

IVème Ecole d'été de didactique des mathématiques

LA RELATION DIDACTIQUE : LE MILIEU

Guy Brousseau (I.R.E.M. de Bordeaux)

1- LES CONCEPTS FONDAMENTAUX

1. La situation didactique

1.2. Nous appellerons « situation didactique » une SITUATION où l'on peut repérer UN PROJET SOCIAL DE FAIRE APPROPRIER PAR UN ELEVE UN SAVOIR CONSTITUE OU EN VOIE DE CONSTITUTION

Dans une approche systémique nous sommes donc conduits à identifier, et si possible définir, un système composé :

- d'un sous-système « EDUCATIF » (ou son représentant) qui est porteur de l'intention d'enseigner et d'une certaine connaissance du savoir désigné
- d'un sous-système « ENSEIGNE » susceptible de s'approprier ce savoir.
- Ces deux sous-systèmes sont liés par un ensemble de relations et de contraintes réciproques : la SITUATION DIDACTIQUE proprement dite.

La situation didactique est formée seulement de celles de ces relations qui sont spécifiques du « SAVOIR » visé et bien entendu de celles qui permettent de les définir. Il faut entendre par spécifiques les caractères et relations de ces deux sous-systèmes qui changeraient si le savoir visé changeait ou qui, étant changés, modifieraient le savoir acquis.

1.3. Modélisation en termes de jeux. Les relations et les contraintes liant le système éducatif et le système enseigné sont identifiées et organisées sous forme de jeux. Il faudra donc y distinguer le mode de détermination du système qui a une décision à prendre (le trait), un ensemble d'états permis, les états initiaux et les états terminaux, une application qui détermine l'ensemble des états permis dont le choix est offert au [page 55] joueur qui a le trait, un enjeu et les fonctions de préférences qui lui sont associées...

LA SITUATION DIDACTIQUE EST UN JEU A (au moins) DEUX PERSONNES

Ce point de vue est assez différent du point de vue habituel qui consiste à modéliser la situation didactique sous forme d'une situation de communication, l'émetteur étant le maître, le récepteur étant l'élève et le message étant la connaissance.

Il est d'abord plus général car on peut considérer la communication comme une sorte particulière de jeu à deux personnes.

Mais il permet surtout d'être plus ambitieux car il implique un très important changement de point de vue au sujet du savoir :

Dans le schéma de la communication, le savoir doit être accepté comme un texte déterminé par la science et la culture, texte auquel le passé du récepteur – ou plutôt l'appropriation des textes passés – est supposé pouvoir donner un sens suffisant. Ce sens est alors fourni par la science ou la culture elle-même. Le travail de l'enseignant tend à apparaître comme un travail sur le texte scientifique, par conséquent de même nature et obéissant aux mêmes lois que le travail culturel et scientifique, simplement accompagné d'un travail pédagogique et médiatique relativement formel.

Au contraire, la définition plus générale sous forme de jeu laisse ouverte, et même appelle une interprétation plus large du savoir : quelle est sa fonction dans la relation maître-élève ? à quoi sert-il pour l'élève ? Et pour le maître ? De quel genre de contrôles réciproques dépend-il et lesquels suscite-t-il aussi ? Comment les acquisitions dépendent-elles de ces fonctions ?

1.4. Théorisation. Il semble clair que ces questions sont de celle qu'une théorie des rapports d'enseignement doit traiter.

Les types de jeux qui lient le professeur et l'élève est un des buts des recherches en didactique de sorte que ce terme de JEU aura provisoirement un sens métaphorique, sauf dans les cas où un modèle réel sera proposé. Mais cette métaphore nous invitera à une représentation plus précise des anticipations, des adaptations, de certaines finalités, de certains choix [page 56] qui président aux décisions des deux sous-systèmes.

Il doit être clair aussi qu'il ne s'agit pas ici d'entériner, en les formalisant et éventuellement en les rationalisant, les conceptions de la société ou des professeurs à propos de l'enseignement. Les modèles systémiques que nous étudions ne sont pas non plus des « modèles théoriques idéaux à imiter ou à réaliser ». Ce point très important est discuté dans Brousseau (1985b) dans la perspective des travaux de Crozier et Friedberg ().

Pour une définition plus précise du genre des jeux réellement utilisés pour cette approche, et en particulier pour les reformulations du SENS qu'elle permet, nous renvoyons à Brousseau () et à Ratsimba-Rajohn ().

