

Communication au Congrès d'Agua Calientes, Mexico

Article paru en espagnol dans la revue Mexicaine « Educacion matematica » Vol 12 n°1 Abril 2000 pp 5-39.

Et disponible en Anglais sur le site de Ginger Warfield de l'Université du Washington à Seattle.

Education et Didactique des mathématiques

Guy BROUSSEAU

Professeur émérite, IUFM d'Aquitaine,

Introduction

Au début du XXI^{ème} siècle, nous allons aborder l'éducation mathématique avec des moyens apparemment sans commune mesure avec ceux qui ont été mis en œuvre par le passé. Cependant, il n'est pas sûr que dans ces circonstances nouvelles, nos connaissances et nos pratiques nous assurent aujourd'hui une meilleure régulation et une meilleure efficacité dans ce domaine qu'au début du XX^{ème} siècle.

❖ Nous nous demandons toujours quels sont les apports des connaissances mathématiques « nécessaires » à l'éducation et à la société, et comment réaliser ces apports, les textes sur la finalité de l'enseignement des mathématiques foisonnent. Ils expliquent la nécessité pour une société de disposer à la fois d'une culture mathématique suffisante chez chaque citoyen et du nombre de techniciens et de savants dont elle a besoin pour faire face aux défis de l'avenir. Tout tend à nous convaincre que les mathématiques y joueront un rôle important. Ces textes expliquent aussi l'importance des propriétés éducatives propres aux mathématiques, tant au niveau individuel par les capacités qu'elles semblent développer qu'au niveau de la vie collective. Le comportement rationnel d'une société, c'est à dire son rapport à la fois à la vérité et à la réalité, ne repose pas seulement sur les vertus individuelles de ses membres. Il exige une pratique sociale et une culture qui doivent s'enseigner à l'école. Les mathématiques sont le domaine où l'enfant peut le plus précocement s'initier à la rationalité, et forger sa raison dans des rapports autonomes et sociaux.

A travers son approche profonde de la conjugaison des différentes cultures dont il dispose, le Mexique m'est toujours apparu comme très attaché à l'aspect humain et humaniste de l'enseignement. Dans cette optique nous nous sommes souvent accordés sur l'importance d'organiser dès l'enfance des rapports plus vivants à des mathématiques plus proches de leur fonctionnement réel et moins austères que ne le disent certains. Mais je ne vais pas reprendre ici ce message toujours d'actualité.

❖ Nous nous interrogeons aujourd'hui, en plus, sur les moyens que nous avons créés pour répondre à cette demande initiale : dans quelle mesure le succès de la diffusion des connaissances mathématiques dépend-il des Sciences de l'éducation, ou des mathématiciens eux mêmes, ou quelle place les connaissances de didactique, et plus précisément de didactique des mathématiques tiennent-elles dans cette diffusion, quelles institutions peuvent assurer la cohérence et la pertinence de ce genre de connaissances...

Je ne suis pas en mesure, et ce n'est pas mon métier, de dresser un tableau général de l'état de l'éducation mathématique partout dans le monde et de faire l'inventaire des tendances qui s'y expriment à la fin de ce siècle. La quantité et la qualité des travaux expérimentaux, la multiplicité et la diversité des propositions didactiques de cette fin de siècle dépassent le cadre de cette conférence et probablement mes capacités d'information et de synthèse.

Plutôt qu'un vaste panorama je vous propose donc une visite de ces questions en suivant un itinéraire que je connais pour l'avoir suivi. Je me bornerai

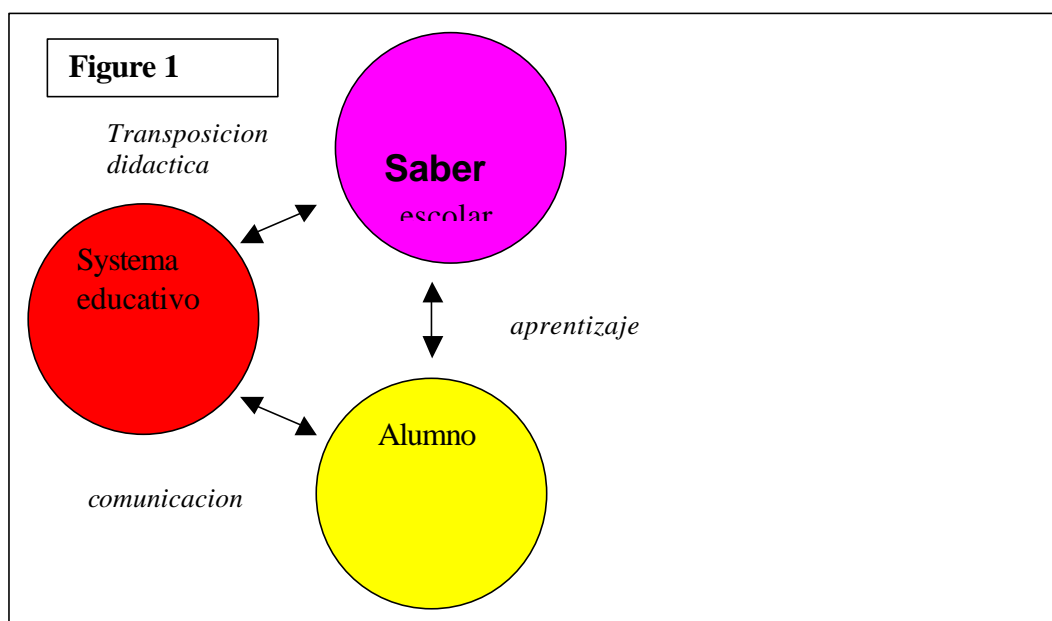
- à présenter une des approches de l'enseignement des mathématiques - pris comme objet d'étude - qui s'est développée à partir des années 60 en complément ou parallèlement à d'autres,
- à indiquer quel parti peut en être tiré pour l'enseignement et l'éducation des élèves, et pour la formation des professeurs
- et à poser quelques questions sur le statut épistémologique, scientifique et social de cette approche.

Cette approche, la théorie des situations didactiques, se présente aujourd'hui comme un instrument scientifique. Elle tend à unifier et à intégrer les apports d'autres disciplines et elle donne une meilleure compréhension des possibilités d'amélioration et de régulation de l'enseignement des mathématiques.

Mais mon intention n'est pas de me faire ici le prosélyte d'une nouvelle méthode d'enseignement, même si de nombreuses applications ont été tirées de cette approche. Il me semble que l'éducation au XX^e siècle n'a pas manqué de prophètes et d'innovateurs. Je souhaite seulement contribuer à votre réflexion sur les rapports du "contenu" de l'enseignement avec les méthodes d'éducation.

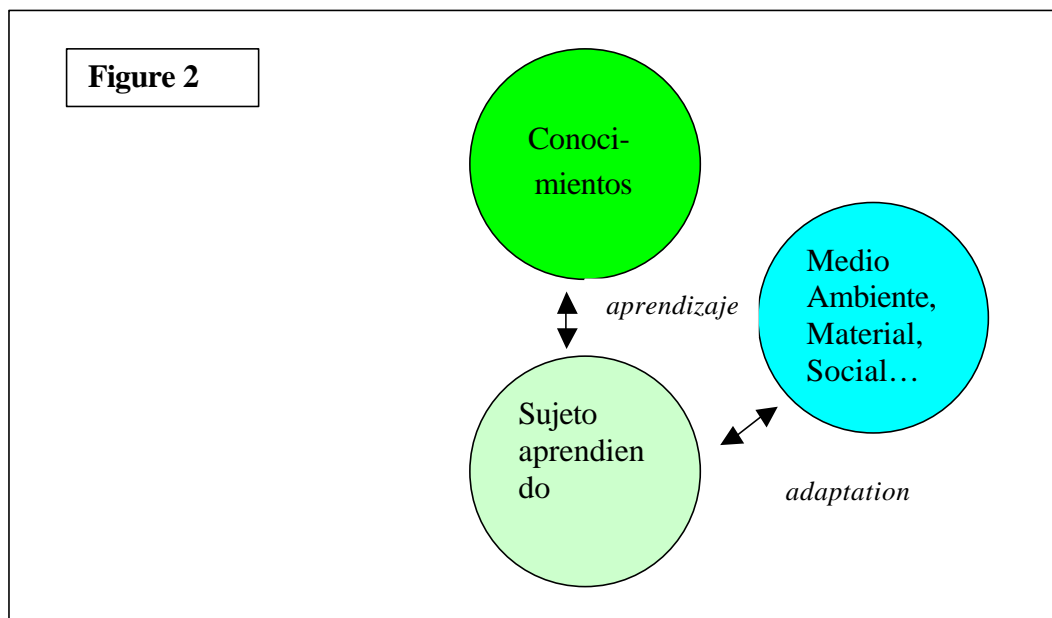
1. Les origines de la théorie des situations

1. Il est fréquent d'envisager l'enseignement comme la part des relations qui concerne la transmission d'un **savoir** donné entre le **système éducatif** et **l'élève**, et d'interpréter aussitôt la relation didactique comme une communication d'informations.



Ce schéma tripolaire est associé habituellement à une conception de l'enseignement où le professeur organise le savoir à enseigner en une suite de messages dont l'élève tire ce qu'il doit acquérir. Il facilite la détermination des objets à étudier, du rôle des acteurs, et de la répartition de l'étude de l'enseignement entre diverses disciplines. Par exemple, les mathématiques ont la responsabilité de contenu, les sciences de la communication celle de la traduction en messages adaptés, la pédagogie et la psychologie cognitive celle de comprendre et d'organiser les acquisitions et les apprentissages de l'élève. Le but de ces messages est essentiellement l'acculturation de l'élève par la société. Bien sûr, ce schéma n'exclut pas l'intervention d'autres disciplines en complément, pour éclairer tel ou tel aspect du processus, mais il hiérarchise leur impact.

2. Or à propos des phénomènes d'apprentissage, les psychologues n'ont cessé de montrer l'importance de la tendance naturelle des sujets à s'adapter à leur environnement. Aussi bien SKINNER (rôle des stimuli) que PIAGET (rôle des expériences personnelles dans le développement spontané des schèmes fondamentaux) ou que VIGOTSKI (rôle du milieu socioculturel).

