

Una metodologia didattica della scuola cinese: i problemi con variazione*

Sommario

Questo articolo si propone di illustrare una metodologia d'insegnamento della soluzione dei problemi molto comune nella scuola cinese (*l'insegnamento dei problemi con variazione*). In una sequenza di problemi sono mantenute le caratteristiche essenziali del concetto matematico, mentre sono modificate le caratteristiche non essenziali, al fine di mostrare agli studenti quali sole le une e quali le altre. Attraverso questa variazione sistematica, gli studenti sono condotti ad apprendere metodi di soluzione nuovi a partire da metodi di soluzione già noti.

Abstract

This paper aims at showing an effective teaching method used in Chinese schools (teaching problems with variations). In a sequence of problems the essential features of a mathematical concept are maintained, whilst other features are changes, in order to show which are the ones and the others. By means of this systematic variation, students are lead to learn new solving processes drawing on old ones.

*In ricordo di Giorgio Bagni
(1958-2009)
sempre attento ascoltatore delle mie cineserie*

* Studio realizzato nell'ambito del progetto PRIN 2007B2M4EK: " Strumenti e rappresentazioni nell'insegnamento-apprendimento della matematica: teoria e pratica ".

Maria G. Bartolini Bussi

Una metodologia didattica efficace della scuola cinese: i problemi con variazione

Maria G. Bartolini Bussi¹

1. Introduzione

Da alcuni anni i risultati degli studi comparativi internazionali sull'apprendimento della matematica hanno portato alla ribalta due paradossi:

- *Il paradosso dell'insegnante*: gli insegnanti cinesi operano in condizioni giudicate dagli insegnanti occidentali non adatte a produrre risultati significativi (strumenti e strutture scarse; numero degli studenti eccezionalmente alto - 60-70 per classe), ma producono risultati migliori di quelli degli insegnanti occidentali.
- *Il paradosso dello studente*: gli studenti cinesi sono addestrati ad usare strategie insegnate direttamente e dedicano molto tempo ad apprendimenti meccanici (ad es. nel calcolo) ma adottano strategie di alto livello e basate sul significato e ottengono risultati migliori (Fan e Zhu, 2004).

Questi dati trovano conferma in Italia. In varie città italiane si stanno costituendo comunità asiatiche consistenti. In molti casi gli insegnanti elementari testimoniano che i piccoli cinesi già scolarizzati nel loro paese si mostrano più bravi in aritmetica e, quando è migliorata la loro competenza linguistica, anche nella soluzione dei problemi. Questo articolo si propone di illustrare una metodologia d'insegnamento della soluzione dei problemi molto comune nella scuola cinese (*l'insegnamento dei problemi con*

¹ Dipartimento di Matematica – Università di Modena e Reggio Emilia

variazione), che potrebbe offrire suggerimenti efficaci anche agli insegnanti e agli autori dei libri di testo italiani. L'interesse per questi studi è crescente in Italia, se pure limitato a poche sedi, poiché l'attenzione della ricerca educativa è prevalentemente orientata all'insegnamento dell'italiano come seconda lingua. Due importanti eccezioni: le ricerche di Giorgio Bagni (2009) e del gruppo coordinato da Filippo Spagnolo a Palermo, che, da molti anni, studia queste problematiche (Spagnolo, 1986; http://www.uop.perg.unipa.it/master_sito/sito_mat/master%20didattica.htm).

2. I problemi con variazione.

2. 1. La soluzione di problemi nella tradizione educativa cinese.

Da alcuni anni si pubblicano in Occidente (prevalentemente in inglese) articoli e perfino volumi sull'insegnamento della matematica in Cina. Si possono citare, ad esempio, il volume di Fan e al. (2004), il libro di Ma (1999), il volume di Leung e al. (2006), uscito come esito dello studio ICMI n. 13, il volume di Xie & Carspecken (2008), sull'analisi comparativa, anche da un punto di vista filosofico, del curriculum cinese del 2001 con gli standard degli USA. E' anche stato tradotto (MOE, 2004) il curriculum cinese del 2001, prima disponibile solo in lingua originale. A questi testi si può aggiungere il testo con cdrom distribuito dalla delegazione cinese in occasione del Congresso ICME 11 nel luglio 2008 (CNP, 2008). Una sintesi introduttiva a questi problemi è stata pubblicata da Bartolini Bussi (in stampa a; in stampa b).

