Filosofia e fondamenti di Geometria a fine Ottocento
Aspetti per un percorso didattico

Maurizio Avellone

Filosofia e fondamenti di Geometria a fine Ottocento : aspetti per un percorso didattico

Introduzione

Considerazioni preliminari :
scopo della presente nota è discutere alcuni aspetti relativi alla nascita della moderna concezione assiomatica e contemporaneamente suggerire un itinerario didattico esemplificato sulla base del ricorso a fonti[1] che, per chiarezza e relativa semplicità, si prestano particolarmente ad essere analizzate da studenti che frequentino il triennio di una scuola secondaria superiore. Detto itinerario è pensato principalmente per essere realizzato dagli insegnanti di filosofia in collaborazione con i colleghi di matematica, ma può essere parzialmente affrontato da studenti il cui curricolo non prevede un insegnamento di filosofia. In questo caso il docente di matematica, discutendo gli aspetti fondazionali della disciplina insegnata, potrà cogliere l'opportunità per presentare alcuni temi tipici della riflessione epistemologica.
I nodi concettuali del percorso proposto sono i seguenti :
Il paradigma euclideo, il concetto di sistema formale e le *Grundlagen* di Hilbert come supposto prototipo dell'assiomatica contemporanea - l'empirismo geometrico da Gauss a Pasch - la prospettiva fondazionale in Peano e Pieri - geometria e filosofia in F. Enriques - la "scuola italiana"[2] e le *Grundlagen* di Hilbert.
L'obiettivo di fondo è mostrare come una matura concezione formale dell'assiomatica contemporanea sia del tutto presente nella scuola italiana dei fondamenti di geometria ma che l'orizzonte generale in cui questa si muove è intessuto da problemi tipici della riflessione ottocentesca che limitano l'uso del metodo assiomatico ad un'opera di sistematizzazione e ne riducono, a differenza di quanto accade in Hilbert, la portata innovativa.

Una linea interpretativa : dalla perdita della certezza alla nascita del sistema formale

Un filo espositivo usuale, relativo alla sviluppo della concezione formale della matematica, prende la mosse dalla nascita delle geometrie non euclidee e dalla conseguente crisi del paradigma di verità e certezza costituito dalla geometria tradizionale.

---

[1] Dette fonti indicate, in parentesi quadra, con una F seguita da un numero di rimando, sono riportate nelle indicazioni a uso didattico poste a fine articolo

[2] Con tale espressione non intendo indicare una *scuola* in senso proprio, caratterizzata da omogeneità di vedute, quanto una realtà articolata in gruppi di studiosi ciascuno con caretteristiche proprie. Il mio discorso non ambisce a essere completo in quanto un personaggio di rilievo come Veronese (per cui sarebbe necessaria una trattazione a parte) non viene discusso.

Il paradigma euclideo [F1], assunto come modello di rigore fino al XVIII sec., si fonda su una concezione assiomatica di tipo contenutistico con le seguenti caratteristiche :
1) i concetti primi sono evidenti e le proposizioni prime sono immediatamente vere
2) l'evidenza ai concetti derivati è trasmessa tramite la definizione, la verità alle proposizioni derivate (teoremi) è trasmessa tramite la dimostrazione
A tale modello si sostituisce nel corso del XIX sec. l'idea di sistema formale [F2] caratterizzato da un linguaggio **L**, un insieme **E** di enunciati base di **L**, un sistema **R** di regole di trasformazione (regole logiche) che permettono di produrre ulteriori enunciati.
Il concetto di sistema formale ha una dimensione essenzialmente sintattica. Il problema della verità (problema semantico) non è preliminare ma è demandato al reperimento di un'interpretazione che sia modello di **E** (che renda cioè veri gli enunciati di **E**).
Il trapasso dall'idea di un assiomatica contenutistica al concetto di sistema formale sarebbe una conseguenza della perdita della certezza prodottasi anche con la scoperta delle geometrie non euclidee. La rinuncia alla "verità" della geometria euclidea e ad un già dubbio concetto di evidenza avrebbe introdotto l'idea di libertà e permesso un approccio in termini non più contenutistici ma formali. Questa linea interpretativa sospinge in primo piano gli aspetti di carattere logico per cui data una costruzione concettuale per darle diritto di esistenza legittima basta soddisfare la richiesta di non contraddittorietà tramite la esibizione di un modello. Detta linea ingenera l'idea che la nuova concezione formale sia stata espressione di una volontà filosofica sostenuta da un approccio essenzialmente logico in cui il problema dell'indipendenza degli assiomi e della loro non contraddittorietà abbia avuto un ruolo trainante
Il prototipo della moderna assiomatica sarebbe costituito dalle *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert e risulta fissato nella memoria popolare dalla celebre frase che Hilbert stesso avrebbe pronunciato, a fine settembre 1891, in un sala d'aspetto berlinese al ritorno da Halle dopo aver ascoltato una conferenza di H. Wiener sulla generale validità del metodo assiomatico: "Man muss jederzeit an Stelle von Punkte, Geraden, Ebenen, " Tische, Stühle, Bierseidel" sagen können "[3]
Una presentazione delle Grundlagen intesa come illustrazione del passaggio alla concezione dell'assiomatica moderna come sistema formale (oltre che come prefigurazione del programma formalista sviluppato da Hilbert negli anni venti) produce però alcune distorsioni : si riduce la portata concettuale del testo di Hilbert e si commette un errore sul piano storico. L'idea di una concezione assiomatica come studio di sistemi astrattamente definiti tramite i postulati è infatti già del tutto matura nella scuola italiana (Peano, Fano, Enriques, Pieri). Ovviamente non si vuole rispolverare un inopportuno nazionalismo alla Burali-Forti [4], ma ricordare la necessità di integrare una prospettiva parziale (ad es. presente in Freudenthal 1957) e porre alcune questioni che aiutino a chiarire come il successo degli italiani, vista la loro rapida eclissi, sia risultato una vittoria di Pirro.
In particolare occorrerà stabilire la differenza di atteggiamento tra la scuola italiana ed Hilbert a proposito sia del valore del metodo assiomatico sia della cornice intellettuale e dell'orizzonte filosofico di riferimento .

