Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

Espace de travail géométrique personnel : une approche didactique et statistique

Alain Kuzniak

Equipe Didirem Université de Paris VII Paris France
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

Résumé. Nous présentons l'étude des réponses apportées par des étudiants-professeurs d'école à un exercice de géométrie posé dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques portant sur la nature exacte des espaces de travail géométriques de ces étudiants. L'approche didactique s'appuie prioritairement sur la notion de paradigmes géométriques, elle permet de dégager une première classification des productions des étudiants. L'approche statistique vient en complément de cette approche à la fois pour la questionner et essayer de comprendre de manière plus fine les raisons de l'évolution des étudiants en formation.

1 Présentation de l'étude

Dans le cadre de recherches menées sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, nous avons introduit un certain nombre d'outils théoriques destinés à étudier les difficultés spécifiques de cet enseignement, notamment dans le cadre de la formation des enseignants. Nous avons plus particulièrement privilégié et développé deux outils : les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométrique (ETG). Une de nos hypothèses de base, amplement vérifiée par nos travaux, était que :

Dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture, souvent signalée, dans l'enseignement français entre les différents cycles.

Dans notre approche, la géométrie élémentaire peut s'envisager suivant trois paradigmes bien distincts dont les deux premiers (Géométrie I et II) jouent un rôle essentiel dans le contexte actuel de l'enseignement français mais aussi, comme nous avons pu le constater, dans de nombreux autres pays. Ces paradigmes sont globaux et consistants : chacun d'entre eux définit une forme élaborée de géométrie. Ils structurent des espaces de travail différents qui transforment la nature des activités géométriques.

En nous appuyant sur ces prémisses théoriques, nous avons mis en place un dispositif de formation qui se propose de sensibiliser les futurs enseignants à l'existence des paradigmes et à leur rôle dans certains malentendus didactiques dus en grande partie à une différence de posture et de rapport à la géométrie chez les enseignants et chez les élèves.

La mise en place et l'évaluation de ce dispositif nécessitent une analyse précise des paradigmes utilisés de manière spontanée par les étudiants pour résoudre des problèmes. Cette analyse doit permettre de mieux connaître la nature des espaces de travail propres à chaque étudiant. La réflexion didactique a priori fournit des éléments qui nous ont permis de dégager quatre grands types d'approche de la géométrie chez les étudiants.

La question particulière que nous souhaitons traiter dans cet article porte sur les apports des méthodes statistiques à cette analyse. De manière plus précise, nous souhaitons répondre à deux types d'interrogations.

· Les premières portent sur les catégories mises en évidence par l'analyse didactique. Dans quelle mesure les classifications dégagées par les analyses statistiques recouvrent-elles celles de l'analyse didactique. Quels éléments apporte l'analyse implicative pour mieux comprendre les diverses populations d'étudiants et ainsi nous permettre d'anticiper certaines des évolutions que nous avons pu constater à l'issue du dispositif de formation.

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

· La seconde série de questions porte sur une éventuelle automatisation de la répartition des étudiants dans les classes utilisées. En effet, en plus de sa lourdeur, l'analyse didactique suppose une connaissance approfondie du cadre théorique utilisé qui en limite la diffusion notamment dans les travaux avec des équipes étrangères. Ainsi, nous travaillons actuellement avec des collègues chiliens qui souhaitent des outils pour analyser de grandes quantités de travaux d'étudiants

Dans cette présentation, après avoir donné quelques précisions sur le cadre théorique utilisé et sur la nature du dispositif de formation employé, nous étudierons en détail l'exercice clef du dispositif actuel. Nous donnerons des éléments sur les résultats des étudiants en insistant sur le rôle et l'apport des diverses méthodes que nous avons utilisées : analyse didactique a priori et études statistiques de type factoriel et implicatif utilisées en complément de la première approche.

2 Objet de l'étude

2.1 Prémisses théoriques

Les recherches épistémologiques initiées par Bachelard ou Koyré, relayées en mathématiques par Lakatos, ont montré l'illusion d'une évolution scientifique paisible des concepts mathématiques. Un certain aboutissement de la logique conflictuelle de l'histoire des idées scientifiques culmine dans l'œuvre de Kuhn qui propose le passage d'un paradigme à l'autre par une révolution où le nouveau paradigme se substitue à l'ancien.
Nous avons envisagé l'étude de la géométrie à travers cette vision de l'évolution de la science basée sinon toujours sur des ruptures du moins sur des évolutions notables de point de vue. Pour parvenir à dégager des paradigmes géométriques qui, par delà la perspective historique, rendaient compte des conceptions des pratiques géométriques, nous avons suivi l'idée de Gonseth de poser l'existence de la géométrie dans son articulation avec le problème de l'espace. Autour de trois modes de connaissances de l'espace (intuition, expérience, déduction), il est possible d'organiser une synthèse qui réorganise la relation avec l'espace et donne naissance à trois types de Géométrie.
La Géométrie naturelle (Géométrie I) a pour source de validation la réalité et le monde sensible. Dans cette géométrie, une assertion est légitime si l'intuition d'un résultat et les conclusions d'une expérience ou d'une déduction correspondent. La confusion entre le modèle et la réalité est grande et tous les arguments sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur.
Ensuite, nous rencontrons la Géométrie axiomatique naturelle dont le modèle est la géométrie euclidienne classique. Cette géométrie (Géométrie II) est bâtie sur un modèle proche de la réalité. Mais une fois les axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système pour être certaines.
Enfin, il y a la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III) où le plus important est le système d'axiomes lui-même sans relation avec la réalité. Ce système doit être totalement axiomatisé ce qui n'est pas le cas dans la Géométrie II.
Il importe également de distinguer la géométrie des limbes du proto-géométrique qui englobe à la fois les pratiques spontanées autour de l'espace, étudiées par Piaget dans ce qu'il appelle justement « la géométrie spontanée », et aussi certaines pratiques automatisées d'arpentage ou de construction effective dans le meso-espace. Pour nous la Géométrie supposera une distanciation théorique minimale par rapport à l'espace qu'elle étudie.