2- Le contrat didactique

2.1. En réalité le jeu du maître et de l'élève, dès lors qu'il est spécifique du savoir, ne peut être défini a priori, puisque l'élève ne peut en connaître que les règles non spécifiques lorsqu'il entreprend un nouvel apprentissage. Le jeu s'établit, change, se rompt et se renoue au fur à mesure des acquisitions, de l'évolution des deux protagonistes et de l'histoire qu'ils produisent.

Délibérément, nous admettons donc que la modélisation des relations didactiques ne se présentera pas sous une forme unique, universelle et figée dans le temps, mais au contraire sous forme d'une négociation de jeux locaux :

D'une part, les rapports de l'enseignant et de l'enseigné obéissent à des règles mais celles-ci ne sont pas intangibles. Nous appellerons « CONTRAT DIDACTIQUE » cette négociation.

D'autre part, cette négociation produit une sorte de jeu, dont les règles provisoirement stables, permettent aux protagonistes et notamment à l'élève de prendre des décisions dans une certaine sécurité, nécessaire pour lui assurer l'indépendance caractéristique de l'appropriation.

Des relations de pouvoir de chacun des protagonistes sur l'autre doivent nécessairement s'établir et s'accepter à titre de rétroactions. Ce pouvoir doit être fondamentalement limité et doit évoluer pour permettre le fonctionnement du système enseigné.

2.2 Utilisant le cadre de la COMPLEMENTARITE, l'étude théorique du contrat didactique a mis en évidence [page 57] ses caractères paradoxaux et les dialectiques qu'ils induisent (Brousseau 1984, Brousseau et Otte 1985). Mais les contraintes du contrat didactique ont des effets observables aussi bien dans les micro-phénomènes comme les situations de classe (Brousseau) que dans des macro-phénomènes, comme par exemple l'effet de « glissement méta-didactique », les effets « Jourdain » ou les autres effets qui ont marqué la réforme des mathématiques modernes.

Inversement pourtant, les exigences du contrat didactique sont un des principaux moteurs de la modification du savoir qui accompagne son enseignement. La transformation du savoir en objet de savoir, puis en savoir à enseigner, puis en objet d'enseignement, implique tout un processus de décontextualisation, de dépersonnalisation (par les producteurs du savoir), puis de recontextualisation et de repersonnalisation (par le professeur) puis enfin de redécontextualisation et de redépersonnalisation (par le professeur et par l'élève). Ce processus aboutit à une TRANSPOSITION DIDACTIQUE du savoir (Veyret (), Chevallard (), (), ()).

La notion de contrat didactique et de situation permet l'analyse et l'explication précise de certains de ces phénomènes différents pour chaque secteur de connaissance.

Toutefois, il apparaît qu'il est indispensable, pour étudier le contrat didactique, de préciser d'abord le paradigme des situations didactiques relatives à un même savoir (à l'intérieur duquel il se détermine). C'est pourquoi nous commencerons par leur étude.

2- Le sous-système « MILIEU »

1- Nécessité du milieu

1.1 Dans le cas général, la situation didactique ne peut être modélisée comme une simple communication et ni comme une simple interaction sociale. Il est nécessaire de faire intervenir un autre système.

Cette nécessité découle d'une des clauses du contrat didactique lui-même qui implique le projet de son extinction : il est sous-entendu, dès le début de la relation didactique, qu'un moment doit arriver où elle se rompra. A ce moment, le système enseigné sera supposé pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques.

[page 58] Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de LIRE ses relations avec ces systèmes comme de nouvelles SITUATIONS, et par ce moyen, de leur apporter une réponse appropriée. Nous appellerons A-DIDACTIQUES ces situations et MILIEU le sous-système antagoniste du système enseigné ou plutôt précédemment enseigné.

Cette lecture peut se faire dans la réalité, de différentes manières, mais la cohérence exige que nous al modélisons sous forme de « jeux » reconnus semblables à ceux que l'élève connaît. Le système enseigné peut alors prendre des décisions soutenues par ses connaissances, et de plus établir entre les deux des relations de signification. Il peut aussi lire ces situations adidactiques sous forme de JEUX nouveaux appelant de nouvelles réponses. Il peut enfin y voir l'occasion de se poser des questions nouvelles et, éventuellement, encore sans réponse pour lui.