[3]" Si deve sempre poter dire al posto di punti, rette, piani, "tavoli, sedie, boccali di birra" (O. Blumenthal *Lebensgeschichte*. In Hilbert Ges. Abh. 3 1935)
[4] " E a proposito di *merce estera* conviene far notare come, specialmente dagli italiani (!), si citi e si usi il caotico e impreciso sistema geometrico dell'Hilbert, quasi non esistessero i sistemi semplici, chiari e precisi (ma sono italiani!), e ben superiori a quello dell'Hilbert, di M. Pieri (Burali-Forti 1919 p.XXXII)

§1 Il primo esito delle ricerche non euclidee : l'empirismo

Dal realismo platonico-galileiano all'idealismo trascendentale [F3] la geometria costituisce un esempio non banale di conoscenza a priori, cioè di conoscenza che assume rilievo per le cose esistenti ma non dipendente dalle esperienza che di tali cose abbiamo.
La scoperta delle geometrie non euclidee non porta a disconoscere la capacità di descrizione del reale della matematica ma a pensare che la geometria sia una sorta di fisica mentre il resto della matematica può essere libera creazione intellettuale.
La geometria euclidea poteva ora essere considerata come una teoria confermata dall'esperienza con un elevato grado di probabilità ma suscettibile comunque di essere smentita da ulteriori verifiche. Già lo stesso Gauss, in una lettera a Bessel, datata 9 aprile 1830, si era così espresso : "dobbiamo confessare umilmente che, se il numero è soltanto il prodotto del nostro spirito, lo spazio ha invece una realtà, anche al di fuori del nostro spirito, realtà della quale non possiamo determinare a priori tutte le leggi " [F4].
Ciò comportava una rinuncia all'idea kantiana che lo spazio fosse la modalità *a priori* della percezione esterna e obbligava alla ricerca di una diversa ma altrettanto salda base per il sapere geometrico. Una consapevolezza di questo tipo emerge con chiarezza negli scritti di Riemann ed Helmholtz. Riemann già in apertura del suo *Habilitationsvortrag* mette in questione la possibilità di una conoscenza a priori dello spazio e dei suoi costituenti. L'unico a priori geometrico che si possa dare è l'idea di una varietà pluriestesa (mehrfach ausgedehnte Grösse). Per determinare la struttura dello spazio fisico (Raum) occorre però assumere ulteriori ipotesi da confrontare con l'esperienza. Helmholtz [F5], ribadendo tale linea antikantiana, ritiene di potere completare la prospettiva di Riemann mostrando come per la trattazione dello spazio fisico sia sufficiente l'assunzione di un fatto, in alto grado confermato dall'esperienza : l'esistenza di corpi rigidi. Il contenuto degli assiomi geometrici non si trova in una struttura a priori della nostra mente. Anzi Helmholtz, muovendosi lungo i binari di un'idea di matrice darwiniana molto diffusa nella seconda metà dell'Ottocento e destinata ad una larga fortuna letteraria [F6] , mostrava come la pressione ambientale potesse selezionare visioni geometriche alternative. Individui con intelletti conformi potevano elaborare geometrie difformi a seconda dello spazio in cui si fossero trovati a muoversi.
Il ricorso all'empirismo, visto come unica via d'uscita al crollo dell'apriorismo kantiano, comportava dunque sia il riconoscimento della pluralità dei sistemi geometrici sia l'idea che la geometria fosse una scienza fisica. Poiché la geometria era pensata come una descrizione esatta di relazioni percepite in modo inesatto tra gli oggetti dell'esperienza, si rendeva inoltre possibile distinguere una verità geometrica, sviluppatasi sulla base dell'interazione tra intelletto ed esperienza, da una verità matematica basata sul puro dedurre conseguenze dagli assiomi senza implicazioni ontologiche e *vuota* (cfr. Richards 1988). La matematica , almeno nelle formulazioni analitiche, poteva aspirare al massimo grado di libertà. Questo indica come già all'interno della stessa prospettiva empiristica potesse maturare l'idea di una struttura formale autonoma dall'esperienza anche se non più denotabile come *geometria*.
La fondazione del sapere geometrico doveva soddisfare due diverse esigenze:
1) stabilire con il rigore necessario la struttura deduttiva ma badando che gi assiomi riflettessero il rapporto con l'esperienza

2) analizzare il rapporto tra la formulazione degli assiomi e la loro relazione con il mondo esterno e le strutture mentali del soggetto conoscente.
Il primo di questi compiti veniva affrontato da M. Pasch e proseguito poi, con maggiore consapevolezza nell'uso dello strumento linguistico, da G. Peano. Il secondo compito, pur nella matura consapevolezza delle esigenze formali, sarebbe stato intrapreso da F. Enriques.
Pasch mostra, *concretamente* e con pieno rigore, come sia possibile edificare l'intero edificio della geometria proiettiva a partire da alcuni enunciati fondamentali che riassumono alcune esperienze elementari riferite ad eventi direttamente osservabili, riguardanti cioè corpi molto piccoli, considerati come non ulteriormente divisibili, barrette e parti di lastre. Tali esperienze si traducono in alcuni enunciati base che hanno il compito di rielaborare, semplificando, l'esperienza osservativa (Pasch rimanda ad Helmholtz nel ribadire l'origine empirica dei concetti geometrici e degli assiomi).
Sulla base di tali enunciati si edifica la teoria facendo affidamento esclusivamente al rigore logico senza più ricorrere ad alcun portato intuitivo [F7]. Pasch prende perciò le mosse dalla considerazione di una regione spaziale limitata (interamente giacente nel finito) i cui rapporti geometrici si lascino descrivere sulla base del concetto di punto, segmento di retta, e dalle relazioni "un punto giace all'interno del segmento", "un punto giace su una superficie". Tali concetti e relazioni vengono determinati tramite opportuni assiomi che risultano empiricamente verificabili. Gli assiomi permettono di passare dal segmento e dalla superficie piana alla retta e al piano e di dimostrare le loro usuali proprietà (determinazione univoca della retta tramite due punti, del piano tramite tre punti non collineari etc.). Vengono poi introdotti i fasci di rette, i fasci di piani, le stelle di rette e il piano viene ampliato, passando al piano proiettivo, tramite l'introduzione degli elementi "ideali". L'assunto empiristico conduce ad introdurre elementi non direttamente osservabili (retta illimitata, punti impropri et.) sulla base degli enunciati di partenza riguardanti domini finitamente osservabili.
Dall'opera di Pasch scaturiranno due linee di tendenza, una in Germania di carattere più spiccatamente matematico, volta soprattutto a chiarire il ruolo di assiomi come quello di continuità (cfr. Contro 1975-76), e un'altra volta ad indagare la struttura logico formale dell'edificio geometrico. Tale tendenza troverà in Italia compiuta espressione nell'opera di Peano

§2 Peano e Pieri

Peano insegna a Torino in una situazione che ha, a fine anni 80, per quanto riguarda la ricerca matematica, dello straordinario. In quegli anni infatti figure di giovanissimi capiscuola, come Peano e Segre sono affiancati da valentissimi "discepoli", solo di pochi anni più giovani dei maestri, come Burali-Forti , Vailati , Castelnuovo , Fano e Pieri. La vita scientifica si svolge tra l'Università, l'Accademia militare, dove insegnano molti dei professori e assistenti universitari, e l'Accademia delle scienze, sede di continui confronti, ma a volte anche di spiacevoli quanto inutili controversie, tra personalità matematiche influenti come Volterra e Peano. E' in tale vivacissimo ambiente intellettuale. che nascono due filoni fondamentali di ricerca : la logica matematica e la geometria algebrica, due settori