La prospettiva assunta nel presente articolo è molto più particolare. Si è voluto centrare l'attenzione su un aspetto non molto noto, almeno in Italia, della tradizione d'insegnamento cinese, *i problemi con variazione*², una caratteristica importante del sistema educativo cinese, non ancora oggetto di ricerche empiriche specifiche

² *bianshi*, nella traslitterazione del carattere cinese “变式” (metodo di variare).

(secondo gli standard occidentali, vedi Cai & Nie, 2007). I problemi con variazione sono sequenze di problemi collegati al fine di comprendere un concetto, padroneggiare un metodo di soluzione o compiere una generalizzazione. In una sequenza di problemi sono mantenute le caratteristiche essenziali del concetto matematico, mentre sono modificate le caratteristiche non essenziali, al fine di mostrare agli studenti quali sole le une e quali le altre. Attraverso questa variazione sistematica, gli studenti sono condotti ad apprendere metodi di soluzione nuovi a partire da metodi di soluzione già noti.

I problemi con variazione non sono solo strategie didattiche adottate da singoli insegnanti, ma sono rappresentativi di un complesso sistema storico - culturale (Sun & Wong, 2005). Gli aspetti più rilevanti di tale sistema possono essere così riassunti:

- i sistemi di valori della cultura cinese, basati sulle filosofie orientali (taoismo, buddismo, confucianesimo), che danno importanza all'autorità, all'autodisciplina, alla pratica ripetuta come strumento efficace per l'apprendimento (vedi Bartolini Bussi, in stampa a);
- la funzione dello studio individuale, attraverso un impegno estenuante, per l'accesso, attraverso severissimi esami di stato (durati per oltre 2000 anni fino all'inizio del XX secolo), alla classe dei funzionari imperiali, a prescindere da privilegi aristocratici ereditari o da proprietà fondiaria o da ricchezza (Siu, 2004);
- le tracce di tali eredità nel curriculum cinese, anche nel testo del 2001, data dell'ultima riforma (vedi Bartolini Bussi, in stampa a; in stampa b).

In Cina si pubblicano decine di riviste per insegnanti di matematica, che contengono ogni anno migliaia di articoli sulla soluzione di problemi (Cai & Nie, 2007). Soprattutto nella scuola secondaria, l'enfasi su questa metodologia è notevole. Si propongono esempi di lezioni ben strutturate nelle quali è illustrata la transizione da un problema iniziale ad altri problemi con variazione. La disponibilità di sequenze di problemi con variazione

di difficoltà crescente risponde anche al bisogno dell'insegnante cinese che ha classi con 60-70 studenti e può, in questo modo, graduare le proposte secondo il livello degli studenti.

I problemi con variazione sono adottati sistematicamente anche nelle valutazioni predisposte al termine di ogni ciclo d'istruzione e negli esercizi suggeriti agli studenti per la preparazione individuale.

In questo articolo commenteremo un caso paradigmatico di problemi con variazione, riguardante i problemi additivi all'inizio della scuola elementare (Bartolini Bussi, 2008).

2.2. *Problemi additivi con variazione.*

L'idea di considerare i problemi additivi nel loro complesso (senza, cioè, distinguere i problemi di addizione da quelli di sottrazione) è ben documentato nella ricerca didattica dell'occidente (Carpenter, Moser & Romberg, 1982).

Essa è documentata anche nell'antica Cina. Riferisce Siu (2004, p. 163 e ss.) dell'esistenza di un antico trattato contenente il primo lavoro sull'educazione matematica in Cina. Il trattato scritto da Yang Hui risale al 1274 e si intitola *L'alfa ed omega delle variazioni sulla moltiplicazione e la divisione*. Nel trattato si sottolinea l'importanza della memorizzazione dei fatti aritmetici elementari e della necessità di risolvere molti problemi collegati. In particolare, sui problemi additivi, si dice:

Nel metodo di addizione il numero aumenta, mentre nel metodo di sottrazione un numero è tolto. Tutte le volte che c'è un'addizione, c'è una sottrazione. Chi impara il metodo di 'sottrazione' deve verificare il risultato applicando il metodo di 'addizione' alla soluzione del problema. Ciò permetterà a ciascuno di comprendere il metodo nelle sue origini (Siu, 2004, p. 164).