1.2 Inversement, la situation didactique doit comprendre, réellement ou simplement évoquée une représentation de ces rapports futurs. Elle doit donc inclure et mettre en scène un autre système, distinct du système éducatif et qui représentera « le milieu ». Au fur et à mesure des progrès des élèves, cette représentation culturelle et didactique du milieu sera supposée se rapprocher de « la réalité » et les relations du sujet avec ce milieu s'appauvrir en intentions didactiques.

2- Conséquences

2.1 Il en résulte plusieurs conséquences :

- la relation didactique s'appuie toujours sur des hypothèses épistémologiques, conscientes ou non, explicites ou non et cohérentes ou non.
- l'analyse des relations didactiques implique la définition ou la reconnaissance de ces jeux « fondamentaux » et adidactiques, mettant en présence un milieu et un système, ces jeux étant tels que le savoir – tel savoir précis – apparaîtra comme le moyen de produire des stratégies gagnantes. Il faut pour cela disposer d'une forme particulière et très concrète de connaissances épistémologiques.
- A un moment donné de l'enseignement, l'élève se trouve en gagé par son contrat didactique dans un rapport plus ou moins réel avec un milieu organisé (au moins en partie) par le système éducatif. Ce rapport a été organisé afin de justifier la production PERTINENTE par l'élève de comportements qui sont les indices de l'appropriation du savoir. C'est-à-dire que la réponse de [page 59] l'élève ne doit pas être motivée par des obligations liées au contrat didactique mais par des nécessités adidactiques de ses relations avec le milieu.
- Les relations de l'élève avec le milieu peuvent être conçues (en particulier par le système éducatif) comme jouant des rôles très différents :

2.2 ♦ Par exemple la situation adidactique peut être incapable de provoquer aucun apprentissage, toute la vertu didactique étant contenue dans le contrat didactique.

- ♦ à l'opposé, les effets réciproques du milieu et de l'élève peuvent être attendus comme suffisants à eux seuls pour provoquer les adaptations et les apprentissages escomptés (nous parlerons alors de situation d'apprentissage au sens strict). Le système éducatif se borne alors à choisir, à organiser et maintenir des rapports assurant la genèse de la connaissance du sujet. Le renvoi permanent de l'élève à l'interrogation du milieu ne lui laisse pas longtemps ignorer que le contrat pédagogique est vidé de tout contenu didactique.

- ◆ le cas général est intermédiaire évidemment et conjugue un contrat didactique et une situation adidactique qui peut être aussi une situation d'apprentissage par adaptation.

3- Les structurations du milieu

3.1. Le problème ou l'exercice classiques.

Un énoncé classique comprend deux parties : une partie informative et une question.

i) la partie informative évoque des éléments liés par des relations explicites et qui peuvent être des objets ou des personnes mis en scène dans une histoire (avec un déroulement temporel) ou un système (défini à un instant donné, mais susceptible d'évolution temporelle). Mais cette histoire ou ce système sont considérés comme déterminés, uniques, indépendants de la volonté, de l'action ou des conceptions de l'élève. Ils fonctionnent ainsi comme une réalité objective de référence à laquelle l'élève doit adhérer mais devant laquelle il est placé en spectateur dont le point de vue est fixé à l'avance. Cette réalité est évidemment une fiction didactique reconnue comme telle par chacun des protagonistes.

ii) la question s'adresse à une personne extérieure à la «réalité» définie en i) et à laquelle l'élève est invité à s'identifier. Cette personne est supposée [page 60] capable de prévoir l'évolution du système, d'en envisager des transformations, et de façon générale, d'obtenir des informations supplémentaires sur lui, grâce à ses propres représentations. Elle n'est pas autorisée à agir, ni à supposer qu'elle peut agir réellement sur lui.

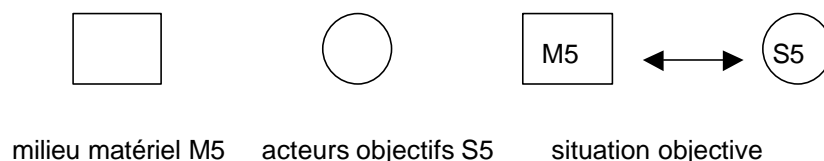
De plus, la réponse à la question posée est conçue comme devant s'imposer, dans les conditions i) ainsi définies, à quiconque, presque indépendamment de la personne qui résout le problème et indépendamment de tout projet didactique. La solution fonctionne donc comme connaissance objective et adidactique de la réalité objective.