fondamentali di ricerca italiana che troveranno una connessione proprio nell'opera di Mario Pieri.[5]
Agli inizi del 1889 Peano pubblica gli *Arithmetices Principia, nova methodo exposita* contenente la prima formulazione dei noti assiomi per l'aritmetica (il lavoro di Dedekind è dell'ottobre 1888 e Peano lo conobbe solo quando la propria opera era ultimata).
Un risultato analogo è tentato da Peano per la geometria, nel giugno dello stesso anno, con *I principi di geometria logicamente esposti* [F8]. Si trattava di dare vita ad un ambizioso programma di riscrittura dell'intero sapere matematico tramite un adeguato linguaggio che permettesse non solo una tachigrafia ma soprattutto un'analisi concettuale delle idee matematiche. Tale programma negli anni successivi si svilupperà in modo sempre più articolato tramite la *Rivista di Matematica*.
Rispetto all'opera di Pasch , Peano riduce il numero delle idee primitive , opera una chiarificazione dei postulati e utilizza uno strumento linguistico precisato nelle sue componenti sia lessicali che deduttive. Ma se i criteri di rigore diventano più forti ciò costituisce , per dichiarazione espressa di Peano, soltanto una condizione necessaria ma non certo sufficiente per la significatività del lavoro. I postulati sono infatti di natura sperimentale e il non degenerare della teoria in vuoto gioco arbitrario rimane legato proprio alla origine empirica dei postulati stessi. Peano rimane perciò legato a quello che Pieri chiama indirizzo fisico-geometrico in contrapposizione a quello deduttivo-astratto prescindente da ogni interpretazione fisica o intuitività dei postulati. L'obiettivo fondamentale dell'indirizzo fisico-geometrico , il cui moderno fondatore è da ravvisare in Pasch, è dare alla geometria una forma rispondente alle esigenze di rigore maturate nel corso del XIX secolo, ribadendo però l'origine empirica dei concetti base e dei postulati utilizzati.
Permangono perciò due fondamentali limiti in Peano. Innanzitutto l'assiomatizzazione formalizzata serve solo a dare conto dell'esistente introducendo ordine e chiarezza espressiva ma limitandosi a fornire veste rigorosa a ciò che è. Inoltre il ricorso allo strumento ideografico assume un rilievo linguistico ma non epistemologico, assicura cioè univocità e capacità analitica ma non risulta fondante rispetto ad una scienza geometrica che nei suoi contenuti rimane dipendente dalle intuizioni derivanti dall'esperienza.
" Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di geometria bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche." (*Sui fondamenti di Geometria* in Peano 1957-1959)
Ed ancora in risposta all'articolo di Corrado Segre *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* apparso sulla Rivista di Matematica nel 1891, Peano scriveva:
" Il rigore assoluto che si esige in matematica non significa punto che non si possa studiare una scienza finché non siano analizzati tutti i suoi principi. Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono. La buona scelta di questi ipotesi ha importanza grandissima nella teoria che si vuole sviluppare; ma questa scelta si fa per via d'induzione e non appartiene alla matematica. Fatta la scelta dei punti di partenza spetta alla matematica (che secondo noi è una logica perfezionata) a dedurne le conseguenze e queste debbono essere assolutamente rigorose. Chi enuncia delle

[5]Per quanto riguarda Pieri come ponte tra Peano e Segre cfr A.Brigaglia e G. Musotto *Il Circolo Matematico di Palermo* Bari Dedalo 1982 e (Borga, Freguglia, Palladino 1985). Ai suggerimenti del Prof. Brigaglia devo molte delle idee contenute nel presente articolo.

conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia ma non della matematica....Il rigore assoluto, se è condizione necessaria affinché un lavoro sia scientifico, non è ancora condizione sufficiente. Un'altra condizione sta nelle ipotesi da cui si parte. Se un autore parte da ipotesi contrarie all'esperienza , o da ipotesi non verificabili con l'esperienza , né esse, né le loro conseguenze, potrà, è vero, dedurre una qualche teoria meravigliosa, da far esclamare : quale vantaggio, se l'autore avesse applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche! (*Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente* [cioè *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* di C. Segre] in Rivista di Matematica 1891)

Abbiamo già accennato a come la situazione torinese a fine anni 80 sia , per quanto riguarda la ricerca matematica, particolarissima e come due filoni fondamentali di ricerca, la logica matematica e la geometria algebrica, settori, facenti capo rispettivamente a Peano ed a Segre, trovino in Pieri il ponte più significativo. L'opera dei due primi matematici contribuisce infatti ad imporre, sia pure per vie diverse, e al di là delle polemiche, quella concezione astratta della matematica che avrebbe avuto poi il suo completamento nella impostazione assiomatica di tipo hilbertiano. Fin dalla sua tesi di laurea Segre, assimilata la lezione di Grassmann e Plücker, considerava il punto di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni non come un ente analitico ma come un ente astratto la cui natura rimaneva indeterminata. L'impostazione astratta scaturiva non da preoccupazioni di tipo filosofico o fondazionale ma dalla necessità di porre una base concettuale adeguata per il concreto sviluppo della geometria iperspaziale e, tramite essa, della geometria algebrica. A differenza di Peano, Segre però non era pienamente consapevole delle necessità di carattere logico linguistico per l'edificazione di una teoria assiomatica rigorosa. Dal canto suo Peano probabilmente rimaneva miope rispetto al valore dello strumento linguistico che egli stesso aveva in larga misura contribuito a creare. Chi avrebbe realizzato una compiuta sintesi tra i due atteggiamenti intellettuali sarebbe stato proprio Pieri.

E' tra il 1894 ed il 1895 che Pieri si volge allo studio dei fondamenti di geometria, campo che curerà sino alla fine della sua vita. Tra il '94 e il '97 pubblica cinque note che vengono poi rielaborate in una fondamentale memoria *I principi della geometria di posizione composti in un sistema logico deduttivo*.

Lo scopo del lavoro di Pieri è presentare una fondazione della geometria proiettiva che sia resa, sia nelle premesse che nei metodi, indipendente dall'intuizione. Utilizzando come supporto logico i concetti di classe e appartenenza, "categorie logiche generali comuni a qualunque discorso umano", e le inferenze più comuni del calcolo dei predicati, Pieri pone la enunciazione degli assiomi e le dimostrazione dei teoremi sotto il controllo di una compiuta formalizzazione che impedisca il ricorso a nozioni estranee provenienti dall'ambito *intuitivo* cioè da un'esperienza intessuta di sottintesi percettivi, linguistici e culturali . " E' generalmente riconosciuta l'utilità di un buon algoritmo ideografico, come strumento atto a prevenire e a disciplinare il pensiero; e ad escludere le ambiguità i sottintesi, le restrizioni mentali, le insinuazioni e altri difetti presso che insuperabili dal comune linguaggio sì parlato che scritto - e tanto nocivi alle indagini speculative. Così è da tenere in gran conto l'uso metodico delle maniere e dei segni propri alla Logica Algebrica : tanto che il non valersene affatto e trascurarne i vantaggi (segnatamente in questo ordine di studi) parrebbe a me quasi un disprezzare di proposito il più valido mezzo di cui si possa oggi disporre per l'analisi delle idee". (Pieri 1980 p.104). Il tipo di analisi è perciò conforme allo standard di rigore introdotto dagli studi logici della scuola di Peano.