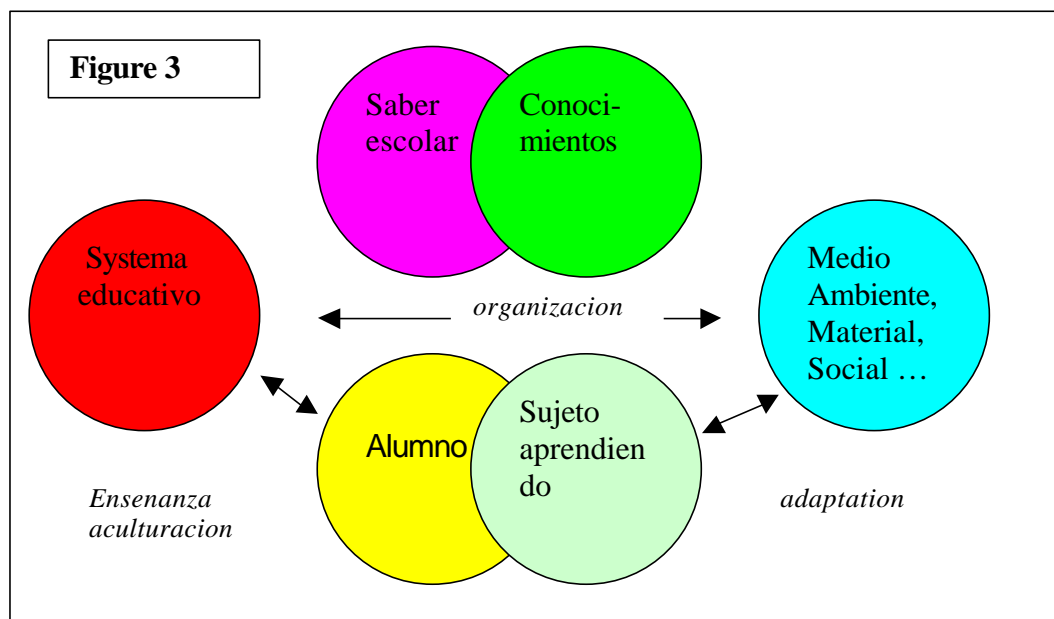


Ainsi par exemple, bien qu'il s'occupe essentiellement de la genèse non scolaire des connaissances, PIAGET dans de nombreux cas, décline cette dualité pour la coordonner¹ (l'apriorisme et l'empirisme dans l'abstraction réfléchissante, l'assimilation et l'accommodation dans l'équilibration etc.).

Dans cette perspective l'enseignement devient une activité qui ne peut que concilier deux processus, l'un d'*acculturation*, l'autre d'*adaptation indépendante*.

En identifiant les connaissances développées par le sujet au contact du milieu avec les savoirs enseignés, et en identifiant le sujet apprenant avec l'élève on obtient un schéma quadripolaire :

¹ "Contre les diverses formes d'empirisme, l'épistémologie *constructiviste* refuse de considérer la connaissance comme un reflet du monde extérieur dans la représentation du sujet, et c'est dans l'activité pratique ou cognitive du sujet, non dans l'appréhension sensorielle, qu'elle situe l'origine de cette connaissance. Réciproquement, contre les diverses formes de nativisme, d'apriorisme et d'idéalisme, elle refuse de voir dans la connaissance la projection sur la réalité des structures transcendantales de l'esprit". P. GRECO, article "Jean Piaget" in Encyclopedia universalis



3. Depuis le début du siècle, les travaux de psychologie n'ont cessé d'influencer l'enseignement. Mais leurs résultats apparaissent seulement comme des moyens de le "rectifier". Ils doivent être pris en compte par les enseignants sans qu'on sache comment. Des injonctions récentes comme "l'enfant doit être placé au centre des préoccupations de l'éducateur" montrent le désir de réagir contre la logique de la communication mais cachent mal l'impuissance de la psychologie et de la pédagogie à intervenir autrement que sur le mode critique et correctif. Ainsi ces efforts ne parviennent pas à modifier sensiblement le schéma tripolaire.

Mais dans les années 60, l'environnement de l'élève n'est pas un objet d'étude en soi. Ce que l'on cherche à modéliser, c'est l'apprenant, le processus de production ou d'apprentissage des connaissances, ou la structure des savoirs. Pour SKINNER, la boîte noire, c'est le sujet, les stimuli sont décidables par l'expérimentateur, donc "connus", plus exactement, transparents et il convient de modéliser le sujet². La culture scientifique de Piaget lui fournit toutes les connaissances dont il a besoin pour concevoir les dispositifs expérimentaux dans lesquels l'enfant révèle ses modes de pensée, et pour reconnaître dans ses comportements les structures et les connaissances mathématiques de son choix. A fortiori, si les modalités de l'influence du milieu socioculturel sur les apprentissages des enfants sont prises en compte et étudiées par VIGOTSKI, l'étude du milieu lui-même relève d'un tout autre champ, idéologique ou scientifique.

4. Dans les années 60, encore étudiant en Mathématiques, et en même temps élève de Pierre GRECO en Psychologie cognitive, je fus impressionné par son habileté à concevoir des dispositifs expérimentaux destinés à mettre en évidence l'originalité de la pensée mathématique des enfants et les étapes de leur développement. Mais je remarquai qu'il ne faisait aucun effort pour analyser les dispositifs qu'il inventait et pour expliciter le rapport entre ce dispositif et la notion mathématique dont l'acquisition était étudiée³. De même,

² ses contradicteurs comme Chomski, puis Nelson ou Arbib et ses continuateurs Suppes modélisent le sujet par des automates formels.

³ « déplacements » ou « transformations » sont peut être des termes techniques du géomètre mais qui correspondent ici sans équivoque à des actions à des mouvements usuels...mais il ne s'agit plus de mouvements

lorsque PIAGET utilisait les axiomes de PEANO pour identifier LE développement de LA connaissance DU nombre chez L'enfant, ces singuliers m'apparaissaient plutôt comme des paris intéressants mais risqués, que comme des évidences. Je pouvais produire des "définitions" des nombres naturels, mathématiquement équivalentes aux axiomes de PEANO, mais de complexité cognitive très diverses. L'équivalence mathématique n'entraîne pas l'équivalence cognitive. De même, il suffisait de faire varier un tant soit peu les nombres proposés pour voir que la connaissance DU nombre était en fait celle de quelques nombres. Qu'est-ce qui nous permettrait de déclarer que c'est exactement cette connaissance mathématique qui est la connaissance du sujet et non une autre plus générale ou plus particulière? Ces observations n'étaient pas des objections aux travaux de PIAGET, mais à l'usage trop précis que l'on voulait en faire pour parler des acquisitions d'un élève particulier dans une situation particulière et pour en inférer des prescriptions didactiques⁴

5. Il m'est alors apparu qu'il fallait prolonger ces travaux en étudiant les dispositifs eux mêmes et leurs rapports avec telle ou telle connaissance : dans quelles conditions un sujet - quelconque - peut-il être amené à avoir besoin de telle connaissance pour établir ses décisions, et pourquoi a priori, le ferait-il? Sans les dispositifs piagetiens, cette idée aurait été bien banale car étudier les problèmes et les exercices qui font utiliser une notion mathématique est un travail coutumier aux mathématiciens. Mais comme chaque notion appelle tout un ensemble de problèmes et d'exercices qui lui sont spécifiques, on pouvait penser que cette voie de recherche avait une chance à peu près nulle d'apporter des informations sur l'acquisition de savoirs un peu généraux. Dans cette perspective les comportements des élèves sont les révélateurs du fonctionnement du milieu considéré comme un système : la boîte noire est alors le milieu.

A l'époque, les professeurs de mathématiques cherchaient à inventer des exercices pour accompagner l'introduction des connaissances mathématiques nouvelles et leurs efforts trahissaient à mes yeux une certaine pauvreté de nos conceptions didactiques. Ils se contentaient le plus souvent de trouver un exemple où par une traduction simple on pouvait "lire" les éléments de la structure ou les propriétés énoncées dans la définition ou le théorème de mathématiques. L'application au sens littéral des structures mathématiques sur des objets et des relations très diverses était intéressante, mais elle confinait l'élève dans le rôle de spectateur, et le professeur dans celui de présentateur du spectacle. Au mieux, faire agir l'enfant consistait à lui communiquer les conditions et les propriétés d'un système générateur et à lui faire produire les connaissances visées (formules, déclarations etc.) par l'exercice des règles qui lui avaient été enseignées, comme le proposait Z. DIENES. Dans ces conditions, la question, qui, répétée à chaque proposition envisagée, a engendré les travaux dont nous allons parler à été "pourquoi?": pourquoi un sujet ferait-il cela plutôt qu'autre chose ? pourquoi est-ce cette connaissance qui commande ce comportement ?

Cette attitude conduit naturellement à considérer un problème ou un exercice, non pas comme une simple re-formulation d'un savoir, mais comme un dispositif, comme un milieu qui "répond au sujet suivant des règles. A quel jeu le sujet doit-il jouer pour avoir besoin de telle connaissance ? quelle aventure - succession de jeux - peut l'amener à la concevoir, ou à l'adopter ? Dans cette approche, le sujet n'a pas besoin d'être mieux décrit que le joueur d'échec, qui pousse les blancs ou les noirs suivant une stratégie impersonnelle. Quelle information, quelle sanction pertinente doit recevoir le sujet de la part du milieu pour orienter ses choix et investir telle connaissance plutôt que telle autre ?

6. La même démarche conduit alors à considérer le milieu comme un système autonome, antagoniste du sujet, et c'est lui qu'il convient de modéliser comme une sorte d'automate .

vécus dans l'action ; il s'agit de mouvements imaginés exécutés ou reconstitués en pensée. » *structures et significations (EHESS 1991)*

⁴ Aebli "Didactique psychologique", Delachaux et Niestlé

Nous avons appelé "situation" un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. Certaines de ces "situations" nécessitent l'acquisition "antérieure" de toutes les connaissances et des schèmes nécessaires, mais d'autres offrent une possibilité au sujet de construire lui-même une connaissance nouvelle en un processus "génétique", c'est à dire qui l'engendre.

Notons que le même mot "situation" sert, dans son sens ordinaire, à décrire tantôt l'ensemble (non nécessairement déterminé) des conditions qui entourent une action, tantôt le modèle théorique et éventuellement formel qui sert à l'étudier.

7. En 1970 le projet scientifique est posé: il s'agit de modéliser (et de critiquer) les situations utilisées pour introduire ou enseigner les notions mathématiques et d'en imaginer d'autres plus appropriées. En posant les problèmes de cette manière, à côté des arguments d'organisation logico-mathématique du savoir, il est possible de faire entrer dans l'analyse, voire dans le calcul, des arguments de type économique et ergonomique. Mais il est possible aussi de prendre en compte d'autres contraintes, en particulier celles qui pourraient apparaître en conclusion de travaux de psychologie ou de sociologie, à la condition de les rendre fonctionnelles, c'est à dire de préciser comment elles interviennent effectivement.

Un exemple d'application de ce principe méthodologique sera peut-être le bienvenu dans le paragraphe suivant. Restons dans le domaine de l'apprentissage du nombre.

8. Il serait oiseux d'indiquer ici toutes les conditions qui ont fait que cette idée d'étudiant est devenue une hypothèse de travail et une méthode et un programme de recherche pour toute une génération de chercheurs mathématiciens didacticiens en France. Le projet et le programme IREM et la régulation des réformes des années 70 sont au centre de ces événements. Il apparaît dès cette époque que *chercher les conditions d'existence d'un savoir est un moyen général de recherche et d'ingénierie en didactique*. La description systématique des situations didactiques est un moyen plus direct pour discuter avec les enseignants ce qu'ils font ou ce qu'ils pourraient faire et de considérer comment ils pourraient pratiquement prendre en compte les résultats des recherches dans d'autres domaines. Une théorie des situations apparaît donc comme un moyen privilégié, non seulement de comprendre ce que font les professeurs et les élèves, mais aussi de produire des problèmes ou des exercices adaptés aux savoirs et aux élèves et enfin un moyen de communication entre les chercheurs entre eux et avec les enseignants.