3.2 Les niveaux du milieu.

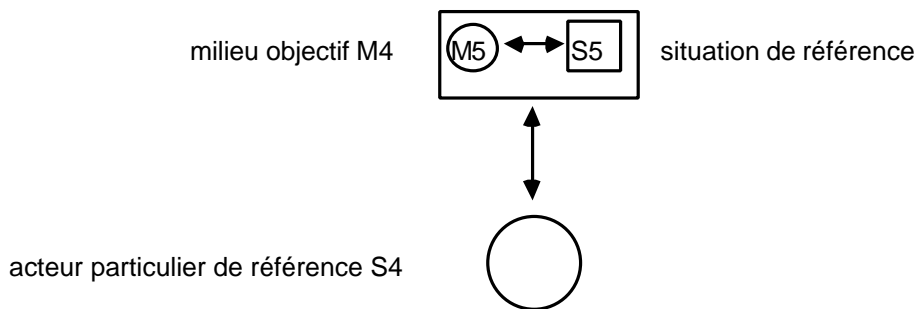
Les situations didactiques réelles font jouer des relations plus complexes, nécessaires pour ménager des possibilités d'évolution et de fonctionnement de la connaissance. Les énoncés classiques apparaissent dans ce contexte comme des contractions, des images conventionnellement simplifiées de situations plus générales. Ils donnent du sens à la connaissance (en la contextualisant et en la personnalisant) non pas par référence avec la «réalité» objective mais par référence à certains jeux particuliers avec la réalité objective.

Dans ces situations, en usage dans les relations didactiques, nous pouvons distinguer au moins quatre personnes, quatre sujets distincts auxquels l'élève peut s'identifier et donc cinq milieux avec lesquels il peut interagir selon des modes différents. Ces milieux étant emboîtés, nous les décrirons comme des niveaux du «milieu» de l'élève.

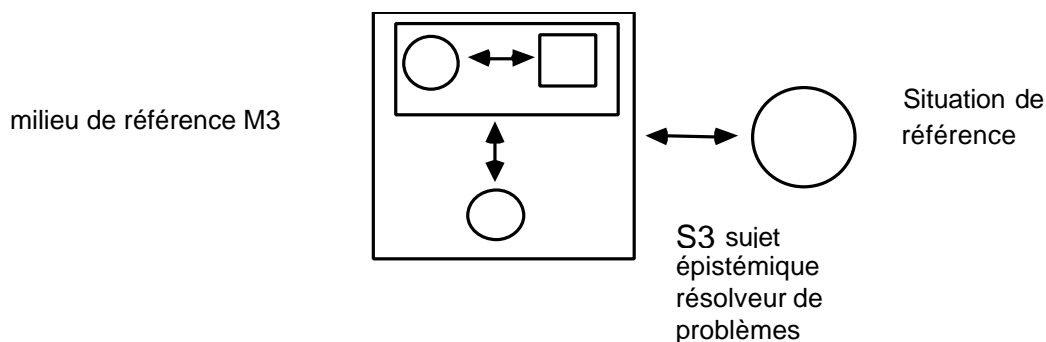
i) Le milieu matériel. Au niveau le plus bas, les informations données à l'élève mettent en scène des acteurs «objectifs» (S5) confrontés à un milieu «objectif» (M5). M5 est le milieu matériel que rencontrent ces sujets S5 et sur lequel ils agissent.



ii) Le milieu objectif Le milieu matériel M5 et les acteurs S5 peuvent être proposés comme partenaires à l'élève lui-même qui les «connaît» et interagit avec eux. On reconnaît ici une situation d'action avec des [page 61] partenaires et du matériel réel. L'élève se trouve alors devant un «milieu objectif» (M4) composé du couple (M5 ; S5), en position de sujet connaissant et agissant S4. Bien sûr, il peut, non seulement imaginer et se représenter S5, mais aussi s'identifier à lui par la pensée et comprendre son point de vue. Pour un observateur extérieur d'une situation d'action réelle, il n'y a pas de différence entre un sujet S5 et un sujet S4 mais pour l'acteur lui-même, il y a la différence qui sépare soi et les autres.



