-k^3a^4b^4\neq 0\;;\qquad I_2=k^2a^2b^2>0\;\;;\qquad I_1=k(a^2+b^2)\neq 0\;.$$

Ellisse a punti immaginari. L'equazione è del tipo:

$$\text{IV.5)}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{od anche}\quad a^2x^2+b^2y^2+a^2b^2=0\;.$$

Dedotti i coefficienti a_{ij} dal confronto tra la III.1) e la IV.5),e per le III.2), III.3) e III.4) segue:

$$\text{IV.6)}\quad I_3=k^3a^4b^4\neq 0\;;\quad I_2=k^2a^2b^2>0\;\;;\quad I_1=k(a^2+b^2)\neq 0\;\;\text{con}\; I_3I_1>0\;.$$

Iperbole reale (a punti reali).- L'iperbole è il luogo geometrico di punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi detti fuochi è (2a con a) costante; se i fuochi hanno coordinate F(c,0) , F'(-c,0) e la costante è 2a, allora l'equazione dell'iperbole è:

$$\text{IV.7)}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \quad c=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ \text{le equazioni delle rette direttrici sono: } x=\pm\frac{a^2}{c}$$

In questo caso l'asse delle y(x=0)è l'asse non trasverso, l'asse delle x (y=0) è l'asse traverso ed i vertici sono. V(a,0) , V'(-a,0). Gli asintoti hanno equazioni:

$$\text{IV.8)}\quad y=\pm\frac{b}{a}x\ .$$

Se i fuochi sono F(0,c) ed F'(0,-c) e costante sempre 2a, l'equazione dell'iperbole diventa:

$$\text{IV.9)}\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad ; \quad \text{le equazioni delle rette direttrici sono: } y=\pm\frac{b^2}{c}$$

In questo caso l'asse trasverso è quello delle y, l'asse non trasverso è quello delle x ed i due vertici sono V(0,b) V'(0,-b); per quanto riguarda il parametro c e le equazioni degli asintoti le formule sono le stesse che nel caso precedente.
Compendiando le due equazioni dell'iperbole in una sola, confrontando con la III.1) ed utilizzando le III.2), III.3) , III.4) si ottiene:

$$\text{IV.10)}\quad I_1=k(b^2-a^2)\ ;\ I_2=-k^2a^2b^2\ ;\ I_3=\pm k^3a^2b^2\ .$$

Caso delle rette immaginarie (o del punto reale).-L'equazione trasformata è del tipo:

$$\text{IV.11)}\qquad a^2x^2+b^2y^2=0$$

da cui, col solito procedimento:

$$\text{IV.12)}\quad I_1=k(a^2+b^2)\ ;\ I_2=k^2a^2b^2\ ;\ I_3=0\ .$$

Caso delle rette reali incidenti.- L'equazione della conica trasformata può essere del tipo:

$$\text{IV.13)}\quad a^2x^2-b^2y^2=0$$

nel qual caso si dice che la conica è degenere ed è costituita da una coppia di rette reali e incidenti di equazioni : ax-by=0 ed ax+by=0 . In questo caso:

$$\text{IV.14)}\qquad I_1=k(a^2-b^2)\ ;\ I_2=-k^2a^2b^2\ ;\qquad I_3=0\ .$$

Caso delle rette reali coincidenti.- L'equazione della conica trasformata può essere del tipo:

$$\text{IV.15)} \quad (ax+by)^2 = 0$$

nel qual caso la conica degenera in due rette reali coincidenti, di equazione: ax+by=0. Per quanto riguarda gli invarianti ,essi valgono:

$$\text{IV.16)} \quad I_1 = k(a^2+b^2) \quad ; \quad I_2 = 0 \quad ; \quad I_3 = 0 \quad .$$

Caso delle rette reali parallele.- Si può pervenire, trasformando la III.1), ad una equazione della forma:

$$\text{IV.17)} \quad (ax+p)(ax+q) = 0$$

Con a,p,q numeri reali con a diverso da zero. Svolgendo il prodotto dei binomi, imponendo l'identità con la III.1) ed applicando le formule III.2),III.3),III.4) si ottiene:

$$\text{IV.18)} \quad I_1 = ka^2 \quad ; \quad I_2 = 0 \quad ; \quad I_3 = 0 \quad .$$

Caso della parabola.- La parabola di fuoco F e direttrice una retta d, è il luogo geometrico dei punti equidistanti dal punto F e dalla retta d. Nel caso in cui F abbia coordinate(0,f) e direttrice di equazione y=-f, l'equazione della parabola cui si perviene è:

$$\text{IV.19)} \quad y = \frac{1}{4f}x^2$$

Con vertice V(0,0).Per quanto riguarda gli invarianti si ha:

$$\text{IV.20)} \quad I_1 = \frac{k}{4f} \quad ; \quad I_2 = 0 \qquad I_3 = \frac{k^3}{16f}$$

Se il fuoco F ha coordinate (f,0) e l'equazione della direttrice è x=-f, l'equazione della parabola ovviamente diviene(si scambia x con y):

$$\text{IV.21)} \quad x = \frac{1}{4f}y^2$$

Con il vertice V(0,0) e gli invarianti come sopra(vedi IV.20).

Riassumendo, affinché una conica sia non degenere deve essere I_3 diverso da zero, altrimenti si cade nel caso di coniche degeneri, cioè rappresentabili come coppie di rette. Per quanto riguarda le coniche non degeneri: se $I_2<0$ ellisse(se $I_1I_3<0$ a punti immaginari,se $I_1I_3>0$ a punti reali),se $I_2>0$ iperbole, se $I_2=0$ parabola. Per le coniche degeneri $I_3=0$: se le coppie di rette sono incidenti allora I_2 diverso da zero, se invece sono parallele o coincidenti allora $I_2=0$.

V. Determinazione del centro di simmetria di una conica a centro mediante simmetrie centrali.

Sia data in un piano cartesiano ortogonale una conica K con coefficienti reali a punti reali di equazione III.1) ed una simmetria centrale S_c di equazioni I.6): indicata con K' la curva del secondo ordine trasformata di K tramite la trasformazione S_c, si devono calcolare, se possibile x_c e y_c, coordinate del presunto centro C, in modo tale che K e K' coincidano, cioè si deve imporre l'identità tra l'equazione III.1) di K e l'equazione trasformata trovata di K'. Non sempre il problema è risolvibile in modo univoco: il problema è determinato se la curva del secondo ordine K è una conica non degenere a centro(iperbole od ellisse a punti reali), il problema è impossibile se la conica non degenere è una parabola(conica priva di centro), il problema è indeterminato se la conica è degenere. A tal fine, sostituendo nella III.1) le variabili x ed y prese dalle I.7) si ottiene l'equazione della curva K' con le variabili x ed y al posto delle variabili x' ed y' rispettivamente):

$$\text{V.1)}\quad a_{11}x + a_{22}y + 2a_{12}xy - 2x(2a_{11}x_C + 2a_{12}y_C + a_{13}) - 2y(2a_{12}x_C + 2a_{22}y_C + a_{23}) +$$
$$+ 4a_{11}x_C + 4a_{22}y_C^2 + 8a_{12}x_Cy_C + 4a_{13}x_C + 4a_{23}y_C + a_{33} = 0$$

ed imponendo l'identità tra la V.1) e la III.1) si ottiene il sistema:

$$\text{V.2)}\quad \begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases}$$

e la condizione:

$$\text{V.3)}\quad (a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13})x_C + (a_{12}x_C + a_{22}y_C + a_{23})y_C = 0$$

che è verificata in virtù delle V.2). Si noti che il determinante del sistema è:

$$\text{V.4)}\quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

e quindi se $I_2=0$ il sistema V.2) risulta impossibile, cioè la conica non possiede centro; difatti si è nel caso della parabola.

Per il calcolo delle coordinate del centro x_c ed y_c, applicando il metodo di Kramer si ottiene:

$$\text{V.5)} \quad x_C = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad ; \quad y_C = \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

Se nelle V.5) si annulla il denominatore con numeratori diversi da zero,le espressioni di x_c ed y_c sono impossibili e quindi non esiste centro di simmetria : siamo nel caso della parabola.Se si verifica nelle V.5) che:

$$\text{V.6)} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k \neq 0$$

allora il sistema V.2) risulta indeterminato, cioè esistono infiniti punti C allineati su una delle due rette (coincidenti) costituenti il sistema; in questo caso il determinante I_3 presenta le prime due righe proporzionali, e quindi $I_3=0$: siamo nel caso di conica degenere, cioè la curva di secondo ordine è spezzata in due rette. Si noti che una qualunque conica (ed in generale una qualunque curva) trasformata isometricamente non si deforma dato che, comunque scelti due punti P e Q sulla curva, i punti corrispondenti trasformati P' e Q' manterranno invariate le distanze.

VI. Determinazione dell'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati in una conica mediante le simmetrie oblique: assi ed asintoti

Si definisce corda di una conica un segmento avente come estremi due punti appartenenti alla conica stessa. Si definisce diametro di una conica una corda passante per il centro di simmetria della conica. Pertanto in una conica a centro di diametri ne esistono infiniti e tutti incidenti tra di loro, dato che passano tutti per uno stesso punto, il centro. In una conica non a centro(parabola) i diametri sono tutti paralleli tra di loro ed all'asse di simmetria ,dato che il centro in questo caso è un punto all'infinito del piano. Data una conica K (a centro) ed un diametro d intersecante la conica nei due punti P_1 e P_2, ed indicate con t_1 e t_2 le rette tangenti a K rispettivamente in P_1 e P_2, si definisce diametro coniugato a d nella conica K il diametro d' parallelo ad una delle due tangenti (si ricorda che le tangenti t_1e t_2 sono parallele, come tra poco si proverà).

Fig. n.3

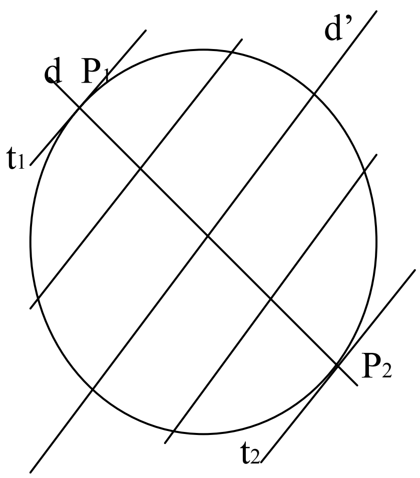
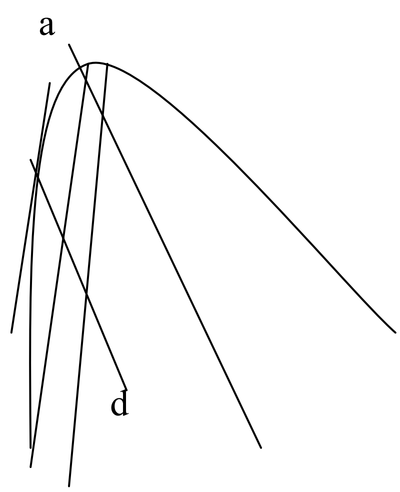


Fig. n. 4



In una conica C non a centro(parabola) non si può parlare di diametri coniugati tra di loro, dato che tutti i diametri in una parabola sono paralleli all'unico asse di simmetria a : in una parabola fissato un diametro d, la direzione coniugata è quella del fascio di corde parallele alla retta tangente alla parabola nell'unico punto di intersezione al finito tra diametro e parabola, e viceversa alla direzione delle corde parallele prefissate corrisponde il diametro coniugato d ; però è importante sottolineare che alla direzione di una corda corrisponde un diametro e non una direzione e quindi non è possibile creare una corrispondenza biunivoca tra direzioni. Il diametro d biseca ciascuna corda di direzione coniugata. Questa proprietà è anche valida nelle coniche a centro, con la differenza che nel fascio delle corde di direzione coniugata a d, esiste quella passante per il centro che è il diametro coniugato d'. E' facile provare che in una conica a centro le due rette t_1e t_2 tangenti alla conica in due punti diametralmente opposti sono parallele(vedere fig. n.3).
Si consideri una retta di equazione:IV.1) y=mx ed una conica data sotto forma canonica di equazione IV.1) o IV.7), e l'equazione della retta tangente a detta conica a centro in un suo punto $P_1(x_o,y_o)$:

$$\text{VI.1)}\quad \frac{xx_o}{a^2} \pm \frac{yy_o}{b^2} = 1$$

Da ora in poi il segno superiore sarà riferito all'ellisse mentre quello inferiore all'iperbole. Se m>0, indicati con $P_1(x_o,y_o)$ e $P_2(-x_o,-y_o)$ i due punti di intersezione tra la retta e la conica, risultano:

$$\text{VI.2)}\quad x_o = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}} \qquad \text{VI.2')}\quad y_o = \frac{mab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

e si ottiene:

$$\text{VI.3)}\quad m_{P1} = \mp\frac{b^2x_o}{a^2y_o} = m_{P2}$$

dove m_{P1} ed m_{P2} sono rispettivamente i coefficienti angolari delle rette tangenti t_1 e t_2, che pertanto si è dimostrato essere parallele. Se m<0 si procede come sopra, soltanto che i punti d'intersezione sono $P_3(-x_o,y_o)$ e $P_4(x_o,-y_o)$ dove x_o è la stessa delle VI.2), mentre

$$\text{VI.4)}\quad y_o = \frac{|m|ab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

