Dalla geometria euclidea
alla geometrie non euclidee

Il prof. Brigaglia invita allievi e soprattutto i docenti presenti ad eventuali interventi in relazione alle opportune metodologie didattiche che potrebbero essere applicate per la materia del dibattito.

« Il periodo che verrà trattato va, in via orientativa, dal 1840 al 1900.

Occorre subito dire che una data importante é il 1899, in cui Hilbert pubblica i suoi "Fondamenti di geometria moderna". Questa pubblicazione é un testo base su cui si fonderanno le caratteristiche della geometria assiomatica moderna: il libro di Hilbert chiude un'epoca ed é considerato, dal punto di vista dell'arte dello scrittore, il testo che porta al massimo rigore i concetti della geometria euclidea e, negli anni che seguono il 1899, la lenta nascita dei concetti della geometria moderna.

Occorre a questo punto avere le idee chiare. Il concetto euclideo di geometria subisce le prime crisi intorno al 1840. Abbiamo quindi una geometria coerente prima del 1840 e una dopo il 1899. Noi parleremo del periodo di mezzo e, per poter meglio valutare questo periodo interlocutorio, é necessario che il concetto di "geometria", da Euclide al 1840 e dopo il 1899, sia ben chiaro.

Non si tratta di formule o di tecniche, si tratta di "concetti", cioè del modo come é concepita l'idea di "geometria", prima e dopo; sono due concetti profondamente diversi.

Vediamo per prima la geometria euclidea. Temo che la geometria classica euclidea sia oggi poco valutata e studiata, come si dice sia "passata di moda" . Questa geometria si fonda su una serie di assiomi e postulati da cui scaturiscono i teoremi di cui il più famoso é il teorema di Pitagora. Noi non sappiamo quale fosse il concetto che Euclide avesse della geometria, sappiamo che per il periodo storico in cui vanno affrontati i concetti della geometria euclidea, periodo che possiamo datare dal 1500 al 1800, questa geometria viene vista come la descrizione dello spazio esistente.

I legami con la fisica classica sono fortissimi, infatti la descrizione dello spazio é la descrizione della realtà per gli studiosi di quell'epoca.

I due concetti di geometria e fisica hanno tuttavia genesi e natura diverse. La fisica moderna da

Galileo a Newton si basa su osservazioni sperimentali, lontana da concetti intuitivi; si pensi ad esempio che prima di Newton si riteneva che un corpo in movimento, senza interventi esterni, dopo un certo tempo si fermasse, quindi la fisica é fortemente basata sull'osservazione sperimentale. La geometria e la matematica si basano invece su dati indiscutibili, su assiomi evidenti, nati da intuizioni e che non hanno alcun bisogno di verifiche sperimentali.

Ad esempio l'assioma che per due punti passa una ed una sola retta é un fatto evidente, che magari può essere valutato con filosofie diverse ma che é assoluto nel suo concetto geometrico.

Questa la differenza. Il teorema geometrico é subito valido e lo sarà sempre; la legge fisica può subire delle variazioni, proprio perché una nuova esperienza può correggere o smentire le primitive valutazioni.

La geometria euclidea ha quindi tre caratteristiche fondamentali:

1> si occupa di una realtà che é lo spazio che ci circonda;

2> i suoi assiomi sono evidenti e indiscutibili;

3> i suoi oggetti sono idealizzazioni di oggetti reali.

Per quanto riguarda quest'ultima caratteristica, il punto o la retta geometrica non hanno estensione, ma noi li dobbiamo necessariamente rappresentare graficamente con una dimensione sia pur piccola; quindi, pur descrivendo il mondo reale, é basata su idealizzazioni. Ad esempio, trasponendo il teorema di Pitagora ad un campo a forma di triangolo rettangolo, le misure ideali dateci dalla geometria divengono, per quanto raffinate, comunque approssimate; ciò non toglie la nostra certezza che le misure ideali dei cateti ed dell'ipotenusa devono comunque soddisfare il teorema.