In Pieri però, a differenza di Peano, la dimensione sintattica costituisce il momento essenziale e qualificante della sua prospettiva fondazionale. La geometria si costituisce come un sistema deduttivo i cui enunciati base correlano concetti primitivi cui non è associato preliminarmente alcun significato. In questo senso la nozione comune di spazio non è l'argomento della geometria piuttosto il concetto di spazio, caratterizzato da alcune condizioni formali liberamente imposte in vista di un dato scopo, si risolve nella classe di tutte le interpretazioni che soddisfano dette condizioni.
Ritenere che i postulati della geometria non siano altro che forme rigorose del concetto intuitivo di spazio significherebbe solo rimanere legati ad *una* interpretazione, sia pure quella originaria e più familiare, comportandosi in modo analogo a chi, rimanendo ancorato alla rappresentazione del numero come moneta, scambiasse l'Aritmetica con la contabilità. Quella netta separazione tra geometria e realtà che Freudenthal sembra ascrivere, come fatto peculiare, alla fondazione hilbertiana, è già compiutamente attuata in Pieri. Ancor prima che in Hilbert è in Pieri e non in Peano, né in Enriques, né in Fano, che il punto di vista dell'assiomatica contemporanea trova compiuta espressione. In Peano il ricorso all'esperienza è un fatto indiscusso. Enriques è perfettamente consapevole del valore e della natura della prospettiva formale, sia nel suo sviluppo storico che nella sua portata teoretica, ma come vedremo i suoi presupposti epistemologici lo collocano al di qua della prospettiva hilbertiana. Per quanto riguarda Fano l'approccio scelto in *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* [F9] ha potuto indurre ragionevolmente Freudenthal a ritenerlo il vero precursore italiano di Hilbert. Ma le considerazioni successivamente svolte da Fano in merito ai principi della geometria (cfr. ad es. Fano 1915) mostrano come dal punto di vista epistemologico egli pensi all'interno di una cornice di stampo enriquesiano. Viceversa Pieri colloca consapevolmente il proprio lavoro in una prospettiva diversa. Nella premessa metodologica alla memoria in esame Pieri stesso ricorda come riguardo i principi della geometria sia possibile distinguere due indirizzi entrambi legittimi. Secondo uno di essi, che Pieri chiama di carattere fisico geometrico, la Geometria può essere pensata come una *fisica dell'estensione*, cioè una sorta di matematica applicata i cui concetti fondamentali non hanno altro contenuto che quello che deriva dalla comune intuizione spaziale. Si tratta di un indirizzo secondo cui concetti primitivi ed assiomi vengono "desunti dall'osservazione del mondo esterno e in tutto conformi alle idee, che si acquistano per induzione sperimentale da certe qualità di oggetti e fatti fisici" (Pieri 1980 p. 101). All'interno di tale cornice la geometria proiettiva si è sviluppata come un ampliamento della geometria elementare dei cui concetti ha anzi continuato a fare parzialmente uso. Il lavoro di Pieri dovrà invece ascriversi ad un indirizzo qualificabile come speculativo od astratto " in quanto prescinde da ogni interpretazione fisica delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza* ed *intuitività* geometrica" (Pieri 1980 p. 84 nota 1) . Tale indirizzo ha origine dai lavori di Staudt e viene sviluppato da Caley, Klein, De Paolis e in genere da tutta la produzione geometrica riguardante la geometria non euclidea e gli spazi n-dimensionali. La geometria di posizione, e più in generale ogni ricerca geometrica, diventa una disciplina del tutto astratta " i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito, e semplici atti della nostra volontà i postulati (senza escludere che essi abbiano spesso la lor prima radice in qualche fatto esteriore) : onde arbitrari gli uni e gli altri, almeno in quanto non li coordiniamo ad un fine prestabilito, che debba esser guida al pensiero" (Pieri 1980 p.102).
I compiti che una fondazione geometria deve assolvere sono perciò i seguenti :

i) usare un linguaggio in linea di principio formalizzabile. In pratica, per maggiore leggibilità , si può fare ricorso ad un linguaggio semi formale
ii) condurre un'analisi delle relazioni fondamentali della teoria in modo da riportarle, per via definitoria, al minimo numero possibile. Ciò non significa ovviamente che esistano in assoluto relazioni primitive poiché la scelta può liberamente cadere su un gruppo di concetti piuttosto che su un altro. Pieri stesso sperimenterà vari approcci non solo per la geometria proiettiva ma anche per quella elementare.
iii) stabilire un sistema assiomatico in cui gli assiomi non siano ulteriormente scomponibili, cioè non si presentino come congiunzione logica di ulteriori enunciati.
iv)) provare l ' indipendenza e la non contraddittorietà (relativa) del sistema proposto.
Tutti e quattro i requisiti sono soddisfatti dal sistema che Pieri propone nella memoria in esame [F10]

§3 Enriques

Un approccio diverso rispetto alla scuola torinese è costituito dall'opera di Federigo Enriques[6]. I lavori di Enriques che rivelano uno specifico interesse di carattere fondazionale legato anche a questioni di carattere filosofico risalgono ai primi anni d'insegnamento. Successivamente Enriques manterrà pressoché immutate le idee di fondo maturate nei primi lavori, ma le andrà inserendo in una cornice più ampia. In *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della Geometria* [F11], articolo di apertura delle *Questioni riguardanti la Geometria elementare* , apparse nel 1900, Enriques delineava già con chiarezza i temi fondamentali della sua ricerca. L'impegno pubblico sul fronte filosofico lo avrebbe portato poi a presentare i risultati delle proprie ricerche in una forma organica e in una più ampia cornice teoretica nei *Problemi della Scienza* del 1905. Si trattava di un interesse di carattere scientifico e filosofico ininterrotto che proprio a partire dalle questioni fondazionali in geometria si allargava progressivamente a questioni gnoseologiche, psicologiche e fisiologiche.
In effetti in Enriques "l'infezione filosofica" si era manifestata fin dai tempi del Liceo. Negli anni di formazione pisana si era avvicinato alle tematiche di carattere positivistico partecipando ad un circolo le cui discussioni si contrapponevano a quelle di carattere letterario dell'ambiente legato all'hegeliano Jaia. Le discussioni vertevano sulle opere degli esponenti tipici del positivismo : Darwin, Comte, Spencer, Stuart Mill . Pur critico nei confronti del movimento positivistico Enriques ne ritenne però l'idea fondamentale: la filosofia non si pone come scienza autonoma ma come una forma di attività interna ad ogni forma specifica di pensiero e può essere fruttuosa solo se sempre in stretto collegamento con ricerche di carattere determinato.
Concordemente a vari, e tra loro spesso diversi, indirizzi del suo tempo, Enriques rifiuta le forme del gretto positivismo idolatra dei fatti. La scienza non è mai solo accertamento di fatti ma elaborazione di ipotesi, creazione di modelli. Il fatto scientifico non è una somma di fatti, né tanto meno fatto bruto, ma implica sempre delle ipotesi. La conoscenza, anche quella comune, comporta un riferimento ai fatti sempre mediato dai concetti. Il compito

[6]Riprendo da qui in avanti considerazioni già esposte in Avellone M., Brigaglia A., Zappulla C. (1998) *I fondamenti della geometria proiettiva in Italia : da De Paolis a Pieri* Dipartimento di Matematica e Applicazioni Università di Palermo Preprint n. 73

della critica gnoseologica consiste nel valutare l'origine, la funzione e la portata dei concetti rispetto alla loro connessione con i fatti. Il pensiero è una funzione dell'organismo vivente e l'interesse biologico a classificare i fenomeni porta alla costruzione di concetti secondo criteri di economicità. Ma tale ordine di idee, risalente a Mach, comporta in Enriques un'attenzione non solo alla "scienza formata" ma anche al processo di formazione delle conoscenze, alla genesi psicologica dei concetti.