Si calcola immediatamente che:

$$\text{VI.5)}\quad m_{P3} = \pm\frac{b^2x_o}{a^2y_o} = m_{P4}$$

cioè le rette tangenti alla conica nei punti P_3 e P_4 sono parallele. Dal momento che una qualunque conica a centro, mediante particolari trasformazioni per traslazioni e per rotazioni si può riportare con il centro nell'origine e con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani, si è provato che, assegnata una qualunque conica ed un suo diametro, le tangenti condotte alla conica per i punti di intersezione tra conica e diametro sono parallele. Tale risultato è evidente dalla teoria della polarità in una conica.
Data una conica C di equazione III.1), ed una simmetria assiale obliqua di equazioni II.1), applichiamo alla conica C la trasformazione suddetta ottenendo la conica C' di equazione:

$$\text{VI.6)}\quad a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad \text{con:}$$

$$\text{VI.7)}\begin{cases} a'_{11} = a_{11}(k+m)^2 + 4a_{22}k^2m^2 + 4a_{12}km(k+m) \\ a'_{22} = 4a_{11} + a_{22}(k+m)^2 + 4a_{12}(k+m) \\ a'_{12} = -2a_{11}(k+m) - 2kma_{22}(k+m) - a_{12}(k+m)^2 - 4kma_{12} \\ a'_{13} = 2a_{11}p(k+m) + 4a_{22}k^2mp + 2pka_{12}(k+m) + 4a_{12}pkm + a_{13}(k^2-m^2) + 2a_{23}km(k-m) \\ a'_{23} = -4p - 2a_{22}pk(k+m) - 4a_{12}pk - 2a_{12}p(k+m) - 2a_{13}(k-m) - a_{23}(k^2-m^2) \\ a'_{33} = 4a_{11}p^2 + 4a_{22}p^2k^2 + 8a_{12}p^2k + +4a_{13}p(k+m) + 4a_{23}pk(k-m) + a_{33}(k-m)^2 \end{cases}$$

Affinché la conica C' trasformata sia identica alla conica di partenza C deve verificarsi l'uguaglianza, a meno di un fattore di proporzionalità h reale diverso da zero, tra i coefficienti della III.1) ed i corrispondenti coefficienti della VI.6), ed in particolare, utilizzando le prime due equazioni delle VI.7), si consideri:

$$\text{VI.8)}\quad a'_{11} = ha_{11} \quad ; \quad a'_{22} = ha_{22}$$

Moltiplicando la prima per a_{22} e la seconda per a_{11} e sottraendo nelle nuove equazioni la prima dalla seconda si ottiene:

$$4a_{11} + 4a_{12}a_{11}(k+m) - 4a_{22}^2k^2m^2 - 4a_{12}a_{22}(k+m) = 0 \quad \text{e dividendo per}$$
$$4(a_{11} - a_{22}km) \neq 0 \quad \text{segue:}$$
$$\text{VI.9)}\quad a_{22}km + a_{12}(k+m) + a_{11} = 0$$

L'equazione VI. 9), molto nota , è denominata equazione dell'involuzione dei diametri coniugati appunto perché k ed m rappresentano i coefficienti angolari di diametri coniugati . Essa è valida solamente per le coniche a centro. L'equazione VI.9) rappresenta un'involuzione perché k ed m si possono scambiare; difatti un'involuzione è una trasformazione geometrica T tale che, se ad un generico punto P corrisponde nella trasformazione T il punto P' , nella trasformazione inversa al punto P' corrisponde il punto P.

Si evince subito, per come è stata definita la simmetria assiale obliqua, che un diametro biseca ogni corda del fascio avente direzione coniugata al diametro assegnato. Il diametro d, coniugato a d' rispetto alla conica, è il luogo geometrico dei punti medi delle corde aventi direzione delle rette tangenti t_1 e t_2 .
Esiste un altro modo per determinare l'equazione VI.9), e consiste nel considerare le coordinate del centro ed i coefficienti angolari delle rette tangenti t_1 t_2. E' noto che, indicati con m_{P1} ed m_{P2} i coefficienti angolari delle rette tangenti alla conica in P_1 e in P_2 rispettivamente, avendo testé provato che $m_{P1}=m_{P2}$ risulta(vedi[11]):

$$\text{VI.10)}\quad m_{P1}=-\frac{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}}{a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23}}\qquad \text{VI.10')}\quad m_{P2}=-\frac{a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}}{a_{12}x_2+a_{22}y_2+a_{23}}$$

Inoltre, posto il valore comune di tali coefficienti angolari uguali a k ed indicato con m il coefficiente angolare del diametro P_1P_2 , tenendo conto delle coordinate del centro della conica C date dalle formule V.5) si può scrivere:

$$m=\frac{y_1-y_C}{x_1-x_C}=\frac{y_1-\dfrac{a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{x_1-\dfrac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}=-\frac{a_{12}a_{11}x_1+a_{12}^2y_1+a_{12}a_{13}-a_{11}a_{12}x_1-a_{11}a_{22}y_1-a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}x_1+a_{22}a_{12}y_1+a_{13}a_{22}-a_{12}^2x_1-a_{12}a_{22}y_1-a_{12}a_{23}}$$

avendo nell'ultimo passaggio addizionato e sottratto a numeratore il termine $a_{11}a_{12}x_1$ ed a denominatore il termine $a_{12}a_{22}y_1$ .Dividendo numeratore e denominatore per il polinomio $a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{23}$ si ottiene:

$$\text{VI.11)}\quad m=-\frac{a_{12}k+a_{11}}{a_{22}k+a_{12}}$$

cioè la VI.9) scritta sotto forma implicita. Si può pervenire allo stesso risultato utilizzando la VI.10') e la

$$\text{VI.12)}\quad m=\frac{y_2-y_C}{x_2-x_C}$$

Osservazioni: l'equazione VI.9) è molto importante per lo studio della conica; difatti, assegnata in una conica a centro un diametro d di coefficiente angolare m, il diametro ad esso coniugato d' si determina scrivendo l'equazione della retta passante per il centro C di coordinate assegnate x_C ed y_C date dalle V.5) e di coefficiente angolare k ottenuto dalla VI.9).Se nella suddetta formula si pone

$$\text{VI.12')}\quad k=-\frac{1}{m}$$

cioè si impone che i due diametri coniugati siano tra di loro perpendicolari , essi si denominano assi della conica, e l'equazione diviene:

$$\text{VI.13)} \quad a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \ .$$

Tale equazione VI.13) è molto importante nella teoria delle coniche ed è l'equazione degli assi di una conica a centro non degenere di equazione III.1).Essa consente di determinare i coefficienti angolari degli assi della conica in esame, e note le coordinate del centro si determinano le equazioni dei due assi cercati.
Intersecando ciascun asse determinato con la conica si determinano i vertici della conica (quattro reali se la conica a centro è un'ellisse, due reali se la conica è un'iperbole) .Si può pervenire all'equazione VI.13), similmente a quanto svolto in precedenza, trasformando con una generica simmetria assiale di equazioni I.9) la conica K in modo tale che la conica ottenuta K' sia identica alla conica originaria K.
Dall'equazione VI.13) si osserva che, se $a_{11}=a_{22}$ e se $a_{12}=0$ (caso della circonferenza), l'equazione si trasforma in una identità che quindi è verificata per un qualunque valore reale di m: ciò significa che nel caso in esame le coppie di assi sono infinite.
Risolvendo la VI.13) si ottiene:

$$\text{VI.14)} \quad m = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

dalla cui formula emerge che, escluso il caso della circonferenza per cui m è indeterminato, il discriminante dell'equazione è maggiore di zero, cioè l'equazione VI.13) non può ammettere soluzioni reali coincidenti, ma ammetterà sempre soluzioni reali e distinte m_1 ed m_2. Nel caso di una conica non a centro(parabola) risulta:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad \text{da cui} \quad m_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad \text{ed} \quad m_2 = \frac{a_{22}}{a_{12}}$$

La considerazione ovviamente non è lecita ma sono interessanti i valori trovati , in quanto i due coefficienti angolari m_1 ed m_2 , che definiscono direzioni ortogonali, rappresentano l'unico asse e la direzione ad essa ortogonale (vedere appendice).

I due coefficienti angolari m_1 ed m_2 , che definiscono direzioni ortogonali, rappresentano l'unico asse e la direzione ad essa ortogonale.
Se in una conica non degenere esiste una coppia di diametri autoconiugati, cioè d=d', si dice che essi costituiscono una coppia di asintoti per la conica(si ricorda che l'asintoto è una tangente all'infinito alla conica). I coefficienti angolari degli asintoti in una conica a centro si determinano ponendo k=m nella equazione VI.9), ottenendo:

$$\text{VI.15)} \quad a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

Si dice che i due asintoti costituiscono gli elementi uniti dell'involuzione dei diametri coniugati. Per chiarire questo concetto può essere utile osservare la fig. n.5 in cui è rappresentata un'iperbole di centro C con i due asintoti a ed a'. Tracciata una qualunque retta r intersecante l'iperbole in due punti P_1 e P_2, siano t_1 e t_2 le tangenti alla iperbole nei rispettivi punti su menzionati; tali due tangenti, per quanto visto precedentemente, sono parallele tra di loro. Pertanto si può dire che la retta r (contenente un diametro dell'iperbole)e la direzione comune delle rette tangenti definiscono una coppia di direzioni coniugate. E' interessante notare che man mano che la retta r tende a ruotare intorno a C sovrapponendosi sulla retta a , i punti P_1 e P_2 di intersezione tra retta r e curva tendono ad allontanarsi dal centro C sino a diventare all'infinito punti appartenenti alla retta a (asintoto) e pertanto l'asintoto risulta una tangente all'infinito all'iperbole; inoltre è importante notare che quando le rette r ed a coincidono la direzione comune delle tangenti risulta coincidente con la direzione dell'asintoto a, e quindi indicato con m il coefficiente angolare della retta r e con k quello delle tangenti t_1 e t_2, affinché si possano determinare i coefficienti angolari degli asintoti dell'iperbole si deve porre nell'equazione VI.9) m=k ottenendo l'equazione algebrica di secondo gradoVI.15).Risolvendo tale equazione si ottiene:

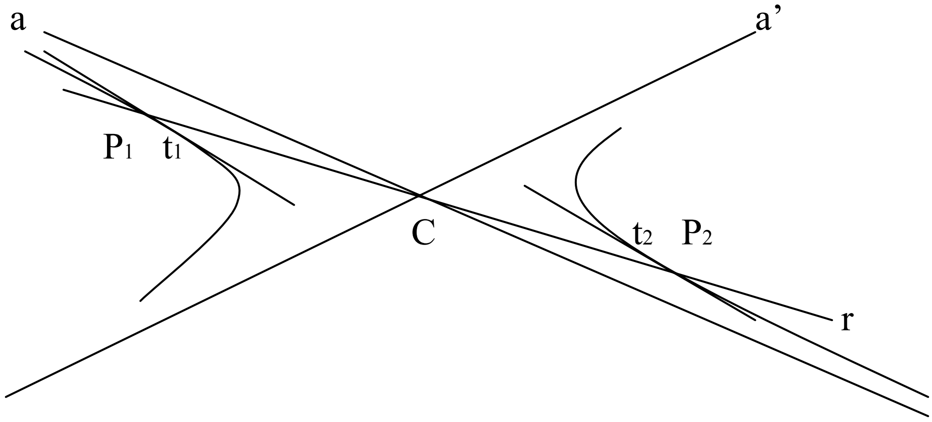
$$\text{VI.16)} \qquad m = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ la conica è un'iperbole e presenta due asintoti reali e distinti.

Se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ la conica è un'ellisse e non presenta asintoti reali.

Se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ la conica non è a centro (parabola) e non presenta asintoti; l'equazione VI.16) ammette due soluzioni reali e coincidenti $m = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ che rappresenta la direzione dei diametri nella parabola e quindi anche del suo asse di simmetria.

Fig.n.5



Se i due elementi uniti sono reali e distinti l'involuzione è iperbolica, se coincidenti essa è parabolica, se i due elementi uniti sono immaginari allora si parla di involuzione ellittica.
Un iperbole si definisce equilatera quando i suoi asintoti sono perpendicolari e ciò accade quando nella VI.15)

$$m_1 m_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}} = -1 \quad \text{da cui segue: } a_{11} + a_{22} = 0$$

Esempi numerici sulla determinazione del centro e degli assi in una conica (a centro, ovviamente): determinare il centro e gli assi della conica di equazione

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

Si vede che la conica in esame ha I_3=-81<0 (conica non degenere) ed inoltre I_2=9>0,I_1=10>0;cioè la conica in esame è un'ellisse a punti reali, essendo I_2>0, I_1I_3<0.

$$\begin{cases} 10x_C + 8y_C = 18 \\ 8x_C + 10y_C = 18 \end{cases} \quad \text{le cui soluzioni sono} \quad x_C = 1 \quad \text{ed} \quad y_C = 1 \quad .$$

Per determinare le coordinate del centro della conica in esame occorre risolvere il sistema:

Per il calcolo dei coefficienti angolari degli assi si deve applicare la formula VI.13 ottenendo l'equazione:

$$4m^2 - 4 = 0 \ \text{ cioè } \ m = \pm 1$$

Un asse sarà una retta del fascio di equazioni x-y+k=0 tale che passi per il centro C(1,1) , cioè k=0 ; pertanto un asse avrà equazione x-y=0. L'altro asse sarà una retta appartenente al fascio di equazioni x+y+h=0 tale che passi ancora per C(1,1) , cioè h=-2; il secondo asse ha equazione x+y-2=0 . Per calcolare le coordinate dei vertici si deve intersecare ogni asse con la conica, ottenendo:

$$V_1(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \ ; \ V_2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

vertici dell'ellisse appartenenti all'asse y=x mentre

$$V_3(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}) \qquad V_4(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}, 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2})$$

sono i vertici della conica situati sull'asse di equazione x+y-2=0 . Essendo la conica un'ellisse a punti reali , essa non possiede asintoti reali difatti il radicando nella VI.16) è negativo.
Esempio n.2 : assegnata la conica di equazione:

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy - 2x - 14y - 13 = 0$$

e dopo aver verificato che essa è un'iperbole, determinare il centro, gli assi , i vertici e gli asintoti.