Dunque la geometria che va da Euclide al 1840 é una geometria articolata e fortemente dimostrativa, molto più che la fisica. Le sue verità stanno negli assiomi che sono indiscutibili ed evidenti, si basa quindi sulla deduzione, sul ragionamento; la fisica invece, basandosi sull'esperienza, cerca sempre la verifica della verità nell'esperienza, quindi é continuamente in confronto con la realtà attraverso metodi sempre più raffinati.

La geometria euclidea quindi essendo "matematicamente dimostrabile" é una verità assoluta.

Le geometrie non euclidee si basano sempre sul rapporto evidenza-dimostrazione, ma il semplice fatto che si parli di "geometrie"

(anziché “geometria”) ci segnala che c’è qualcosa di diverso. Sul fatto dimostrativo non ci sono modifiche; le differenze nascono dall’utilizzazione dei cosiddetti “assiomi nascosti”, cioè avere utilizzato dei fatti intuitivi che non erano citati esplicitamente fra gli assiomi.
Facciamo un esempio: dato un segmento AB, costruire il triangolo equilatero di lato pari ad AB. La geometria euclidea ci dice di far centro su A e su B e, con apertura di compasso AB, si tracciano due archi che incontrandosi nel punto C formano il triangolo equilatero. Chi ci dice che i due archi si incontrano? Più in generale, chi ci dice che una retta passando da un semipiano all’altro si interseca con la retta che divide i semipiani? Dire che si incontrano per forza é un’ipotesi forte sulla struttura del nostro spazio. Più in generale il problema della « sistemazione del continuo » é stato uno dei punti più discussi dell’ottocento. Nella geometria euclidea questa parte era affidato all’intuizione. Tuttavia il metodo, il “trucco” per superare l’ostacolo é semplice: aggiungo un altro assioma che Euclide non aveva detto esplicitamente, “i punti si incontrano” , e posso andare avanti.
Non viene cambiata la struttura della geometria, anzi il suo edificio diventa più solido.
In fisica questo non avviene; basti pensare alle velocità che in fisica classica non hanno limite mentre in fisica relativistica non possono superare la velocità della luce.
Quindi, tornando alle geometrie non euclidee, possiamo dire che la loro struttura non muta rispetto alla geometria classica: basta aggiungere nuovi assiomi e tutto resta valido. Ma cambia qualcosa: o gli assiomi non sono più evidenti o le dimostrazioni non sono tali. Per quanto riguarda le dimostrazioni, non c’è stata crisi, anzi oggi, anche con l’aiuto dei mezzi informatici, la validità delle dimostrazioni si é rafforzata.
Restano quindi gli assiomi, che sono arbitrari; siamo infatti noi che li stabiliamo, e che, come unico limite, abbiano la contraddittorietà fra loro. Dagli assiomi scaturisce il teorema e, per la moderna concezione della matematica, non importa che quello che dimostriamo sia vero, importa che sia dimostrabile, che ci sia una relazione fra quello che abbiamo supposto e quello che dimostriamo. C’é una frase emblematica di Russel che recita: «La matematica é quella scienza che non sa di cosa parla e non sa se quello che dice é vero.»

Allora a cosa serve questo gioco?
Serve a vedere se siamo capaci di risolvere un problema o se il problema é irresolubile.
Facciamo un esempio: nel gioco degli scacchi noi conosciamo le regole; abbiamo una configurazione di pezzi sulla scacchiera e potremmo chiederci se il bianco può o non può vincere, ad esempio in tre mosse. Le regole non sono un problema; esistono, sono quelle e basta, e, se non mi va, cambio gioco o invento un altro tipo di scacchi con altro tipo di mosse. Il problema sta nella risoluzione (o nella certezza della non risoluzione) della vittoria del bianco in tre mosse.
La matematica é quindi una specie di gioco di cui conosciamo le regole (gli assiomi), e che serve a risolvere determinati problemi. Ed oggi la matematica funziona più che mai perché viene applicata a problemi concreti come l'economia, specie negli investimenti o nei viaggi spaziali; però essa si é fatta sempre meno intuitiva ed immediata e le sue verità risultano sempre meno evidenti e sempre più nascoste.