Nella sua opera filosoficamente più significativa, *Problemi della scienza*, Enriques delinea perciò il programma di una gnoseologia "positiva", intendendo operare un ripensamento sistematico dei concetti fondamentali della scienza e delle conoscenza all'interno di una riflessione generale sul valore della scienza e del razionalismo scientifico. Questo ripensamento era ovviamente sentito più urgente agli inizi del Novecento quando crisi e crescita delle conoscenze scientifiche andavano di pari passo dando luogo a critiche e dubbi sempre più forti.

Il compito di una gnoseologia positiva è quello di esplicitare e chiarire il complesso processo dell'acquisizione della conoscenza e della costruzione della scienza. "I concetti scientifici sono considerati sotto il profilo genetico come risultato di complesse associazioni e astrazioni successive". L'analisi dei modi in cui vengono acquisiti i concetti più generali della scienza , come quelli della Geometria e della Meccanica, costituirà l'introduzione più adeguata alla gnoseologia positiva.

In quest'ottica i problemi relativi ai principi della Geometria non riguardavano più solo l'ordinamento di carattere logico. La loro importanza è più ampia in quanto le ricerche sui fondamenti sono esplicitamente e storicamente collegate a problemi di carattere psicologico e di ordine gnoseologico. All'interno di tal modo di valutare i problemi fondazionali la prima domanda riguarda l'origine dei dati geometrici primitivi su cui fondiamo l'argomentare dimostrativo. "I dati primitivi della Geometria e della Fisica vengono acquistati fondamentalmente nello stesso modo, sulla base di certe *sensazioni immediate* o di certe *esperienze elementari* semplicissime, interpretate conformemente alla *struttura logica* della mente ... in definitiva la base della certezza è una sola, nella Geometria come nella Fisica; è una base empirica che dà anche alla geometria il carattere di una scienza sperimentale." [Enriques 1900 p.5.]

La differenza tra Fisica e Geometria è dunque di grado. Nella prima prevale un ricorso alla esperienza; la seconda fa riferimento a quest'ultima soltanto per stabilire poche proposizioni fondamentali. I concetti primitivi della geometria non appaiono diversi dai concetti fisici e i postulati esprimono una realtà fisica desunta dall'esperienza. Tale modo di vedere è rafforzato dalla scoperta del mancato carattere di necessità dei postulati stessi, scoperta derivante dalla scoperta delle geometrie non euclidee e n-dimensionali. Sulla costituzione dello spazio fisico possiamo perciò assumere ipotesi diverse. Rimane tuttavia da chiarire da dove derivi quel sentimento di necessità che accompagna le usuali rappresentazioni geometriche. I compiti della ricerca fondazionale si collocano perciò su diversi livelli. Un compito specificamente matematico consiste nello studio delle relazioni tra i concetti geometrici tramite l'analisi di diverse basi assiomatiche. Tale studio riguarda concetti e non rappresentazioni. I compiti della ricerca psicologica riguardano invece le indagini sulla formazione dei concetti geometrici cioè sulla natura e sulll'origine delle rappresentazioni spaziali sensibili.

La ricerca matematica indagherà la geometria in quanto teoria basata su concetti primitivi le cui relazioni sono espresse dai postulati, concependola cioè come una "teoria logica astratta"

ovvero come una struttura sintattica passibile di diverse interpretazioni. Lo stesso Enriques ha più volte sottolineato come proprio attraverso gli sviluppi geometrici ottocenteschi si sia sviluppata l'idea che gli enunciati matematici si presentino come costrutti formali suscettibili d'interpretazione diversa. L'unica condizione richiesta ad una teoria geometrica è il suo essere consistente. Ma se la Geometria dovesse essere concepita esclusivamente come un edificio di carattere puramente sintattico , una struttura non interpretata , si correrebbe il rischio di cadere nel vuoto. Enriques ha sempre insistito sull'idea che occorre scorgere in *ogni* costruzione astratta la rappresentazione *possibile* di una realtà. "S'incontrerebbe qui, nel campo matematico, quella stessa esagerazione formale cui offrono largo esempio certe manifestazioni dell'arte.. il pensiero sfuma e si dilegua nel nulla, come nebbia, vaga e incoerente, allorché si oltrepassano i limiti del reale per seguire soltanto le leggi dei simboli. Restando nel campo della Geometria, non bisogna dimenticare che tale scienza è scienza di fatti fisici o intuitivi che vogliano considerarsi. Il formalismo logico deve essere concepito, non come un fine da raggiungere ma come un mezzo atto a svolgere e ad avanzare le facoltà intuitive. Gli stessi risultati più lontani, logicamente stabiliti, non debbono considerarsi un acquisto maturo, fino a che non possano essere intuitivamente compresi. Ma *nei principi l'evidenza intuitiva deve risplendere luminosa*" [Enriques 1900. p.12] [F12].
Naturalmente l'evidenza non ha un carattere assoluto. Essa dipende da " uno stato della mente più progredito , in cui si esercita una facoltà intuitiva più astratta". La capacità di intuire l'astratto dipende dalle esperienze che un individuo compie a livello teorico. Anche gli esempi patologici di curve e superficie, senza derivata o senza piano tangente, che sembravano giocare a fine del XIX secolo un ruolo sempre più rilevante nella matematica, possono costringere ad allargare il senso dei nostri concetti ma l'intuizione possiede un limite al di là del quale essa perde la propria capacita rappresentativa.
In questo richiamo al predominio dell'intuizione, sostenuto da una capacità personalissima di "vedere" anche teoremi che più nulla avevano a che spartire con l'intuizione comune, Enriques rimaneva assai vicino alle idee di Klein per cui l'intuizione avrebbe dovuto accompagnare costantemente il procedere matematico.
Malgrado la matematica indichi un'ampia libertà di scelta tra i sistemi geometrici, la mente umana costruisce uno spazio psicologicamente ben definito. Per spiegare la relazione che sussiste tra concetti matematici e rappresentazioni sensibili occorre chiarire i caratteri dell'intuizione geometrica mostrando come essa nasca non solo dalla reiterazione delle sensazioni (posizione empirista) ma da uno sviluppo psicologico delle sensazioni all'interno della struttura mentale del soggetto. Enriques si propone infatti di completare l'indagine condotta dalla psicologia fisiologica sulla genesi delle rappresentazioni sensibili. Mentre la ricerca fisio-psicologica indaga il nesso tra realtà esterna e rappresentazioni spaziali acquisite tramite le sensazioni, la ricerca di Enriques si occuperà della relazione tra rappresentazioni spaziali e formazione dei concetti fondamentali, indagando quali sono le condizioni necessarie, dipendenti dalla struttura psichica, che presiedono alla formazione dei concetti matematici.
Dato un mondo esterno, tramite sensazioni otteniamo delle rappresentazioni spaziali. La rappresentazione dello spazio nasce da tre gruppi principali di sensazioni :
sensazioni tattili- muscolari appartenenti a tutta la cute, le sensazioni legate al tatto speciale, cioè ad un dato organo preso come paragone costante, e sensazioni visive .
La Psicologia fisiologica di Wundt ed Helmholtz ha cercato di stabilire quali proprietà geometriche possano provenire da una o dall'altra sensazione. Ma una adeguata