I parametri caratterizzanti la curva di secondo grado assegnata sono: I_3=128, I_2=-16 e quindi la curva proposta è un conica non degenere, ed in particolare un'iperbole. Per la determinazione delle coordinate del centro C si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x_C + 5y_C - 1 = 0 \\ 5x_C + 3y_C - 7 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono: x_c=2 , y_c=-1 , cioè C(2,-1) .

Per la determinazione dell'equazioni degli assi si devono calcolare i coefficienti angolari utilizzando la formula VI.13), ottenendo nel caso in esame l'equazione:

$$5m^2 - 5 = 0 \quad \text{cioè} \quad m = \pm 1$$

Un asse appartiene al fascio di rette di equazione x-y+k=0 e deve passare per il punto C(2,-1), da cui k=-3; pertanto un asse ha equazione x-y-3=0. L'altro asse ha equazione del tipo x+y+h=0, e dovendo contenere il punto C l'equazione è x+y-1=0. I vertici si ottengono intersecando ciascun asse con l'iperbole, ottenendo due vertici reali e due immaginari(questi ultimi situati sull'asse non trasverso). Si trova che l'asse non trasverso è quello di equazione: x+y-1=0, mentre i vertici reali V_1 e V_2 situati sull'asse di equazione x-y-3=0 hanno coordinate :

$$V_1\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad V_2\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

Si osservi che, per la determinazione dell'asse trasverso con questo metodo si è dovuto procedere casualmente intersecando ciascun asse con l'iperbole per trovare i vertici reali (si è fortunati se i vertici reali si determinano col primo asse scelto), mentre utilizzando le forme canoniche l'asse trasverso è immediatamente determinato.

Per quanto riguarda gli asintoti, i loro coefficienti angolari si ottengono risolvendo l'equazione di secondo grado VI.15) che nel caso in esame è:

$$3m^2 + 10m + 3 = 0$$

da cui le soluzioni:

$$m_1 = -3 \qquad m_2 = -\frac{1}{3}$$

Pertanto gli asintoti appartengono ai fasci di rette di equazioni 3x+y+k=0 e x+3y+h=0 e dovendo entrambi contenere il centro, essi possiedono rispettivamente equazioni: 3x+y-5=0 , x+3y+1=0 .

Esempio n.3: assegnata la conica di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 1 = 0$$

verificare che essa è una parabola e determinare l'asse di simmetria e le coordinate del vertice reale al finito.
Che l'equazione assegnata rappresenti una parabola (conica non degenere non a centro) si vede subito potendosi scrivere:

$$(x + y)^2 + 2y - 1 = 0$$

e quindi, essendo il coefficiente angolare dell'asse di simmetria pari a $m = -a_{12}/a_{22}$ cioè m=-1 , l'asse ha equazione a) y=-x+p , con p parametro da determinarsi opportunamente in modo tale che, trasformando la parabola assegnata mediante la simmetria assiale S di asse a, e quindi di equazioni inverse:

$$S^{-1} : \begin{cases} x = -y'+p \\ y = -x'+p \end{cases}$$

la parabola trasformata coincida con quella di partenza. Pertanto l'equazione della parabola trasformata è:

$$x'^2 + y'^2 + 2x'y' - 2x'(1 + 2p) - 4py' + 4p^2 + 2p - 1 = 0$$

ed imponendo l'identità con l'equazione assegnata, si ottiene p=-1/2 . Pertanto l'equazione dell'asse di simmetria della parabola assegnata è:

$$y = -x - \frac{1}{2}$$

ed intersecando tale asse con la parabola data si ottengono le coordinate del vertice della parabola:

$$V(-\frac{7}{8}, \frac{3}{8}) \ .$$

<u>VII. Conclusioni della prima parte: raccolta di metodi per la determinazione del centro,degli assi, degli asintoti e dei fuochi in una conica reale non degenere</u>.

In questo paragrafo conclusivo si parlerà del centro, degli assi , degli asintoti e dei fuochi di una conica reale non degenere affrontati con le coordinate non omogenee e con metodi proiettivi, così come è stato studiato da quasi tutti i grandi matematici di cui l'autore è a conoscenza. Storicamente sul problema esistono due grandi filoni : un primo gruppo di studiosi ha affrontato il problema dal punto di vista grafico (Staudt, Desargues, Brianchonne, Gergonne, Monge, La Hire) mentre altri matematici hanno preferito lo studio con le coordinate omogenee che offre, come si vedrà, soluzioni veloci ed eleganti (Chasles, Mobius, Pluker) rispetto alle coordinate affini.

Di seguito si riporterà l'impostazione di Castelnuovo, Dantoni-Mammana, Stoka, Autori di tre libri di testo universitari tra i più accreditati ed apprezzati; gli insigni studiosi di geometria succitati, pur appartenendo a periodi storici diversi (tutti del novecento) hanno sviluppato il problema in modo molto simile. Sia assegnata la conica K non degenere di equazione in coordinate omogenee:

$$\text{VII.1)} \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

con determinante dei coefficienti diverso da zero. Inizialmente si può studiare il tipo di conica(iperbole, ellisse, parabola) in base ai punti di intersezione tra la conica e la retta all'infinito del piano t=0, ottenendo:

$$\text{VII.2)} \quad a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0 \quad \text{con} \quad m = \frac{y}{x}$$

Se i punti di intersezione sono due reali e distinti la conica è un'iperbole, se i due punti di intersezione sono immaginari la conica è un'ellisse, se i due punti sono reali e coincidenti la conica è una parabola (per la continuazione vedere VI.15) e commento).
L'equazione della retta polare in coordinate omogenee del punto $P(x_o,y_o,t_o)$ rispetto alla conica K è:

$$\text{VII.3)} \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t)x_o + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t)y_o + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t)t_o = 0$$
$$\text{con} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1,2,3.$$

Per la determinazione del centro (di una conica a centro, cioè iperbole o ellisse) si può procedere analiticamente considerando che il centro è il polo della retta all'infinito del piano rispetto alla conica quindi per il teorema di reciprocità tale punto è dato dall'intersezione di due rette polari relative a due qualunque punti all'infinito del piano; per semplicità di calcoli conviene considerare il punto all'infinito dell'asse x(1,0,0) e dell'asse y(0,1,0): le rispettive polari hanno equazioni:

$$\text{VII.4)} \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t = 0 \qquad \text{VII.4')} \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t = 0$$

e risolvendo il sistema costituito dalle due equazioni suindicate si ottengono le coordinate del centro(vedere pag e seguenti).

Assegnata la conica reale K e non degenere e a centro di equazione VII.1), due suoi diametri d e d' si definiscono coniugati se uno è la polare del punto improprio dell'altro(def. riportata nello Stoka) Indicato con $P_{inf}(1,m,0)$ il punto all'infinito del diametro d e con $P'_{inf}(1,m',0)$ quello del diametro d', l'equazione della retta polare d di polo $P_{inf}(1,m,0)$ rispetto a k, per la VII.3) è:

$$\text{VII.5)} \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t) = 0$$

ed affinché il punto $P'_{inf}(1,m',0)$ appartenga al diametro d deve risultare:

$$a_{11} + a_{12}m' + m(a_{21} + a_{22}m') = 0$$

cioè:

$$\text{VII.6)} \qquad a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0$$

che rappresenta l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati. Se si vuole determinare la coppia di rette che si corrispondono nell'involuzione e che risultano tra di loro perpendicolari, cioè:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

dalla VII.6) segue:

$$\text{VII.7)} \quad a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

equazione di secondo grado in m che consente di determinare i coefficienti angolari degli assi della conica data. Se nella VII.6) si vogliono determinare i coefficienti angolari degli asintoti basta porre m=m' e si ottiene la formula VII.2) già determinata per altra via.(vedere pagg.23 e seguenti).

Per quanto riguarda la determinazione delle equazioni degli assi e degli asintoti si può procedere considerando l'equazione: $y-y_C=m(x-x_C)$ ed isolando m per sostituirlo rispettivamente nella VII.7) ottenendo:

$$\text{VII.8)} \quad a_{12}(x - x_C)^2 - a_{12}(y - y_C)^2 + (a_{11} - a_{22})(x - x_C)(y - y_C) = 0$$

equazione complessiva degli assi di una conica di centro $C(x_C,y_c)$, o nella VII.2) ottenendo:

$$\text{VII.9)} \quad a_{11}(x - x_C)^2 + 2a_{12}(x - x_C)(y - y_C) + a_{22}(y - y_C)^2 = 0$$

equazione complessiva degli asintoti di una conica di centro $C(x_C,y_C)$.
In una parabola si definisce asse la retta polare del punto all'infinito che definisce la direzione ortogonale all'asse(o a un suo diametro)(vedere [1]). Per la determinazione delle equazioni degli asintoti di una iperbole di equazione f(x,y,t)=0 di centro C, si può considerare il fascio di coniche bitangenti all'iperbole nei suoi due punti all'infinito, cioè considerare il fascio di coniche di equazione:

$$\text{VII:10)} \quad f(x,y,t) + kt^2 = 0$$

Imponendo il passaggio della generica conica del fascio per il punto C, centro della conica data, si ottiene l'equazione complessiva degli asintoti richiesti.
Sia per quanto riguarda gli assi che gli asintoti si può procedere molto similmente , dopo aver determinato il centro ed i valori dei coefficienti angolari m_1 ed m_2 ,(degli assi o degli asintoti), scrivendo l'equazione del fascio di rette parallele di coefficienti angolari m_1 ed m_2 ed imponendo il passaggio per il centro: così si determinano direttamente le equazioni dei singoli assi e dei singoli asintoti.

Per quanto riguarda il fuoco vale la seguente importante definizione: (vedere [1])
Si definisce fuoco di una conica non degenere K ogni punto F del piano della conica tale che le tangenti per esso alla conica siano le rette isotrope (cioè rette le cui equazioni sono del tipo: $y=\pm ix+p$). La polare del punto F rispetto alla conica si denomina direttrice. Per alcune applicazioni di queste definizioni vedere [2] vol.1. Nel pregevole testo di Dantoni-Mammana i fuochi in un'ellisse di semiassi a e b con a>b si possono determinare intersecando la circonferenza di centro il centro dell'ellisse e raggio pari a

$$\text{VII.11)} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

con l'asse maggiore. Per quanto riguarda l'iperbole di semiassi a e b i fuochi si possono determinare intersecando la circonferenza il cui centro coincide col centro dell'iperbole e di raggio uguale a

$$\text{VII.12)} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

con l'asse trasverso.
Nel caso della parabola il fuoco è determinato dagli Autori utilizzando la definizione di luogo geometrico: i punti della parabola debbono essere equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Inoltre si tiene conto dell'accorgimento che la direttrice è perpendicolare all'asse e che il vertice è il punto medio del segmento aventi come estremi il fuoco ed il punto d'intersezione dell'asse con la direttrice.
Nel Campedelli: Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva, ED.CEDAM, per la ricerca dei fuochi di una conica è riportato un metodo che consiste nello scrivere l'equazione del fascio di coniche bitangenti alla conica assegnata di equazione $f(x,y)=0$ nei due punti di intersezione tra conica e direttrice di equazione : $y=ax+by+c$ (polare del punto F di cui si devono calcolare le coordinate non omogenee): il punto F si determina trovando la conica del fascio che sia una circonferenza degenere di raggio nullo(coppia di rette isotrope condotte dal fuoco e tangenti alla conica data).

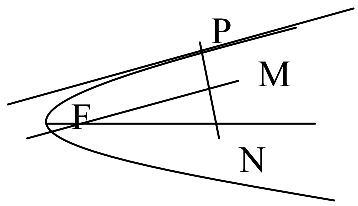
L'equazione del fascio di coniche richiesto è:

$$\text{VII.13)} \quad f(x,y) + (ax + by + c)^2 = 0$$

dove il parametro variabile del fascio è incluso nei coefficienti a,b,c per adesso incogniti. Le coordinate dei fuochi F reali si determinano trovando tra le coniche di equazione VII.13) la circonferenza degenere di raggio nullo, cioè i deve imporre che i coefficienti dei quadrati di x ed y siano uguali, il coefficiente del termine in xy sia nullo e che sia nullo il raggio della circonferenza.
Per quanto riguarda la ricerca del fuoco in una parabola l'Autore utilizza l'importante seguente proprietà focale: assegnata una parabola e scelto un qualunque punto P appartenente ad essa, l'angolo formato da PF(F fuoco) con il diametro per P è bisecato dalla normale alla conica in P. Tale proprietà suggerisce la determinazione del fuoco F nel seguente modo: si scriva l'equazione della retta normale alla conica in P e si intersechi tale retta con l'asse della parabola nel punto N: il punto F si

determina come intersezione dell'asse con la retta parallela alla tangente in P e passante per il punto medio del segmento PN.