Vorrei adesso proporre dei semplici esempi sul concetto di inversione o di "trasformazione geometrica"; é un concetto sul quale si é parecchio discusso nell'800 e che veniva spesso usato come quesito nei concorsi.
Consideriamo una circonferenza γ di centro O e raggio r da cui esce una semiretta, consideriamo un punto P sulla semiretta all'interno della circonferenza e stabiliamo il punto P' tale che

$$OP \times OP' = r^2$$

Questa definizione trasforma un punto interno alla circonferenza in un punto esterno e viceversa:

$$f(P) = P'$$

$$f(P') = P$$

E' valida per ogni punto del piano ed é definita in ogni punto tranne che per

$$f(O)$$

,a cui corrisponderebbe il punto all'infinito. Tuttavia, con considerazioni intuitive, anche di carattere topologico, si può affermare che

f(O) = inf.

f(inf.) = O

scambiando lo zero con l'infinito. Facciamo qualche considerazione su questa trasformazione: ad ogni punto dello spazio esterno alla circonferenza corrisponde un punto interno alla circonferenza; ossia questa trasformazione traduce uno spazio infinito in uno finito, riuscendo a "comprimere" una quantità infinita in una finita. Ci sono tante altre inversioni applicabili allo stesso schema che trasformano circonferenze, rette o punti (anche fra entità geometriche fra finito e infinito).
Un'altro tipo di trasformazione che si presta al nostro scopo é quello delle figure che seguono, in cui le circonferenze A e B (fig. 2) che passano dall'origine si trasformano nelle rette a e b (fig. 3) e la serie delle circonferenze C, D, E, F, . . . (fig. 2) si trasformano nelle circonferenze c, d, e, f, . . . (fig. 3).
Trovare geometricamente o matematicamente le circonferenze della fig. 2 é molto più complicato che trovare le circonferenze della fig. 3.

É importante fare anche un'altra considerazione: queste trasformazioni alterano il grado delle equazioni; perché, ad esempio, una trasformazione fra una retta e una circonferenza cambia un ente geometrico di primo grado in un ente geometrico di secondo grado.
E, siccome lavorare con un'equazione di primo grado é più facile che lavorare con un'equazione di secondo grado, si intuisce come, giocando con le trasformazioni, i problemi si possono semplificare, a volte in modo imprevedibile, divenendo facili. Le prime applicazioni risalgono al 1827 e il pioniere di queste trasformazioni fu Moebius.

Il messaggio che si vuole dare é che gran parte della matematica moderna sta in questo: cercare di trasformare il problema in modo da farlo diventare facile, visto che tutto è relativo all'occhio dell'osservatore e niente è più evidente. Anche se le condizioni di partenza sono molto complicate, comprendendo quali sono le condizioni del problema, si può trasformare lo stesso in un problema più facile; perché le operazioni e le condizioni a cui noi vincoliamo una entità geometrica si trasformano esse stesse nell'entità geometrica corrispondente. Quindi il calcolo viene sostituito dal ragionamento e da come un certo tipo di ragionamento possa rendere semplici i calcoli.

Bisogna che un po' tutti riflettiamo su questo fatto: i due aspetti (l'uno complicato e l'altro semplificato) sono aspetti dello stesso problema e lo risolvono entrambi (l'uno in maniera complicata e l'altro in maniera semplificata).

L'idea di trasformazione diventa l'idea essenziale della geometria dell'800; una frase emblematica é quella di Abel che diceva "La matematica é l'arte di fare meno calcoli possibili".