

L'ILLUSION GRAPHIQUE CHEZ LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE

EDUARDO LACASTA ZABALZA¹

RÉSUMÉ - *L'analyse factorielle des rapports entre les connaissances mathématiques sur les fonctions linéaires et quadratiques et le mode de présentation des fonctions (graphique et autres) contredit l'hypothèse de l'existence d'une conception graphique de la fonction, différente des conceptions non graphiques. Néanmoins, chez les professeurs et les auteurs de manuels scolaires il existe une tendance à la présentation graphique des fonctions. Dans un questionnaire portant sur la notion de proportionnalité, l'analyse implicite des préférences des élèves par rapport au mode de présentation graphique donne un indice de l'existence d'une illusion graphique chez les élèves du secondaire.*

MOTS-CLÉS - Didactique, fonction, graphique

THE GRAPHIC ILLUSION OF THE SECONDARY PUPILS

SUMMARY - *The factorial analysis of the relationship between the mathematical background on linear and quadratic functions, on the one hand, and the way of presentation of functions (graphics, figures and so on) on the other hand, shows a contradiction with the usual assumption of the existence of a "graphical conceptualization" of the function, different from the non-graphical conceptualization" one. Nevertheless, the authors of scholar texts and the professors show a trend to use the graphical presentation of function. In a learning context of the concept of proportionality, the implicative analysis of students, about the preferences as regards to the kind of graphical presentation, discovers the existence of a graphical misleading shared by the high school students.*

KEY-WORDS - *Mathematics Education, function, graphic.*

¹ Universidad Pública de Navarra. Departamento de Matemática e Informática. Campus Arrosadia. 31006 Pamplona-Iruña. Espagne. <elacasta@unavarra.es>

FONCTION ET COURBE

L'histoire des rapports entre courbe et fonction en mathématiques a été conflictuelle. C'est ainsi que l'on peut considérer que la notion de fonction est construite en quelque sorte contre l'idée de courbe et que celle-ci révèle "un véritable obstacle épistémologique au sens de Brousseau" (Chauvat, 1999). Si l'étude de fonctions est envisagée suivant une approche intuitive, à l'aide de façon quasiment exclusive du langage graphique, on a des chances de "baser l'étude des fonctions sur des propriétés qui risquent d'être spécifiques au cadre géométrique" (op. cit.).

D'ailleurs, l'importance de la visualisation dans l'enseignement de l'analyse a été signalée par nombre d'auteurs. Pour David Tall (1991), la visualisation est un processus caractéristique de la "pensée mathématique avancée" qui permet d'avoir une représentation mentale. Le succès en mathématiques exige d'avoir des représentations riches des concepts et la construction d'une représentation mentale est basée sur des systèmes de représentation, c'est-à-dire, sur des "artefacts" concrets et externes ; dans le cas des fonctions, un de ces "artefacts" est la représentation graphique cartésienne.

Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques ont signalé que les passages entre les différentes représentations faciliteraient certaines activités cognitives très utiles pour l'apprentissage.

Mais une utilisation naïve de ces résultats de recherche –en particulier dans l'innovation qui accompagne les réformes éducatives– peut mépriser l'importance d'une analyse rigoureuse des effets de l'incorporation de nouveaux exercices et problèmes, basés sur l'emploi privilégié du langage graphique.

Cette problématique nous a conduit à étudier le rôle des graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire.

Y-A-T-IL UNE CONCEPTION GRAPHIQUE DE LA FONCTION CHEZ LES ÉLÈVES ?

Nous nous sommes posé dans notre thèse (Lacasta, 1995) la question suivante : y-a-t-il une conception graphique des objets mathématiques différente des conceptions non graphiques ? Un premier questionnaire (PQ) est passé à un échantillon de 87 élèves du secondaire espagnol. Les connaissances mathématiques qui y sont envisagées portent sur un éventail assez large de savoirs : la lecture d'intersections, le signe de fonctions pour des intervalles de la variables x , la comparaison de fonctions, l'extrapolation, les maxima, etc. Mais nous nous sommes borné à l'utilisation des fonctions polynomiales de premier et second degrés, qui sont connues par l'ensemble de tous les élèves qui ont répondu au questionnaire.