2. Un exemple : le nombre naturel

a) Deux situations classiques

Commençons par décrire deux situations culturellement classiques utilisées pour savoir si un enfant sait compter.

Une pratique populaire : Bébé compte, scène familiale

Maman : - Vous savez, grand père, le petit sait compter!
Grand père : - c'est vrai? voyons ça mon mignon...
Maman : - "Montre à grand père que tu sais bien compter"
L'enfant, quatre ans : - Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, dix, quinze, heu...
Grand père, admiratif : - Aaah! très bien! Il ne te reste plus qu'à continuer!

Une pratique professionnelle : "compter" ainsi ne compte pas

Mais la famille comprend la tante Mimi qui est une institutrice à la retraite.

Tante Mimi : - Mais non, grand père, ce n'est pas cela savoir compter : pour savoir si cet enfant sait compter il faut lui montrer des doigts et lui demander combien il y en a, et puis lui demander à son tour de montrer tant de doigts! il ne suffit pas de réciter la suite des nombres! Et s'il n'y parvient pas bien, il ne faut pas que maman soit déçue. A quatre ans la plupart des enfants ne peuvent guère vraiment comprendre les nombres au delà de 5, les psychologues vous le diront.

Maman : - mais notre petite voisine Odile, qui a cinq ans, compte bien jusqu'à soixante et dix!

Tante Mimi : - Oui, elle peut aussi réciter "Le chat la belette et le petit lapin" qui comporte bien plus de 70 mots, mais elle croit que les pénates sont des espèces de pantoufles! Ce n'est pas bien grave, mais une jeune collègue m'a raconté que les parents exercent actuellement une forte pression pour "faire compter" précocement les enfants. Elle constate que sous l'influence de ce matraquage, certains de ses élèves se mettent à compter, dès lors qu'ils entendent le mot "nombre" sans même vouloir réfléchir à la question qu'on leur pose. Elle a dans sa classe des élèves "petits et moyens" d'école maternelle, des enfants qui comptent mécaniquement jusqu'au delà de cinquante, et de ce fait, elle ne peut plus, ni avec eux, ni avec ceux qui ne dépassent pas cinq, organiser en commun aucune activité mathématique de leur âge etc.

b) Analyses et modélisation

1. Le modèle du deuxième exemple contient et corrige évidemment le premier. Dans les deux cas la formulation des nombres est bien un moyen approprié de répondre à la demande, mais la tante Mimi modifie le modèle initial {Maître, élève, savoir} de façon essentielle en lui substituant le modèle {Maître, élève, savoir, milieu} où un milieu objectif est le nombre de doigts à montrer ou à compter. Ainsi, dans son rapport au milieu, l'enfant doit assujettir sa réponse à une nouvelle forme de validité qui n'est pas seulement celle de l'acquiescement ou du désir d'un adulte.

Cet assujettissement donne évidemment un tout autre sens au savoir, qui devient le moyen adéquat de répondre aux nécessités d'une situation objective, dénuée en elle-même d'intentionnalité didactique. Mais remarquons que l'enfant n'a pas les moyens de comprendre la question "combien" ni de répondre s'il n'en a pas appris le sens au préalable. De plus, il n'a pas les moyens de vérifier lui-même la validité de sa réponse. Le jugement de son adéquation reste sous le contrôle de l'enseignant. Cette situation est donc essentiellement une situation d'évaluation des connaissances.

Elle ne peut être utilisée pour l'enseignement que dans le cadre d'une didactique behavioriste qui consiste à répéter les questions, à enseigner comment on établit la réponse et, ici, à faire reproduire les techniques de comptage dans des associations question-réponse, jusqu'à reproduction parfaite.

2. A ce sujet, dans un de ses dispositifs les plus célèbres, PIAGET demande à de jeunes enfants : "où y a-t-il plus de jetons" en présentant deux collections équipotentes mais occupant plus ou moins d'espace. Cette situation soulève toujours de la part des débutants la même critique : la question est ambiguë il faut connaître le nombre pour comprendre qu'il s'agit du nombre et non de la place occupée. Et de fait, les questions d'évaluations sont toujours telles qu'il faut connaître la réponse pour comprendre la question.

Dans une situation "d'apprentissage" où l'élève devrait "s'adapter à une situation objective" (et non pas à une relation "duelle" avec l'enseignant), en produisant lui-même la connaissance, il est nécessaire que *la consigne ou le projet d'action puisse être conçu par le sujet sans le secours de sa solution* puisque c'est ce qu'il s'agit de construire ou d'acquérir.

Pour comprendre la situation, l'élève doit pouvoir envisager, avec ses connaissances actuelles, une stratégie de base correspondant à la consigne qui lui est donnée. La connaissance nouvelle est alors le moyen de produire l'effet attendu par une stratégie plus efficace, plus sûre, plus économique etc. Les connaissances sont en compétition et les motifs d'apprentissage sont des lois "économiques" qui se manifestent à l'élève lui-même.

3. L'apprentissage "behavioriste" fait appel à un sens, mais ce sens est extérieur au processus d'adaptation. De ce fait, c'est l'enseignant qui doit décider de ce qu'il va considérer comme un apprentissage élémentaire. Si une connaissance est trop complexe, il devra la décomposer, enseigner les parties, puis enseigner la composition de ces connaissances fragmentaires. Les raisons de ce découpage échappent à l'enfant et le sens de ce qu'il a appris ne pourra lui en être donné qu'après coup, par l'usage. Ce qui explique la nécessité de la multiplication des exercices d'applications du savoir appris. Le sens de ce savoir sera représenté, non pas par son adéquation à l'établissement des réponses, mais par un univers de situations déterminé par leurs analogies. Ainsi, l'enseignement classique de la division sépare l'apprentissage de l'algorithme, et celui de son sens.

Nous ne poursuivons pas cette analyse qui avait seulement pour objet de montrer comment opère une interprétation des pratiques, en terme d'assujettissement de l'élève à une situation.

4. Hypothèse de la situation fondamentale. La voie empirique consiste à essayer d'améliorer ces pratiques. Nous allons au contraire suivre l'autre voie, celle, qui partant d'une connaissance déterminée, cherche quels type de situations sont capables de la faire apparaître, de la faire utiliser, de la faire construire et de la faire apprendre..

Pour des raisons heuristiques, nous supposons que *chaque connaissance mathématique possède au moins une situation qui la caractérise et la différencie de toutes les autres.*

De plus, nous conjecturons que l'ensemble des situations qui caractérisent une même notion est structuré et qu'il peut être engendré à partir d'un petit nombre de situations dites fondamentales, par le jeu de variantes, de variables et de bornes sur ces variables.

Mais avant d'aborder ces questions théoriques, il me semble utile d'illustrer concrètement la notion de situation fondamentale en présentant celle qui correspond au nombre naturel. Nous n'évoquerons pas les raisonnements d'ingénierie didactique qui prolongent ceux que nous venons de donner et par lesquels nous aboutissons à ce résultat, ni les arguments qui militent en faveur de l'idée que cette situation est assez proche de la situation fondamentale.

Il est intéressant toutefois de remarquer qu'au lieu de critiquer à l'aveuglette des situations pratiques, il est plus efficace de les comparer à une situation fondamentale.

Avant de donner cet exemple, il est important de retenir pour l'instant qu'*une situation fondamentale n'est pas a priori une situation "idéale" pour l'enseignement, ni même une solution plus efficace.* La valeur d'une situation à usage didactique s'apprécie en fonction d'un grand nombre d'autres paramètres externes tels que la possibilité effective de la mettre en œuvre dans un environnement psycho-socio-culturel déterminé.

c) La situation fondamentale du dénombrement

Pour satisfaire les conditions ci-dessus, et en utilisant quelques conclusions de la théorie, on obtient la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 3 à 7 ans :

"Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un seul dans chaque pot. Tu dois apporter tous les pinceaux en un seul coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les rapportes là-bas et tu essaies à nouveau. *Tu sauras compter quand tu pourras le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux*".

Cette situation englobe la précédente en ce sens que, dès que le nombre de petits pots devient assez grand, l'élève doit, soit disposer d'un moyen matériel de représenter la collection

(dessin, énumération, avec ses doigts ou autrement etc.) soit la compter, au besoin en organisant son énumération. Le nombre n'est plus l'*objet* explicite de la question mais le *moyen* implicite d'y répondre..

Pour que le nombre apparaisse explicitement, il faut transformer cette auto-communication en une communication véritable:

" Tu dois rester près des pots, et dire ou écrire un message pour que ton camarade, puisse t'apporter les pinceaux que tu veux. S'il te porte trop de pinceaux ou pas assez, vous avez **perdu tous les deux**. *Vous saurez compter quand vous pourrez le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux*".

L'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.⁵

Les moyens de résoudre ce problème vont évoluer, en particulier avec la taille des collections et la forme sous lesquelles elles se présentent. La connaissance des petits nombres s'enrichira lorsqu'ils serviront à en construire d'autres à l'aide de diverses opérations... Il faut observer que les enfants acquièrent rapidement certains schèmes vrais pour n'importe quel nombre, mais aussi que la possibilité effective de prendre ces schèmes comme objet de connaissance et de les manier comme des savoirs ne s'acquiert ni spontanément ni rapidement. Il faudra de plus, tôt ou tard, ne pas se contenter de leur usage, mais aussi élucider, formuler, discuter les propriétés et les structures numériques. Ces élucidations sont nécessaires à l'apprentissage lui-même et doivent l'accompagner. Comment et quand? La connaissance DU nombre n'est pas réductible à celle des axiomes de PEANO. Les connaissances humaines ne sont pas contenues dans les savoirs qui les résument.

La différence entre le comptage comme **savoir** culturel habituel et le comptage comme **connaissance** d'un moyen de résoudre la situation fondamentale est bien visible dans l'exemple suivant dû à B. VILLEGAS

d) Le sens des dénombrements

La situation précédente est proposée à des enfants en cours d'apprentissage (classique), qui "savent" déjà compter, en ce sens qu'ils savent résoudre le problème de l'émetteur et celui du récepteur (disons jusqu'à trente), mais qui n'ont pas encore la maîtrise du dénombrement.. On peut alors observer parfois le comportement suivant :

L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.

- "Ah, il en reste trois !"

- Tu as réussi ?

- Non parce qu'il m'en reste trois !

- Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.

Les autres élèves de la classe lui suggèrent :

"compte !, compte !"

L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient.

Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :

- Non ! non ! tu dois compter les pinceaux.

⁵ Cette situation semble présenter un caractère fondamental parce que "toutes" les situations de comptage peuvent en être déduites en faisant varier ses variables cognitives (nature, mobilité des objets, circonstances, taille des ensembles, etc.) et que toutes les pratiques de comptage et d'apprentissage du comptage peuvent ainsi être classées et comparées du point de vue didactique. Les deux pratiques habituelles précédentes s'obtiennent à partir de la situation fondamentale par suppression ou par transfert à l'adulte de certaines tâches. Dans la première, que nous pourrions appeler par exemple "**le comptage populaire**", l'enfant reproduit une suite de mots sous le contrôle de l'adulte. La seconde, "**le comptage scolaire classique**", est plus évoluée, il reste à l'enfant à faire correspondre un nombre à un ensemble de pots (travail d'émetteur), ou à constituer un ensemble d'un nombre donné de pinceaux.