In pratica, per riferirci ad un caso particolare che riguarda l'inizio della scuola elementare, si risolvono solo pochi problemi di addizione, prima di presentare problemi di sottrazione. Poi i

problemi sono presentati a coppie e in alcuni casi, come quello che vedremo, in serie anche più numerose. Nei problemi si conserva lo stesso contesto e si conservano le caratteristiche essenziali del concetto matematico mentre si modificano quelle non essenziali. Dopo avere imparato a risolvere un problema esemplificativo, si assegnano altri problemi in cui si modificano alcune caratteristiche (problemi *bianshi*).

2.3. I primi problemi.

Consideriamo i primi problemi additivi presentati all'inizio della scuola elementare. Ci riferiamo ad un recente libretto di matematica del primo semestre della prima elementare (SHU XHUE, 2006). Il libretto, con il formato di un quaderno, è costituito da oltre 100 pagine molto dense. Un analogo libretto è previsto per il secondo semestre. I numerali orali e scritti (sia nei caratteri cinesi che nella versione indo-arabica) sono presentati nel libretto di lingua cinese.

Le prime pagine del libretto di matematica del primo semestre contengono quindi già disegni con numerali da leggere o interpretare. Dopo alcune attività collegate al contare e all'ordinare, compaiono (pag. 22) i primi semplici problemi di addizione, presentati in forma grafica e con rappresentazioni simboliche (addizioni in riga). Data la ancora limitata conoscenza dei caratteri cinesi da parte dei bambini, i problemi sono spesso assegnati in forma grafica con solo brevi note da leggere con l'aiuto dell'insegnante. Quasi subito (pag. 26) sono introdotti analoghi problemi di sottrazione. Ma già a pag. 28 addizione e sottrazione sono collegate esplicitamente (fig. 1).

A pag. 30-31 ci sono esercizi riepilogativi su addizione e sottrazione in cui è ripreso anche il confronto di collezioni di oggetti (*quanti di più? quanti di meno?*). A pag. 32 (vedi fig. 2), con l'evocazione di un gioco, inizia in modo sistematico il trattamento coordinato di addizione e sottrazione. La stessa situazione problematica è interpretata come un problema di

addizione o di sottrazione, mostrandola sotto prospettive diverse (il primo è il problema di base, mentre gli altri due sono problemi *bianshi*).

(1) $1 + 3 = 4$
 $4 - \square = \square$

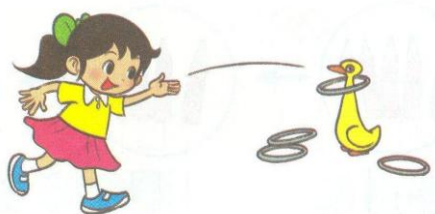


Fig. 1. Addizione e sottrazione.

<p>$4 + 2 = 6$</p>	
<p>$6 - 4 = \square$</p>	<p>$6 - \square = \square$</p>

Fig. 2. Addizione e sottrazione.

Nel seguito del libretto, i problemi di addizione e sottrazione sono quasi sempre appaiati. Questa caratteristica è presente anche nei libretti di altre serie. L'esempio che segue mostra un caso ancora più esplicito di problemi *bianshi*.

2. 4. Un esempio paradigmatico.

Questo esempio è tradotto con lievi modifiche da un libretto del secondo semestre della seconda elementare (SHU XUE, 1996, p. 89). Lo schema è contenuto in una sola pagina, senza disegni. La traduzione fornita nella tavola 1 è letterale e cerca di conservare la struttura della frase cinese che inizia con la definizione del **contesto** (*nello stagno abbiamo*), supposto noto, e continua con la descrizione della situazione problematica.

I problemi rappresentati su sfondo scuro e incorniciati sono le situazioni di partenza, mentre gli altri sono i problemi con variazione (*bianshi*).

Le relazioni tra i problemi sono sottolineate dall'adozione di uno schema (chiamato *mappa unitaria*) che consente di rappresentare in forma grafica i dati e le incognite.

L'intestazione della pagina dice semplicemente:

TRADUZIONE LETTERALE

Prima rispondi, poi spiega ogni gruppo verticale e orizzontale in tre modi diversi. Mettiti in relazione.

SIGNIFICATO

Risolvi e confronta (metti in relazione) i tre diversi modi di formulare i problemi posti in orizzontale e verticale.