interpretazione dei dati provenienti dalla sensazione può essere effettuata solo all'interno di un contesto teoretico di carattere matematico in cui i rapporti tra i concetti geometrici siano stati già analizzati. Lo sviluppo storico della geometria illumina la genesi di carattere psicologico dei concetti geometrici. Da Euclide al Settecento si è cercato solo di rendere più semplici e tra loro indipendenti i postulati . Ma le relazioni geometriche fondamentali, come l'incidenza e la congruenza, sono rimaste tutte sullo stesso piano. Solo la ricerca ottocentesca ha condotto un'analisi più profonda permettendo una separazione dei concetti geometrici fondamentali. Grazie agli studi di geometria differenziale, iniziati con Gauss e proseguiti con Riemann, allo sviluppo della geometria proiettiva e alla teoria dei gruppi di trasformazione (Klein, Lie, Poincaré) si era giunti ad una netta separazione tra nozioni di carattere metrico e di carattere grafico che permetteva di esaminare l'apporto diverso delle sensazioni nella formazione delle rappresentazioni ."Dalle sensazioni muscolari si ricavano la conoscenza immediata delle proprietà metriche della congruenza e solo in via subordinata della retta e del piano. Questa osservazione, implicitamente contenuta in Helmholtz , viene fatta esplicitamente dal Klein."(Enriques 1900 p.18). Questa osservazione di Klein (cfr. Bottazzini 1989) secondo cui la distinzione tra aspetti metrici e proiettivi poteva essere riportata alla differenza tra sensazioni tattili e visive doveva secondo Enriques essere estesa. Si doveva ulteriormente distinguere tra sensazioni tattili muscolari generali e sensazioni del tatto speciale. "Le prime fino a che non sia localizzata per abitudine una sede di paragone, sono incapaci di dare la nozione congruenza. Il loro contenuto, per quanto riguarda le cognizioni spaziali , si limita alle relazioni più generali inerenti alle linee e alle superficie, relazioni che abbiam detto costituire l'oggetto della teoria del continuo ed essere fondamento comune delle proprietà grafiche e delle metriche"(Enriques 1900 p.19)

I tre rami della geometria, in relazione all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, risultano connessi a tre ordini di sensazioni. L'indirizzo topologico si riconnette alle sensazioni tattili muscolari. La differenziazione della generale sensibilità tattile muscolare tramite un organo specifico di riferimento conduce a nozioni di carattere metrico. Le nozioni proiettive sono collegate alle sensazioni visive.

Ma come passiamo dalle rappresentazioni spaziali, scaturenti dalla sensazioni, al concetto matematico di spazio? Che più rappresentazioni, di uno stesso gruppo o meno, si riuniscano associativamente in un concetto richiede una condizione logica necessaria.. Tale condizione troverà espressione in un postulato (cfr. ad es. la chiara analisi delle condizioni logiche necessarie a definire il continuo uni dimensionale condotta in *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Enriques 1958).

L'unificazione di un gruppo di rappresentazioni con altre di natura diversa può comportare l'imposizione di altre condizioni che verranno esplicitate da altri postulati. Postulati che nascono dall'associare sensazioni di gruppi diversi risulteranno psicologicamente dotati di evidenza minore rispetto a quelli che trovano fondamento in un sol gruppo di sensazioni. Ad esempio la minore intuibilità del postulato delle parallele nasce dall'associare sensazioni ottiche e tattili muscolari.. In un dato piano infatti noi ci rappresentiamo le rette parallele in due modi : come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto d'intersezione si allontani in un dato verso, e come linee equidistanti. L'associazione tattile (equidistanza) e visiva (non intersezione) viene espressa dalla condizione che due rette di un piano non intersecantesi siano equidistanti, ovvero da una delle forme del quinto postulato euclideo. La ripugnanza che nasce dal contraddire in generale i postulati è dovuta alla forza di tali associazioni che illusoriamente viene scambiata per necessità logica. Da tale errore scaturisce il sentimento di

necessità dei postulati geometrici, il loro cioè apparire come un legame di relazioni fisso e indissolubile tra i concetti. Se tale senso di necessità non è posseduto da quelli fisici, ciò è dovuto proprio al fatto che "noi assistiamo consci consapevoli al formarsi dei concetti fisici, mentre la costruzione dei fatti geometrici ci appare anteriore ad ogni atto della coscienza riflessiva" (Enriques 1900. p.7). Relativamente ai concetti fisici possiamo immaginare condizioni diverse di formazione e questo ci libera dal sentimento di necessità. Ma il riconoscimento del sentimento di necessità non deve indurre a ritenere che i concetti dell'intuizione matematica siano predisposti nella struttura mentale indipendentemente dalle rappresentazioni sensibili portando a considerare i postulati come condizioni a priori della mente secondo la veduta kantiana.
Come si vede la posizione di Enriques correla il punto di vista kantiano con la tradizione empiristica. Lo spazio non una realtà anteriore ed esterna alla mente ma un'insieme di relazioni il cui elemento formale è dato dalle operazioni della struttura mentale. L'idea che tali forme debbano essere necessariamente euclidee è stata superata dallo sviluppo storico della matematica. Ma lo sviluppo di una posizione empirista in geometria non deve cadere nell'idea che lo spazio sia un oggetto reale esterno assolutamente dato. Piuttosto il termine spazio può per Enriques denotare "positivamente" l'insieme dei rapporti tra i corpi. Queste relazioni hanno carattere intersoggettivo poiché corrispondono ad un accordo fisso tra atti volontari del soggetto e sensazioni che ne seguono. Occorre però andare oltre il puro fatto esterno della sensazione e riconoscere una struttura logica del pensiero che rende possibile associare variamente le rappresentazioni ponendo una serie di condizioni che sono esplicitate da postulati diversi. Lo sviluppo psicologico ha prodotto un'intuizione spaziale caratterizzata dalla fusione di associazioni metriche e proiettive che sono state separate e colte isolatamente solo dalla matematica ottocentesca. Ma la difficoltà o l'impossibilità psicologica di rappresentare i fenomeni reali in un quadro diverso dall'ordinaria intuizione, proprio perché non di origine logica ma solo legata alle usuali condizioni d'associazione psicologica , non può dir nulla intorno alla struttura dello spazio fisico. A priori la geometria di tale spazio non deve essere conforme alla nostra intuizione. I lavori di Gauss, Clifford e Helmholtz hanno anzi mostrato come sia possibile adoperare, nell'ambiente a noi accessibile, geometrie diverse che diano luogo a condizioni geometriche identiche per quanto riguarda l'osservazione sensibile. Un'estensione al di là del campo delle osservazioni attualmente accessibile potrebbe però rilevare risultati non più conformi alla nostra intuizione. La Geometria in relazione al mondo esterno rimane perciò una scienza fisica le cui proposizioni hanno una validità approssimata. Forme alternative di pensiero geometrico perciò non sono solo logicamente possibili ma potrebbero costituire descrizioni più adeguate della realtà fisica.
Da quanto complessivamente detto risulta chiaro che Enriques si muove all'interno di una prospettiva fondazionale che è filosoficamente sostenuta da una attenzione verso i problemi della conoscenza così come questi si erano configurati a metà Ottocento. La cornice di riferimento era rappresentata dal problema della origine psicologica degli assiomi, dal rapporto tra geometria ed esperienza e soprattutto dalla questione se qualcuno tra i sistemi non euclidei potesse essere maggiormente adeguato per una descrizione del mondo fisico. Il tema di fondo rimaneva la rottura o la revisione della posizione kantiana contrapposta od integrata con la posizione empirista emersa con forza dopo la scoperta delle geometria non euclidee. In quest'ottica non mancava certo la piena consapevolezza della natura della matematica come sistema formale ma ciò che interessava dell'indeterminazione dei concetti