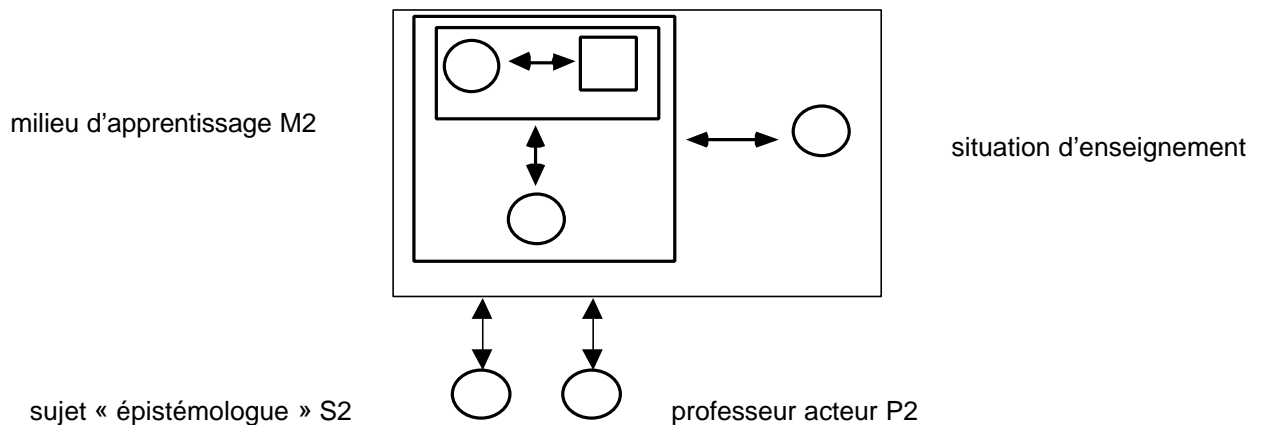
iii) Le milieu de référence Une situation d'action peut devenir, par une intériorisation et/ou par le jeu d'un rapport social particulier, l'objet des préoccupations d'un sujet S3 pour qui elle forme alors un milieu M3 que nous appellerons « milieu de référence ». Un élève qui s'imagine agissant sur M4 se trouve dans la position S3. Les rapports de S4 et de S3 avec leurs milieux respectifs sont radicalement différents. Les premiers sont des rapports d'action, les seconds, plus réflexifs, se rencontrent dans des situations de formulation ou de preuve. Un élève peut se trouver dans une position S3 sans que la position S4 ait été réalisée ni même soit envisagée ; Dans ce cas, le sujet S3 observe M4 sans imaginer entrer en interaction avec lui ce qui peut limiter sensiblement ses possibilités de raisonnement.



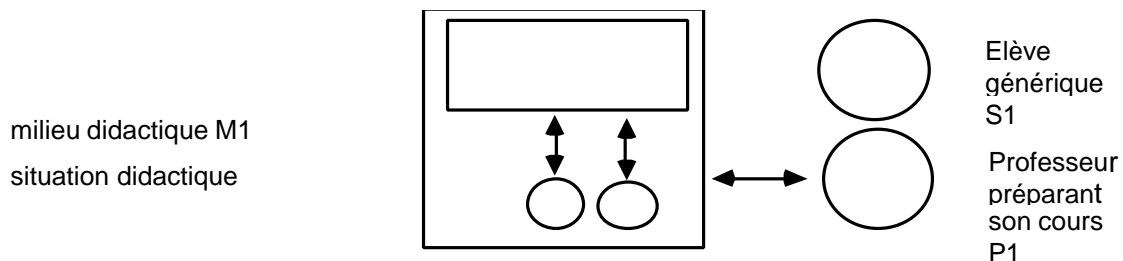
Situation d'apprentissage a-didactique

iv) Situation d'apprentissage a-didactique Ces rapports entre un sujet S3 réfléchissant à une situation de référence, avec, peut-être, les ingrédients additionnels propres aux rapports sociaux dont nous parlons plus haut, sont du type de ceux qu'un professeur doit établir entre un élève réel et un problème. Pour lui, ces rapports constituent une situation d'apprentissage ou un exercice, dont il se sert pour son [page 62] projet d'enseignement. Sa propre position est la position P2, et le milieu dont il s'occupe et avec lequel il interagit est le milieu de l'apprentissage a-didactique M2 formé de S3 de M3 (et de compléments M'3). Les relations du professeur P2 avec M2 sont une partie des relations constitutives de la situation didactique.

Mais l'élève est, lui aussi, invité par moments à considérer la situation d'apprentissage et les comportements qu'elle a suscités de sa part, ne serait-ce que lorsque le professeur les corrige et les commente, ou encore au cours de l'institutionnalisation des connaissances. A ce moment, l'élève se place dans une position nouvelle S2 face à un milieu M2 qui est celui de son apprentissage. C'est aussi la position qu'il prendrait en l'absence de tout professeur réel (position autodidactique). Il réfléchit alors à son apprentissage et aux fonctions, pour lui-même, de la connaissance.