L'enfant part, compte tous les pinceaux en prend quelques uns et revient...

e) Une condition supplémentaire: la confiance en ses méthodes:

Pouvons-nous affirmer que l'élève sait compter lorsqu'il est capable de constituer des collections adéquates de n'importe quelle importance dans les conditions de la situation fondamentale?

Pas tout à fait : Il doit aussi être capable d'être suffisamment sûr de son comptage pour identifier les sources d'erreurs et au besoin les discuter.

Par exemple, si au moment où il va chercher les pinceaux, quelqu'un lui dérobe un pot, il doit être capable de comprendre et dire :

- "tu m'as fait une farce!".

Cette confiance dans ses méthodes exige à son tour une position réflexive par rapport à elles, une "métaconnaissance", des mots pour exprimer les connaissances acquises, un métalangage, et finalement tout ce qui constitue la conversion en savoirs de certaines des connaissances. Ainsi notre situation de dénombrement n'était pas tout à fait fondamentale. L'est-elle maintenant?

Par rapport aux méthodes classiques, cette situation fondamentale du dénombrement peut se révéler utile, à divers moments de l'apprentissage et surtout pour indiquer aux professeurs ce que veut dire "compter" en termes "concrets". Ceci ne veut pas dire que l'apprentissage par l'usage exclusif de la situation fondamentale serait plus rapide ou plus efficace, elle peut se révéler inutilement lourde quand l'élève a compris le but de l'apprentissage.

f) L'organisation de processus génétiques longs

1. Comment s'organise l'acquisition d'une structure mathématique complexe comme celle des nombres naturels ? Elle nécessite évidemment des processus longs. Comment s'articulent les connaissances acquises en premier lieu, avec celles acquises ultérieurement ?

Apprendre séparément les pratiques partielles du comptage implique que l'adulte les enseigne, les exige, les corrige, les fasse imiter et répéter puis les compose. A aucun moment, l'enfant n'est en mesure d'établir lui-même la finalité de l'action et de corriger ses erreurs. Cependant, parents et enseignants utilisent avec un certains succès toutes ces formes dégénérées de la situation fondamentale, même le cas extrême de l'apprentissage formel de la suite des nombres. Aussi s'agit-il moins de rejeter certaines d'entre elles que de les utiliser au mieux suivant leurs caractéristiques particulières.

Les désavantages principaux des apprentissages « partiels » sont les suivants :

- ils ne permettent pas de déférer à l'enfant la responsabilité du jugement sur la valeur de ses réponses, ni de lui décrire à l'avance un projet d'apprentissage dont il peut évaluer les progrès

- il faut qu'il ait déjà appris la réponse d'une manière ou d'une autre pour comprendre ce qu'on lui demande de faire.

2. La théorie des situations permet d'étudier les solutions existantes et d'en proposer des différentes. En particulier, en replaçant les techniques partielles dans une genèse globale intelligible. La présentation d'une telle genèse sortirait du cadre de cet article, mais l'utilisation de la situation fondamentale et de la poursuite de la connaissance de nombres de plus en plus grands y jouent un rôle essentiel.

g) Apprendre les nombres

Cet exemple laisse dans l'ombre la diversité des situations nécessaires à l'ensemble du processus, la complexité des rapports au savoir, et un grand nombre de phénomènes qui seront évoqués sans doute dans les ateliers. Car finalement, il faudra bien, pour cela, que l'élève

*énumère*⁶ les collections (qu'il appelle l'un après l'autre, tous les objets sans appeler deux fois le même), en même temps qu'il les *dénombré* (qu'il évalue leur cardinal par correspondance avec une autre collection), en particulier quand il les *compte* (qu'il met en correspondance leurs éléments avec les mots) puis, si le comptage a été décomposé, en "*nombrant*"⁷ (en exprimant oralement le nombre à l'aide d'un système de numération) le résultat de son comptage, et ensuite en *écrivant ce nombre*. Il faudra aussi qu'il s'approprie les usages *ordinaux* de la suite des nombres etc. La dénomination et l'écriture des premiers nombres utilise des procédés de *numération* qui doivent être reconnus pour être utilisés, mais dont l'étude et l'analyse doivent se poursuivre tout au long de la scolarité obligatoire ne serait que pour connaître et utiliser de nouveaux nombres. L'analyse du cryptage numérique et des systèmes de numération, opposés à la pratique du *numéral*, notamment à la lecture des *numéros*, est indispensable.

h) Usages raisonné des situations fondamentales

Mais ces apprentissages pourront se produire par une conjonction de méthodes :

par exemple dans un processus constructiviste, en complétant les réponses spontanées, ou provoquées avec les institutionnalisations indispensables,

ou dans des enseignements plus classiques, maïeutique ou même axiomatique, avec des leçons suivies d'exercices, en réponse au problème désormais bien identifié par l'élève.

De même, la situation fondamentale ne discrédite aucune des formes d'apprentissages. Elle les permet toutes et permet de les conjuguer : elle complète les apprentissages partiels qui restent utiles et sans doute nécessaires, et surtout elle leur donne leur sens.

L'usage purement *numéral* des nombres (pour seulement identifier ou désigner un objet : numéro de chaîne TV, de téléphone, ou d'automobile) ne semble présenter, lui, aucun problème. Sans doute parce que la difficulté principale réside moins dans l'apprentissage des automatismes que dans la connaissance des **propriétés** des collections, des nombres et de leurs opérations. Celles-ci doivent être obligatoirement "connues" de l'élève pour qu'il puisse contrôler leurs usages complexes. Il faudra de plus, tôt ou tard, ne pas se contenter de leur usage, mais aussi élucider, formuler, discuter les propriétés et les structures numériques. Ces élucidations sont nécessaires à l'apprentissage lui-même et doivent l'accompagner. Comment et quand? Elles appellent des situations de structure différente.

3. Quelques éléments de théorie des situations

La recherche et l'invention des situations caractéristiques des diverses connaissances mathématiques enseignées dans la scolarité, l'étude et la classification de leurs variantes, la détermination de leurs effets sur les conceptions des élèves, la segmentation des notions et leur organisation en processus d'apprentissages longs, constituent la matière de la didactique des mathématiques et le terrain auquel la théorie des situations fournit des concepts et des méthodes d'étude. Pour les professeurs comme pour les élèves, la présentation du résultat de ces travaux renouvelle leur connaissance et l'idée qu'ils se font des mathématiques, et ceci, même s'il faut développer tout un vocabulaire nouveau pour établir les relations qui lient les conditions d'émergence et d'enseignement des notions mathématiques de base avec l'expression de ces notions dans la culture mathématique classique. Nous n'allons par

⁶ Pour plus d'informations, consulter (entre autres): sur l'énumération, la thèse de J. BRIAND " L'énumération dans le mesurage des collections" (1993) (DAEST, Université Bordeaux 2, Place de la Victoire 33 000 Bordeaux) sur la numération, celle de M. BAHRA "Problèmes de didactique de la numération, échecs et succès de la remathématisation (1995) (même adresse), sur les dénombrements celle de B. VILLEGAS (1986) (idem),

⁷ Néologisme

poursuivre ici dans ce sens, car il serait trop long d'exposer les apports de la théorie des situations à l'enseignement des différentes notions mathématiques telles que l'enseignement des nombres naturels, rationnels ou décimaux, de l'espace et de la géométrie, des débuts de l'algèbre, des statistiques et des probabilités ou du raisonnement et de la logique. Il est important de noter que les concepts que nous allons avancer sont très généraux et peuvent apparemment être exportés pour l'étude d'autres sujets d'enseignement dans d'autres disciplines, mais en science, il faut se défier des analogies; et de même qu'il n'existe aucune métaphysique qui engendre à la fois la thermodynamique l'optique et l'électricité, ce que je vais exposer constitue une sorte de métadidactique qui n'est pas automatiquement convertible pour traiter n'importe quelle connaissance.

a) *La structure des situations*

Modèle général d'une situation

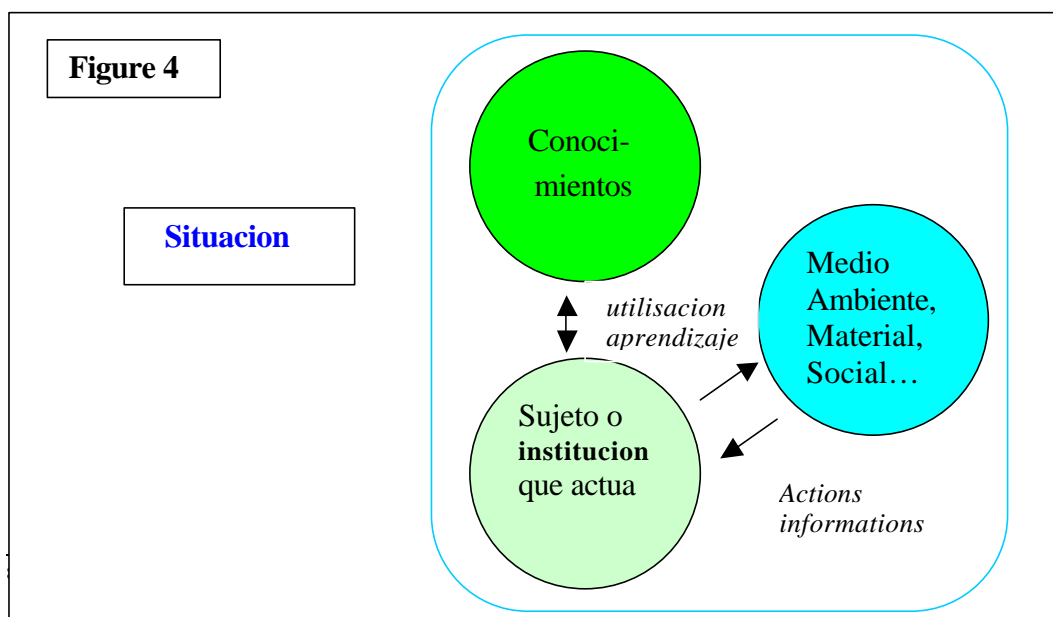
Une situation modélise les relations et les interactions d'un ou plusieurs actants avec un milieu (un environnement). Le modèle comprend une représentation :

- des états du milieu, et des changements que les actants peuvent lui faire subir,
- l'enjeu de l'action, généralement un état final du milieu et l'intérêt qui lui est attaché par l'actant,
- et l'inventaire des choix permis par des règles.

Une *connaissance* est pertinente dans cette situation si elle est le moyen de mettre en œuvre une stratégie ou une tactique dans le cadre des choix permis à chaque instant. Parmi les connaissances pertinentes - elles déterminent des choix -, certaines sont *adéquates* : elles permettent d'obtenir l'état final souhaité, et parmi celles-ci, certaines sont plus efficaces, plus fiables ou plus économiques que d'autres.