2.2 La question de la formation des enseignants.

Pour étudier la nature des paradigmes privilégiés par les étudiants dans leur approche de la géométrie et aussi mieux définir la réalité de leur espace de travail, nous avons exploré différentes pistes. Nous ne retiendrons ici que celle qui s'appuie sur un dispositif de formation relativement complexe qui comporte deux phases bien distinctes. [Kuzniak-Rauscher 2002 et 2003]

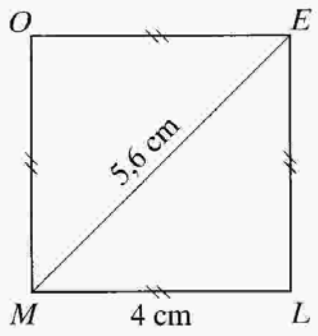
1. La première phase repose entièrement sur un questionnaire écrit et individuel dont certains éléments servent ensuite à la deuxième phase gérée plus collectivement. Ce questionnaire comprend notamment deux exercices de mathématiques de fin de Collège que les étudiants doivent résoudre et sur lesquels ils sont invités à exprimer « les incertitudes ou les difficultés qu'ils y ont rencontrées ».
2. La deuxième phase propose aux étudiants diverses activités et notamment un retour sur un des exercices recherchés pendant la phase 1 et qui s'intitule "Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ? Les étudiants ne sont pas d'accord…". Les étudiants ont à lire puis à analyser et à caractériser quatre réponses données à l'exercice 1 de la phase 1. Ils doivent aussi dire de quelle réponse leur production initiale était proche et pourquoi, avant de signaler s'ils modifieraient maintenant leur réponse et dans quel sens.

Les quatre productions ont été choisies pour refléter diverses approches que l'on peut rencontrer chez les étudiants. Nous allons présenter l'exercice support de ces productions, puis nous envisagerons les diverses méthodes qui permettent d'exploiter les solutions données par les étudiants dans la perspective de recherche qui est la notre.

2.3 L'exercice clef « Charlotte et Marie »

L'exercice suivant (Hachette Cinq sur Cinq 4ème 1998, page 164) entre dans la catégorie des exercices de géométrie où se pose clairement la question de l'existence d'un espace de travail idoine pour résoudre le problème.

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?
2° Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?



Le dessin proposé à l'étude ressemble à un carré mais son statut dans le problème n'est pas clair. Il possède certaines particularités d'un dessin coté : les côtés du quadrilatère sont codés et indiquent leur égalité, des mesures figurent sur le dessin. Mais quelle est l'origine de ces mesures ? S'agit-il de mesures effectuées sur une figure préexistante ou sont-elles, notamment pour la diagonale, le fruit d'un calcul. La longueur de la diagonale [ME] est donnée au dixième de cm près (5,6 cm), ce qui peut incliner à penser qu'il s'agit d'une mesure réelle. Mais, comme d'autre part le problème est issu d'un livre de fin de collège, on peut penser à une mesure théorique plus conforme au contrat didactique usuel dans ce type de classe.
Ainsi, le dessin est-il une donnée première, un objet réel, que le problème se propose d'étudier ou résulte-t-il d'une construction à partir d'un cahier des charges précisé dans un texte. Dans ce cas la réalisation pratique est-elle importante ou n'est-elle qu'un support pour aider le raisonnement ?
Le texte du problème doit normalement permettre de répondre à ces questions et déterminer le statut de l'objet figuré et ainsi orienter vers un paradigme géométrique précis. Mais de fait l'énoncé ne donne aucune indication sur ce point car comme le signale un étudiant : il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un

dessin qui peut tromper. Seul semble acquis le fait que le quadrilatère soit un losange, savoir s'il s'agit d'un carré ou non est laissé à la charge de l'élève.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? Une façon classique de traiter ce type d'exercice consiste à utiliser le théorème de Pythagore qui évite le recours à une mesure effective de l'angle. Mais là encore, resurgit l'ambiguïté sur le choix de l'espace de travail. Pour notre propos, nous introduirons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités

Si le triangle ABC est rectangle alors $AB^2+BC^2=AC^2$

et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées

Si le triangle ABC est « à peu-près » rectangle alors $AB^2+BC^2\approx AC^2$

La première forme permet de basculer simplement dans une Géométrie qui s'écarte des données de l'expérience en raisonnant ici de manière élémentaire dans le cadre numérique. Quant à la seconde formulation, elle apparaît plutôt comme une forme avancée de Géométrie I.

Si l'on se place en Géométrie II, en utilisant la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un étudiant et donner raison à Charlotte :

On sait que si OEM est rectangle en O alors on a $OE^2+OM^2=ME^2$

On vérifie $4^2+4^2=5{,}6^2$ *et* $32\neq 31{,}26$. *Donc OEM n'est pas un triangle rectangle.*

Si on utilise le théorème de Pythagore **approché** dans un cadre mesuré alors on suivra plutôt le raisonnement proposé par un autre étudiant :

C'est un carré si un angle au moins est droit entre deux côtés.
L'angle MLE est droit si et seulement si :
$ML^2+LE^2=ME^2$ *d'après le théorème de Pythagore*
$16+16=32$ *or* $\sqrt{32}\approx 5{,}6$
Marie a raison OELM est un carré.

En fait, il faudrait conclure qu'OELM est « presque » un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves et aux étudiants de jouer sur ces différentes distinctions. Ils vont être de fait confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique sur lequel va s'appuyer notre séance de formation. En effet, ce problème très ambiguë en situation ordinaire de classe devient très riche pour une situation de formation et permet de travailler sur le jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II.

3 Analyse didactique des travaux d'étudiants

3.1 Vers une classification des réponses des étudiants

De fait, notre classification initiale s'appuie sur une analyse didactique basée sur les paradigmes géométriques. Toutes les productions des étudiants sont analysées grâce à une double approche qui croise paradigmes géométriques et niveaux d'argumentation (voir 3.2). Nous allons présenter les résultats de cette approche que nous comparerons ensuite aux résultats apportés par les approches statistiques

Nous avons identifié quatre sortes de réponses au problème qui permettent de dégager quatre populations. Nous représentons ces quatre types par PII, PIprop, PIperc et PIexp. Nous clarifierons la signification de ces abréviations plus loin. Chaque fois, nous donnerons une réponse typique de la population étudiée.

D'abord, les réponses utilisant le théorème de Pythagore sont courantes dans les deux groupes d'étudiants, PII et PIprop.

PII Dans ce cas, les réponses sont proches de celle-ci [Et A].

1) OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux deux à deux.

2) Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de Pythagore on aurait alors, $ME^2 = ML^2 + LE^2$ $\quad ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$

$$ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$$

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

L'angle ELM n'est donc pas un angle droit.
Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.