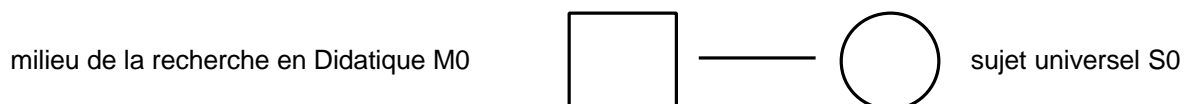


v) La situation didactique Le professeur réfléchissant à son activité d'enseignement ou la préparant, envisage ses propres rapports avec ses élèves : il se place ainsi dans une position P1, réflexive par rapport à la situation précédente qui se constitue alors pour lui, en un nouveau milieu M1 : le milieu didactique, ou situation didactique au sens du professeur. Cette position est similaire pour le maître à la position S3 pour l'élève. Remarquons que l'élève peut lui aussi se placer dans cette position (S1) pour observer, juger ou tirer parti de façon consciente de la situation didactique.



Situation d'analyse de la didactique

vi) La situation d'analyse de la didactique Les rapports entre S1 et M1 peuvent évidemment être pris [page 63] comme objets d'étude, par les acteurs de la relation didactique, comme par un observateur extérieur mis alors en position S0. La situation ainsi créée étant une situation d'analyse de la didactique.



La répétition du processus réflexif nous ferait sortir du champ de l'étude. De toute manière, le but de cette classification en niveaux de milieu et de situations est de permettre la prévision des relations sociales – des jeux – qui correspondent aux différents régimes du fonctionnement de la connaissance dans les différents modes d'apprentissages utilisables en situation scolaire. Remarquons, qu'à chaque niveau repéré ici, peuvent s'introduire des éléments extérieurs avec des interactions spécifiques : le niveau Mn n'est pas nécessairement réduit au seul couple (Mn+1, Sn+1).

Cette analyse est incomplète, bien sûr : l'élève et le professeur ne sont pas isolés du milieu scientifique et culturel (de la noosphère) et du milieu social et politique (les parents en particuliers). De plus, son utilité repose sur l'hypothèse que les niveaux supérieurs du milieu fonctionnent de façon assez indépendante des niveaux inférieurs, hypothèse qui ne peut se réaliser, au mieux, que dans des conditions favorables.

3.3. Les types d'interactions et les types de situations.

L'alternative action/réflexion n'est pas la seule composante déterminant le type de situation. Il faut bien évidemment la croiser avec les modèles d'interactions sociales fondamentales, envisageables (action pure, formulation, validation et institutionnalisation) qui mettent en scène les acteurs de la

connaissance et motivent ou expliquent leur changement de positions caractéristiques et sur lesquels nous ne reviendrons pas ici.

Ces types d'interaction ne sont pas tous compatibles avec tous les niveaux de milieu mais ils permettent de donner une description assez fine, en première approche, des différentes formes de fonctionnement de la connaissance et du savoir dans les relations didactiques.

i) L'acteur générique S5. Il effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, répertoriées et qui sont supposées connues de l'élève puisqu'elles doivent lui [page 64] être communiquées. Il s'agit donc de procédures, d'algorithmes. Pour les mêmes raisons, les relations que vérifie M5 sont explicites, de même que celles que S5 entretient avec M5, ce ne sont pratiquement jamais des situations de communication ou de preuve, mais cela pourrait l'être.

ii) L'acteur particulier S4. Il agit mais ses opérations ne sont pas nécessairement explicitables et en particulier ses opérations mentales et cognitives. Il communique pour l'action, le plus souvent sans pouvoir créer de moyens sémiologiques nouveaux. Il construit des messages en utilisant les codes connus de ses interlocuteurs sans les modifier sensiblement. toutes les preuves qu'il utilise restent elles aussi implicites.

iii) Le sujet épistémique S3 envisage les actions de S4 (lui-même à l'occasion) soit, pour communiquer des renseignements sur l'action, soit pour débattre de son adéquation. Il peut concevoir une action sur M3 mais mentalement, ce qui suppose au moins une représentation sinon une formulation. Les actions de S4 doivent être à ce niveau, formulables, explicitables et ses opérations cognitives reconnues. S4 étant un acteur particulier, ses activités cognitives ne sont pas nécessairement, repérées culturellement ni même formulables. Les codes de communication peuvent alors faire l'objet d'un travail direct. Les moyens de preuve et les théories peuvent rester implicites.

iv) Le sujet épistémologique S2 prend connaissance des procédés de connaissance et d'apprentissage. Il agit essentiellement en intervenant dans des débats et en communiquant des preuves explicites. Il travaille avec ses pairs ou avec son professeur sur les théories mathématiques qui interviennent aux niveaux supérieurs. Bien sûr, il prend des décisions et agit (au sens de S4) : il décide de refaire un exercice, relit un texte...