Il carattere 只 che compare sempre dopo i numerali (sia nel testo dei problemi che negli schemi grafici) è un caso di 'classificatore' o 'quantificatore' o 'unità di conteggio' o 'unità di misura'. E' diverso a seconda del sostantivo a cui si riferisce (esempi di classi con classificatori diversi: esseri umani; oggetti di carta con molti fogli; fogli; fotografie o quadri; oggetti sottili e rigidi; cose lunghe non rigide o non dritte; vestiti per la parte superiore del corpo; veicoli di terra; veicoli d'acqua; alberi, erbe e alcune verdure, ecc.). L'ideogramma qui riportato si usa per la maggioranza degli animali e per ciascuno dei componenti di un paio (guanto, scarpa, mano,

ecc.). Nei problemi della terza riga è stato tradotto con il termine generico *unità*.

I problemi della terza riga verrebbero formulati in italiano nella forma *quanti di più, quanti di meno?* L'uso di queste parole è, come ben noto, fonte di errori ripetitivi da parte degli allievi più deboli che tendono ad usare l'addizione in presenza del termine *più* e la sottrazione in presenza del termine *meno*, a prescindere dal significato del problema. La lingua cinese è, in questo caso, meno fuorviante.

Nella prima colonna vi sono problemi che portano naturalmente ad una addizione, mentre nelle altre due colonne vi sono problemi che portano ad una sottrazione. Nei casi più semplici contenuti nelle pagine precedenti di questo stesso libretto non vi sono sempre tutti i problemi ma, di norma, sono presentati in parallelo almeno due problemi della stessa riga, a testimoniare che, come si è osservato più sopra, *tutte le volte che c'è un'addizione, c'è una sottrazione*.

E' molto sorprendente per noi osservare che questa richiesta molto alta sul piano metacognitivo è rivolta a bambini di seconda elementare. Un supporto per la risposta è sicuramente dato dalla rappresentazione grafica. Gli schemi grafici suggeriti (a colori nel testo originale, blu per i dati e rosso per le incognite) mettono in evidenza la struttura simile nei problemi della stessa riga e nei problemi della stessa colonna sottolineando le caratteristiche della variazione. Questo tipo di rappresentazione grafica è abbastanza consueta in molti testi orientali ed è introdotta con gradualità. Ad esempio, in vari testi (dalla Cina, dal Giappone, da Singapore) si inizia dalla prima elementare a presentare situazioni con gradualità (vedi fig. 3).

Ci sono 8 pesci rossi nello stagno; se ne aggiungono 6.

Quanti sono i pesci rossi ora?

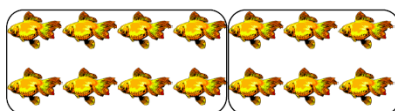
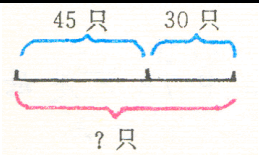
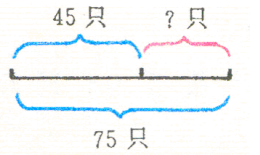


Fig. 3. I pesci rossi

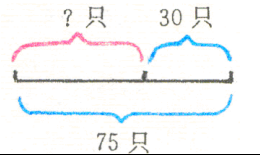
(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



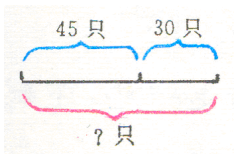
(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?



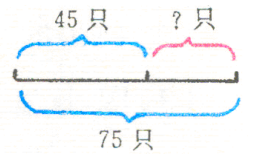
(3) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



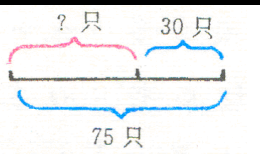
(1) **Nello stagno abbiamo** un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?



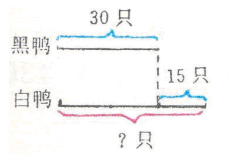
(2) **Nello stagno abbiamo** 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?



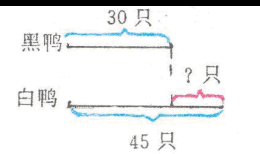
(3) **Nello stagno abbiamo** 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?



(1) **Nello stagno abbiamo** 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?



(2) **Nello stagno abbiamo** 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)



(3) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?