Pour montrer le rôle du graphique dans l'étude des sujets mathématiques, nous avons distingué les caractères G, F et T. Le caractère G est la présentation des objets mathématiques (des fonctions) par l'intermédiaire d'un graphique cartésien ; quand nous disons formule (F), il s'agit de l'expression algébrique des fonctions et le tableau (T) est associé à l'aspect numérique. Le fait de faire un tableau exprime la volonté de garder certaines informations du graphique. Les fonctions ont été ainsi présentées dans ce questionnaire, soit par un graphique, soit par un tableau, soit par une formule et nous avons défini des variables en rapport avec les

connaissances visées et le mode de présentation ; autrement dit, chaque connaissance visée (lecture des intersections, signe des fonctions, etc.) a été posée selon les trois modes de présentation G, F et T.

	its	sig	com	rég	ext	max	Cp	Cd
G	1G	2G	3G	4G	5G	IpG	CpG	CdG
F	1F	2F	3F	4F	5F	IpF	CpF	CdF
T	1T	2T	3T	4T	5T	IpT	CpT	CdT

Légende :

Le mode de présentation et la connaissance concernés pour chaque question sont respectivement déterminés par les intitulés de ligne et de colonne.

G : mode de présentation graphique.

F : mode de présentation formule.

T : mode de présentation tableau.

its : lecture des intersections (its).

sig : signe des fonctions pour des intervalles de la variables x.

com : comparaison de fonctions (com).

rég : régionnement du plan par les fonctions.

ext : extrapolation (ext).

max : maximums et minimums.

La colonne "max" correspond aux questions sur l'identification des maxima sur la fonction quadratique (identification sur la parabole "Ip").

La colonne "Cp" correspond au calcul des intervalles de croissance et décroissance sur la parabole.

La colonne "Cd" correspond à la détermination du caractère croissant ou décroissant de la droite.

Les numéros sont ceux des groupes de questions, de 1 à 5.

Tableau 1
Variabes du questionnaire PQ par rapport aux connaissances et aux modes de présentation des fonctions

Une analyse a priori a fixé un modèle, selon lequel les comportements des élèves regrouperaient les variables selon les caractères G, F et T. Par conséquent, on s'attendait à avoir un indice de l'existence d'une conception graphique de la fonction et des conceptions non graphiques.

L'observation fait apparaître un écart entre le modèle a priori et l'ensemble des procédures effectivement observées. La méthode d'analyse de données utilisée a été l'analyse factorielle (Analyse Factorielle de Correspondances –AFC– et Analyse en Composantes Principales –ACP), puisqu'il s'agissait de "révéler des liaisons symétriques et de faire apparaître des facteurs discriminants dans une population au travers de variables" (Gras, 1992).

Dans les plans des deux premiers facteurs principaux (voir figures 1 et 2), la réussite des élèves aux questions apparaît groupée selon le problème mathématique posé et non pas selon le mode de présentation de la fonction (G, F ou T).

Donc, la présentation des questions (le cadre employé) n'influe pas sur la réussite globale dans les trois modes de présentation. Nous n'avons donc pas d'indices pour affirmer qu'il existe une conception graphique et des conceptions non graphiques des objets mathématiques traités. Par contre, la variable "sujet mathématique" regroupe mieux les réponses des élèves que la variable "présentation" et le concept mathématique reste le moyen principal et central de connaissance nécessaire à la résolution des problèmes.

Dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques, le graphisme ne semble pas jouer un rôle crucial dans la connaissance des fonctions. Évidemment le graphique ne saurait supporter seul les connaissances relatives aux fonctions qu'il représente, d'une manière spéciale dans le cas des rapports entre la fonction linéaire et la proportionnalité.

Néanmoins, nous avons aussi trouvé (Lacasta, 1995) que les professeurs préféreraient dans l'enseignement des fonctions, les conditions (graphiques ou non) qui permettraient le mieux un *contrat didactique d'ostension* : la présentation graphique des fonctions semble préférée, dans la mesure où elle favorise un contrat ostensif.

Ainsi, la place attribuée par les professeurs au graphique cartésien est basée sur une "fausse transparence" du graphique. Autrement dit, la fonction mathématique représentée serait "visible" directement sur le graphique cartésien qui la représente.

Figure 1
Plan 1-2 de l'AFC de la matrice des réussites aux 24 questions du questionnaire PQ

Figure 2
Plan 1-2 de l'ACP de la matrice des réussites aux 24 questions du questionnaire PQ

UN INDICE DE L'ILLUSION GRAPHIQUE CHEZ LES ÉLÈVES, RÉVÉLÉ PAR L'ANALYSE IMPLICATIVE DE LEURS PRÉFÉRENCES

Qu'en est-il des élèves dans les situations didactiques ? Nous avons vu l'absence d'indices prouvant l'existence d'une conception graphique des fonctions, dans une situation "à caractère a-didactique" (Bloch, 1999) représentée par le premier questionnaire.