Ce modèle permet l'identification des connaissances d'un sujet, celles du moins qui se manifestent par ses comportements : il s'agit de repérer les connaissances "les plus simples" qui engendrent la stratégie "la plus simple" coïncidant avec les suites de décisions observées. Il permet ensuite leur comparaison avec d'autres connaissances pertinentes, en particulier avec les connaissances optimales dans cette situation... C'est ainsi que nous avons montré l'importance des procédures et des connaissances de l'énumération - indépendamment du comptage - pour l'apprentissage des nombres et de leurs opérations⁸

Pour simplifier reprenons notre schématisation d'une situation par un triplet:
 { actant, règles d'interactions avec le milieu, connaissances }.



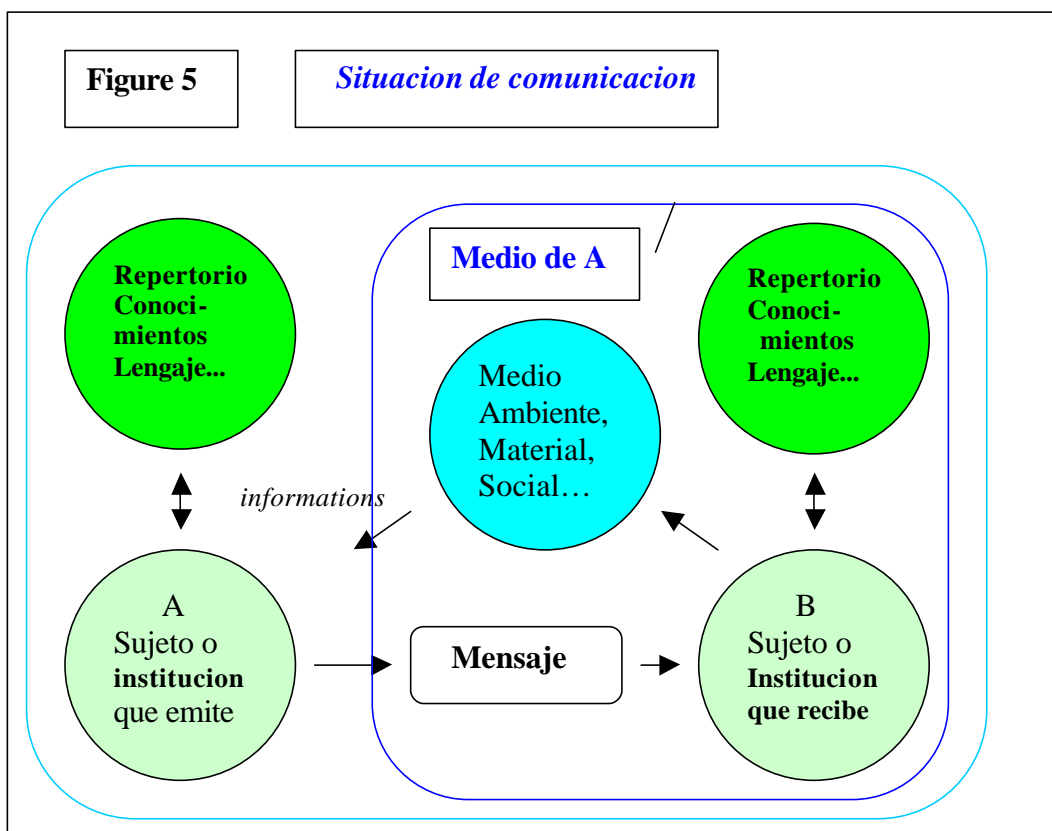
Ce modèle est celui généralement adopté pour concevoir une activité finalisée quelconque, dans une institution quelconque. L'actant peut lui-même être une institution.

Quand une situation est-elle une réalisation d'une autre ? Quand deux situations sont-elles différentes? ...La définition des instruments généraux de comparaison des situations est encore bien incertaine, surtout dans ce qui se rapporte à la hiérarchie et à l'agrégation des situations et des connaissances associées. Tout l'enjeu de la théorie des situations est de permettre d'organiser localement l'apprentissage de connaissances élémentaires en suivant leur adéquation aux circonstances et aux possibilités du sujet, et en même temps de permettre leur réorganisation suivant des nécessités logiques et théoriques qui sont le fruit d'une adaptation toute différente de la société.

Les interactions

L'observation anthropologique aussi bien que la logique du principe méthodologique de la T. S. (Théorie des situations) nous conduisent à distinguer trois types fondamentaux d'interactions d'un actant avec un milieu:

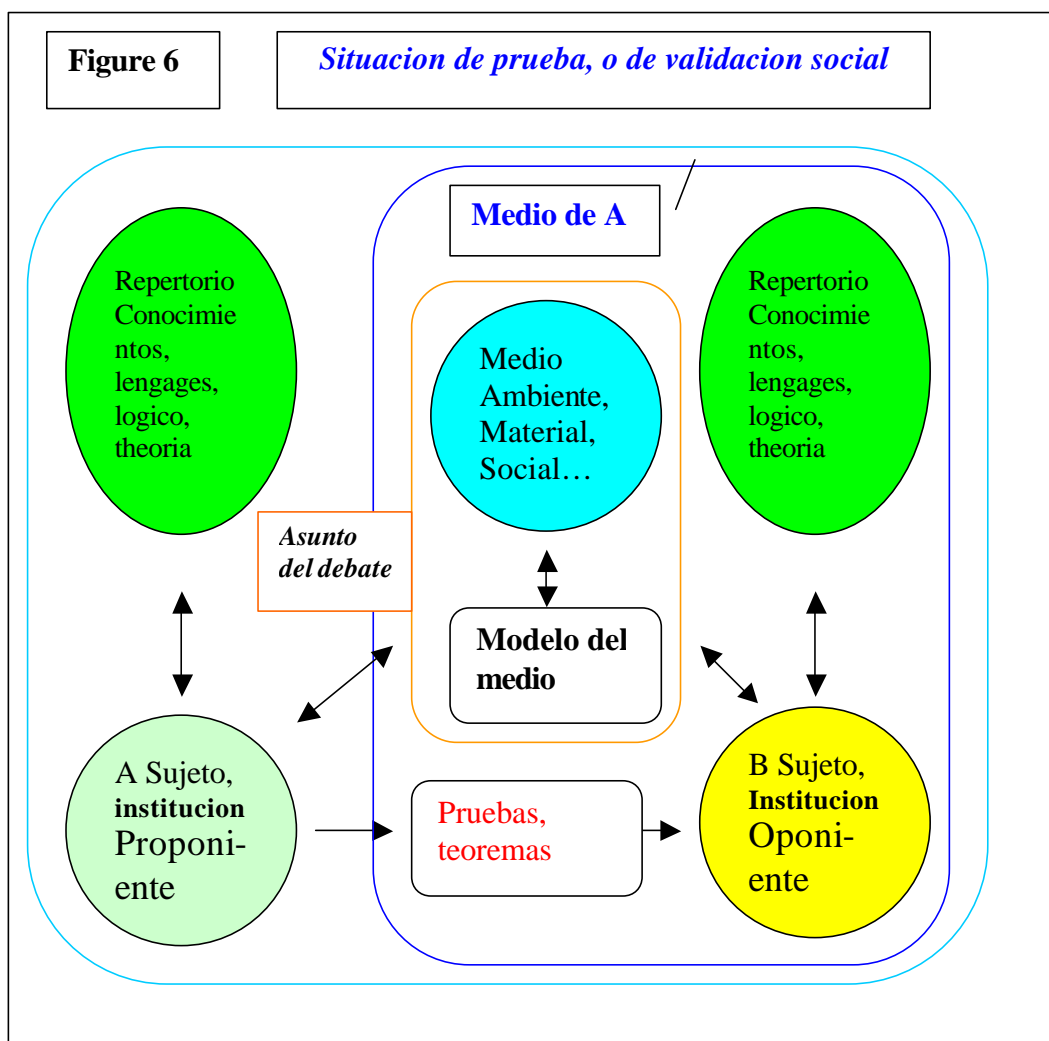
- le type "*action*" qui consiste pour l'actant à fixer un état du milieu ou à déterminer ou à limiter les actions des autres actants (matériellement ou par des règles imposées), (figure 4)
- le type "*communication*" qui consiste à modifier les connaissances d'un autre actant par le moyen de messages porteurs d'informations,



- le type "*preuve*", qui tend à la justification, ou validation culturelle des actes ou des déclarations. (figure 6)

Chacune de ces interactions est modélisée par des types de situations différents et elle mobilise des répertoires de moyens différents.

Par exemple, il est facile de montrer pourquoi "fournir une preuve" s'inscrit dans une situation très différente d'une simple communication d'information : la structure de la situation c'est-à-dire la position des actants par rapport à un milieu est très différente, le jeu, les règles et le répertoire des moyens de preuve aussi.



Dans les classes, cette classification des situations a favorisé l'instauration et l'observation du passage de situations d'argumentation à des situations de preuve. Sans elle l'initiation à ces pratiques n'est pas facile à mettre en œuvre.

Or ces situations ne sont pas seulement un pas important dans les processus mathématiques, elles sont porteuse d'un projet éducatif essentiel : celui de construire chez l'élève un être rationnel et social autonome et responsable, capable de comprendre comment s'établit et se partage une vérité dans une société, par des débats à la fois démocratiques et constructifs.

Les deux sens de "Situation didactique"