La forme classique du théorème de Pythagore est appliquée à l'intérieur du monde des figures abstraites sans considérer l'apparence réelle de l'objet. Seules comptent les informations données par l'énoncé et les codages (code de segments, indications sur la dimension des longueurs),. Pour prouver que le quadrilatère est un losange (quatre côtés de la même longueur) et montrer que ce n'est pas un carré (contraposée du théorème de Pythagore), les étudiants utilisent des propriétés minimales et suffisantes. Nous considérerons cette population comme raisonnant au sein de la Géométrie II.
PIprop. Cette population regroupe les étudiants qui appliquent le Théorème de Pythagore approché, en fait sa réciproque.
Ils donnent une réponse semblable à celle-ci **[Et B**]:

1°) OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.
2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore . $ML^2+LE^2=ME^2$

$$4^2+4^2=16+16=32$$

$$ME=\sqrt{32} \approx 5{,}6 \text{ donc } MLE=90°$$

Cet étudiant possède les connaissances théoriques nécessaires pour justifier sa réponse. Il applique le théorème de Pythagore pratique sous une forme que nous n'avons presque jamais rencontrée chez les élèves de Collège (dans une étude semblable) mais qui apparaît ainsi plusieurs années plus tard. Les propriétés sont utilisées comme des outils pour produire une nouvelle information sur les objets géométriques vus comme des objets réels.
Dans ce cas, les étudiants reconnaissent l'importance du dessin et de l'approximation des mesures. Le théorème de Pythagore pratique apparaît comme un outil de Géométrie I. Nous avons désigné cette population par PIprop pour insister sur le fait que les individus de ce groupe utilisent des propriétés pour argumenter. La question est de savoir si ces étudiants peuvent jouer sur les différences entre la Géométrie I et la Géométrie II ou si leur horizon reste uniquement technologique.
En complément à ces réponses, voici celles d'étudiants qui n'ont pas utilisé le théorème de Pythagore

PIexp. Nous regroupons ici les étudiants qui utilisent la mesure et les outils de dessin pour parvenir à une réponse. Ils se sont placés dans le monde expérimental de la Géométrie I.
Généralement, ce type d'étudiants conclut que Marie a raison. Mais, ce n'est pas toujours le cas : un étudiant, utilisant son compas, vérifie que les sommets du quadrilatère ne sont pas cocycliques et conclut qu'OELM n'est pas un carré.
Voici une réponse, qui est basée sur un raisonnement avec des instruments.[Et C]

1°) OELM est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu (mesure) en formant des angles droits (avec l'équerre).
Remarque : l'étudiant a construit la deuxième diagonale sur la figure.
2°) Marie a raison. C'est un carré, puisqu'en plus d'être un losange, OELM a ses angles droits (équerre).

Dans cette dernière catégorie, nous plaçons les étudiants dont les réponses ne paraissent basées que sur la perception : leur interprétation du dessin fonde la réponse et ils ne donnent pas d'information sur leurs moyens de preuve.**[Et D]**

1°) Quatre côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de la même longueur OE=ML et OM=EL. Selon la définition d'un losange, nous pouvons dire que les diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires entre elles.
2°) Marie a raison; OELM est aussi carré parce que ses côtés forment un angle droit.

C'est certainement cette catégorie d'étudiants qui nécessite une analyse complémentaire pour déterminer la nature du travail géométrique effectivement entrepris.

3.2 Un regard sur les difficultés de raisonnement.

Les productions précédentes ne contiennent pas trop d'erreurs de raisonnement et de problèmes de formulation. Mais naturellement, ce n'est pas toujours le cas et, nous avons complété l'analyse basée sur l'usage des paradigmes par l'analyse de la structure des preuves en utilisant des niveaux d'argumentation inspirés par le les niveaux de Van Hiele.

Nous plaçons dans le niveau 1, les productions qui énumèrent une liste non minimale de propriétés de quadrilatère pour justifier des affirmations. Dans le niveau 2, nous plaçons des productions qui évoquent une relation correcte d'inclusion entre les carrés et les losanges. Dans le niveau 3, nous mettons les productions qui utilisent l'information minimale suffisante pour justifier des affirmations.

Cette analyse fait apparaître deux catégories d'étudiants. Dans la première, largement illustrée par nos exemples précédents, il y a des étudiants qui ont des connaissances solides concernant les propriétés des figures et qui utilisent un niveau 3 de raisonnement. Les étudiants de la deuxième catégorie accumulent les propriétés et ne semblent pas montrer une connaissance solide des propriétés géométriques. Voici deux exemples illustrant cette seconde catégorie. [Et E]

1°*) Le quadrilatère OELM est un losange. Celui-ci répond aux caractéristiques d'une telle figure : les 4 côtés sont égaux ; les diagonales se coupent en leur milieu et forment un angle droit..*
2°) Les deux filles ont raison, OELM est un carré car il a 4 côtés égaux et 4 angles droits. Il est aussi un losange, même si cette figure qu'est le losange ne se construit pas forcément avec des angles droits.

Cet étudiant justifie sa première réponse en énumérant une liste de propriétés du losange. Ainsi, nous classons sa production au niveau 1. Les propriétés employées sont partiellement justifiées par des indications visuelles ou instrumentées. Cet étudiant considère la figure dans sa réalité matérielle et son approche du problème se situe dans la Géométrie I.

La réponse à la deuxième question "les deux filles ont raison" est assez fréquente (7 sur 57). Sa justification montre que la déclaration "Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai" est à tort interprétée comme "Charlotte affirme que c'est un losange » occultant l'affirmation "ce n'est pas un carré". L'étudiant se concentre sur la question de la relation entre des carrés et les losanges. C'est une question classique (mais qui n'est pas demandée ici) et l'étudiant sait comment répondre. Cela montre témoigne d'un niveau 2 correspondant à la classification de figures.

Enfin avec cet étudiant, nous rencontrons un autre type de réponses. [Et F]

1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL
Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.
2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4cm.
Rappelons que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (donc forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.

La syntaxe employée pourrait laisser penser au niveau 3 : certaines implications sont correctes. Mais le corps des connaissances n'est pas très fiable. Ainsi rencontrons nous "le théorème élève" : *n'importe quel quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un carré*. Des indices visuels sont utilisées pour soutenir le raisonnement comme en Géométrie I.