4- Le fonctionnement du milieu

4.1. Complémentarité interniveaux

Les différents niveaux du milieu s'appuient les uns sur les autres lors du traitement cognitif d'un concept mathématique. Cet appui se manifeste par des relations de nécessité structurelle et de complémentarité et par des relations temporelles de succession et de production : une situation produit les éléments de la suivante. Au cours de la genèse ou de l'apprentissage, ces situations s'organisent en processus. Les relations interniveaux sont les instruments de processus tels que l'obsolescence des connaissances ou celle des situations didactiques ou encore tels que la transposition didactique (en tant que [page 65] processus).

4.2 La dialectique objet-outil

Leur étude sort du cadre de ce cours, mais à l'occasion des exemples qui suivent nous pouvons montrer un des processus les plus étroitement liés à ces types de situation et à la signification des concepts mathématiques : la dialectique objet-outil décrite par R. Douady (). Cette dialectique conjugue les deux directions opposées de notre classification.

L'apprentissage de la division est un bon exemple pour mettre en évidence tous ces phénomènes. Dans un temps relativement bref, l'élève est conduit à transformer en objets de savoir des activités qui se déroulent à des niveaux de milieu différents :

i) la division moyen de partage L'élève doit d'abord considérer des actions, comme par exemple des partages, qui sont supposés se dérouler dans les milieux M4 ou M5 ; Quelqu'un partage une orange ou un héritage. Ces actions, qu'il pourrait être amené à effectuer ou à concevoir comme accomplies par d'autres, se présentent dans une certaine catégorie de problèmes comme le guide des propres calculs ou des raisonnements de l'élève qui doit essentiellement, grâce à eux, anticiper le résultat de l'action réelle.

Dans les énoncés classiques, la plupart du temps, ce partage n'est qu'évoqué et le milieu M4 se confond alors avec M3. Le partage est une activité concevable par des élèves assez jeunes ; ils peuvent en concevoir le résultat sans qu'il leur soit nécessaire de procéder matériellement dès le cours moyen première année. Aussi pour éviter d'avoir à installer l'élève dans l'inconfortable position S4, le système éducatif retarde-t-il (aujourd'hui, en France) jusque là l'étude de ces problèmes, afin qu'ils puissent être résolus directement par une division (sans manipulations, théoriquement). Dans ces conditions, un partage n'est plus l'action réelle d'un S5 ou d'un élève placé en S4 mais une des actions, qui, à ces niveaux, « doivent » correspondre à une division.

Ici, s'observe une inversion fréquente dans les situations d'enseignement : Au lieu de la division soit le signifiant formel et théorique d'une famille de partages jouant le rôle de signifiés, c'est au contraire la division qui est le signifié et le partage n'est qu'un mot, un signifiant en relation métaphorique avec quelques-unes seulement des situations réelles auxquelles il semble référer.

[page 66] En effet, une étude un peu fine des situations correspondant à l'idée de division, fait apparaître l'importance des très nombreuses variables qui produisent des conceptions, des techniques et des représentations de partages totalement différentes: la répartition suivie d'égalisation par exemple et la répartition répétée sont adaptées à des conditions très différentes de celles de l'attribution régulière ou de la distribution ; les techniques ne sont pas aisément concevables comme équivalentes, et certaines représentations sont franchement incompatibles avec d'autres et avec certaines extensions. Le modèle unificateur des partages qui est enseigné, bien que concédant la dissymétrie entre la valeur d'une part et le nombre de part est néanmoins très métaphorique.

D'autres situations ou procédés peuvent conduire à une véritable construction du sens à la condition de faire un sort raisonnable à ces différents niveaux de milieu.

ii) La division-recherche du terme d'un produit. L'élève doit aussi considérer (c'est en général par la suite) ces mêmes actions de partage comme des objets d'étude, des activités achevées, ou les conditions initiales et les résultats peuvent être « observés » en même temps. L'élève est conduit à s'interroger sur certains éléments de ces actions qu'il doit considérer comme pouvant parfois être connus et parfois inconnus.