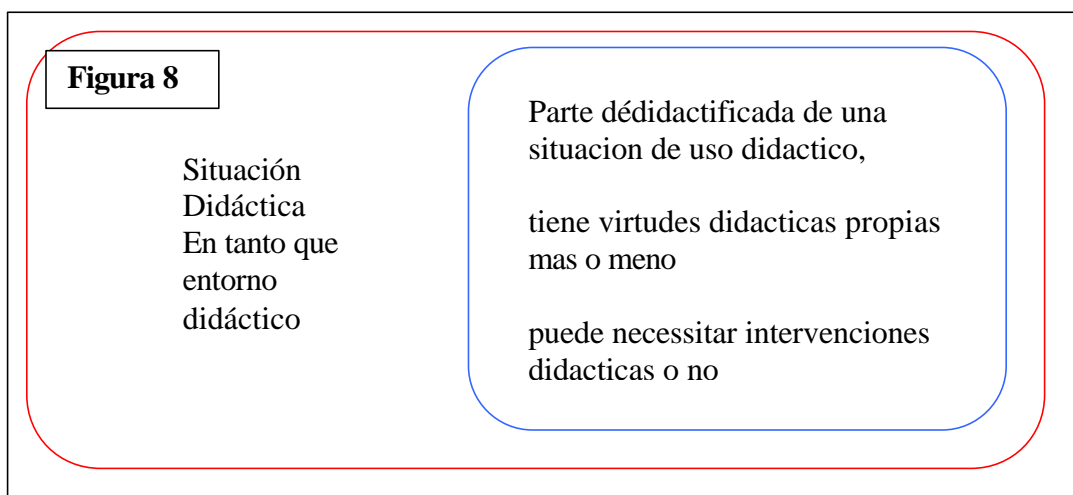
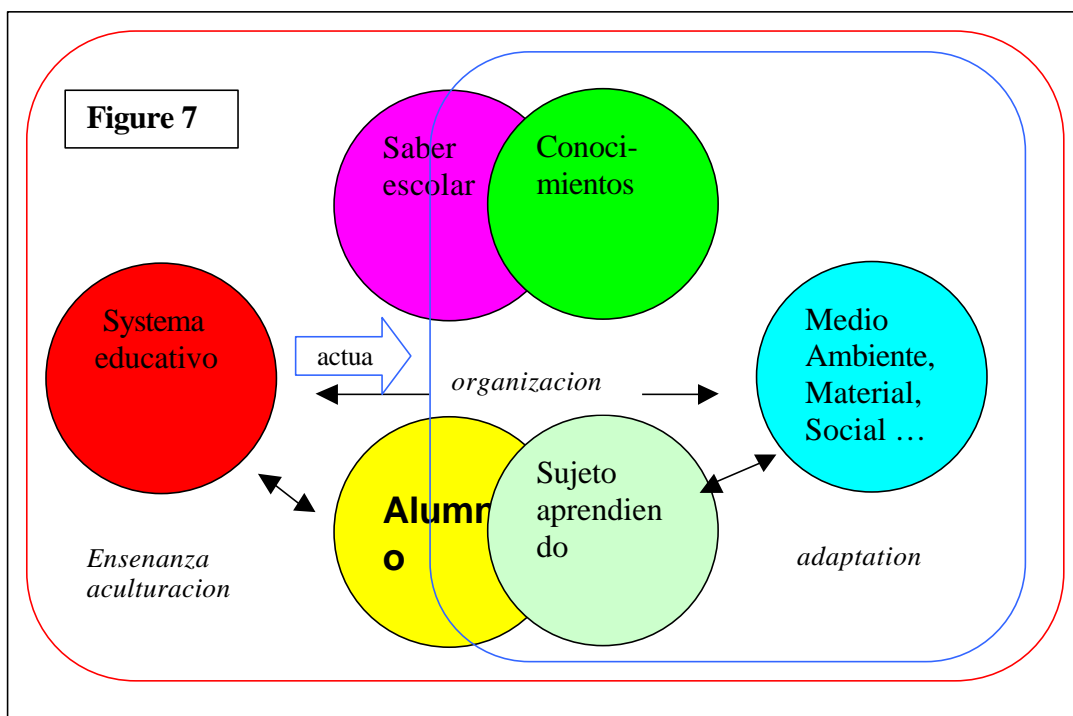
Le terme "situation didactique", a de fait aujourd'hui au moins deux sens

- i) Au sens classique c'est une *situation à usage didactique, qui sert à enseigner*, (comme un problème ou un exercice), que cette situation soit douée de vertus

didactiques autonomes ou que le professeur soit obligé d'intervenir pour qu'elle produise son effet

ii) C'est une situation qui décrit l'environnement didactique d'un élève, elle comprend tout ce qui concourt à lui enseigner intentionnellement quelque chose. En ce sens elle comprend l'enseignant, qu'il se manifeste ou non pendant le déroulement de la situation.

Certaines situations à usage didactique ont la propriété de permettre à l'élève de prendre seul des décisions pertinentes, de juger de leur adéquation et de s'adapter au milieu par la construction de la connaissance voulue, ces situations ont un modèle "non didactique" en ce sens qu'elles n'ont pas besoin d'une intervention spécifiquement didactique (autre que la dévolution). Par opposition à ce cas limite, se trouvent les situations purement didactiques où le professeur doit intervenir à tout moment au cours du déroulement de l'activité de l'élève, pour la provoquer, l'orienter, la restreindre et la contrôler suivant sa propre stratégie didactique. En général les situations d'enseignement réelles sont décomposables en une composante didactique et en une composante non didactique (dédidactifiée) qui peuvent se dérouler simultanément ou successivement.



b) Conséquences, mise en évidence de quelques phénomènes

1. types de conséquences

Une théorie scientifique est, formellement, une collection d'énoncés "vrais". Son usage principal est de dériver ou d'écarter des déclarations, de façon certaine, à partir de celles que l'on connaît déjà, mais plus encore de produire des conjectures nouvelles falsifiables. Ces conjectures doivent être raisonnablement incertaines et avoir des conséquences concrètes aussi importantes que possible. La théorie doit surtout indiquer les moyens et les méthodes de confrontation de ces conjectures à la contingence. La théorie des situations avait pour seul objet à l'origine, de contrôler la cohérence et la faisabilité des injonctions et des objurgations didactiques adressées aux professeurs par leurs conseillers et leurs décideurs. Elle a permis une longue confrontation qui est loin d'être terminée. Mais elle a dû s'enrichir et se complexifier beaucoup. L'effort pour maintenir la consistance de l'ensemble des déclarations qui s'expriment avec ses concepts devient rude. Elle devient aujourd'hui difficile à appréhender et à transmettre aux jeunes chercheurs, et surtout aux enseignants eux-mêmes.

L'approche de l'enseignement par la T. S. a produit de nombreux résultats

- d'abord en permettant de mieux comprendre les causes d'échecs de certaines suggestions hâtivement déduites de sciences connexes ou d'idéologies hardies
- ensuite en ingénierie didactique en modélisant les connaissances des principales branches des mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire
- en méthodologie, par le développement de concepts généraux du type de ceux exposés ci-dessus, et par des meilleures formes cliniques et statistiques de confrontation à la contingence

Mais ses principales conséquences sont probablement d'ordre épistémologique. Nous allons en examiner quelques unes maintenant.

2. Conceptions et obstacles*

Nous avons raisonné comme s'il était habituel de pouvoir isoler une connaissance, et comme si les connaissances et les situations étaient des entités facilement isolables. En fait un milieu effectif rassemble des familles de situations qui mobilisent des connaissances structurées par des relations logiques, des relations de convenance, de co-présence fréquente etc.

i) Les connaissances fonctionnent par agrégats que nous appelons « conceptions » et de même les situations se regroupent en « milieux »

Des "milieux" et des groupements de situations - comme celui des figures de géométrie plane tracées à la règle et au compas - appellent des agrégats de connaissances adéquates pouvant se structurer en théories mathématiques - dans ce cas, la géométrie euclidienne. De même que les connaissances se regroupent autour de théories et de concepts dans les savoirs des institutions savantes, les connaissances des élèves se regroupent en "conceptions" qui caractérisent une certaine manière de comprendre et d'utiliser une notion mathématique dans un certain champ de situations.

L'étude des formes de "dépendances" qui lient ces connaissances⁹, celle des procédés théoriques d'agrégation¹⁰ et celle des modes de mise en évidence expérimentale¹¹ des

⁹ H. RATSIMBA-RAJHON à propos des conceptions des rationnels

conceptions se poursuivent depuis vingt cinq ans et elles se prolongent aujourd'hui par l'étude d'écosystèmes et de praxéologies dans l'approche anthropologique¹².

ii) Les situations rencontrées par un débutant à propos d'une connaissance nouvelle sont nécessairement en petit nombre et souvent simplifiées. L'adaptation des connaissances à ce milieu limité conduit l'élève, mais aussi le professeur, à utiliser des conceptions qui se révéleront inadaptées, approximatives ou même fausses dans les situations rencontrées par la suite. Ces conceptions premières ne sont pas des erreurs ou des fautes de compréhension de la part de l'élève, mais le résultat inhérent et inévitable d'un enseignement adapté. La reconnaissance de ce fait change complètement la problématique de l'organisation des apprentissages à long terme ainsi que celle de la reprise des connaissances anciennes dans un processus d'enseignement.

iii) Il a de plus été montré¹³ que ces connaissances premières pouvaient se constituer en *obstacles*, au sens Bachelardien du terme, même en mathématiques. Par exemple, la connaissance scolaire élémentaire du nombre naturel tend à faire obstacle à la compréhension des rationnels comme nous l'avons signalé plus haut. Il ne s'agit pas de difficultés mais bien de connaissances, d'abord nécessaires, mais qui perturbent durablement les apprentissages ultérieurs et qui persistent, même après l'acquisition des savoirs corrects. Dédit a priori de la Théorie, le fait a été observé sur plusieurs exemples¹⁴

3. La relativisation des connaissances

i) La définition des connaissances, par leur fonction dans une situation, entérine le fait que pour une même notion mathématique, chaque actant (société, professeur, élève) développe des connaissances a priori différentes suivant les conditions dans lesquelles il les utilise, les crée ou les apprend. Valides ou non d'un point de vue académique, elles sont d'une certaine façon ainsi légitimées, reconnues. Une idée fausse apparaît et disparaît suivant les mêmes lois qui font apparaître ou disparaître une idée vraie. Le fait pour un observateur de savoir qu'une connaissance est fausse parce qu'elle produit des erreurs n'est pas nécessairement la marque d'un fonctionnement erroné des mécanismes de cognition du sujet observé. La T. S. renvoie à l'étude des conditions présentes et antérieures qui "justifient" l'état de ces connaissances, et à l'usage qu'il convient d'en faire.

Par exemple, tous les élèves établissent leur compréhension de la "multiplication" de deux nombres, par le sens qu'elle prend dans les entiers naturels: 5×4 représente $5 + 5 + 5 + 5$, et ils en contrôlent l'usage implicitement par des "propriétés" comme : "le produit de deux nombres ne peut pas être plus petit que le plus grand des deux". Le jour où ils doivent interpréter la "multiplication" de 0,8 par 0,6, leurs moyens de compréhension et de contrôle ont disparu. Il s'agit d'une autre opération, différente bien qu'elle porte le même nom et qu'elle ressemble un peu à la précédente.

ii) Inversement, le fait d'accorder ainsi à l'élève ou à une institution, la légitimité de connaître une notion d'une façon particulière, ne fait pas automatiquement de cette reconnaissance un objet essentiel pour le travail de l'enseignant. Parmi les connaissances erronées, seules sont intéressantes pour le professeur celles qui sont significatives pour les autres élèves, c'est-à-dire celles qui ont une probabilité relativement forte de se reproduire, et qui peuvent être expliquées et éradiquées dans un temps raisonnable etc. Ces connaissances ne sont pas a priori des dégradations ou des erreurs par rapport aux connaissances culturellement établies. Elles ont une légitimité qu'il convient de comprendre et de respecter, même si on veut les modifier.

¹⁰ G. VERGNAUD avec la théorie des Champs conceptuels

¹¹ R. GRAS avec l'analyse implicite,

¹² Y. CHEVALLARD

¹³ G. BROUSSEAU 1976

¹⁴ H. EL BOUAZZAOUI 19

Cependant on a pu dans plusieurs pays, observer les inconvénients de l'attention excessive portée aux erreurs des élèves.

iii) Les connaissances « relatives » peuvent être comparées aux "connaissances scientifiques ou académiques "universelles". Mais il faut prendre garde à la confusion : le fait de reconnaître à ces connaissances une existence effective, et donc une certaine adéquation ou une certaine légitimité ne les rend pas pour autant "vraies" ni surtout « équivalentes » à d'autres.