formali era la capacità di descrivere non una ma più esperienze possibili. Di per sé come oggetto a se stante il sistema formale non era considerato un oggetto teoreticamente rilevante. In tal senso, ad esempio, la domanda riguardo la consistenza di un sistema matematico poteva aver senso qualora venissero meno gli usuali modelli interpretativi e cessava di essere significativa con l'esibizione di un nuovo modello. Ma tale richiesta suonava strana se posta nei confronti di teorie i cui modelli erano collaudati da sempre. Per l'aritmetica in particolare Enriques dichiarava di non comprendere il senso della domanda." La questione della compatibilità dei postulati dell'Aritmetica è stata messa all'ordine del giorno dalle comunicazioni di D. HiIlbert ai recenti congressi di matematiche (Parigi, 1900; Heidelberg, 1904). Hilbert ricerca una dimostrazione logica; ma noi non comprendiamo bene in qual senso sia da intendere la veduta dell'illustre geometra." (Enriques 1910 p.144 nota 1). Si può dunque asserire che " la pubblicazione delle Grundlagen farà apparire di colpo superato l'intero approccio kleiniano alla questione della natura degli assiomi e, insieme ad esso, anche il tradizionale problema filosofico sull'origine degli assiomi e la loro adeguatezza a dar conto dei <<fatti>> empirici, problema che era stato non solo di Klein ma di tutti coloro che avevano riflettuto sui fondamenti della geometria, da Helmholtz a Pasch a Poincaré. Con l'assiomatizzazione hilbertiana si annunciava una nuova filosofia della geometria (e, in generale, della matematica) più aderente alla pratica del matematico nella quale il problema *filosofico* e logico prioritario sarà quello dello studio dei sistemi formali e in primo luogo della ricerca di prove di non contraddittorietà, dalle quali discendeva l'esistenza degli oggetti matematici" (Bottazini 1994 pp. 253-254)

Conclusioni

Rimane da chiederci perché la memoria "popolare" della comunità scientifica abbia in larga parte cancellato i risultati della scuola italiana, dimenticando come già in essa fosse matura una chiara consapevolezza della concezione formale dell'assiomatica e attribuendo quest'ultima direttamente ad Hilbert. Le ragioni dell'estesa influenza dell'opera hilbertiana sono molteplici. Sulla scorta di quanto recentemente osservato da J. Gray (Gray 1998) possiamo precisare i seguenti punti

1) Hilbert è un matematico di levatura eccezionale operante nel centro guida della ricerca matematica mondiale. Le sue opere sono tradotte e lette in moltissimi paesi. Ciò comporta un'influenza vastissima che tende a marginalizzare eventuali analoghi risultati.

2) l'influenza di Hilbert si è estesa oltre il primo dopo guerra mentre personaggi come Pieri sono scomparsi già nel 1913. In effetti anche il declino di Peano inizia già nei primi del '900 e il suo allievo filosoficamente più dotato,Vailati, scompare nel 1909.

3) Hilbert è uno scrittore più facilmente leggibile rispetto al pesante ricorso di Pieri all'ideografia di Peano. Le opere degli italiani, secondo Gray, scarne di enfasi o di argomentazioni sul piano delle motivazioni, risulterebbero comunque meno accattivanti.

Questa osservazione è in parte vera ma non vale sicuramente per Enriques i cui risultati sono anzi pienamente apprezzati in Germania da Klein.

4) L'assiomatizzazione della geometria da parte italiana è stata portata avanti come parte del programma peaniano di riscrittura della matematica. Un compito a termine e non inserito nelle correnti vitali della matematica.

Quest'ultima osservazione va ampliata con un ulteriore considerazione. Non solo in Peano ma in tutta la scuola italiana il ricorso al metodo assiomatico ha una funzione di sistemazione dell'esistente più che essere concepito come uno strumento per esplorare nuovi campi geometrici. Viceversa in Hilbert, e sopratutto nella sua scuola, l'indipendenza di un assioma è il punto di partenza per lo studio di nuove geometrie come quelle non arguesiane, non pascaliane o non archimedee. Mentre gli italiani sistematizzano, Hilbert concepisce il metodo assiomatico come un vero e proprio strumento di battaglia per affrontare nuovi problemi. Proprio quest'ultima caratteristica caratterizza più profondamente la differenza tra Hilbert e gli italiani. Mentre il primo apre nuove strade alla ricerca geometrica, i secondi permangono in un ambito la cui cornice generale è ancora ottocentesca e in cui prevalgono preoccupazioni di sistematizzazione in funzione anche della formazione dei futuri insegnanti.

Indicazioni per l'uso delle fonti a scopo didattico

Il paradigma euclideo e il sistema formale

F1 La migliore introduzione alla concessione assiomatica euclidea è ovviamente rappresentata dagli *Elementi* stessi, di cui è consigliabile vivamente da parte degli stessi studenti, la lettura diretta del primo libro (Euclide 1970). Una presentazione moderna e efficacissima in Trudeau (1991) Cap. 2. Tale libro è da consigliare sotto moltissimi aspetti e costituisce una felice presentazione, del tutto elementare, della geometria non euclidea.

F2 Per una discussione del concetto di sistema formale vedi Agazzi Palladino (1978) *Introduzione*, o, un moderno manuale di logica come R. Rogers (1978).