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

4 L'analyse statistique

4.1 Limite de l'étude didactique

L'étude précédente laisse en suspens un certain nombre de questions que nous avons déjà évoquées dans l'introduction. La classification à laquelle nous sommes arrivés est étroitement liée au cadre théorique qui la sous-tend puisqu'il sert de support a priori à ces catégories. Il est alors intéressant de disposer d'autres outils statistiques de classification pour à la fois tester le modèle précédent mais aussi pour disposer d'une sorte de mesure de la distance entre ces catégories. En effet, dans la phase 2 du dispositif, les étudiants devaient préciser le type de réponses qu'ils pensaient être les mieux justifiées. Or il est apparu que tous les étudiants n'ont pas évolué de la même façon et que certains ont continué à privilégier les réponses de type perceptif ou de type expérimental avec une approximation. Pour progresser dans l'étude, il devient donc nécessaire de comprendre l'agrégation des individus dans une catégorie de la classification et de découvrir des sous-classes pertinentes pour expliquer les évolutions parfois différentes des membres d'une même classe.

D'autre part, un seul exercice ne donne qu'une vision très incomplète de l'ETG personnel d'un étudiant, il importe donc de disposer d'outils plus performants et plus automatiques pour traiter les données. Cette perspective est globalement nécessaire comme nous l'avons souligné au début de l'article pour envisager une généralisation de ce type d'étude en dehors de notre équipe.
Notons enfin que si la perspective statistique peut venir questionner l'approche didactique que nous avons développée, en retour celle-ci peut également questionner la pertinence des outils pour faire apparaître et expliquer les phénomènes que nous avons dégagés.

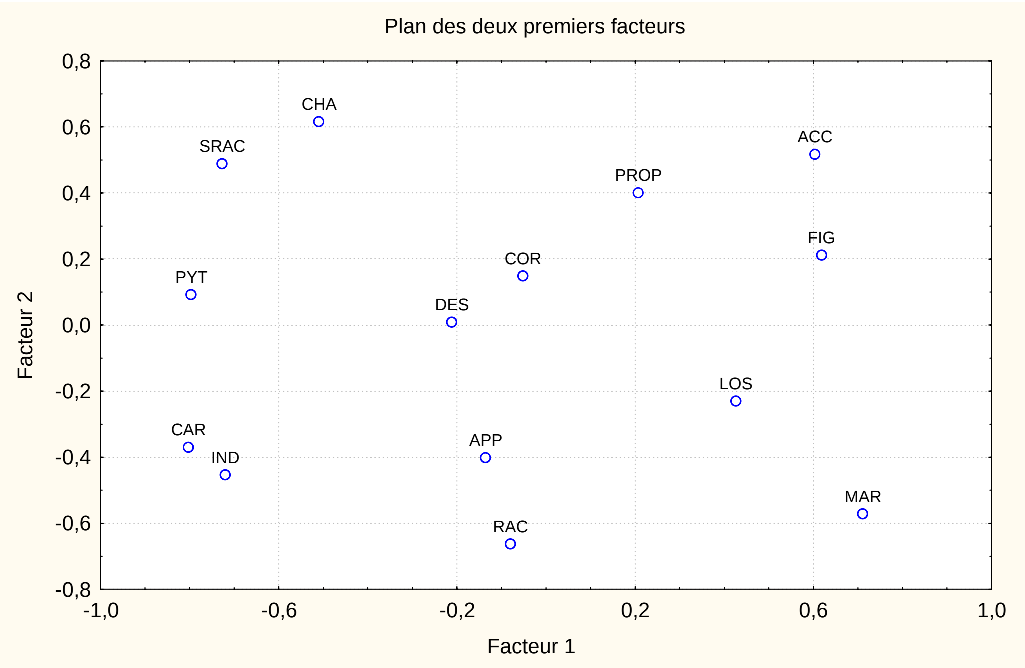
Nous avons choisi deux approches statistiques pour traiter les données, la première basée classiquement sur les analyses de type factoriel doit nous permettre une approche assez systématique de la classification. De la seconde, l'analyse implicative, nous attendons qu'elle puisse nous aider à comprendre les éléments déterminants dans la constitution de l'espace de travail et ceci de façon à mieux comprendre les évolutions que nous avons pu constater.
Pour effectuer ces diverses analyses statistiques nous avons retenu les productions de deux groupes d'étudiants français soit 57 personnes.

4.2 L'approche factorielle

La première approche statistique que nous avons suivie repose sur les outils de l'analyse en composantes principales. Le principe consiste à étudier, grâce à un codage, les réponses fournies par les étudiants aux trois questions posées dans le cadre du problème Charlotte et Marie (Annexe 1).
Ce codage effectué avec J.C Rauscher en collaboration avec des collègues chiliens de l'Université de Valparaiso prend en compte huit aspects qui apparaissent dans les diverses réponses.
Pour la première question sur le losange, l'aspect 1 s'intéresse aux sources d'information utilisées par l'étudiant, prend-il ou non des informations sur la figure. L'aspect 2 examine les justifications données pour prouver que la figure est un losange : accumulation d'arguments, usage d'une propriété caractéristique.
Pour étudier la question 2 qui demande de savoir qui de Charlotte ou Marie a raison, nous avons retenu la réponse donnée par l'étudiant à la question (aspect 3). Notons que 20 étudiants ont répondu Charlotte, 28 Marie, 7 les deux et enfin deux étudiants ont affirmé qu'on ne pouvait pas savoir. Pour le traitement statistique de cette aspect, nous utilisons deux variables 0-1 CHA et MAR. La première prend la valeur 1 quand un étudiant a répondu Charlotte, de même pour MAR quand la réponse est Marie. Nous pouvons ainsi prendre en compte la réponse « les deux » qui donne la valeur 1 à la fois à CHA et MAR. L'aspect 4 recense les arguments donnés : références à un théorème, usage et type de calculs, remarques sur les angles ou les côtés, correction et cohérence du raisonnement utilisé.

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

L'usage éventuel des cas d'isométries est pris en compte dans l'aspect 5 (il s'agit d'une demande des collègues chiliens, cet usage n'apparaît jamais en France). L'aspect 6 précise si les étudiants ont signalé une relation entre les losanges et les carrés pour étayer leur argumentation.
L'aspect 7 s'intéresse aux tracés ajoutés par les étudiants sur le dessin. Nous le codons par la variable DES qui prend la valeur 1 dès qu'une marque ou un trait sont fait sur le dessin.
Enfin la dernière question qui portait sur les doutes des étudiants, est prise en compte dans l'aspect 8. cet aspect est décliné en trois parties : propriétés, dessin et approximation.
Ces divers aspects sont ensuite traités pour être soumis à l'analyse statistique sous la forme de réponses disjonctives (oui/non) ce qui donne 14 caractères. Nous n'avons retenu dans cette analyse ni l'aspect 5 ni l'aspect 4c.
De l'étude effectuée avec le logiciel Statistica, nous donnons ici la représentation des variables dans le premier plan factoriel.