4. Le gradient et la transposition didactiques

Toujours à propos d'une même notion, deux institutions peuvent avoir des connaissances différentes. Ce qui peut être un obstacle à leur collaboration si elles entrent ensemble dans une nouvelle institution. Au delà d'un certain seuil, un effort d'homogénéisation est nécessaire. Il se traduit par une situation didactique: l'une des institutions tente de modifier le répertoire de l'autre, directement ou par l'intermédiaire d'une tierce. Souvent l'action didactique effective est réciproque. Les difficultés à coopérer sont d'autant plus grandes que ces différences sont importantes et que le nombre des situations où ces différences se manifestent est grand.. Cette sorte de gradient crée donc une pression didactique. Par contre, enseigner n'est possible que si les répertoires ne sont pas trop différents et se réalise au prix d'une adaptation - spontanée ou méditée - des connaissances transmises appelée *transposition didactique*. D'ailleurs, le fait même d'enseigner une connaissance la modifie, aussi bien pour l'enseignant que pour l'enseigné. La transposition est une modification des connaissances qui change leur rôle, la situation où elles interviennent. Elle est une condition et un effet de la relation didactique.

5. Les paradoxes du "contrat" didactique.

Jeanine Filloux, prolongeant le contrat social de ROUSSEAU, a dégagé la notion de *contrat pédagogique*, où l'on précise, avec les élèves, avec la société, et avec les professeurs les obligations réciproques des uns envers les autres. Ce contrat peut-il être prolongé à la partie "enseignement" de l'éducation? Le professeur peut-il préciser et passer un contrat d'enseignement de la même façon? Dans un premier temps, j'avais imaginé que le professeur agissait sur le système {élève situation connaissance}, exactement comme l'élève agit dans la situation non didactique. Auquel cas, le contrat didactique aurait été simplement les règles de cette situation. Je me suis aperçu qu'une telle modélisation conduisait à des contradictions signalées dans la réalité par des paradoxes: par exemple, le professeur ne peut pas formuler à l'avance ce que l'élève aura à faire dans un problème, sans lui enlever par là même la possibilité de manifester ou d'acquérir la connaissance correspondante. Le professeur ne peut pas s'engager à faire "comprendre" une connaissance, encore moins à la faire produire : personne ne sait comment on "fait" de nouvelles mathématiques, encore moins comment on le fait faire de façon certaine. De sorte que la relation didactique ne peut pas donner lieu formellement à contrat ; les clauses ne peuvent pas être écrites ; les sanctions en cas de rupture ne peuvent pas être prévues etc. Pourtant, l'illusion qu'il y a contrat est indispensable pour que la relation s'engage et, à l'occasion, réussisse. Chacun, le maître et l'élève, se fait une idée de ce que l'autre attend de lui, et de ce que chacun pense de ce que l'autre pense... et cette idée crée les possibilités d'intervention, de *dévolution* de la partie a-didactique des situations et *d'institutionnalisation*. Elle permet la fiction que le professeur enseigne un savoir définitif préparant sans à coups les acquisitions ultérieures. La théorie des situations montre que la situation didactique ne peut pas relever du même type de modèle que les situations non didactiques (à usage didactique) de l'élève. Le contrat didactique existe donc comme fiction nécessaire. Le jeu des situations réelles et des situations fictives est indispensable lui aussi.

Arrêtons ici cette évocation des conséquences de l'approche théorique des questions d'enseignement par l'analyse des enseignements de mathématiques. Plusieurs seront peut-être

surpris de ce que je n'en tire aucun précepte universel et général, aucun conseil, aucune instruction. Les études concrètes de théorie des situations indiquent dans quelles conditions précises l'enseignement de telle notion est possible sous telle forme, et que ces conditions ne sont jamais extrêmes. La conclusion est presque toujours la suivante : les interventions didactiques sont des *régulations* destinées à maintenir des équilibres, plus qu'à produire directement des effets et ces régulations sont spécifiques de la notion mathématique.

La conséquence la plus spectaculaire des études théoriques du contrat didactique a été de montrer que le constructivisme radical ne peut pas aboutir à l'acquisition des savoirs visés par l'élève sans interventions didactiques.

D'autres études ont mis en évidence on montré la nécessité et le fonctionnement d'une mémoire didactique spécifique etc.

6. L'épistémologie des professeurs

Avec la T.S., on admet que les connaissances développées par une institution sont des adaptations "légitimes", a priori différentes de celles que les autres institutions développent dans des circonstances différentes. La question est alors de savoir si les institutions d'enseignement développent, par nécessité professionnelle, des connaissances originales relatives à l'acquisition des connaissances, à leur rôle, à leur statut etc. Ces connaissances sont-elles vraiment différentes de celles proposées par diverses institutions scientifiques, autour de la psychologie, de la sociologie, de l'épistémologie..., elles mêmes différentes de celles en usage dans la vie courante?

Exemple trivial. Les professeurs font un usage fréquent de "l'étourderie" comme moyen de qualifier une réponse et de caractériser un élève. L'étourderie est une réponse inexacte à une question à laquelle la culture officielle de la classe propose une réponse non seulement facile, mais familière, indigne d'un nouveau travail didactique. Elle permet au professeur d'éviter toute action didactique. Je ne connais pas l'étourderie comme élément de diagnostic médical... C'est un élément de la psychologie (spontanée) des professeurs. Mais ce n'est pas un rapport personnel au savoir.

Exemple moins trivial : La production "intelligente" des réponses des élèves doit-elle suivre le schéma d'une démonstration culturellement correcte? Les professeurs ne croient pas nécessairement qu'il en est ainsi, et leur pratique suit d'autres voies. Ils peuvent par exemple se comporter en fins psychologues cognitivistes, en interprétant les arcanes de la pensée originale d'un élève, en y répondant et en la rectifiant avec une grande habileté rhétorique. Mais il s'agit là de l'exercice de connaissances personnelles du professeur qui n'ont pas droit de cité parmi les connaissances officielles. Concrètement le professeur ne peut pas transformer sa classe en laboratoire de psychologie. Les errements d'une élève n'ont pas toujours de vertus didactiques pour les autres, bien au contraire... Le professeur est donc obligé de pratiquer et de professer un modèle de pensée "officiel" calqué sur ce que la culture déclare intelligible et explicite, avec la seule tolérance offerte par la transposition didactique. Le fait de vouloir confondre l'organisation du savoir avec les lois de sa production est manifestement une erreur, mais c'est l'indispensable conséquence du contrat didactique : le professeur ne peut pas rectifier toutes les trajectoires personnelles, ni même les trajectoires collectives si elles s'écartent trop de l'organisation finale des savoirs. Ce serait trop coûteux, voir techniquement impossible... d'où la conclusion : une épistémologie calquée sur "l'organisation actuelle des savoirs"

Ainsi dans sa pratique, son vocabulaire, ses exigences, etc. le professeur mobilise des "concepts" ou des "lois" qui ont pour objet de permettre l'action de l'élève et de justifier les décisions du professeur. "Comment chercher ?", "Qu'est-ce que chercher ?", "Comment apprendre ?", "Comment comprendre ?" etc. sont des questions que se posent l'élève et le

professeur de l'enseignement secondaire et auxquelles ils répondent implicitement par leur pratique, témoignant ainsi d'une sorte d'épistémologie spontanée et fonctionnelle, mais fautive. Celle-ci s'accompagne de toute une mythologie de métaphores et de symboles etc. mais l'ensemble constitue un système praxeologique¹⁵ acceptable du point de vue ergonomique¹⁶.

exemple : en mathématique professionnelle, et en principe, seule la validité du résultat compte. En dehors de la rigueur, toutes les autres considérations : la longueur, la complexité, le caractère éclairant, l'élégance, la clarté du style, le naturel heuristique... sur le mode de preuve sont subalternes. Raisonnement subtil ou pénible énumération exhaustive de cas, intuition géniale ou hasard inespéré, il suffit de montrer que la solution résout le problème sans discussion. Mais un élève débutant qui agit ainsi et qui produit par exemple les racines d'une équation "en essayant 1, -1, i, -i, parce que ça marche souvent" n'a aucune chance de voir sa solution légitimée (par la suite on le créditera d'un certain droit à voir directement ce genre de solution).¹⁷ Une solution que l'on subodore et qui satisfait miraculeusement les conditions données, n'a pas de valeur dans l'épistémologie des professeurs, et bien peu dans les examens... parce qu'elle n'a aucune fonction didactique positive. (Ceci explique que les professeurs et donc les élèves répugnent à utiliser les conclusions pour chercher les bonnes valeurs à mettre dans le cours de la démonstration, ou à remonter les égalités de droite à gauche etc.). Ainsi les conditions de production d'un résultat mathématique sont très différentes et traitées avec beaucoup plus de vigilance et d'intentionnalité en situation didactique.

Le fait de reconnaître que la croyance épistémologique des professeurs a pour origine le besoin de satisfaire les besoins de leur profession, n'est pas un jugement de valeur. Elle peut être une vérité ou une erreur épistémologique et dans les deux cas être également utile ou même nécessaire. Mais il est important de ne pas confondre ni les objets ni les fonctions.

La T. S. étudie le fonctionnement effectif des systèmes. Il existe des "croyances" épistémologiques, d'origine culturelle, historique, scientifique, etc. Elles ont une fonction, une justification. Elles peuvent être justes ou fausses, et adaptées ou inadaptées indépendamment ! Ce qui facilite la relation didactique "locale" n'est pas toujours sans conséquence à terme.

Le terme "épistémologie" couvre un champ plus large que la conception de la genèse et du sens des savoirs, bien que ce soit cette partie qui soit la plus importante pour les rapports de l'enseignant avec la société savante.

La façon dont un professeur précis pense pouvoir produire une genèse didactique des savoirs qu'il veut enseigner dans sa classe, doit bien être contrôlée par un répertoire de connaissances explicites ou implicites, de nature épistémologique. On pourrait, peut-être, l'identifier comme "l'épistémologie de tel professeur, pour telle notion, dans telle classe"... Mais il s'agit là d'une spécification difficile à observer et à manier. Ce qui est observable c'est le produit, le registre de ses choix et de ses décisions. Vouloir inférer de ce registre, un répertoire épistémologique privé est hasardeux sauf sur des points assez singuliers. De plus, ce qui est particulier à un professeur n'est pas très intéressant en didactique où ce sont les phénomènes collectifs et stochastiques qui priment.

Ce qui est intelligible et justifiable par un "intérêt professionnel" universel, scientifiquement vrai ou faux, est bien plus important et facilement vérifié en tant que fait didactique que ce qui est singulier ou explicable par des circonstances non didactiques.

¹⁵ Y. CHEVALLARD *****

¹⁶ Elle tient compte des forces et des efforts des partenaires

¹⁷ Or pendant trois cent ans, les Gauss, Germain et autres n'ont pas eu honte de "démontrer" la conjecture de FERMAT sur des portions négligeables de N , bien que ces résultats n'aient aucune valeur comme arguments pour la conjecture générale. L'argument était que chaque démonstration était vraie, et qu'on la croyait utile pour "chercher des méthodes".

Il serait intéressant d'établir un inventaire des croyances formant l'épistémologie des professeurs, et qui sont justifiées par les nécessités de leur tâche. Mais la principale difficulté réside en ce que tous les mathématiciens pratiquent la didactique. Et par conséquent, hors de leur domaine de recherche, ils partagent les conceptions didactiques des professeurs. Il n'est donc pas facile de distinguer une croyance épistémologique d'un expert et celle d'un professeur. Seul un travail didactique et épistémologique puis historique peut y aider.