Il s'agit par exemple de trouver le terme inconnu d'un produit. La situation évoque un produit et la solution ne consiste plus à se laisser guider par une action que les calculs suivant pas à pas : il faut se placer en position S3 et envisager dans M3 des possibilités ou des relations non décrites.

Par exemple, l'élève pourra imaginer une soustraction répétée du terme, connu, au produit, connu lui aussi ; encore faut-il que la nature des quantités, la structure mathématique des nombres en cause et même leur taille permettent cette démarche. Par exemple la division de 0,34 par 0,83 se prête assez mal à cette démarche heuristique. Il pourra aussi envisager d'approcher le résultat par une suite bien conçue de multiplication de plus en plus précises. Dans cette deuxième position l'objet de l'élève (au niveau [S3, M3]) est l'outil de l'action précédente (celle du niveau [S4, M4]).

Mais la solution trouvée au niveau 3 peut très bien être rapidement ramenée au niveau 4 par une sorte d'application de l'objet de la connaissance inverse du mouvement précédent. Une fois imaginés les rapports [page 67] entre le produit dont on ignore un terme, et une certaine division comme soustraction répétée par exemple, celle-ci peut se réinstaller dans le rôle de procédure dans M4 ou même d'algorithme au niveau M5.

iii) La division-homothétie L'outil heuristique de solution des problèmes de niveau 3 que nous venons d'évoquer peut à son tour devenir objet d'études ou de théorisation. Envisager les correspondances entre un terme d'un produit et le produit lui-même comme deux couples réciproques d'applications linéaires (nous avons montré que cette conception, évidemment avec un autre vocabulaire, n'est pas inaccessible pour les élèves de 10 ans) peut-être le résultat d'une objectivation de la démarche précédente et à nouveau de la transformation d'un outil en objet (et cette fois en notion mathématique).

Il est clair que ce nouveau passage ne conduit pas automatiquement l'élève à une position inférieure. Selon que la solution de la recherche du terme inconnu d'une somme aura été ou non plaquée sur S4 et S5 par une institutionnalisation précoce, ou par un conditionnement, et selon le type de situation utilisé pour la construction du concept d'application linéaire, plusieurs cas de figures sont possibles : construction nouvelle ou processus réflexif, enseignement systématique ou apprentissage passif, articulation d'une signification ou simple juxtaposition de connaissances. Dans chaque cas l'élève peut se trouver comme installé, face à l'un des milieux que nous avons décrits, avec des moyens d'action ou des représentations plus ou moins adaptés et efficaces.

La dialectique outil-objet ainsi évoquée est un double processus : l'un est réflexif en ce sens qu'à chaque étape, l'étape précédente est prise comme objet d'étude, l'autre, inverse, consiste en applications, en réalisations, en contextualisations... Ces processus sont limités et ne se produisent pas généralement de façon spontanée au cours d'une simple démarche intellectuelle. Ils s'appuient sur des systèmes de situations a-didactiques spécifiques qui laissent des traces (assez faibles, en fait, mais lisibles) que nous pouvons étudier et utiliser pour l'enseignement.

[page 68] **EXERCICES (pour un atelier futur)**

1. Envisager les situations réelles et les situations intériorisées correspondant aux différentes méthodes et conceptions de la division dans les rationnels et dans les décimaux, à l'aide des différentes structures du milieu.
2. Retrouver dans les classes de complexité psychogénétiques observées par G. Vergnaud sur les structures additives les niveaux de milieu et les traces d'un processus comparable à celui qui est esquissé ci-dessus.
3. Relever les principaux critères que l'on peut tirer de l'analyse des rapports du sujet avec le milieu : par exemple représentation guide de la solution vs sujet de réflexions, activité ou interaction effective vs représentation ou métaphore etc.

Imaginer des observations ou des expériences susceptibles de montrer l'importance ou l'absence d'importance de ces caractères pour la classification des problèmes et des situations d'enseignement et pour les effets qu'ils sont susceptibles d'avoir.

Exemple : la succession dans le temps des apprentissages classiques suit-elle toujours l'ordre réflexif comme pourrait le suggérer le texte ? Y a-t-il des exceptions ? quels pourraient être leurs avantages et leurs inconvénients didactiques ?