Fig.n. 6



Esiste un metodo generale riportato nel [12] Chiellini, Complementi di geometria, però trattato raramente da molti Autori, soprattutto recentemente, che consiste nel seguente procedimento: considerato su un piano una conica non degenere K di equazione VII.1) in coordinate omogenee x,y,t, si scelga un punto $P(x_o,y_o,t_o)$ la cui polare rispetto alla conica K ha equazione:

$$\text{VII.14)}\quad (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13}t_o)x + (a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23}t_o)y + (a_{31}x_o + a_{32}y_o + a_{33}t_o)t = 0$$
$$\text{con } a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1,2,3 \ .$$

Quindi, se si indica l'equazione della retta polare p di P rispetto alla conica K con:

VII.15) ux+vy+wt=0 dove i coefficienti u,v,w si denominano coordinate di retta o coordinate pluckeriane(ad ogni terna di valori u,v,w corrisponde una retta in coordinate omogenee x,y,t), dal confronto tra VII.14) e VII.15) segue:

$$\text{VII.16)}\quad \begin{cases} u = a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13}t_o \\ v = a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_{23}t_o \\ w = a_{31}x_o + a_{32}y_o + a_{33}t_o \end{cases}$$

con il determinante del sistema diverso da zero, essendo per ipotesi la conica K non degenere; il sistema VII.16) rappresenta le equazioni della polarità piana rispetto alla conica K, in quanto al punto $P(x_o,y_o,t_o)$ corrisponde la retta polare di coordinate pluckeriane u,v,w. Il sistema VII.16) è invertibile e vale:

$$\begin{cases} x_o = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w \\ y_o = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w \quad \text{dove } A_{ij} \text{ rappresentano i complementi algebrici} \\ t_o = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w \end{cases}$$

$$\text{del determinante dei coefficienti}.$$

Affinchè la retta p sia autoconiugata rispetto alla conica K, cioè affinchè P appartenga a p, deve verificarsi: $ux_o+vy_o+wt_o=0$, da cui per le VII.17) segue:

$$\text{VII.18)}\quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0 \ .$$

Tale equazione, usualmente denominata equazione tangenziale della conica, rappresenta l'inviluppo di tutte le rette autoconiugate del piano nella polarità piana assegnata, od anche l'inviluppo delle rette tangenti alla conica K; questo vuol dire che se u,v,w verificano la VII.18) la retta corrispondente risulta tangente alla conica K, e viceversa. Per la determinazione delle coordinate a e b del fuoco F(a,b), si scrivono le equazioni delle rette isotrope per F, che sono:

VII.19) $y-a=\pm i(x-b)$ e si impone che tali rette risultino tangenti alla conica K, sostituendo nella VII.18) ad u,v,w le coordinate pluckeriane delle rette di equazioni VII.19) ed imponendo parte reale e parte immaginaria nulle; così si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b determinando in tal modo il fuoco.

PARTE SECONDA (di Santangelo Maurizio)

Le affinità piane applicate alla teoria delle coniche.

I. Studio delle coniche a centro tramite isometrie (traslazioni e rotazioni).

In questa seconda parte, assegnata una conica reale K non degenere a centro di equazione:

$$\text{I.1)}\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ \text{ con}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ed} \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$$

si studierà come, partendo dalla I. 1), si possa giungere , mediante traslazioni e rotazioni, alla conica trasformata K' di equazione canonica. A tale scopo si trasformi la conica K di equazione I.1) mediante la traslazione T(-a,-b), con a e b le coordinate del centro della conica da determinare opportunamente in modo tale che l'equazione trasformata non possegga i termini lineari in x ed y; si otterrà sicuramente una conica K' con i parametri I_1,I_2 ed I_3 inalterati: la conica è la medesima di quella di partenza, solo che spostata nel piano secondo una traslazione. La traslazione T ha equazioni:

$$\text{I.2)}\ T(-a,-b): \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \quad \text{e la sua traformazione inversa} \ \text{I.2')}\ T^{-1} = T(a,b): \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Sostituendo x ed y date dalla traslazione inversa T(a,b) nella I.1), si ottiene l'equazione:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + 2x'(a_{11}a + ba_{12} + a_{13}) + 2y'(a_{12}a + ba_{22} + a_{23}) +$$
$$a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + 2a_{12}ab + 2a_{13}a + 2a_{23}b + a_{33} = 0$$

Essendo a e b le coordinate del centro della conica, per le formule ottenute nella parte prima trasformando la conica K in se stessa tramite una simmetria centrale, nell'equazione I.2) i termini lineari in x ed y si annullano, dovendo valere:

$$\text{I.3}\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0 \\ a_{12}a + a_{22}b + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della conica K, in seguito alla traslazione T(-a,-b), si trasforma nella conica K' di equazione:

$$\text{I.4)}\quad a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + f(a,b) = 0 \quad \text{con}$$

$$\text{I.5)}\quad f(a,b) = a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + 2a_{12}ab + 2a_{13}a + 2a_{13}b + a_{33} = (a_{11}a + a_{12}b + a_{13})a +$$
$$+ (a_{12}a + a_{22}b + a_{23})b + a_{31}a + a_{32}b + a_{33} = a_{31}a + a_{32}b + a_{33} \quad \text{per le I.3)}$$

e valendo per le I.3):

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{13}a_{22} + a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

Sostituendo nella formula I.5) segue:

$$\text{I.6)}\quad f(a,b) = \frac{I_3}{I_2}$$

L'equazione I.4) della conica K' trasformata della conica K assegnata mediante la traslazione T(a,b) si può scrivere anche sotto la forma:

$$\text{I.7)}\quad a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

La nuova conica K' ottenuta è la conica originaria K il cui centro coincide con l'origine O del sistema di riferimento cartesiano e con gli assi ruotati di un certo angolo rispetto agli assi cartesiani ortogonali xOy ; la presenza del termine in x'y' indica proprio che gli assi della conica K' non coincidono con gli assi cartesiani ortogonali, pur intersecandosi gli assi della conica nello stesso punto C=O.

Di quanto occorre ruotare la conica K' intorno ad O affinchè gli assi della nuova conica trasformata K'' coincidano con gli assi di riferimento cartesiani ? Occorre cioè trovare una rotazione R tale che applicandola alla conica K' , si ottenga una conica K'' la cui equazione non contenga il termine in xy. La rotazione R ha equazioni:

$$\text{I.8)}\begin{cases} x'' = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y'' = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \text{e la rotazione inversa } R^{-1}: \text{I.8')} \begin{cases} x' = x''\cos\alpha + y''\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x''\operatorname{sen}\alpha + y''\cos\alpha \end{cases}$$

e sostituendo le equazioni I.8') della rotazione inversa nella I.7) si ottiene l'equazione della conica K'':

$$\text{I.9)}\quad a''_{11}x''^2+a''_{22}y''^2+2a''_{12}x''y''+a''_{33}=0 \quad \text{con :}$$
$$\text{I9')}\quad a''_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+a_{22}\,\mathrm{sen}^2\alpha-2a_{12}\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\text{I9'')}\quad a''_{22}=a_{11}\,\mathrm{sen}^2\alpha+a_{22}\cos^2\alpha+2a_{12}\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\text{I9''')}\quad a''_{12}=(a_{11}-a_{22})\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\,\mathrm{sen}^2\alpha$$
$$a''_{33}=\frac{I_3}{I_2}$$

Affinchè nell'equazione I.9) non compaia il termine in x''y'' , cioè risulti $a_{12}''=0$, per la I.9''') segue :

$$\text{dividendo ambo i membri per } \cos^2\alpha\neq 0 \quad \text{I.10)}\quad a_{12}\,\mathrm{tg}^2\alpha-(a_{11}-a_{22})\,\mathrm{tg}\alpha-a_{12}=0$$
e risolvendo :
$$\text{I.10')}\qquad \mathrm{tg}\alpha_{1,2}=\frac{(a_{11}-a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}} \quad \text{con } \mathrm{tg}\alpha_1<\mathrm{tg}\alpha_2$$
Si noti che , posto nella I.10) $\mathrm{tg}\alpha=-m$ si ottiene la VI.13).

I valori angolari α_1 ed α_2 definiscono due direzioni ortogonali,
dato che $\mathrm{tg}\alpha_1\,\mathrm{tg}\alpha_2=-1$, cioè le direzioni degli assi della conica K(ovvero K').

Inoltre il discriminante dell'equazione I.10) è sempre non negativo, essendo espresso dalla somma di due quadrati ; pertanto le due soluzioni sono sempre reali e distinte. Solo nel caso particolare di $a_{11}=a_{22}$,$a_{12}=0$ le soluzioni della I.10) diventano indeterminate (caso della circonferenza) e quindi una qualunque coppia di rette ortogonali passanti per il centro costituiscono una coppia di assi, cioè la circonferenza possiede infinite coppie di assi. L'equazione I.10) è proprio l'equazione dei coefficienti angolari degli assi trovata nella prima parte mediante le simmetrie assiali con l'incognita m. Per il calcolo dei coefficienti che compaiono nella forma canonica I.9) occorrono le formule:

$$\text{I.11)}\ \mathrm{sen}\alpha=\pm\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \quad ; \ \text{I.11')}\ \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

se $\mathrm{tg}\alpha>0$: nel primo quadrante $\mathrm{sen}\alpha>0$, $\cos\alpha>0$
nel terzo quadrante $\mathrm{sen}\alpha<0$, $\cos\alpha<0$

se $\mathrm{tg}\alpha<0$: nel secondo quadrante $\mathrm{sen}\alpha>0$, $\cos\alpha<0$
nel quarto quadrante $\mathrm{sen}\alpha<0$, $\cos\alpha>0$

Altro metodo per risolvere l'equazione goniometrica ottenuta ponendo nella I.9''')

$a_{12}"=0$: si moltiplicano ambo i membri per 2 e mediante le formule di duplicazione si ottiene:

$$\text{I.12)}\quad (a_{11} - a_{22})\,\text{sen}2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha = 0 \text{ e dividendo per } \cos 2\alpha \neq 0,$$

$$\text{cioè } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\text{, si ottiene:}$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} + k\frac{\pi}{2}$$

e per il calcolo dei coefficienti della forma canonica si utilizzano le I.11).

Per lo studio della forma canonica a cui si è pervenuta vedere parte prima.
Riassumendo, assegnata la conica a centro K si è ottenuta la conica K' traslata secondo T e quindi dalla K' si è ottenuta la conica K"(la cui equazione è una forma canonica) mediante la rotazione R di centro O; quindi, per passare da K a K" si deve applicare una trasformazione composta prima dalla traslazione T e poi dalla rotazione R: in simboli

$$\text{I.13)}\quad K \xrightarrow{T} K' \xrightarrow{R} K'' \equiv K \xrightarrow{R \circ T} K'' \text{ ; con la scrittura } R \circ T$$
si intende che si applica prima T e poi R.

Pertanto dalle I.2) e le I.8) segue:

$$\text{I.14)}\quad R \circ T: \begin{cases} x'' = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\text{sen}\alpha \\ y'' = (x - a)\,\text{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

E' importante osservare che se in generale per passare da una curva K di equazione f(x,y)=0 ad una K' si applica una trasformazione Tr, per determinare l'equazione di K' occorre isolare la variabili x ed y in funzione di x' ed y' dalla Tr e sostituirle nella f(x,y)=0, ottenendo per K' un'equazione del tipo g(x',y')=0 :cioè si devono utilizzare le equazioni della trasformazione inversa di Tr. Pertanto, assegnata la conica K e le trasformazioni T ed R, per ottenere l'equazione della conica K" occorre utilizzare la trasformazione composta:

$$\text{I.15)}\quad (R \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1}$$

Per dimostrare la I.15) basta notare che per passare dalla conica K" alla K occorre applicare prima la rotazione inversa e poi la traslazione inversa, cioè:

$$K'' \xrightarrow{R^{-1}} K' \xrightarrow{T^{-1}} K \equiv K'' \xrightarrow{T^{-1} \circ R^{-1}} K \equiv K'' \xrightarrow{(R \circ T)^{-1}} K$$

Quindi per le I.2') e le I.8')

$$\text{I.16)}\quad T^{-1} \circ R^{-1}: \begin{cases} x = x''\cos\alpha + y''\text{sen}\alpha + a \\ y = -x''\text{sen}\alpha + y''\cos\alpha + b \end{cases}$$

Da quanto scritto sinora in questo paragrafo si evince che, assegnata una conica K non degenere a centro, per trasformarla isometricamente (cioè con un movimento rigido) nella conica K" avente il centro coincidente con l'origine O e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani, occorre prima applicare la traslazione T(a,b) e successivamente la rotazione di centro O: questo metodo è il più conveniente ed il più usato per passare da K a K", perché a e b rappresentano le coordinate del centro della conica K ed i calcoli sono abbastanza agevoli.

Un secondo metodo, meno usato, consiste nell'applicare all'equazione della conica K prima la rotazione intorno all'origine O tale che si annulli il termine in xy, e poi la traslazione T(a,b) dove adesso a e b non rappresentano le coordinate del centro. In questo caso:

$$\text{I.17)} \quad K \xrightarrow{R} K' \xrightarrow{T} K'' \equiv K \xrightarrow{T \circ R} K'' \text{ mentre}$$

$$K'' \xrightarrow{T^{-1}} K' \xrightarrow{R^{-1}} K \equiv K'' \xrightarrow{(T \circ R)^{-1}} K \equiv K'' \xrightarrow{R^{-1} \circ T^{-1}} K$$

Assegnata la conica K non degenere a centro di equazione I.1), si applichi ad essa una rotazione R generica di centro O avente equazioni I.8) ottenendo una conica K'; per determinare l'equazione di K' si isolano le variabili x ed y dalle equazioni della rotazione, in funzione di x ed y, x' ed y'),vedere parte prima e sostituendo nella equazione I.1) della conica, si ottiene l'equazione:

$$\text{I.18)} \quad a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad \text{con}$$

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\,\text{sen}^2\alpha - 2a_{12}\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

$$a'_{22} = a_{11}\text{sen}^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha + 2a_{12}\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

$$a'_{12} = (a_{11} - a_{22})\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\,\text{sen}^2\alpha$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha - a_{23}\,\text{sen}\alpha$$

$$a'_{23} = a_{13}\,\text{sen}\alpha + a_{23}\cos\alpha$$

$$a'_{33} = a_{33}$$

Affinché si annulli il termine in x'y' nella I.18) si deve imporre $a_{12}'=0$ e dalla I.18"') seguono l'equazioni I.10) od I.12) di cui si è parlato prima.

Si è pervenuti all'equazione I.18) mancante del termine in x'y' in cui i coefficien ti sono funzione degli angoli $\alpha_1 + k\pi$ ovvero di $\alpha_2 + k\pi$;

notare che $\alpha_1 - \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Le equazioni così ottenute rappresentano la conica originaria K ruotata intorno ad O di un'ampiezza angolare tale che la nuova conica K' trasformata possegga gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani. A causa di tale rotazione il centro di K non coinciderà col centro della K'.