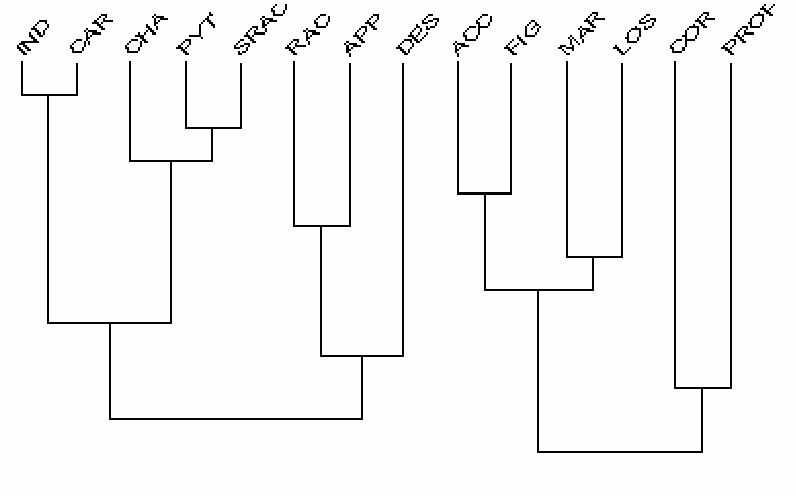
Evidemment les deux variables les plus marquantes sont celles qui expriment la réponse Charlotte (CHA) ou Marie (MAR). L'intérêt de l'étude statistique est de corréler ces deux variables avec d'autres qui nous ont semblé importantes comme l'usage des racines carrées (RAC) ou l'usage de la figure comme support de dessins (FIG). D'autre part, dans l'approche du raisonnement les deux variables déterminantes sont celles qui insistent sur l'usage de propriétés caractéristiques dans la première question (CAR) ou non (ACC).
Le graphe fait également apparaître le positionnement des trois variables liées aux doutes exprimés par les étudiants : DES pour dessin, APP pour l'approximation et enfin PROP pour l'expression de problèmes liés aux propriétés. La variable LOS qui précise l'apparition dans le raisonnement des étudiants de la relation entre losange et carré va également être déterminante.
Rappelons que dans l'approche didactique, la population PIperc regroupait les réponses qui indiquaient Marie comme résultat mais sans que l'on puisse préciser la nature du raisonnement suivi : cette conclusion basée sur la perception est-elle assumée par l'étudiant ou bien est-elle produite par défaut à cause de lacunes en

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

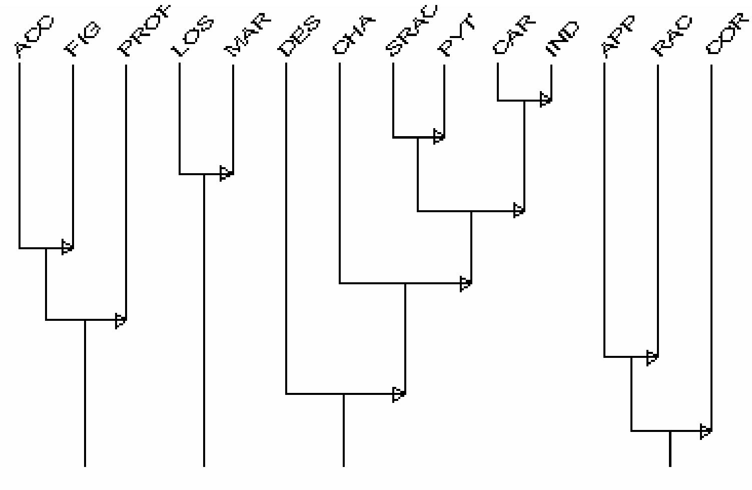
géométrie et notamment l'oubli de certaines propriétés ? L'analyse en terme de niveau d'argumentation visait à mieux connaître la démarche suivie par ces étudiants, mais du fait de sa lourdeur, nous n'avions réalisé qu'une analyse qualitative, l'analyse statistique entreprise ici nous permet de compléter cette étude de manière plus systématique.

4.3 L'approche implicative

L'analyse factorielle permet d'esquisser une première carte qui permet de placer les étudiants dans le premier plan factoriel. Mais pour regrouper les variables déterminantes avec plus de sûreté, nous avons utilisé le logiciel CHIC de façon à obtenir à la fois les arbres de similarités classiques entre variables mais aussi l'arbre cohésitif qui indique des relations orientées entre les différentes variables. Cette approche devient déterminante dans cette phase de l'étude qui cherche à comprendre la structuration de la pensée géométrique des étudiants de façon à décrire de manière plus dynamique les ETG mis en jeu.