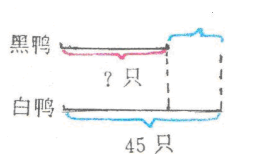


Tavola 1

Successivamente i pesci sono disposti allineati:

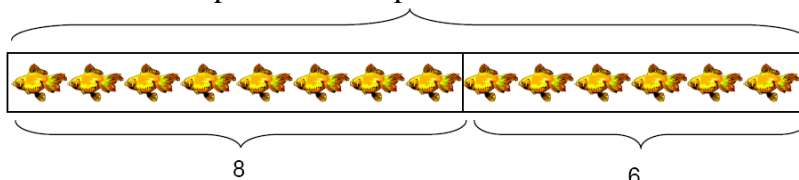


Fig. 4. I pesci rossi allineati.

In problemi successivi, specialmente quando i numeri sono maggiori, si usa una rappresentazione analoga ma più distaccata dal contesto:

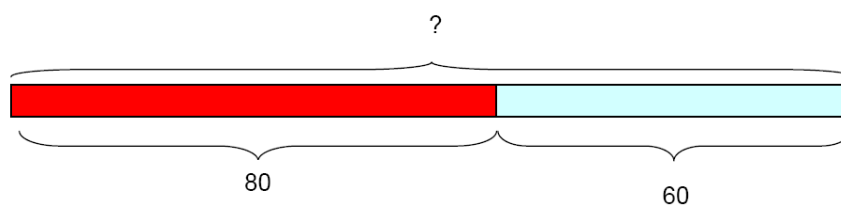


Fig. 5. Inizia ad apparire la barra.

Questa rappresentazione è poi sostituita da una semplice linea come nel caso della Tavola 1.

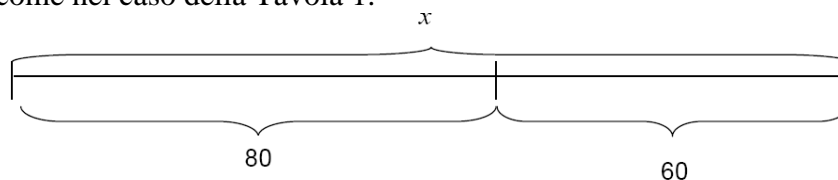


Fig. 6. Lo schema finale.

Queste rappresentazioni sono oggetto di insegnamento specifico. In modo analogo si insegnano gli schemi relativi ai problemi delle altre righe della Tavola 2.

2.5. Alcune ricerche classiche sui problemi additivi.

Negli anni '80 (Carpenter, Moser & Romberg, 1982) si iniziò, a livello internazionale, a raccogliere i risultati sulle ricerche condotte in vari paesi riguardanti i problemi di addizione e

sottrazione nei primi anni di scuola. Nell'introduzione, Romberg (1982) parlava di un paradigma emergente, sostanzialmente ispirato alle ricerche di Piaget. Tra i risultati più significativi, collegati al tema di questo articolo, ci sono le classificazioni dei primi problemi di addizione e sottrazione su base semantica, cioè rispetto al significato del problema. Alcune di queste ricerche sono state tradotte in italiano (Chini Artusi, 1985). Riassumiamo brevemente alcuni contributi di Carpenter & Moser (1984) e di Vergnaud (1981).

La tavola 3 riassume la classificazione utilizzata da Carpenter & Moser (1984), applicata ad uno stesso contesto: un gioco di biglie in cortile. La classificazione è stata costruita tenendo conto di alcune variabili:

- la situazione può essere statica (una situazione data, da osservare, con un problema da risolvere) o dinamica (una situazione in cui è implicito, già realizzato o da realizzare, un cambiamento, casuale o intenzionale);

- la situazione può riguardare una sola collezione di oggetti (e dunque coinvolgere relazioni parte-tutto) o due collezioni (da confrontare o da uguagliare).

I problemi della prima riga della Tavola 1 sono, nella terminologia di Carpenter & Moser (1984), problemi di *combinazione*, e, nella terminologia di Vergnaud (1981), problemi di *composizione (parte-tutto)*. Essi rappresentano una situazione statica.

I problemi della seconda riga sono, nella terminologia di Vergnaud (1981), problemi di *trasformazione* (situazione dinamica), in cui si passa da uno stato iniziale ad uno finale; Nella terminologia di Carpenter & Moser (1984), essi sono problemi di *cambio (cambio-unione* nella prima colonna, problema 1; *cambio-separazione* nella seconda e terza colonna, problemi 2 e 3).

Nella terza riga ci sono problemi di *confronto* (Vergnaud, 1981), chiamati nello stesso modo da Carpenter & Moser (1984).