A tale conica K' di equazione I.18) mancante del termine x'y',si applichi la traslazione T=T(-a,-b) data dalle equazioni:

$$\text{I.18')}\ T:\begin{cases} x''=x'-a \\ y''=y'-b \end{cases} \qquad \text{I.18")} \qquad T^{-1}=T(a,b):\begin{cases} x'=x''+a \\ y'=y''+b \end{cases}$$

e sostituendo x' ed y' nella I.18) si ottiene l'equazione:

$$\text{I.19)} \qquad a''_{11}x''^2+a''_{22}y''^2+2a''_{13}x''+2a''_{23}y''+a''_{33}=0 \qquad \text{con}$$

$$a''_{11}=a'_{11} \quad ; \quad a''_{22}=a'_{22} \quad ; \quad a''_{13}=a'_{11}a+a'_{13} \quad ; \quad a''_{23}=a'_{22}b+a'_{23}$$

$$a''_{33}=a'_{11}a^2+a'_{22}b^2+2a'_{13}a+2a'_{23}b+a_{33}$$

Nell'equazione I.19) i termini lineari in x" ed y" si annullano se e solo se:

$$\text{I.20)}\ a=-\frac{a'_{13}}{a'_{11}} \qquad b=-\frac{a'_{23}}{a'_{22}} \quad \text{e di conseguenza il termine noto vale:}$$

$$a''_{33}=-\frac{a'^2_{13}}{a'_{11}}-\frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}+a_{33}$$

In tal modo si è pervenuti alla conica K" rappresentata da una forma canonica.
Per passare da K" a K si deve considerare la trasformazione composta per la I.17):

$$\text{I.21)}\ R^{-1}\circ T^{-1}:\ \begin{cases} x=(x''+a)\cos\alpha+(y''+b)\operatorname{sen}\alpha \\ y=-(x''+a)\operatorname{sen}\alpha+(y''+b)\cos\alpha \end{cases}$$

Mentre per scrivere le equazioni di assi, direttrici ed asintoti da K" a K si devono utilizzare le equazioni:

$$\text{I.22)}\ T\circ R:\begin{cases} x''=x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha-a \\ y''=x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha-b \end{cases}$$

II. Studio di una conica non a centro (parabola) utilizzando traslazioni e rotazioni.

Data una conica reale K non degenere non a centro, cioè di equazione I.1) con:

$$\text{II.1)}\ \ I_3 \neq 0 \ \ ,\ \ \text{II1')}\ \ I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

per trasformarla in una conica K'' con asse di simmetria(l'unico) coincidente con l'asse x o con l'asse y, cioè rappresentata sotto forma canonica, occorre applicare prima un'opportuna rotazione nell'origine O per giungere alla conica K' con asse di simmetria parallelo all'asse x od y, e successivamente si deve applicare un'opportuna traslazione T tale da ottenere K''; in simboli vedere le I.17).

Dato che in una parabola a_{11} ed a_{22} sono concordi, è possibile scrivere l'equazione I.1) facendo comparire a_{11} ed a_{22} entrambi positivi. Pertanto in questo paragrafo è opportuno considerare da questo momento in poi, $a_{11}>0$ ed $a_{22}>0$, al fine di poter calcolare le radici quadrate di a_{11} ed a_{22}.

Per quanto riguarda la parabola, utilizzando la II.1') e la III.5) della prima parte, l'invariante cubico I_3 si può esprimere sotto le forme:

$$I_3 = -(a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}})^2 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})^2$$

Pertanto rimane confermato da quanto studiato nella parte prima che in una parabola $I_3<0$.Assegnata la parabola K di equazione I.1) in cui valgono le II.1), si applichi la rotazione R di centro O alla conica; isolando x ed y in funzione di x' ed y', cioè considerando la trasformazione inversa di R(vedere parte prima) e sostituendole nella I.1), si ottiene la parabola p' di equazione:

$$\text{II.2)}\ \ a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

dove i coefficienti sono dati dalle I.18). Affinché nell'equazione II.2) risulti mancante il termine in x'y', cioè sia $a_{12}'=0$, si deve risolvere l'equazione I.10), e tenendo conto della II.1') si ottiene:

$$\text{II.3)}\ \ \mathrm{tg}\alpha_1 = -\frac{a_{22}}{a_{12}} = -\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \quad ; \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$$

Primo caso:

$$\text{II.4)}\ \ \alpha = \alpha_1 \text{ ; per le I.11)} \quad \mathrm{sen}\,\alpha_1 = \mp\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{22}+a_{11}}} = \mp\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} \ ;$$

$$\cos\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11}+a_{22}}} = \pm\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}} \ ;\ a'_{11} = \cos^2\alpha_1(a_{11} + a_{22}\,\mathrm{tg}^2\alpha_1 - 2a_{12}\mathrm{tg}\,\alpha_1) =$$

$$= \frac{a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{22}^2}(a_{11} + a_{22}\frac{a_{22}^2}{a_{12}^2} + 2a_{12}\frac{a_{22}}{a_{12}}) = a_{11} + a_{22} = I_1$$

$$a'_{22} = \cos^2\alpha_1(a_{11}\,\mathrm{tg}^2\alpha_1 + a_{22} + 2a_{12}\mathrm{tg}\alpha_1) = 0$$

Per le I.18) :

$$a'_{13} = \pm \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \pm \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$

$$a'_{23} = \mp \frac{a_{13}a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} \pm \frac{a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \pm\sqrt{\frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2}{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \pm\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}$$

$$a'_{33} = a_{33}$$

e la II.2) diventa:

$$\text{II.5)} \quad a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad \text{od anche}$$

$$y' = Ax'^2 + Bx' + C \quad \text{con} \quad A = -\frac{a'_{11}}{2a'_{23}} \quad B = -\frac{a'_{13}}{a'_{23}} \quad C = -\frac{a'_{33}}{2a'_{23}} \quad \Delta = B^2 - 4AC$$

$$V\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{\Delta}{4A}\right), F\left(-\frac{B}{2A}, \frac{1-\Delta}{4A}\right), \quad y_d = -\frac{1+\Delta}{4A}$$

dove V,F ed y_d indicano rispettivamente il vertice, il fuoco e l'ordinata della retta direttrice nella parabola di equazione II.5).Pertanto questa prima sequenza di passaggi suggerisce <u>un primo metodo</u> di studio di una parabola di equazione generale I.1): si applica alla parabola una prima rotazione R di ampiezza angolare tale che si annulli il termine in x'y', pervenendo nel primo caso all'equazione di una parabola p', con asse di simmetria parallelo all'asse delle y , di cui notoriamente si conoscono tutte le caratteristiche fondamentali, e quindi tramite la rotazione inversa data dalle formule I.8) è possibile tracciare la parabola p assegnata. Il vantaggio di questo metodo consiste nel dover utilizzare una sola trasformazione per risalire alla conica di partenza, e quindi nel non dover comporre due trasformazioni tra di loro; di contro ci si accorge che con un po' di esercizio comporre rotazioni e traslazioni tra di loro è molto semplice, mentre per determinare le coordinate di V ed F e l'equazione della direttrice della parabola di equazione II.5) occorre svolgere qualche calcolo, anche se semplice. <u>Un secondo metodo</u> consiste, una volta applicata la rotazione alla conica originaria K ed essendo pervenuti all'equazione II.2), nel proseguire applicando alla conica p' trovata di equazione II.5) una traslazione particolare T(-a,-b) tale da trasformare l'equazione II.2) in una forma canonica corrispondente alla parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y e con il vertice coincidente con l'origine O degli assi cartesiani . Applicando, quindi, la traslazione T(-a,-b) di equazioni inverse I.18") alla parabola di equazione II.5) si ottiene la parabola p" di equazione:

$$\text{II.6)} \quad a''_{11}x''^2 + 2a''_{23}y'' + 2a''_{13}x'' + a''_{33} = 0 \quad \text{con} \quad a''_{11} = a'_{11}$$

$$a''_{13} = a'_{11}a + a'_{13} \qquad a''_{23} = a'_{23} \qquad a''_{33} = a'_{11}a^2 + 2a'_{13}a + 2a'_{23}b + a_{33}$$

in cui il coefficiente lineare in x” si annulla se e solo se:

$$\text{II.7)}\quad a = -\frac{a'_{13}}{a'_{11}} = \mp\frac{a_{12}a_{13} + a_{23}a_{22}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}}$$

ed il termine noto a’33 si annulla se e solo se:

$$\text{II.8)}\ b = \frac{1}{2a'_{23}}\left(\frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - a_{33}\right) = \pm\frac{\sqrt{a_{22}}\left((a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22})^2 - a_{33}(a_{11} + a_{22})(a_{12}^2 + a_{22}^2)\right)}{2\sqrt{a_{11} + a_{22}}\,(a_{12}^2 + a_{22}^2)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}\ .$$

Così la parabola p’ di equazione II.5) si trasforma, mediante la particolare traslazione trovata, nella parabola p” di equazione:

$$\text{II.9)}\quad x''^2 - 2py'' = 0 \quad \text{con} \quad p = \pm\frac{a'_{23}}{a'_{11}} = \pm\frac{1}{I_1}\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}} = \pm\sqrt{\frac{-I_3}{I_1^3}}\ .$$

Si è risolto il problema nel primo caso di ampiezza angolare trasformando la conica originaria p nella conica p’ tramite la particolare rotazione R di centro O e dopo la conica p’ nella conica p” tramite la traslazione particolare T(-a,-b). In simboli:

$$\text{II.10)}\quad P \xrightarrow{R_O} P' \xrightarrow{T} P'' \equiv P \xrightarrow{T\circ R_O} P'' \quad \text{e viceversa}$$

$$P'' \xrightarrow{T^{-1}} P' \xrightarrow{R_O^{-1}} P \equiv P'' \xrightarrow{(T\circ R_O)^{-1}} P \equiv P'' \xrightarrow{R_O^{-1}\circ T^{-1}} P\ .$$

Per trasformare i punti della parabola P” in punti della parabola originaria P si utilizza la trasformazione inversa di T_oR di equazioni I.21), mentre per trasformare le direttrici e gli assi di P” in direttrici ed assi di P si utilizza la trasformazione T_oR di equazioni I.22).

Nelle equazioni I.21) ed I.22) ovviamene si deve porre $\alpha = \alpha_1$.

Adesso si deve studiare il secondo caso di rotazione angolare:

$$\alpha = \alpha_2 \qquad tg\alpha_2 = \frac{a_{11}}{a_{12}} \qquad \text{Per le I.11)}\quad \text{II.11)}\quad sen\alpha_2 = \pm\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \qquad \cos\alpha_2 = \pm\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}\ .$$

Dopo aver applicato la rotazione R di centro O alla parabola p, per evitare equivoci sulla denominazione dei coefficienti della parabola p’ trasformata, conviene riscrivere la II.2) sotto la forma:

$$\text{II.12)}\quad b'_{11}x'^2 + b'_{22}y'^2 + 2b'_{12}x'y' + 2b'_{13}x' + 2b'_{23}y' + b'_{33} = 0$$

con $b'_{12}=0$,dove i coefficienti b'_{ij} si ottengono dalle I.18) ponendo $b'_{ij}=a'_{ij}$, da cui

$$\text{II.13)}\quad b'_{11} = \cos^2\alpha_2 (a_{11} + a_{22}\,\mathrm{tg}^2\alpha_2 - 2a_{12}\,\mathrm{tg}\alpha_2) = 0$$

$$b'_{22} = \cos^2\alpha_2 (a_{11}\,\mathrm{tg}^2\alpha_2 + a_{22} + 2a_{12}\,\mathrm{tg}\alpha_2) = a_{11} + a_{22} = I_1$$

$$b'_{13} = a_{13}\cos\alpha_2 - a_{23}\,\mathrm{sen}\alpha_2 = \pm\sqrt{\frac{(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})^2}{a_{12}^2 + a_{11}^2}} = \pm\sqrt{\frac{a_{11}(-I_3)}{a_{12}^2 + a_{11}^2}} = \pm\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}$$

pertanto $a'_{23} = b'_{13}$

$$b'_{23} = a_{13}\,\mathrm{sen}\alpha_2 + a_{23}\cos\alpha_2 = \pm\frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} \quad ; \; b'_{33} = a_{33} \quad .$$

Nel caso della parabola è facile verificare che:

$$\text{II.14)}\quad \frac{a_{13}a_{11} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}} = \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}} \quad \text{e pertanto :}$$

$$a'_{13} = b'_{23}$$

Nel secondo caso di ampiezza angolare, assegnata la parabola originaria P ed applicata ad essa la particolare rotazione R di cui sopra, si ottiene la parabola P' di equazione:

$$\text{II.15)}\quad b'_{22}y'^2 + 2b'_{13}x' + 2b'_{23}y' + b'_{33} = 0 \quad \text{che si può scrivere sotto la forma}$$

$$x' = A'y'^2 + B'y' + C' \quad \text{con } A' = -\frac{b'_{22}}{2b'_{13}} \quad B' = -\frac{b'_{23}}{b'_{13}} \quad C' = -\frac{b'_{33}}{2b'_{13}}$$