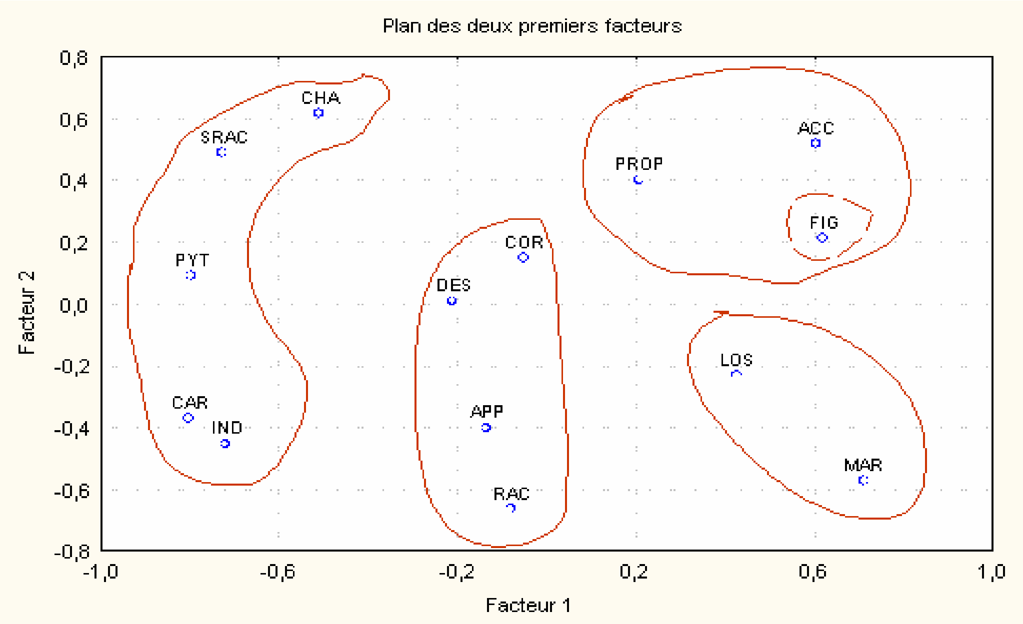
Arbre des similarités



Arbre cohésitif

L'étude implicative fait clairement apparaître quatre regroupements a priori intéressants et qui vont s'articuler avec notre analyse didactique. Un premier ensemble permet de grouper les variables [CHA, SRAC, PYT, CAR, IND]. Il renforce la compréhension des réponses des étudiants qui privilégient Charlotte (CHA) en organisant le raisonnement autour du théorème de Pythagore (PYT) avec un calcul sans racines carrées. Ces étudiants paraissent maîtriser la notion de propriété caractéristique (CAR) et n'utiliser que des informations fournies par l'énoncé (IND). Ce groupe est très proche de celui que nous avons ifentifié sour le nom de PII.
Un autre groupe s'organise autour des variables [LOS, MAR]. L'analyse implicative confirme la relation privilégiée qui existe chez les étudiants ayant insisté sur les relations entre le losange et le carré avec la réponse Marie, Ce groupe est proche de celui que décrivent les variables [ACC, PROP, FIG], mais il s'en différencie car les étudiants de ce groupe s'appuient sur la figure mais en énonçant une série de propriétés sur lesquelles dans le même temps ils indiquent leurs doutes et leurs difficultés. L'ensemble des réponses révèlent chez les étudiants une gestion du raisonnement géométrique différente de celle du premier groupe (PII) : appui visuel ou expérimental sur la figure, accumulation d'arguments ou raisonnement global basé sur la forme de la figure.
Enfin, de manière spécifique, l'analyse statistique montre la cohérence d'un dernier groupe autour de [APP, RAC, COR]. Ces réponses s'appuient sur le théorème de Pythagore « approché ». Les étudiants semblent sensibles à la nature de l'approximation et aussi à la question du dessin et de sa relation avec le problème. Leur manière de raisonner est proche du groupe PII mais leur sensibilité au réel est différente.
Ainsi, la réunion conjointe des deux analyses nous permet de proposer une organisation des variables que nous visualisons sur le graphe représentant les variables binaires dans le premier plan factoriel.

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

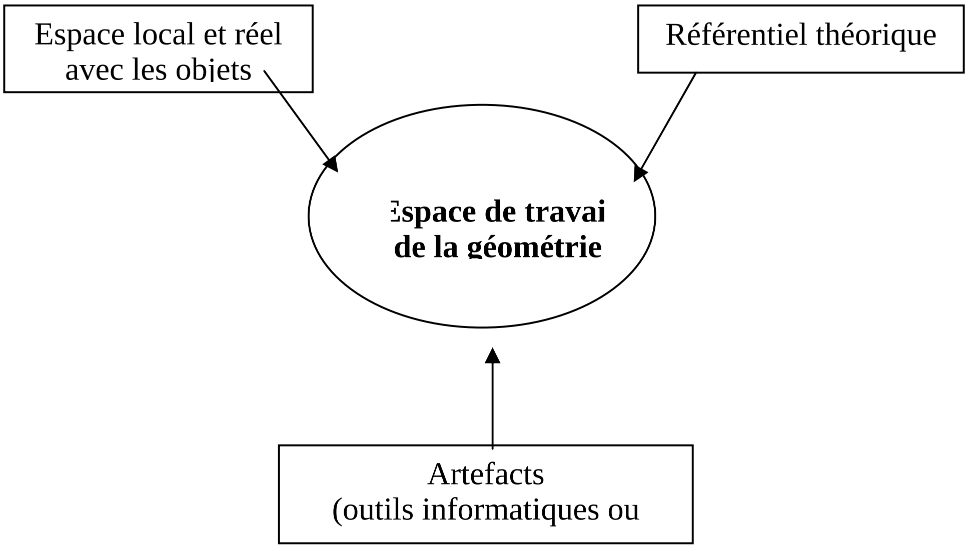


Pour aller plus loin, il nous faut interpréter ces résultats en termes d'espace de travail de la géométrie mais cela suppose que nous donnions quelques éléments supplémentaires sur cette notion cruciale dans notre approche de l'enseignement de la géométrie .

4.4 Précisions sur les composantes de l'espace de travail géométrique

De manière plus précise [Kuzniak 2003 et 2004], nous avons appelé espace de travail géométrique, le lieu organisé par le géomètre pour mettre en réseau les trois pôles que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique qui dépendra de la géométrie choisie.

L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois pôles que nous venons de dégager.