Un second questionnaire (SQ) est présenté à un autre échantillon de 85 élèves du secondaire (13 ans), où le savoir mathématique visé est la proportionnalité. Cette fois-ci le but principal est de savoir quel est l'effet de la transposition didactique dans l'apparition précoce des graphiques au début de l'école secondaire.

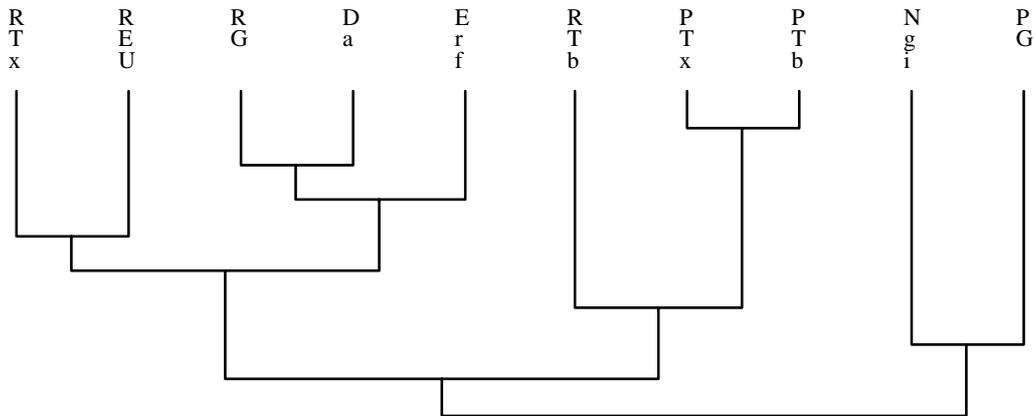
Le même problème mathématique (quatre couples de valeurs étant donnés, déterminer si les grandeurs respectives sont proportionnelles ou non) est posé par des énoncés différents, sous quatre modalités : texte, tableau, graphique suggéré, information portée sur le graphique. L'élève doit déterminer si les grandeurs sont proportionnelles ou non et il doit aussi raisonner la réponse.

Les variables définies ont été, d'une part, des réussites aux questions suivant le mode de présentation (RTx, RTb, RG). D'autre part, les comportements relevés dans le questionnaire ; par exemple, NGi : résolution numérique des questions posées avec un graphique incomplet, Da : détermination de la proportionnalité par alignement des points du graphique avec l'origine, etc. Toutes les variables des comportements sont binaires ("0" par absence et "1" par présence).

Finalement on a défini trois variables en rapport avec les représentations qu'ont les élèves : PTx (préférence des questions posées par l'intermédiaire d'un texte), PTb (préférence des questions posées par l'intermédiaire d'un tableau) et PG (préférence des questions posées graphiquement). C'est le fonctionnement didactique du graphique chez les élèves qui est visé par l'intermédiaire de l'étude des rapports entre les préférences exprimées par les élèves et leurs réussites et comportements effectifs.

L'analyse de similarité au sens de I. C. LERMAN, donne l'arbre de la figure 3.

La préférence pour les problèmes posés par l'intermédiaire d'un tableau ou par un texte est liée à la réussite dans les problèmes posés par un tableau numérique. Néanmoins, la préférence pour la présentation graphique des problèmes est liée seulement à la résolution numérique des questions posées graphiquement, mais elle n'est liée ni au fait d'avoir suivi l'enseignement sur la représentation graphique des fonctions linéaires ni à la réussite graphique.



Arbre de similarité : C:\Eduardo\Trabajos\Caen31.csv

Légende :

NGi : résolution numérique des questions posées avec un graphique.

Da : détermination de la proportionnalité par alignement des points du graphique avec l'origine.

Erf : avoir suivi un enseignement de la représentation graphique des fonctions.

RG : réussite aux problèmes présentés par un graphique.

REU : réussite de chaque élève sur l'ensemble des questions du questionnaire

RTx : réussite aux problèmes présentés par l'intermédiaire exclusif d'un texte.

RTb : réussite aux problèmes présentés à travers un tableau de valeurs.

PTx : préférence des questions posées par l'intermédiaire d'un texte.

PTb : préférence des questions posées par l'intermédiaire d'un tableau.