Si osserva facilmente che, per quanto trovato in precedenza, A=A', B=B' , C=C' , cioè le parabole aventi le rispettive equazioni sotto forma esplicita II.5) e II.15) posseggono i medesimi coefficienti solo che con le variabili x' ed y' scambiate; pertanto le coordinate del vertice, del fuoco e l'equazione della direttrice della parabola di equazione II.15) si ottengono con le rispettive formule di II.5), soltanto che occorre scambiare le ascisse x' con le ordinate y' . Per questo secondo caso di ampiezza angolare si possono trarre delle conclusioni che suggeriscono un <u>primo metodo di studio della parabola di partenza P come visto precedentemente: </u> assegnata P si determina quella particolare rotazione R_o di centro O che conduce alla parabola trasformata P' di equazione II.15), di cui sono noti dalla teoria tutti gli elementi caratteristici, quindi attraverso le equazioni inverse della R_o è possibile tracciare la parabola di partenza P. <u>Un secondo metodo</u> consiste , una volta passata dalla parabola assegnata P alla parabola P' tramite la rotazione R_o , nell'applicare alla P' una traslazione T=T(-c,-d) tale da ottenere una parabola la cui equazione si presenti sotto forma canonica; pertanto, valendo

$$\text{II.16)}\quad T:\begin{cases} x''=x'-c \\ y''=y'-d \end{cases} \qquad \text{II.16')}\quad T^{-1}:\begin{cases} x'=x''+c \\ y'=y''+d \end{cases}$$

e sostituendo le equazioni II.16') nella II.15) si ottiene l'equazione della parabola P" trasformata di P' tramite la traslazione T(-c,-d), che è:

$$\text{II.17)}\quad b''_{22}y''^2+2b''_{13}x''+2b''_{23}y''+b''_{33}=0 \quad \text{con}$$

$$b''_{22}=I_1 \quad b''_{13}=b'_{13} \quad b''_{23}=db'_{22}+b'_{23}$$

$$b''_{33}=b'_{22}c^2+2b'_{13}c+2b'_{23}d+a_{33}$$

Affinché si annulli il termine lineare in y" deve risultare:

$$d=-\frac{b'_{23}}{b'_{22}}=a \quad \text{essendo} \;:\; b'_{23}=a'_{13} \qquad b'_{22}=a'_{11}$$

Affinché nella II.17) si annulli il termine noto a'33 , deve valere:

$$c=\frac{1}{2b'_{13}}\left(\frac{b'^2_{23}}{b'_{22}}-a_{33}\right)=b \quad \text{per la II.)} \quad \text{essendo:}$$

$$b'_{13}=a'_{23}\;,\quad b'_{23}=a'_{13}\;,\quad b'_{22}=a'_{11}$$

Se si sviluppa l'espressione di c si perviene alla formula:

$$c=\pm\frac{\sqrt{a_{11}}\;((a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23})^2-a_{33}(a_{11}+a_{22})(a_{12}^2+a_{11}^2))}{2\sqrt{a_{11}+a_{22}}\;(a_{11}^2+a_{12}^2)(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})}$$

e per le II.1') e le II.14) si ottiene c=b.

Dopo aver effettuato il procedimento in esame si perviene alla parabola p" di equazione data sotto forma canonica:

$$\text{II.21)}\quad y''^2-2qx''=0 \quad \text{con} \quad q=\frac{b'_{13}}{b'_{22}}=\pm\sqrt{\frac{-I_3}{I_1^3}}=p\;.$$

Per quanto riguarda il secondo caso angolare:

$$\alpha=\alpha_2$$

si è applicata alla parabola P iniziale una rotazione di origine O R in modo da ottenere la parabola P'; successivamente si applica poi la traslazione T(-c,-d) con c e d opportunamente calcolati in modo tale da ottenere la parabola P" di equazione

II.21). Pertanto valgono le II.10) e le seguenti equazioni relative alle composizioni di trasformazioni tra R e T:

$$T \circ R : \begin{cases} x'' = x \cos\alpha_2 - y \,\mathrm{sen}\alpha_2 - c \\ y'' = x \,\mathrm{sen}\alpha_2 + y \cos\alpha_2 - d \end{cases}$$

$$(T \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ T^{-1} : \begin{cases} x = (x''+c) \cos\alpha_2 + (y''+d) \,\mathrm{sen}\alpha_2 \\ y = -(x''+c) \,\mathrm{sen}\alpha_2 + (y''+d) \cos\alpha_2 \end{cases}$$

Per passare da P” a P si utilizzerà la trasformazione inversa di T∘R, per ottenere le equazioni degli assi e della direttrice di P note assi e direttrici di P” si deve utilizzare la trasformazione composta T∘R.

Non è conveniente studiare una parabola applicando prima una traslazione e poi una rotazione, perché si allungano inutilmente i calcoli; difatti dopo aver applicato prima traslazione e poi rotazione si perviene sempre ad una parabola con asse di simmetria parallelo ad uno degli assi cartesiani, e non ad una parabola avente equazione sotto forma canonica.

III Studio di coniche tramite le isometrie. (Esercizi svolti)

Esempio n.1- Dato un sistema di riferimento ortogonale piano xOy, studiare la conica K di equazione:

$$\text{III.1)}\quad 4x^2 - 9y^2 - 4x - 12y + 6 = 0$$

Svolgimento- La conica K in esame possiede: I_3=-324 , I_2=-36<0, cioè la conica K è non degenere ed è un'iperbole. E' da notare che una qualunque conica non degenere, la cui equazione presenta i termini di secondo grado in x ed y ed è mancante del termine in xy, è una conica a centro con gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani ortogonali; a secondo se a_{11} ed a_{22} sono concordi o meno la conica è rispettivamente un'ellisse od un'iperbole. In questo caso si può procedere con le trasformazioni geometriche applicando alla conica K di equazione III.1) una traslazione tale da riportare K con il centro nell'origine O degli assi; a tale scopo si applichi alla K una traslazione T=T(-a,-b), cioè con

$$T^{-1}:\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

ottenendo una conica K' di equazione:

$$\text{III.3)}\quad 4(x'+a)^2 - 9(y'+b)^2 - 4(x'+a) - 12(y'+b) + 6 = 0$$

da cui sviluppando ed ordinando :

$$4x'^2 - 9y'^2 - 4x'(1-2a) - 6y'(2+3b) + 4a^2 - 9b^2 - 4a - 12b + 6 = 0$$

ed imponendo che nella III.3) i coefficienti di x' ed y' siano nulli, segue: a=1/2, b=-2/3 che rappresentano rispettivamente ascissa ed ordinata del centro della conica K e la III.3) diventa:

$$\text{III.4)}\quad 4x'^2 - 9y'^2 + 9 = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$y'^2 - \frac{x'^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

e la particolare traslazione T che consente di passare dalla conica K alla K' ha equazioni:

$$\text{III.5)}\quad T:\begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{2} \\ y' = y + \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{III.5')}\quad T^{-1}:\begin{cases} x = x' + \dfrac{1}{2} \\ y = y' - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Nel caso di equazione di conica mancante del termine in xy allo scopo di pervenire alla forma canonica III.4) si può procedere col metodo del completamento dei quadrati; nel caso della III.1) si ha:

$$4(x^2 - x) - 9(y^2 + \frac{4}{3}y) + 6 = 0 \text{ e completando i quadrati :}$$

$$4((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) - 9((y + \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9}) + 6 = 0$$

da cui segue la III.4) dove x' ed y' sono espresse dalla III.5).

L'equazione III.4) rappresenta la conica K' scritta in forma canonica: essa è un'iperbole con asse delle x asse non trasverso ed asse delle y asse trasverso su cui sono posizionati i due fuochi di coordinate $F'_1(0,-c)$ $F'_2(0,c)$ con

$$c = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

I vertici di K' sono: $V'_1(0,-1)$, $V'_2(0,1)$.

Le equazioni degli asintoti dell'iperbole K' sono:

$$\text{III.6)} \quad y' = \pm \frac{1}{\frac{3}{2}} x' = \pm \frac{2}{3} x'$$

Le equazioni delle due direttrici dell'iperbole K' sono:

$$\text{III.7)} \quad y' = \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \pm \frac{2}{13}\sqrt{13}$$

Per quanto riguarda l'iperbole K originaria di equazione III.1), le coordinate dei vertici V_1 e V_2 e dei suoi fuochi F_1 e F_2 si determinano mediante le III.5'), ottenendo:

$$\text{III.8)} \quad V_1(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}) \text{ , } V_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \text{ , } F_1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{2}{3}) \text{ , } F_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{2}{3}), C(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$$

mentre per quanto riguarda le equazioni degli assi, delle direttrici e degli asintoti di K si ottiene(in questo caso si possono utilizzare le equazioni III.5) o III.5')):

per l'equazione dell'asse x' (y'=0) y=-2/3

per l'equazione dell'asse trasverso y' (x'=0) x=1/2

per le equazioni degli asintoti $y = \pm \frac{2}{3} x - \frac{2}{3}$

per le equazioni delle rette direttrici $y = \pm \frac{2}{13}\sqrt{13}\, x - \frac{2}{3}$

Esempio n.2- Dato un sistema di riferimento ortogonale cartesiano piano xOy, studiare la conica K di equazione:

$$\text{III.11)} \quad x^2 + 4y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$$

Svolgimento- La conica K è non degenere I_3=-64, ed è un'ellisse reale essendo I_2=4>0 ed I_1=5>0 . Mancando il termine in xy la conica K ha gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani ortogonali .Procedendo come nell'esempio precedente si perviene alla conica K' avente l'equazione scritta in forma canonica:

$$\text{III.12)} \quad x'^2 + 4y'^2 - 16 = 0 \ \text{ ovvero } \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

dopo aver applicato alla conica K la traslazione di equazione:

$$\text{III.13)} \quad T: \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \text{III.13')} \quad T^{-1}: \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la conica K' di equazione III.12) i vertici ed i fuochi hanno le seguenti coordinate: $V'_1(-4,0)$,$V'_2(4,0)$, $V'_3(0,-2)$, $V'_4(0,2)$

$$\text{III.14)} \quad V'_1(-4,0)\ , V'_2(4,0), V'_3(0,-2), V'_4(0,2) \quad F'_1(-2\sqrt{3}\ ,0) \quad F'_2(2\sqrt{3}\ ,0)$$

Le equazioni delle rette direttrici dell'ellisse K' sono:

$$\text{III.15)} \quad x'_d = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Per le coordinate dei vertici e dei fuochi della conica K si ottiene, tramite le III.13)

$$\text{III.16)} \quad V_1\ (0,\frac{1}{2})\ V_2(8,\frac{1}{2})\ V_3(4,-\frac{3}{2})\ V_4(4,\frac{5}{2})\ F_1(-2\sqrt{3}+4,\frac{1}{2})\ F_2(2\sqrt{3}+4,\frac{1}{2})$$

e per quanto riguarda le equazioni degli assi di K: x=4, y=1/2; per le equazioni delle direttrici di K segue:

$$\text{III.17)} \quad x = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4$$

Esempio n. 3- Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale piano xOy, studiare la conica K di equazione:

$$\text{III.18)} \quad 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y + 4 = 0$$

Svolgimento- L'equazione della conica K ha I_3=-1125, I_2=-108, I_1=13 e quindi la conica è un'ellisse reale a punti reali(conica a centro); inoltre la presenza del termine in xy indica che gli assi di simmetria dell'ellisse non sono paralleli agli assi cartesiani ortogonali e pertanto, per pervenire alla forma canonica occorre prima applicare una traslazione T(-a,-b) ottenendo una conica K' e successivamente una rotazione R di centro O alla conica K', ottenendo una conica K" il cui centro coincide con l'origine O degli assi cartesiani e con gli assi di simmetria della conica coincidenti con gli assi cartesiani ; pertanto l'equazione rappresentativa della conica K" è una forma canonica. Partendo dalla conica assegnata K di equazione III.18), si applichi ad essa una traslazione T= T(-a,-b) di equazioni:

$$\text{III.19)}\quad T:\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \text{III.19')}\quad : T^{-1}:\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Sostituendo le III.19') nella III.18), si ottiene, dopo aver sviluppato ed ordinato, la seguente equazione:

$$\text{III.20)}\quad 41x'^2 + 9y'^2 + 24x'y' + 2x'(41a + 12b + 12) + 2y'(12a + 9b + 9) +$$
$$+ 41a^2 + 9b^2 + 24ab + 24a + 18b + 4 = 0$$

Ed imponendo che i coefficienti di x' ed y' si annullino, si ottiene il sistema algebrico di primo grado in a e b:

$$\begin{cases} 41a + 12b + 12 = 0 \\ 12a + 9b + 9 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è data dalla coppia di valori: a=0 , b=-1. Le equazioni III.19) diventano:

$$\text{III.21)}\quad T:\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 1 \end{cases} \qquad T^{-1}:\begin{cases} x = x' \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

e l'equazione III.20) della conica trasformata K' assume la forma:

$$\text{III.22)}\quad 41x'^2 + 9y'^2 + 24x'y' - 5 = 0$$

L'equazione ottenuta è la stessa di quella di partenza con i medesimi coefficienti dei termini di secondo grado, solo che mancano i termini lineari; però, per pervenire alla traslazione T che annulli i coefficienti lineari in x' ed y' occorre fare i passaggi intermedi, ottenendo in questo caso a=0, b=-1. Il centro della conica K è il punto C(0,-1). L'equazione III.21) rappresenta quella conica K' ottenuta dalla conica di partenza K per traslazione con il centro C' coincidente con l'origine O degli assi cartesiani, e con gli assi di simmetria di K' paralleli agli assi di simmetria della conica di partenza K. Il passo successivo consiste nell'applicare alla conica K' una rotazione R di centro O tale da annullare il termine in x'y', cioè in modo tale da ottenere una conica K" con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani. Tale conica K" avrà pertanto l'equazione scritta in forma canonica. Le equazioni della rotazione R generica di centro O saranno:

$$\text{III.23)}\quad R:\begin{cases} x''=x'\cos\alpha - y'\,\mathrm{sen}\alpha \\ y''=x'\,\mathrm{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{III.23')}\quad R^{-1}:\begin{cases} x'=x''\cos\alpha + y''\,\mathrm{sen}\alpha \\ y'=-x''\,\mathrm{sen}\alpha + y''\cos\alpha \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni III.22') nella III.21) si ottiene l'equazione:

$$\text{III.24)}\quad x''^2(41\cos^2\alpha + 9\,\mathrm{sen}^2\alpha - 24\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha) + y''^2(41\,\mathrm{sen}^2\alpha + 9\cos^2\alpha + 24\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha) +$$
$$2x''y''(32\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + 12\cos^2\alpha - 12\,\mathrm{sen}^2\alpha) - 5 = 0$$

ed imponendo che il coefficiente di x"y" si annulli, si ottiene l'equazione.