Il problema richiede e riguarda	Azione (dinamico) Cambio realizzato o progettato (esperimento mentale)	Osservazione (statico)
Un insieme	CAMBIO $a + b = ? / a - b = ?$ $a + ? = c / a - ? = c$ $? + b = c / ? - b = c$	COMBINAZIONE $a + b = ?$ $a + ? = c$ $? + b = c$
Due insiemi	UGUAGLIANZA $a + ? = b / a - ? = b$ $a + c = ? / a - c = ?$ $? + c = b / ? - c = b$	CONFRONTO $a + ? = b / b - ? = a$ $a + c = ? / ? - c = a$ $? + c = b / b - c = ?$

Tavola 2

La Tavola 3 (Carpenter & Moser, 1984) considera anche problemi di *uguaglianza*, in cui si richiede di confrontare tra loro due insiemi per renderli uguali.

Questi problemi, semanticamente più complessi, non sono presi in esame nel caso cinese considerato (seconda elementare).

Nella classificazione di Vergnaud (1981) si considerano anche altri problemi additivi ancora più complessi, in cui, ad esempio, sono concatenate due trasformazioni. Ad esempio:

Carlo ha fatto due partite con le biglie. Nella prima ha perso 4 biglie; ha poi giocato una seconda partita. Ora ha vinto in tutto 7 biglie. Che cosa è successo nella seconda partita?

L'analisi di Vergnaud è interessante anche per la funzione attribuita alla rappresentazione. Vergnaud (1982) introduce la nozione di *campo concettuale* come

un insieme di situazioni, la padronanza delle quali richiede di possedere una varietà di concetti, procedure e rappresentazioni simboliche strettamente interconnesse.

CAMBIO	
UNIONE	SEPARAZIONE
Aldo aveva 5 biglie. Bianca gliene dà ancora 8. Quante biglie ha Aldo in tutto? $a + b = ?$	Aldo aveva 13 biglie. Ne dà 8 a Bianca. Quante gliene restano? $a - b = ?$
Aldo ha 5 biglie. Quante gliene deve dare Bianca perché ne abbia in tutto 13? $a + ? = c$	Aldo aveva 13 biglie. Ne dà alcune a Bianca. Ora ne ha 5. Quante ne ha date a Bianca? $a - ? = c$
Aldo aveva alcune biglie. Bianca gliene ha date 8 e ora Aldo ne ha 13. Quante ne aveva all'inizio? $? + b = c$	Aldo aveva alcune biglie. Ne ha date 8 a Bianca e ora ne ha 5. Quante ne aveva all'inizio? $? - b = c$
COMBINAZIONE	
Carlo ha 5 biglie arancio e 8 blu. Quante ne ha in tutto? $a + b = ?$	Carlo ha 13 biglie di cui 5 arancio e le altre blu (ovvero 8 blu e le altre arancio). Quante sono le biglie blu (arancio)? $a + ? = c$ $? + b = c$
CONFRONTO	
Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante biglie ha Bianca più di Aldo? $a + ? = b$	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante biglie ha Aldo meno di Bianca? $b - ? = a$
Aldo ha 5 biglie. Bianca ne ha 8 più di lui. Quante biglie ha Bianca? $a + c = ?$	Aldo ha 5 biglie, 8 in meno di Bianca. Quante biglie ha Bianca? $? - c = a$
Bianca ha 13 biglie, 5 in più di Aldo. Quante biglie ha Aldo? $? + c = b$	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5 di meno. Quante biglie ha Aldo? $b - c = ?$
UGUAGLIANZA	
Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante ne deve vincere Aldo per averne tante quante Bianca? $a + ? = b$	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante ne deve perdere Bianca per averne tante quante Aldo? $b - ? = a$
Aldo ha 5 biglie. Se ne vince 8 ne ha tante quante Bianca. Quante ne ha Bianca? $a + c = ?$	Aldo ha 5 biglie. Se Bianca ne perde 8 ne ha tante quante Aldo. Quante ne ha Bianca? $? - c = a$
Bianca ha 13 biglie. Se Aldo ne vince 5 ne ha tante quante Bianca. Quante ne ha Aldo? $? + c = b$	Bianca ha 13 biglie. Se ne perde 5 ne ha tante quante Aldo. Quante ne ha Aldo? $b - c = ?$

Tavola 3

Per Vergnaud un concetto è una terna (S, I, Σ) dove

S è l'insieme di situazioni che rendono significativo il concetto; I è l'insieme degli invarianti che costituiscono il concetto; Σ è l'insieme dei simboli utilizzati per rappresentare il concetto o le sue proprietà o le situazioni che a esso si riferiscono (Vergnaud, 1982).