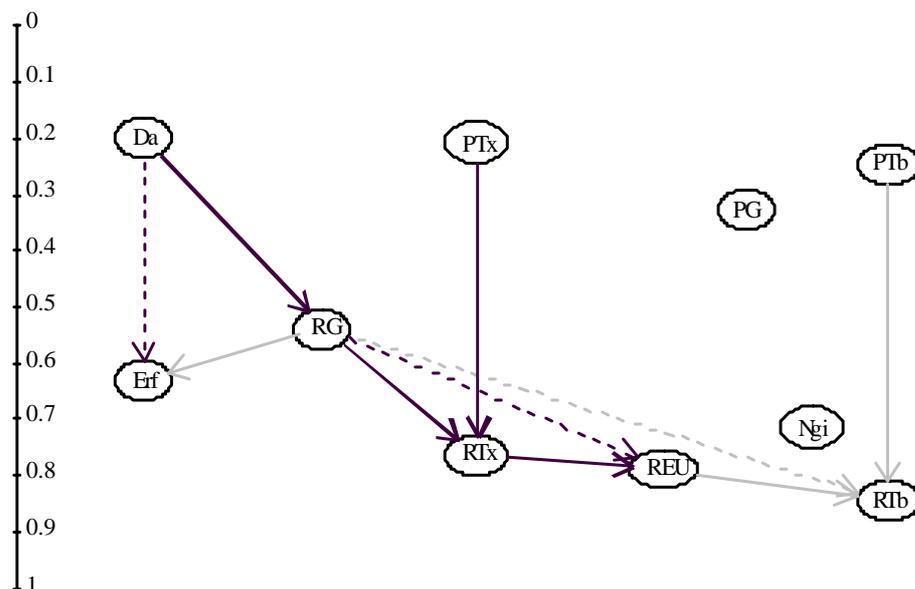
PG : préférence des questions posées graphiquement.

Figure 3

Arbre de similarité de la matrice 85 x 10 des 10 variables définies sur le questionnaire SQ

Le graphe implicatif (fig. 4) montre que l'ensemble des élèves qui déclarent leur préférence par le langage graphique dans les questions à résoudre, n'est pas inclus (ni quasi-inclus statistiquement) dans l'ensemble des élèves qui réussissent dans les tâches proposées graphiquement.

Ce résultat, obtenu à travers l'analyse implicative, a fait apparaître des indices de l'existence d'une illusion graphique chez les élèves.



Graphe implicatif: C:\Eduardo\Trabajos\Caen31.csv

99 95 90 85

Figure 4

Graphe implicatif de la matrice 85 x 10 des 10 variables définies sur le questionnaire SQ

D'ailleurs, nous avons trouvé que l'usage du graphique comme moyen de connaissance intuitive et d'apprentissage est spécialement prisé des étudiants littéraires (d'un niveau similaire à la Terminale en France), conformément à l'idée qui sous-tend le programme qu'ils ont suivi (qui prime le travail "intuitif" par les graphiques) ; pour eux, la représentation graphique des fonctions serait une alternative à la connaissance proprement mathématique.

CONCLUSION

Les textes scolaires actuels et les orientations en vigueur dans les administrations éducatives pour les premiers niveaux du secondaire en Espagne, valorisent de plus en plus une approche intuitive et graphique de la notion de fonction et son analyse.

Par exemple, des nombreuses situations et exercices, rassemblés dans les publications du Shell Centre et présentés dans les "Standards curriculaires" du "National Council of Teachers of Mathematics" (N.C.T.M., 1991), sont proposés aux élèves de différents niveaux du secondaire dans nombre de manuels scolaires. L'influence de ces travaux sur la dernière réforme du système éducatif espagnol et l'innovation qui l'accompagne, est donc très forte. Il semble que, dans les manuels et les livres pour le professeur issus de cette réforme, la richesse de la représentation repose de préférence sur les graphiques cartésiens de fonctions, qui seraient le "support intuitif" privilégié de l'apprentissage des fonctions.

Néanmoins, le traitement didactique actuel des fonctions, "tout en privant les notions de *fonction* et de *courbe* d'un statut d'objet de savoir à enseigner, n'est pas sans doute

satisfaisant” (Chauvat, 1999). Il est nécessaire de dénoncer l’illusion de l’évidence graphique et le recours naïf ou systématique au graphique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLOCH I. : ‘L’articulation du travail mathématique du professeur et de l’élève dans l’enseignement de l’analyse en première scientifique. Détermination d’un milieu - connaissances et savoirs’, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19, n° 2, La Pensée Sauvage, 1999, 135-194.
- [2] CHAUVAT G. : ‘Courbes et fonctions au collège’, *petit x*, 1999, 23-44, Grenoble.
- [3] GRAS R. : ‘L’analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique’. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, n° 1, La Pensée Sauvage, 1992, 59-72.
- [4] LACASTA E. : *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l’enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse. Université Bordeaux I, 1995.
- [5] N.C.T.M., *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, 1991.
- [6] TALL D. (éd.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991.