$$\text{III.25)}\quad 3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 8\,\mathrm{tg}\alpha - 3 = 0 \quad \text{da cui:}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = -\frac{1}{3} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = 3$$

Primo caso:

$$\alpha = \alpha_1 \quad , \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

Utilizzando le note formule che esprimono il seno ed il coseno di un angolo in funzione della tangente, e considerando, ad esempio, il quarto quadrante, si ottiene:

$$\text{III.26)}\quad \mathrm{sen}\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \cos\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Le equazioni della rotazione R_4 che trasformano K' in una nuova K" sono:

$$\text{III.27)}\quad R_4:\begin{cases} x''=\dfrac{3}{\sqrt{10}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y''=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}x'+\dfrac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases} \qquad \text{e la rotazione inversa}$$

$$\text{III.27')}\quad R_4^{-1}:\begin{cases} x'=\dfrac{3}{\sqrt{10}}x''-\dfrac{1}{\sqrt{10}}y'' \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{10}}x''+\dfrac{3}{\sqrt{10}}y'' \end{cases}$$

L'equazione della conica K" ottenuta in seguito alla rotazione si deduce dalla III.24) con i valori delle III.26), da cui:

$$\text{III.28)}\quad 45x''^2 + 5y''^2 - 5 = 0 \quad \text{od anche}: \frac{x''^2}{\frac{1}{9}} + y''^2 = 1$$

Componendo opportunamente le III.21) e le III.27) si ottengono:

$$\text{III.29)}\quad R_4 \circ T : \begin{cases} x'' = \frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ y'' = -\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y + \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\text{III.29')}\quad (R_4 \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R_4^{-1} : \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x'' - \frac{1}{\sqrt{10}}y'' \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x'' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'' - 1 \end{cases}$$

E' arrivato il momento di studiare la conica K" di equazione III.28). In questa ellisse a<b e pertanto i fuochi F"$_1$ ed F"$_2$ si trovano sull'asse y.

$$\text{III.30)}\quad c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{e quindi}: \ F_1''(0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}) \ , F_2''(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

Mentre per quanto riguarda i vertici di K" :

$$\text{III.31)}\quad V_1''(-\frac{1}{3},0) \ , V_2''(\frac{1}{3}.0), V_3''(0,-1), V_4''(0,1)$$

Le equazioni delle direttrici di K" varranno:

Noti gli elementi caratteristici di K", si può passare a quelli di K; per quanto riguarda i fuochi ed i vertici di K si debbono utilizzare le III.29') applicate ai valori III.30) e III.31) rispettivamente, ottenendo:

$$\text{III.32)}\quad y'' = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{III.33)}\ F_1(\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} - 1), F_2(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} - 1),\ V_1(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{3\sqrt{10}} - 1), V_2(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3\sqrt{10}} - 1)$$
$$V_3(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} - 1)\ , V_4\ (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} - 1)$$

Per determinare le equazioni delle rette direttrici e degli assi di K, noti quelli di K" si devono utilizzare le III.29) ottenendo:

III.34) $x''=0$ da cui $\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y+\frac{1}{\sqrt{10}}=0$ cioè $3x+y+1=0$ un asse

$y''=0$ da cui $-x+3y+3=0$ il secondo asse;
per quanto riguarda le direttrici si utilizza la III.32)

$$\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y+\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{da cui}$$

$2x-6y\pm 3\sqrt{5}-6=0$ le equazioni delle direttrici

Secondo caso :

$\alpha=\alpha_2 \quad tg\alpha_2=3$ Nel primo quadrante il seno ed il coseno sono entrambi positivi, e quindi: $sen\alpha_2=\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$ da cui:

$$\text{III.36)} \quad R_1 : \begin{cases} x''=\frac{1}{\sqrt{10}}x'-\frac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y''=\frac{3}{\sqrt{10}}x'+\frac{1}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$$

$$\text{III.37)} \quad R_1^{-1} : \begin{cases} x'=\frac{x''+3y''}{\sqrt{10}} \\ y'=\frac{-3x''+y''}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \text{e per le III.21)}$$

$$\text{III.38)} \quad R_1\circ T : \begin{cases} x''=\frac{x-3y-3}{\sqrt{10}} \\ y''=\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}} \end{cases} \qquad \text{III.38')} \quad T^{-1}\circ R_1^{-1} : \begin{cases} x=\frac{x''+3y''}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{-3x''+y''}{\sqrt{10}}-1 \end{cases}$$

L'equazione III.24) diventa:

$$\text{III.39)} \quad 5x''^2+45y''^2-5=0 \quad \text{ovvero} \quad x''^2+\frac{y''^2}{\frac{1}{9}}=1$$

In questo secondo caso si ottiene una rotazione R_1 diversa dal primo caso; anche la forma canonica cambia mentre restano immutati i risultati finali relativi alla conica

K; cioè ovviamente si troveranno gli elementi caratteristici già determinati. Pertanto, studiando la nuova forma canonica di equazione III.39)si trova che rispetto al caso precedente i fuochi si trovano sull'asse x , le coordinate dei vertici sono scambiate e le direttrici hanno equazioni:

$$x'' = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

e trasformando tali punti e tali rette mediante le III.38') e le III.38) rispettivamente , si ottengono ovviamente i vertici, fuochi, assi e direttrici della conica originaria K già calcolati (vedere III.33) e III.34)). I due casi angolari sono stati svolti per evidenziare che ovviamente il risultato finale della determinazione dei valori di K è unico. Pertanto, assegnata una conica K non degenere a centro, se per il suo studio si applica questo primo metodo(prima traslazione e poi rotazione) basta considerare un caso con un valore angolare.

Secondo metodo per le coniche a centro: consiste nell'applicare all'equazione data prima una rotazione, tale che si annulli il coefficiente del termine in xy, e successivamente una traslazione T(-a,-b); notare che con questo secondo metodo a e b non costituiscono le coordinate del centro della conica, al contrario del primo metodo, e ciò accade perché nel secondo metodo, nel momento in cui alla conica si applica la traslazione, già essa ha subito una rotazione .

Assegnata la conica K non degenere a centro di equazione III.18), si ruoti la K di un certo angolo avente il vertice nell'origine degli assi, secondo le equazioni I.8'), ottenendo l'equazione:

$$\begin{aligned}\text{III.41)}\quad & x'^2(41\cos^2\alpha + 9\operatorname{sen}^2\alpha - 24\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \\ & + y'^2(41\operatorname{sen}^2\alpha + 9\cos^2\alpha + 24\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + 2x'y'(32\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 12\cos\alpha - 12\operatorname{sen}\alpha) + \\ & + 2x'(12\cos\alpha - 9\operatorname{sen}\alpha) + 2y'(12\operatorname{sen}\alpha + 9\cos\alpha) + 4 = 0\end{aligned}$$

Conviene imporre l'annullamento del coefficiente del termine in x'y', e a tal fine si deve risolvere la III.25); considerando, ad esempio, la soluzione:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

l'equazione III.41) diventa:

$$\text{III.43)}\quad 45x'^2 + 5y'^2 + 9\sqrt{10}\,x' + 3\sqrt{10}\,y' + 4 = 0$$

Le equazioni I.8), in base alla III.42) sono:

$$\text{III.44)}\quad R:\begin{cases} x' = \dfrac{3x + y}{\sqrt{10}} \\ y' = \dfrac{-x + 3y}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \text{e la trasformazione inversa}: R^{-1}:\begin{cases} x = \dfrac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Si applichi alla III.43) una traslazione T(-a,-b), le cui equazioni sono :

$$\text{III.45)}\quad T:\begin{cases} x''=x'-a \\ y''=y'-b \end{cases} \qquad\qquad T^{-1}:\begin{cases} x'=x''+a \\ y'=y''+b \end{cases}$$

ottenendo:

$$\text{III.46)}\quad 45x''^2+5y''^2+x''(90a+9\sqrt{10})+y''(10b+3\sqrt{10})+$$
$$45a^2+5b^2+9\sqrt{10}\,a+3\sqrt{10}\,b+4=0$$

I coefficienti di x” ed y” si annullano se e solo se:

$$\text{III.47)}\quad a=-\frac{1}{\sqrt{10}}\quad;\quad b=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

e la traslazione ha equazioni:

$$\text{III.48)}\quad T:\begin{cases} x''=x'+\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ y''=y'+\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \qquad\qquad T^{-1}:\begin{cases} x'=x''-\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ y'=y''-\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Sostituendo i valori III.47) nella III.46) si ottiene la conica non degenere a centro K” avente equazione canonica:

$$\text{III.28)}\quad 9x''^2+y''^2=1$$

già studiata (vedere formule III.28) ,III.30) ,III.31) ,III.32)).

La conica K si trasforma nella K” mediante la composizione di trasformazioni T∘R che si ottiene dalle III.44) e III.48), ed è data dalle equazioni:

$$\text{III.49)}\quad T\circ R:\begin{cases} x''=\dfrac{3x+y+1}{\sqrt{10}} \\ y''=\dfrac{-x+3y+3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Mentre per trasformare la K” nella K occorre applicare la trasformazione inversa di T∘R che si ottiene componendo le equazioni III.44’) e III.48’), da cui:

$$\text{III.50)}\quad R^{-1}\circ T^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{3x''-y''}{\sqrt{10}} \\ y=\dfrac{x''+3y''}{\sqrt{10}}-1 \end{cases}$$

I fuochi ed i vertici della conica K” sono dati dalle III.30) e III.31); tramite le III.50) si possono ottenere i fuochi ed i vertici di K che sono dati dalle III.33), mentre applicando le III.49) all’equazione III.32) ed a x”=0 ed y”=0 si possono ottenere le equazioni delle direttrici e degli assi della conica K date dalle III.34). Notare che ponendo x”=0 ed y”=0(coordinate del centro della conica K”) nelle equazioni III.50) si ottengono le coordinate del centro C della conica K: difatti $x_C=0$, $y_C=-1$. Questo secondo metodo è applicabile per qualunque conica non degenere; per le coniche a centro è comunque preferibile il primo metodo(cioè prima traslazione e poi rotazione).
Esempio n.4- Studiare la conica K di equazione:

$$\text{III.51)} \quad 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$$

Svolgimento. I_3 = -2000 , I_2 = -100 , quindi la conica K è non degenere ed un’iperbole.
Al fine di riportare l’equazione III.51) sotto forma canonica, conviene prima applicare una traslazione T(-a,-b) di equazioni III.19) ottenendo l’equazione:

$$\text{III.52)} \quad 4x'^2 + 24x'y' + 11y'^2 + 2x'(4a + 12b + 32) + 2y'(12a + 11b + 21) + \\ + 4a^2 + 24ab + 11b^2 + 64a + 42b + 51 = 0$$

in cui i termini lineari in x’ ed y’ non compaiono se e solo se:

$$\text{III.53)} \quad \begin{cases} 4a + 12b + 32 = 0 \\ 12a + 11b + 21 = 0 \end{cases}$$

e ciò accade per a=1, b=-3; sostituendo tali valori nella III.52) si ottiene l’equazione:

$$\text{III.54)} \quad 4x'^2 + 24x'y' + 11y'^2 + 20 = 0$$

della conica K’ con centro nell’origine degli assi cartesiani e con gli assi di simmetria ruotati rispetto agli assi cartesiani. Si può affermare dalla teoria che il centro C della conica K ha come coordinate rispettivamente $x_C=1$, $y_C=-3$.La traslazione T che ha consentito la trasformazione della conica K nella K’ ha le seguenti equazioni:

$$\text{III.55)} \quad T: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

Alla conica K’ di equazione III.53) si applichi una generica rotazione R di equazioni III.23); pertanto, sostituendo nell’equazione III.54) alle variabili x’ ed y’ le formule III.23’) in funzione di x” ed y” si ottiene l’equazione:

$$\text{III.56)} \quad x''^2(4\cos^2\alpha + 11\text{sen}^2\alpha - 24\text{sen}\alpha\cos\alpha) + y''^2(4\text{sen}^2\alpha + 11\cos^2\alpha + 24\text{sen}\alpha\cos\alpha) + \\ + 2x''y''(-7\text{sen}^2\alpha\cos\alpha + 12\cos^2\alpha - 12\text{sen}\alpha) + 20 = 0$$

Ponendo il coefficiente del termine in x”y” uguale a zero, si ottiene l’equazione:

$$\text{III.57)}\quad 12\mathrm{tg}^2\alpha + 7\mathrm{tg}\alpha - 12 = 0 \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = -\frac{4}{3} \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{3}{4}$$

Considerando la seconda soluzione dell'equazione III.57) e che l'angolo sia nel primo quadrante, mediante le note formule che esprimono le funzioni seno e coseno in funzione della tangente goniometrica di un angolo, si ottiene:

$$\text{III.58)}\quad \mathrm{sen}\,\alpha_2 = \frac{3}{5} \quad \cos\alpha_2 = \frac{4}{5}$$

e quindi la III.56) diventa, per le III.58):

$$\text{III.59)}\quad -5x''^2 + 20y''^2 + 20 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{x''^2}{4} - y''^2 = 1$$

La III.59) rappresenta l'equazione della conica(iperbole) K" ottenuta dalla K' secondo la rotazione di equazioni:

$$\text{III.60)}\quad R : \begin{cases} x'' = \dfrac{4x' - 3y'}{5} \\ y'' = \dfrac{3x' + 4y'}{5} \end{cases} \quad \text{e la rotazione inversa} \quad R^{-1} : \begin{cases} x' = \dfrac{4x'' + 3y''}{5} \\ y' = \dfrac{-3x'' + 4y''}{5} \end{cases}$$