Gli schemi grafici descritti del paragrafo precedente, con riferimento alla Tavola 1, si inseriscono proprio in questa descrizione.

3. Conclusioni.

Il materiale presentato in precedenza è stato discusso in un laboratorio con gli studenti del corso di laurea in scienze della formazione primaria (Bartolini Bussi, 2008), replicato già tre volte, chiedendo agli studenti:

- 1) di collegare lo schema dei 9 problemi con le classificazioni di Carpenter & Moser (1984) e di Vergnaud (1981);
- 2) di costruire, nel contesto assegnato, problemi di uguaglianza;
- 3) di costruire nuove serie di 9 problemi, modificando il contesto, ma conservando la stessa struttura.

Il primo compito è già stato discusso in precedenza. Gli scopi degli autori di libri di testo cinesi e dei ricercatori sono diversi (costruire una serie di problemi con variazione; analizzare semanticamente i più semplici problemi di addizione e sottrazione). Tuttavia la coerenza è, in un certo senso, sorprendente: si richiede ai bambini, in sostanza, di ricostruire una analisi semantica di una sequenza di problemi additivi. L'elemento centrale sembra essere la rappresentazione grafica, che consente il collegamento con il significato matematico.

Il risultato del secondo compito è riassunto nella Tavola 4.

L'analisi semantica mostra che vi sono problemi molto diversi con la stessa struttura sintattica, per ciò che riguarda l'operazione che permette di risolverli.

Anche la difficoltà varia. In generale, a prescindere dalla grandezza dei numeri in questione (che aggiungono un fattore di difficoltà), i problemi hanno difficoltà diverse che possono essere così ordinate (dal più facile al più difficile):

- 1) CAMBIO
- 2) COMBINAZIONE
- 3) CONFRONTO
- 4) UGUAGLIANZA

In generale, in problemi in cui l'incognita si colloca al primo posto, sono più difficili degli altri con la stessa struttura. Anche i problemi di sottrazione sono in generale più difficili di quelli di addizione.

Nello stagno ci sono 30 anatre nere e anche anatre bianche; se arrivano altre 15 anatre nere ce ne sono tante quante sono le bianche. Quante sono le anatre bianche?

$$n + a = ?$$

Nello stagno ci sono 30 anatre nere e 45 anatre bianche. Quante anatre nere devono arrivare perché ce ne siano tante uguali?

$$n + ? = b$$

Nello stagno ci sono 45 anatre bianche e anche anatre nere. Se arrivano 15 anatre nere ce ne sono tante quante sono le bianche. Quante sono le anatre nere?

$$? + a = b$$

Nello stagno ci sono 30 anatre nere e anche anatre bianche; se volano via 15 anatre bianche ce ne sono tante quante sono le anatre nere. Quante sono le anatre bianche?

$$? - v = n$$

Nello stagno ci sono 30 anatre nere e 45 anatre bianche. Quante anatre bianche devono volare via perché ci siano tante anatre bianche quante anatre nere?

$$b - ? = n$$

Nello stagno ci sono 45 anatre bianche e anche anatre nere. Se volano via 15 anatre bianche ce ne sono tante quante sono le anatre nere. Quante sono le anatre nere?

$$b - v = ?$$

Tavola 4

I contesti alternativi suggeriti dagli studenti sono le classiche biglie di Carpenter & Moser (o eventualmente figurine), i libri in una libreria (distinti per colore di copertina o per materia), i bambini della classe (distinti in maschi e femmine).

In generale i futuri insegnanti si stupiscono della varietà: uno stesso contesto suggerisce situazioni problematiche diverse (prospettive diverse con cui guardare allo stesso contesto) e dalla grandezza dei numeri considerati.