Filosofia della geometria in Kant

F3 La filosofia della geometria in Kant segna, anche solo come elemento di contrapposizione, l'orizzonte filosofico di riferimento di tutto il dibattito ottocentesco. E' opportuno perciò che allo studente ne vengano presentate le linee essenziali. Si può iniziare senza difficoltà dalla lettura dei *Prolegomeni ad ogni futura metafisica che si presenterà come scienza* §6-13 e §1-5 per passare poi alla *Critica della Ragion Pura* Introduzione, Estetica trascendentale (Parte I , sez. I e II) e parte II (dottrina trascendentale del metodo) Cap. I sez. I .

Empirismo e Geometria

F4 Alcune lettere di Gauss sono riportate in (Parrini 1979). Da leggere tutto il capitolo II sull'empirismo

F5 Una celebre conferenza divulgativa leggibile, con qualche taglio, senza eccessive difficoltà è *Origine e significato degli assiomi geometrici* in (Helmohltz 1996) o anche in Einstein *Relatività esposizione divulgativa* tr. it. Boringhieri 1967 Sul ruolo di Helmoltz nella cultura geometrica dell'Ottocento vedi (Richards 1988) Cap. II

F6 Il riferimento canonico è (Abbott 1966), la cui lettura è consigliabile agli studenti.

F7 Un breve ma interessante estratto dell'opera di Pasch è leggibile in (Cantini 1979). Le pagine scelte dal curatore insistono sulla necessità di prescindere dal significato dei termini usati nelle deduzioni e sul ruolo che il principio di dualità ha avuto nel favorire tale atteggiamento. Su questa importante questione è fondamentale (Nagel 1939) ma si veda anche il Cap. III *La riforma della Logica contemporanea* di (Enriques 1922). Sarebbe opportuno fornire agli studenti delle nozioni elementari di geometria proiettiva e discutere del ruolo di quest'ultima all'interno del generale edificio geometrico. Per una visione complessiva degli sviluppi geometrici alla luce del programma di Erlangen una buona introduzione è (Tuller 1966). L'insegnante potrà trovare una presentazione dell'opera di Pasch in (Torretti 1978) o una discussione più approfondita in (Contro 1975-76).

Peano e Pieri

F8 Rispetto a *I principi di geometria logicamente esposti* è più facilmente proponibile *Sui fondamenti della geometria* in (Peano 1958) il cui contenuto è quasi analogo. Si può vedere con gli studenti la presentazione degli assiomi e discutere, sulla scorta delle indicazioni di Peano stesso, i controesempi che provano l'indipendenza di alcuni assiomi rispetto ai rimanenti. Su Peano e la sua scuola è utile (M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino 1985).

F9 Il lavoro di Fano *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* , nato dietro suggerimento di C. Segre, costituisce un significativo esempio di un approccio assiomatico del tutto astratto ma non è proponibile agli studenti. Viceversa può utilmente essere letto dagli studenti l'articolo di Fano *Sui fondamenti di geometria* in Rivista di filosofia pp. 391-408 1915. Tale articolo, di carattere divulgativo, costituisce una testimonianza diretta di un protagonista del dibattito sui fondamenti.

F10 La lettura diretta delle opere di Pieri relative ai fondamenti presenta per gli studenti eccessive difficoltà. Più accessibile la memoria *Uno sguardo al nuovo indirizzo logico matematico delle scienze deduttive* in (Pieri 1980)

Enriques

F11 (Enriques 1900) è un articolo leggibile dagli studenti. Si potrà passare poi ai capitoli iniziali di (Enriques 1910) e ai diversi articoli presenti in (Enriques 1958).

F 12 Da leggere, anche per un confronto con le posizioni di Vailati, le pagine, assai efficaci sul piano didattico, di (Enriques 1912).

Per una presentazione generale delle questioni affrontate rimandiamo alle seguenti opere introduttive : (Torretti 1978) , (Nagel 1935), (Richards 1988). In tali opere il lettore potrà trovare anche un primo punto di partenza relativo alla assai estesa bibliografia specifica. Di seguito riportiamo le indicazione bibliografiche relative ai testi citati e alle fonti per la presentazione didattica dei temi in questione.

Bibliografia

Abbott E.A. 1966 *Flatlandia* tr. it. Milano Adelphi

Agazzi E., Palladino D. 1978 *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria* Mondadori ma vedi anche *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare* Brescia, La Scuola1998

Borga M., Freguglia P., Palladino D., 1985, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, Angeli

Borga M., Palladino D.,1997, *Oltre il mito della crisi* Brescia, La Scuola

Bottazzini U.,1989, *I principi della geometria <scientifica> di Enriques* in *F. Enriques filosofo e scienziato* Cappelli. L'articolo di Bottazini è leggibile anche in Bottazzini *Va' pensiero* Bologna, Mulino 1994

Burali-Forti C., 1919, *Logica matematica* Milano, Hoepli

Cantini A., 1979, *I fondamenti della matematica* Torino, Loescher
Cassirer E., 1958, *Storia della filosofia moderna* vol. IV tr. it..Torino, Einaudi
Contro W. 1975-76, *Von Pasch zu Hilbert*, Archive for the Hist. of exact Sci.,15, 283-95
Enriques F., 1987, *Storia della Logica* Bologna, Zanichelli, ristampa
Enriques F., 1900, *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della Geometria*, in *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, Zanichelli
Enriques F. 1910, *Problemi della Scienza* Bologna Zanichelli
Enriques F. 1912, *Il significato della critica dei principi nello sviluppo delle matematiche* Scientia, parzialmente riprodotto in G. Giorello 1977
Enriques F.1958, *Natura, ragione e storia* Antologia di scritti filosofici a cura di L. Lombardo Radice Torino Boringhieri
Euclide, 1970, *Elementi* tr. it. a cura di A. Frajese e L. Maccioni Torino, Utet
Fano G., 1915, *Sui fondamenti di geometria* in Rivista di filosofia pp.391-408
Freudenthal H.,1957, *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie*, Nieuw Archief voor Wiskunde, (4), 5,105-142
Giorello G., (a cura di), 1977, *L'immagine della scienza* Milano, Saggiatore
Gray J.,1998, *The Foundations of Geomety and the History of Geomertry* in The Mathematical Intelligencer, 20, 54-59
Helmohltz H., 1996 *Opere* a cura di V. Cappelletti Torino Utet
Lolli G. , 1985, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche* Bologna, Mulino
Nagel E. , 1939, *The formation of modern conceptions of formal logic in the devlopment of geometry* Osiris 7
Parrini P., 1979, *Fisica e Geometria dall'Ottocento a oggi* Loescher Torino
Peano G., 1957-59, *Opere scelte* Roma, Cremonese
Pieri M., 1980 *Opere sui fondamenti della Matematica* Roma, Cremonese
Richards J. 1988, *Mathematical visions - The pursuit of Geometry in Victorian England* Boston, Academic Press
Rogers R., 1978 *Logica matematica e teorie formalizzate* tr. it. Bologna, Feltrinelli
Torretti R.,1978 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* Dordrecht Reidel
Tuller A. 1966 *A modern Introduction to Geometries* Princeton,Van Nostrand Company
Trudeau R. 1991 *La rivoluzione non euclidea* tr.it. Torino, Boringhieri