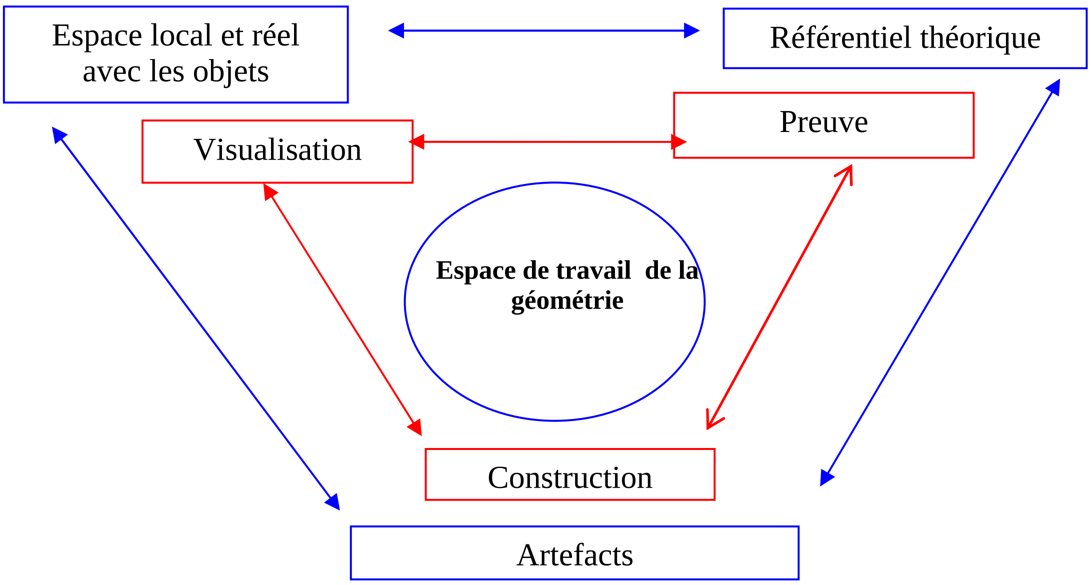


Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

Pour résoudre un problème de géométrie, l'expert dispose d'un espace de travail que nous qualifierons d'idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d'une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d'autres termes, l'expert face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l'interpréter et de le résoudre grâce à l'espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous appellerons un ETG personnel. Ce dernier n'aura a priori ni la richesse ni la performance de l'ETG d'un expert.
Cette centration sur l'ETG personnel, nous conduit à introduire une dimension cognitive dans notre approche de la notion d'espace de travail. Pour cela, nous suivons Duval (1995) qui introduit trois processus cognitifs.

Le processus de visualisation lié aux figures mentales ou sur un support matériel.
Le processus de construction dépendant des outils utilisés (règles, compas…).
Le processus de preuve articulé sur un discours théorique.

Il réorganise ensuite ces trois processus dans un schéma que nous superposons sur celui de l'espace de travail géométrique. Les flèches ne figurent ici que pour rappeler l'existence de relations entre les diverses composantes. Une étude plus approfondie devrait donner un sens à ces flèches en déterminant les aides et les appuis qu'un processus fournit à un autre. Ces relations dépendent de la géométrie en jeu.



4.5 Une interprétation en terme d'ETG personnels

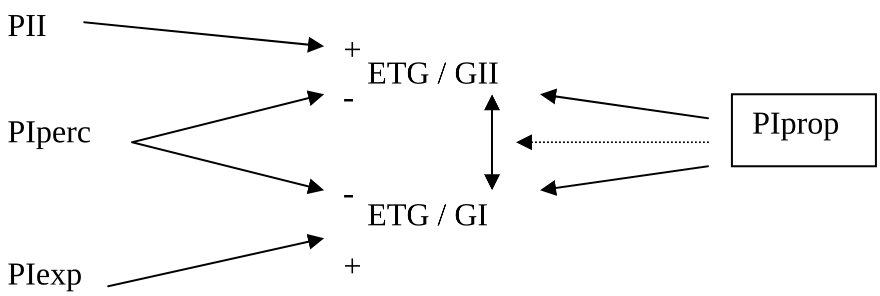
Nous pouvons maintenant présenter notre interprétation des résultats de l'analyse statistique des réponses en nous référant à la structuration des ETG personnels. En terme d'ETG, l'étude dégage clairement deux types de référentiels théoriques l'un associé à la Géométrie I et l'autre à la Géométrie II, mais et c'est la le nouveau point de vue apporté par les données statistiques dans les deux ETG, la maîtrise technique des preuves et des propriétés introduit des différences avec une influence plus ou moins forte de la visualisation dans certains cas ou de des artefacts dans d'autres.

Une première population travaille dans un ETG qui repose sur le référentiel théorique de la Géométrie II. Cette population se sépare en deux groupes : un premier maîtrise suffisamment, au moins dans l'exercice en question le référentiel théorique et ses règles de fonctionnement. Il correspond complètement au groupe PII que nous avons repéré sous la production de l'étudiant A. Dans les limites de cet exercice, cette population parait maîtriser les règles de l'argumentation géométrique. Lorsque le dessin est évoqué c'est surtout son aspect trompeur qui est souligné comme le veut l'usage didactique français à partir des classes de collège, moment où la Géométrie II se met en place dans le curriculum. Le second groupe se place toujours en Géométrie II mais avec une maîtrise insuffisante qui est due soit à l'oubli de certaines propriétés, soit à une compréhension superficielle des règles de la Géométrie II. N'oublions pas que les étudiants ont nécessairement rencontré ce paradigme dans l'enseignement français et savent qu'il est dominant. Ce groupe était inclus dans la population Piperc, population dont nous avions signalé l'hétérogénéité. Dans ce groupe, nous rencontrons des étudiants dont les réponses correspondent à celle de l'étudiant D mais dont certains expriment leurs doutes de façon particulièrement subtile comme ici :

> *Peut-on dire que les diagonales sont vraiment perpendiculaires ? Peut-on dire que le quadrilatère possède 4 angles droits ? En plaçant son équerre, oui. En calculant avec Pythagore, ce n'est pas exact, mais approximatif. 5,62 = 31,36 ≠ 32.*

L'autre grande population que pointe notre analyse est celle dont l'ETG repose sur l'horizon de la Géométrie I, le travail s'effectue sur un objet réel particulier qu'il s'agit d'étudier. Cette fois encore, nous pouvons repérer deux sous-groupes, le premier axe sa recherche sur la visualisation et la construction, le second se concentre davantage sur l'axe construction-preuve. Dans cette population se trouvent évidemment les réponses vagues proches de celle de l'étudiant D (PIperc) mais aussi de celle de l'étudiant C qui utilisait les instruments de dessin pour vérifier les propriétés (PIexp). Il y a aussi une partie des étudiants qui ont utilisé le théorème de Pythagore « approché » que nous avions regroupé dans Piprop.

Enfin il faut particulariser un groupe qui semble se situer dans le jeu (GI|GII). Ces étudiants semblent osciller entre GI et GII mais les règles usuelles du contrat didactique leur laissent peu de possibilités de s'exprimer clairement dans ce domaine. Ce groupe donne des réponses proches de celle de l'étudiant B et utilise comme lui le théorème de Pythagore « approché » mais il peut aussi avoir utilisé le théorème de Pythagore classique en marquant ses doutes sur le statut du dessin utilisé.



Le tableau ci-dessus résume les liens entre les deux classifications.