Per passare da K a K' si è applicata la traslazione T data dalle III.55) , per passare dalla K' a K" si è applicata la rotazione R le cui equazioni sono le III.60), quindi eliminando il passaggio intermedio si conclude che per passare da K a K" si deve applicare la composizione di trasformazioni $R \circ T$, mentre per passare da K" a K si deve applicare la trasformazione inversa di $R \circ T$, da cui si ha, utilizzando prima le III.55) e in un secondo momento le III.60):

$$\text{III.61)}\quad R \circ T : \begin{cases} x'' = \dfrac{4x - 3y - 13}{5} \\ y'' = \dfrac{3x + 4y + 9}{5} \end{cases} \quad \text{mentre per la trasformazione inversa :}$$

$$(R \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{4x'' + 3y''}{5} + 1 \\ y = \dfrac{-3x'' + 4y''}{5} - 3 \end{cases}$$

Adesso occorre studiare la forma canonica III.58), rappresentativa della conica K".
Il semiasse secondo l'asse x è lungo 2, mentre quello secondo l'asse y 1; segue:

$$c = \sqrt{5}$$

e quindi, le coordinate dei vertici e dei fuochi sono:

$$\text{III.63)}\quad V_1''(-2,0)\ ,V_2''(2,0)\ \ F_1''(-\sqrt{5},0)\ \ F_2''(\sqrt{5},0)$$

L'asse trasverso è l'asse x, e quindi l'asse y è non traverso; gli asintoti hanno equazioni:

$$\text{III.64)}\quad y''=\pm\frac{1}{2}x''$$

e le direttrici hanno le seguenti equazioni:

$$\text{III.65)}\quad x''=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Avendo la conica K" i vertici ed i fuochi dati dalle III.63) , per calcolare i corrispondenti punti della conica K occorre utilizzare le formule III.61') ottenendo:

$$\text{III.66)}\quad V_1(-\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{9}{5})\ ,\ V_2(\frac{13}{5}\ ,\ -\frac{21}{5})\ ,\ F_1(-\frac{4}{5}\sqrt{5}+1\ ,\frac{3}{5}\sqrt{5}-3)\ ,\ F_2(\frac{4}{5}\sqrt{5}+1\ ,-\frac{3}{5}\sqrt{5}-3)$$

Per determinare le equazioni degli asintoti e delle direttrici della conica K, si devono sostituire le III.64) e III.65) nelle III.61), ottenendo:

$$\text{equazioni delle direttrici:}\qquad 4x-3y-13\mp4\sqrt{5}=0$$
$$\text{equazioni dei due asintoti:}\qquad 2x+11y+31=0\ \ ;\ \ 2x+y+1=0$$

e per le equazioni degli assi di K, essendo x"=0 ed y"=0 le equazioni degli assi di K" e sempre considerando le III.61) si ottengono: equazione dell'asse non trasverso 4x-3y-13=0 ed equazione dell'asse trasverso 3x+4y+9=0 .Lo studio della conica proposta è completato. Si poteva ugualmente risolvere il problema considerando , nella rotazione:

$$\mathrm{tg}\alpha_1=-\frac{4}{3}$$

e quindi le equazioni di R sarebbero cambiate, così come R_oT; conseguentemente la forma canonica cambia ma i risultati finali, ovviamente restano immutati. Si poteva anche applicare il secondo metodo che consiste nell'applicare prima la rotazione e poi la traslazione, ma prevede qualche calcolo in più rispetto al metodo visto.

Esempio n.5 Studiare la conica K di equazione:

$$\text{III.68)}\quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 + \sqrt{13}\, y - 2 = 0$$

Svolgimento- La conica K è una parabola , essendo:

$$I_3 = -\frac{405}{4} - 18\sqrt{3}\ ;\ I_2 = 0$$

Al fine di riportare l'equazione III.68) sotto forma canonica occorre applicare in un primo momento una rotazione R di equazioni:

$$\text{III.70)}\quad R:\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\alpha \\ y' = x\,\text{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad R^{-1}:\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\text{sen}\alpha \\ y = -x'\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni III.70') nella III.68) si ottiene l'equazione:

$$\text{III.71)}\quad x'^2(9\cos^2\alpha + 12\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + 4\,\text{sen}^2\alpha) + y'^2(4\cos^2\alpha + 9\,\text{sen}^2\alpha - 12\,\text{sen}\alpha\cos\alpha) +$$
$$+ 2xy(5\,\text{sen}\alpha\cos\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\,\text{sen}^2\alpha) - \sqrt{13}\ x'\text{sen}\alpha + \sqrt{13}\ y'\cos\alpha - 2 = 0$$

Imponendo che il coefficiente del termine in x'y' sia nullo, si ottiene la seguente equazione:

$$\text{III.72)}\quad 6\,\text{tg}^2\alpha + 5\,\text{tg}\alpha - 6 = 0 \quad \text{le cui radici sono:}$$
$$\text{III.72')}\quad \text{tg}\alpha_1 = -\frac{3}{2} \qquad \text{III.72'')}\quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{2}{3}$$

Considerando, ad esempio, la III.72'), l'equazione III.71) diviene:

$$\text{III.73)}\quad 13y'^2 - 3x' - 2y' - 2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \text{III.73')}\quad x' = \frac{13}{3}y'^2 - 2y' - 2$$

A questo punto si possono percorrere due strade; un primo metodo consiste nello studiare la parabola K' ottenuta di equazione III.73'), con asse di simmetria parallelo all'asse x, di cui è facile calcolare le coordinate del vertice, del fuoco e le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice applicando alla funzione:

$$\text{III.74)}\quad x = ay^2 + by + c \quad \text{le rispettive formule:}$$
$$V'(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}),\ F'(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}),\ y = -\frac{b}{2a}\ ,\ x_d = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

da cui segue, nell'ordine:

$$\text{III.75)}\quad V'(-\frac{9}{13},\frac{1}{13})\ ,F'(-\frac{33}{52},\frac{1}{13})\ ,\ y'=\frac{1}{13},\ x'_d=-\frac{3}{4}$$

Dalla III.72') segue:

$$\text{sen}\alpha_1=\frac{3}{\sqrt{13}}\ ;\ \cos\alpha_1=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

e le equazioni III.70) diventano:

$$\text{III.77)}\quad R:\begin{cases} x'=-\dfrac{2x+3y}{\sqrt{13}} \\ y'=\dfrac{3x-2y}{\sqrt{13}} \end{cases} \qquad \text{III.77')}\quad R^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{-2x'+3y'}{\sqrt{13}} \\ y=-\dfrac{3x'+2y'}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Sostituendo i valori dati dalle III.75) nelle III.77') si ottengono rispettivamente il vertice, il fuoco e le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice della parabola K:

$$\text{III.78)}\quad V(\frac{21}{13\sqrt{13}},\frac{25}{13\sqrt{13}})\ ,F(\frac{3}{2\sqrt{13}},\frac{91}{52\sqrt{13}}),$$
$$3\sqrt{13}\,x-2\sqrt{13}\,y-1=0 \qquad 8x+12y-3\sqrt{13}=0$$

Lo studio della parabola K è così ultimata. Si può procedere con un secondo metodo che consiste nel riprendere la III.73) ed applicare la traslazione T di equazioni generiche date dalle III.45) ; sostituendo le variabili x' ed y' date dalle III.45') nell'equazione III.73) si ottiene l'equazione:

$$\text{III.79)}\quad 13y''^2+2y''(13b-1)-3x''+13b^2-3a-2b-2=0$$

Imponendo nulli il coefficiente del termine lineare in y" ed il termine noto, si ottiene:

$$\text{III.80)}\quad a=-\frac{9}{13}\ ,\quad b=\frac{1}{13}$$

e sostituendo i valori a e b trovati nell' equazione III.79) si ottiene la conica K" di equazione:

$$\text{III.81)}\quad 13y''^2-3x''=0$$

in cui si hanno i seguenti vertice ,fuoco, ed equazioni dell'asse di simmetria e direttrice sono rispettivamente:

$$\text{III.82)}\quad V''(0,0)\ F''(\frac{3}{52},0)\ ,\ y''=0,\ x''=-\frac{3}{52}$$

La traslazione che ha trasformato la K' nella K" ha equazioni:

$$\text{III.83)}\quad T:\begin{cases} x''=x'+\dfrac{9}{13} \\ y''=y'-\dfrac{1}{13} \end{cases} \qquad \text{III.83')}\quad T^{-1}:\begin{cases} x'=x''-\dfrac{9}{13} \\ y'=y''+\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

Per ottenere dalla K la conica K" si deve applicare la trasformazione composta ottenuta dalle III.83) e III.77):

$$\text{III.84)}\quad T\circ R:\begin{cases} x''=-\dfrac{-2x-3y}{\sqrt{13}}+\dfrac{9}{13} \\ y''=\dfrac{3x-2y}{\sqrt{13}}-\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

e per ottenere dalla K" la K :

$$\text{III.84')}\quad R^{-1}\circ T^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{-2x''+3y''}{\sqrt{13}}+\dfrac{21}{13\sqrt{13}} \\ y=-\dfrac{3x''+2y''}{\sqrt{13}}+\dfrac{25}{13\sqrt{13}} \end{cases}$$

Pertanto, avendo il vertice ed il fuoco della K", per trovare vertice e fuoco della K assegnata, occorre utilizzare le III.84') sostituendo ad x" ed y" i valori dati dalle III.82).Tali punti sono ovviamente quelli trovati in precedenza(vedere III.78) applicando il primo metodo per la parabola: si ottengono ugualmente le equazioni che compaiono nelle III.78) considerando le equazioni che compaiono nelle III.82) e le equazioni III.84).Come visto in teoria, nel caso della parabola non conviene applicare prima una traslazione e successivamente una rotazione perché si allunga troppo il procedimento, in quanto dopo aver applicato due trasformazioni isometriche non si perviene ad una forma canonica della parabola, bensì all'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo ad uno degli assi coordinati.

Conclusioni della seconda parte e brevi cenni storici.

Lo scrivente ha deciso di scrivere questi appunti sulle affinità applicate alla teoria delle coniche perché egli ha insegnato al liceo scientifico tecnologico dove questi argomenti assumono notevole importanza nell'ambito della programmazione didattica. Si è visto, in questi appunti, la maggiore duttilità del metodo delle trasformazioni geometriche rispetto al metodo del cambiamento del sistema di riferimento ai fini dello studio delle coniche, anche se i calcoli algebrici sia in un metodo che nell'altro sono simili; con le trasformazioni geometriche è più facile determinare le trasformazioni inverse e comporre diverse trasformazioni; si potrebbe abbinare il metodo delle trasformazioni geometriche a quello matriciale degli autovalori ed autovettori (vedere Sernesi), ma un tale studio non sarebbe indirizzato più a studenti di scuola superiore. E' da notare che lo studio di una conica diventa molto agevole utilizzando l'equazione dell'involuzione dei dimetri coniugati che consentono, una volta note le coordinate del centro, la determinazione degli assi e degli asintoti; per quanto riguarda i fuochi basta scrivere il fascio di rette isotrope uscenti dal fuoco di coordinate, imporre la condizione di tangenza con la conica assegnata e quindi intersecare le rette isotrope trovate a due a due. Le direttrici sono le polari di ciascun fuoco rispetto alla conica. E' chiaro che se si vuole introdurre tale metodo nelle scuole superiori si devono introdurre gli elementi immaginari nel piano cartesiano e quindi complessificare tale piano; inoltre si dovrebbe studiare l'equazione dei diametri coniugati al terzo anno della scuola superiore. Come ulteriore metodo da introdurre nelle scuole superiori si può utilizzare il metodo di Gauss per la semplificazione a forma canonica di forme quadratiche (vedere [1]) . Storicamente i matematici che studiarono il problema delle trasformazioni geometriche furono Caley, Sylvester, Hamilton, (che si occuparono anche di calcolo matriciale) Felix Klein che ebbe il merito di catalogare i vari tipi di geometrie utilizzando i gruppi di trasformazioni.

Bibliografia

I testi riportati in questa bibliografia non sono in ordine di importanza tranne che per l'ultimo. Il [10] avrebbe dovuto occupare sicuramente per importanza una tra le prime posizioni, così come [11] e [12]. Il [13] è l'unico testo di Storia della Matematica utilizzato. Pertanto l'ordine è funzionale alla stesura di questi appunti.

[1] M.Stoka: Lezioni di geometria , Ed.CEDAM.
[2] Stoka-Pipitone : Esercizi e problemi di geometria, Vol.I Ed.CEDAM.
[3] Zwirner-Scaglianti: Conoscenze e strategie nella matematica , Ed. CEDAM.
[4] Sernesi: Geometria I , Bollati Boringhieri.
[5] G.Castelnuovo: Lezioni di geometria , Casa editrice Dante Alighieri.
[6] Dodero-Baroncini-Manfredi: Moduli di lineamenti di matematica (per il trennio dei licei scientifici) tomo D , Ghisetti e Corvi editori.
[7] Re Fraschini-Grazzi : Moduli mat. , tomo A2 , Ediz. Atlas.
[8] Rosati : Lezioni di geometria , Ed. Libreria Cortina Padova.
[9] Maraschini-Palma: Format, Vol.I(per liceo scientifico sperimentale) Ed.Paravia.
[10] Dantoni-Mammana: Lezioni di geometria.Di Stefano Editore-Genova.
[11] Luigi Campedelli: Lezioni di geometria. CEDAM.
[12] Chiellini Oscar: Complementi di geometria.
[13] Morris Kline: Storia del pensiero matematico, Voll I e II-ED. EINAUDI
[14] Santangelo M. : Polarità rispetto ad una conica e problema delle tangenti. pubblicato su internet nel sito G.R.I.M. di Palermo.