Questo approccio sottolinea la classificazione dei problemi attraverso schemi risolutivi (piuttosto che per strategie di esplorazione della situazione). E' facile per il ricercatore occidentale riconoscere una analisi raffinata nella presentazione dei problemi additivi con variazione. In Cina, ciò che stupisce è che questa metodologia è sistematicamente presente nei libri di testo ufficiali e negli eserciziari con cui gli studenti si preparano alle prove di valutazione, a differenza di quanto avviene in Italia. Si pensi, ad esempio, che nella collana *Matematicaimparo*, pubblicata con la supervisione di C. Pontecorvo, all'addizione e alla sottrazione sono dedicati due volumi separati (Corso, 2008; Tasco, 2008). Per una interessante eccezione, si veda l'articolo di Mellone et al. (2009), nel quale si riportano risultati di un esperimento condotto nella scuola dell'infanzia, seguendo l'approccio di Davydov (1982) coerente con la metodologia cinese dei problemi con variazione. In Cina i problemi con variazione non sono casi di strategie didattiche adottate da singoli insegnanti, ma sono rappresentativi di un complesso sistema storico - culturale. Anche se non è quindi ipotizzabile una trasposizione pura e semplice della metodologia al caso italiano, una maggiore flessibilità nella individuazione di situazioni problematiche a partire dallo stesso contesto potrebbe essere utile agli insegnanti italiani e agli autori dei libri di testo.

Bibliografia

Bagni G. (2009), Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni: analisi semiotica e prospettiva ermeneutica, *Progetto Alice*, 28, 5–32.

Bartolini Bussi M. G. (2008), Perché i bambini cinesi sono più bravi in matematica? Alla ricerca di una risposta nei loro libri di

testo di prima e seconda elementare, in *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2007-2008*, Torino: Kim Williams Books.

Bartolini Bussi M. G. (in stampa a). Valori, tradizioni, modelli culturali: tracce nei curricoli di matematica (prima parte), *Pedagogia più Didattica*.

Bartolini Bussi M. G. (in stampa b). Valori, tradizioni, modelli culturali: tracce nei curricoli di matematica (seconda parte), *Pedagogia più Didattica*.

Cai J. & Nie B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice, *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 39, pp. 459-473.

Carpenter T. P., Moser J. M. & Romberg T. A. (1982), *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (3), 179-202.

Chini Artusi L.(a cura di) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna: Zanichelli.

CNP, China National Presentation at ICME-11 (2008), *Mathematics Education in China: Tradition and Reality*, ICME-11 Chinese Delegation.

Corso G. (2008), *MATEMATICA IMPARO 4. Tutti al lavoro con Lilli: l'addizione*. Trento: Erickson.

Davydov, V. V. (1982), the psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operation in children, in T. P. Carpenter et al. (eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*, 224-238, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fan L. e Zhu Y. (2004), How Have Chinese Students Performed in Mathematics? A Perspective from Large-Scale International comparison, in L. Fan L., N. Y. Wong, J. Cai J. e S. Li (eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from Insiders*, pp. 3-26. Singapore: World Scientific.

- Fan L., Wong N.Y., Cai J. e Li S. (2004). *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from Insiders*, Singapore: World Scientific.
- Leung, F.K.S., Graf, K.-D., Lopez-Real, F.J. (Eds.) (2006). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West*, Springer.
- Ma L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Lawrence Erlbaum.
- Mellone M., Iannece D. & Tortora R. (2009), Counting vs. Measuring: reflection on number roots between epistemology and neuroscience, in corso di stampa su *Atti PME 33*.
- MOE, Ministry of Education (2004) , traduzione inglese di *The mathematics curricula of nine years compulsory education* (People's Educational Press, 1998), Macau University Kwok-cheung Cheung and Normal University Shanghai Whang.
- SHU XUE (1996) (*Matematica*), ISBN 7-200-02567-4
- SHU XUE (2006) (*Matematica*), Beijing Normal University Press, ISBN 978-7-303-04821-2..
- Siu, M. K. (2004). Official curriculum in mathematics in ancient China: how did candidates study for the examination? In L. Fan L., N. Y. Wong, J. Cai J. e S. Li (eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from Insiders*, pp. 157-185. Singapore: World Scientific.
- Spagnolo F. (1986), Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol.9, n.8, sez. B, pp.81-90.
- Sun X. & Wong N.Y. (2005), The Origin of Bianshi Problems: A Cultural Background Perspective on the Chinese Mathematics Teaching Practice, ICMI-EARCOME 3, disponibile su <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM2.htm>.
- Tasco P. (2008), *MATEMATICA IMPARO 5. Tutti al lavoro con Lilli: la sottrazione*. Trento: Erickson.

Vergnaud, G., (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: P. Lang.

Vergnaud, G. (1982), Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 31- 41.

Xie & Carspecken (2008), *Philosophy, Learning and the Mathematics Curriculum: Dialectical Materialism and Pragmatism related to chinese and U.S. Mathematics Curriculum*, Rotterdam: SensePublisher.