5 Conclusion

Notre propos initial était de parvenir à une typologie des étudiants confrontés à une série de problèmes de géométrie. Cette typologie prend en compte les connaissances géométriques des étudiants mais elle les intègre, de manière plus originale, dans des perspectives paradigmatiques qui donnent des sens différents au travail géométrique. La conjonction de ces deux approches débouche sur l'idée d'un espace du travail géométrique qui dépend de l'horizon géométrique visé (dans notre terminologie la Géométrie I ou II) mais aussi de son utilisateur particulier. Cette constatation nous a conduit à préciser pour les étudiants la nature de leur ETG personnel. Grâce à l'approche statistique et notamment implicative, nous avons pu entrer dans le détail des productions des étudiants tout en mettant en évidence leur manière d'organiser leur raisonnement. L'articulation avec le cadre théorique guide l'interprétation et permet de fixer un premier seuil de raffinement qui limite le nombre de catégories.

Cette étude nous a permis de mieux comprendre la raison des évolutions ou des stabilités des étudiants au cours du processus de formation. Elle a aussi décentré notre regard des paradigmes géométriques pour le focaliser sur la notion d'espace de travail géométrique qui permet de mieux comprendre la subtilité des parcours individuels.

Enfin, si l'analyse fait apparaître des catégories d'étudiants, elle montre aussi la nécessité d'envisager ces résultats avec précaution pour ne pas figer l'étude. En effet, notre but n'est pas de fixer un étudiant dans une catégorie définie, mais plutôt de montrer que les catégories existent et constituent des points de repères utiles pour les formateurs d'enseignants.

Remerciements

Cette étude n'aurait pas été possible sans la participation active de J.C. Rauscher avec lequel nous préparons un article sur les connaissances géométriques des futurs professeurs d'école.

D'autre part, le projet entre dans une recherche de coopération avec le Chili financée par ECOS/CONICYT

Références

BERTHELOT R., SALIN M.H (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. *petit x* n°56. 5-34.

BAILLEUL M, RATSIMBA-RAJOHN (1995) Analyse de la gestion des phénomènes d'ostension et de contradiction par l'analyse implicative. *In Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques* Caen pp 199-216

DUVAL R (1995) Why to teach geometry ICMI Studies Catane

DUVAL R (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Vol°10. 5-53.

GRAS R (1996) L'implication statistique : nouvelle méthode exploratoire de données. *Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble*

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 20/1. 89-116.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2002) Approximations géométriques. *L'Ouvert* n°105. 19-28.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *petit x* n°61. 61-75.

KUZNIAK A (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note d'habilitation. Université de Paris 7.

KUZNIAK A, (2004) Sur les espaces de travail géométrique *Séminaire national de didactique des mathématiques.*

KUZNIAK A, RAUSCHER J.C.**(2002)** Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres. La Roche sur Yon. Université de Nantes* pp 271-290.

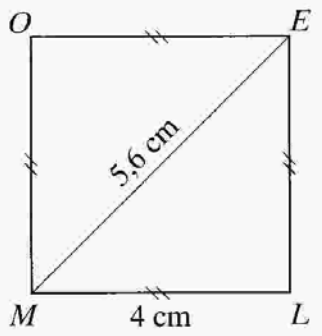
KUZNIAK A, RAUSCHER J.C., (2003) Formation des PE1 et anamnèse géométrique *Actes du colloque sur la formation des maîtres. Avignon Université d'Avignon*. pp 231-248

Annexe 1 "Charlotte et Marie. Qui a raison?"

Pourquoi ?

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?

2° Marie soutient que *OELM* est un carré. Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai. Qui a raison ?



Réponse à la question 1 :

Réponse à la question 2 :

Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?

Annexe 2

Codification du problème Charlotte et Marie
(A. Kuzniak, J.C. Rauscher et I. Guzman)

Question 1 Pourquoi est-ce un losange ?
Aspect 1: source de l'information IND

Code 1 Utilisation exclusive des informations données dans l'énoncé.

Code 2 Utilisation d'informations non données explicitement par l'énoncé.

Aspect 2 Pourquoi est-ce un losange? CAR et ACC
Code 1 Justification correcte basée sur une condition nécessaire et suffisante utilisant les cotés.
Code 2 Justification correcte basée sur une condition nécessaire et suffisante mais sans utiliser les côtés.
Code 3 Justification utilisant une accumulation d'arguments.
Code 4 :Justification fausse

Question 2 Qui a raison ? Pourquoi ?

Aspect 3 Qui a raison? CHA et MAR
Code 1 : Charlotte
Code 2 : Marie
Code 3 : On ne peut pas savoir
Code 4 : Les deux

Aspect 4a) Justificacion de la question 2 Pourquoi? PYT
Code 1: Fait référence au théorème de Pythagore
Code 2: Ne fait pas référence au théorème de Pythagore

Aspect 4b) (Calculs) RAC et SRAC
Code 1 : Calculs sans les racines carrées
Code 2 : Calculs avec les racines carrées
Code 3 : Sans calculs

Aspect 4c) (Arguments)
Code 1 : Seulement avec les angles Sólo con ángulos
Code 2 : Seulement avec les côtés
Code 3 : Avec les angles et les côtés
Code 4 : Avec la diagonale

Aspect 4d) COR
Code 1 : Arguments pertinents
Code 2 : Arguments faux

Autres remarques

Aspect 5 Utilisation de la congruence des triangles
Code 1 : Oui
Code 2 : Non

Aspect 6 : Relation entre carrés et losanges LOS
Code 1 : Référence à la relation entre carrés et losanges
Code 2 : Aucune référence à cette relation

Aspecto 7 : Presence de marques ou de traits surle dessin FIG

Code 1 : Traces visibles ou référence dans la réponses à l'usage d'instruments

Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference
A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis
Palermo (Italy) 6-8 Octobre 2005

Code 2 : Traces non visibles

Question sur les doutes et les difficultés

Aspect 8a) (Connaissances) PROP
Code 1: Doutes sur les connaissances des définitions et des propriétés
Code 2: Pas de doutes exprimés sur ce point

Aspect 8b) (Dessin) DES
Code 1: Doutes à propos du statut ou des renseignements donnés par le dessin
Code 2: Pas de doutes sur ce point

Aspect 8c) (Approximation) APP
Code 1: Doutes sur l'approximation
Code 2: Pas de doutes sur ce point

Summary

In this paper, we study answers that pre-service teachers gave to an exercise of Geometry. Our aim is to know better the nature of what we call the space of geometrical working (espace de travail géométrique). First, we lean our didactical approach on the notion of geometrical paradigms which brings out a classification of student's works. Then, we use statistical tools to make more precise the former analysis and to explain students' evolution during their training.