Par exemple, l'introduction de la pratique des démonstrations publiques dans les usages mathématiques, en Grèce, au V^{ème} siècle av. J.C, est une décision avant tout d'origine et de nature didactiques. Ses conséquences sur la pratique des mathématiques ont été gigantesques. Je soupçonne fortement - je reconnais que ma thèse est assez aventurée - que le long mutisme en mathématiques de la civilisation "directement" héritière de cette culture - j'entends Rome et Byzance -, n'est pas un hasard, et que la nécessité de démontrer s'est constituée en un énorme obstacle épistémologique qui a pesé lourdement sur la production et l'intérêt des mathématiques dans ces sociétés. L'opposition entre cette pratique aujourd'hui classique des mathématiques avec les mathématiques plus appliquées et plus volontiers ésotériques (toujours pratiquées dans le monde) est à repenser.

L'épistémologie "officielle" des mathématiciens est très contaminée par l'épistémologie des professeurs (parce que la communication et la diffusion des mathématiques apparaissent comme une nécessité incontournable, parce que les mathématiciens ont été de bons élèves et souvent de bons professeurs). Ce qui explique qu'elle peut être parfois bien fautive et abusive.

L'épistémologie des professeurs est à la fois :

- leur moyen de «lecture» des mathématiques,
- leur moyen de les concevoir comme les connaissances projetées pour les élèves,
- leur moyen d'interpréter les comportements des élèves comme des écarts par rapport à cette norme
- et leur moyen d'envisager une intervention.

L'épistémologie des professeurs a pour fonction cognitive de confondre ces quatre objets en un seul. Pour cette raison elle est tenue par les professeurs pour la "vraie" vérité des mathématiques, de l'enseignement et des élèves.

Il a été observé¹⁸ que les professeurs utilisaient exactement les mêmes termes pour décrire leurs objectifs, les connaissances des élèves, l'explication de leurs erreurs et les moyens qu'ils envisageaient pour y remédier. Par conséquent, je soupçonne que les professeurs ont beaucoup de mal à distinguer les deux genèses qui forment le dipôle de la transposition didactique :

- « La manière dont un professeur pense pouvoir reconstruire cette genèse dans sa classe ». C'est la chronogenèse didactique des connaissances mathématiques, le mode de construction progressive des concepts. Elle doit s'adapter aux nécessités de la présentation et de l'apprentissage des notions par les élèves...
- « la genèse et le sens des savoirs que le professeur a l'intention d'enseigner ». C'est la topogenèse : la composition et l'organisation des connaissances qui résultent finalement du processus précédent

Les professeurs ont tendance à confondre ces deux projets avec l'organisation «officielle» des savoirs en usage dans l'enseignement, et dans la société savante. Ils prennent alors l'ordre déterminé par un exposé axiomatique de la notion mathématique visée, à la fois comme modèle de chronogenèse et d'organisation finale des connaissances.

Dans cet exposé, nous nous sommes bornés à ces cinq exemples, mais il en existe beaucoup d'autres.

¹⁸ Nadine MILHAUD (1983) Mémoire de DEA, Bordeaux 1.

4. La place et le rôle de la didactique des mathématiques dans l'éducation et dans la société

a) *La théorie des situations dans la didactique des mathématiques et des sciences*

Qu'est ce que la didactique des mathématiques ?

Le terme est utilisé dans des sens différents suivant les pays et suivant les institutions. Par exemple, un même cours sur l'enseignement de la géométrie, destiné à un même public d'élèves professeurs, pourra s'intituler "Didactique des Mathématiques" dans un département de mathématiques, ou "Mathématiques" tout court, dans un département ou une faculté de Sciences de l'éducation. La chose se complique du fait que l'on utilise souvent le même terme pour désigner une activité, les connaissances et les moyens techniques qu'elle mobilise et son étude, scientifique ou non.

Ainsi du terme grec qui signifie "enseigner"¹⁹ (une connaissance), par opposition avec "éduquer", (conduire les enfants), Comenius tire "didactique" dans le sens d'art d'enseigner et donne sous ce titre une œuvre destinée à combattre les pratiques d'enseignement dogmatiques et scolastiques où une institution s'interpose entre les textes et les élèves pour mieux contrôler leur éducation religieuse. Par la suite, ce terme désigne tout ce qui sert à enseigner: matériels, techniques, termes²⁰ et connaissances. Par conséquent, la production de ces matériels: manuels logiciels, conseils, et l'art de produire ces matériels entrera dans le champ de la didactique.

Par conséquent, aussi, l'étude de l'enseignement des mathématiques comme pratique ou comme projet social, quelle que soit la discipline ou le point de vue dans laquelle cette étude est entreprise, entrera dans le champ de la didactique des mathématiques: l'étude psychologique des comportements mathématiques de l'élève en situation scolaire ou non, l'étude anthropologique ou ethnologique de l'activité des professeurs, l'étude linguistique des discours scolaires sur les phénomènes de hasard, etc.

Mais au XIX^{ème} siècle le sens de "didactique" s'était étendu à tout ce qui dénote l'intention d'enseigner - en particulier dans la situation ridicule mais assez répandue où l'élève n'a aucune envie d'apprendre. Cette connotation péjorative qui associe "didactique" et "pédantisme" va rendre impossible l'usage du mot didactique dans certains pays.

Ainsi aujourd'hui, le terme de didactique recouvre l'activité même d'enseignement des mathématiques, l'art et les connaissances nécessaires pour le faire, l'art de préparer et de produire les moyens de cette activité, l'étude de cet enseignement et de tout ce qui s'y manifeste, comme projet social, comme fait socio-historique, ou comme phénomène...

Comme la conjonction des disciplines classiques ne semble pas en mesure d'expliquer simplement l'ensemble des phénomènes de didactique, ni de proposer des techniques appropriées, des théories spécifiques (home made, disent certains, non sans un certain mépris) ont dû se développer (méthodologie, théories de l'enseignement). Les plus intéressantes sont celles qui permettent de prendre en charge - de réguler - les conséquences de l'importation des résultats des autres disciplines, dans l'enseignement.

Didactique générale appliquée ou science propre ?

Pour beaucoup de chercheurs, de telles théories doivent d'abord être générales, c'est-à-dire indépendantes du contenu, pour s'appliquer ensuite à un contenu précis. La didactique des mathématiques serait d'abord une théorie générale du didactique. Ma position à ce sujet est beaucoup plus nuancée. Le didactique commence avec la détermination de son objet : une connaissance particulière. Il n'y a aucune raison de penser que l'invention ou la pratique de la

¹⁹ et qui donnera la racine latine "disc" apprendre

²⁰ Littré 1872 : Didactique : Qui appartient à une science (2^{ème} acception) .

géométrie puisse être une même aventure que celle de l'algèbre. L'hypothèse que la construction de toute connaissance suivrait des processus identiques me semble contredite par l'histoire et par ma pratique des mathématiques. Pour l'élève comme pour l'humanité, une connaissance nouvelle est beaucoup plus qu'une simple application d'une connaissance plus générale, et c'est ce qui fait son intérêt. Accepter d'emblée l'idée d'une didactique générale préalable me semble propre à écarter de l'étude tout ce qui est propre au didactique. Une didactique générale ne peut être, à mes yeux, qu'une méta didactique chanceuse. Et c'est pourquoi la théorie des situations commence par l'étude et la modélisation des situations didactiques propres à tel ou tel savoir précis.

Je ne saurais dire si la théorie des situations, ou l'un de ses avatars, est en mesure de fournir à la didactique des mathématiques l'ossature théorique et expérimentale susceptible d'en faire une science à part entière. J'espère seulement que oui. Elle se présente comme une approche scientifique de l'ensemble des problèmes posés par la diffusion des mathématiques, dans lesquels la spécificité des connaissances enseignées est engagée et joue un rôle significatif.

Didactique des sciences

Il n'aura pas échappé à l'auditeur attentif, s'il en reste après un si long exposé, que la mise en situation des connaissances mathématiques renouvelle leur présentation aux élèves. La fonctionnalité des connaissances met en évidence leur utilité, leur rôle par rapport à un milieu. Elle remet le rôle de la théorisation mathématique dans la perspective de ses applications.

D'autre part, l'analyse des transpositions peut fournir un cadre expérimental au problème de l'adaptation des mathématiques à la formation en vue de différentes institutions. Faut-il enseigner la théorie des distributions dans telle école d'ingénieur ? ou peut-on se satisfaire d'une structure moins puissante mais plus aisément maîtrisable par les élèves dans le temps qui leur est donné ? La question ne dépend pas de débats idéologiques mais de modélisations, de mesures, de calculs et d'expériences.

b) Intérêt que présente la didactique des mathématiques.

Intérêt pour les professeurs

Le professeur s'attend à ce que la didactique lui fournisse au moins l'essentiel des *techniques spécifiques des notions à enseigner*, compatibles avec ses conceptions éducatives et pédagogiques générales :

- des techniques "locales" : des préparations de leçons, des problèmes et des exercices, du matériel d'enseignement, des manuels, des logiciels, des instruments de gestion tels qu'objectifs et moyens d'évaluation (communes à tous les élèves ou électives, c'est-à-dire réservées à des élèves présentant des difficultés particulières).
- des techniques plus "globales" : des curriculums pour tout un secteur des mathématiques, des méthodes clés en main, des programmes sur plusieurs années.

Par exemple, il veut savoir comment rendre possible une réelle activité scientifique dans sa classe sans sacrifier le temps des élèves à des tâches sans vertus formatrices. Des situations comme "l'agrandissement du puzzle"²¹ montrent que les élèves peuvent "construire" un savoir non enseigné et dans une certaine mesure, le réinvestir pour résoudre de nouveaux problèmes. Mais cette situation n'est transférable à aucune autre notion mathématique.

Ou encore le professeur veut savoir comment obtenir des élèves qu'ils apprennent à effectuer les calculs à la plume, et notamment les tables, alors que l'usage intensif de la calculatrice s'est banalisé.

Comme tous les objets techniques, les réponses n'auront toujours que des qualités relatives et n'éviteront pas l'échec si le professeur pas possède de réelles compétences pour les mettre en œuvre.

²¹ ****

Le professeur peut attendre aussi de la didactique des *connaissances relatives à différents aspects de son travail*:

- sur les conditions à créer dans les situations d'enseignement et d'apprentissages,
- sur les conditions à maintenir dans la gestion ou la conduite de l'enseignement
- sur les élèves, leurs comportements, leurs apprentissages, leurs résultats dans les conditions spécifiques de l'enseignement.
- sur les phénomènes de didactique auxquels élèves et professeurs sont confrontés avec tous les partenaires de la communication des savoirs.

Dans un tout autre ordre d'idée, la didactique peut, à terme, aider le professeur à *modifier son statut, sa formation et ses rapports avec la société*:

*En agissant directement sur le statut des connaissances qu'il utilise, qui passent d'un art à des techniques s'appuyant sur un domaine scientifique.

*En agissant sur les connaissances de ses partenaires professionnels, et sur celles des parents et du public,

*En développant de meilleures possibilités pour le public et pour les citoyens d'utiliser l'enseignement de façon plus satisfaisante pour eux,

*En donnant de meilleures possibilités aux pouvoirs publics ou privés de gérer l'enseignement par des moyens plus appropriés.

Lorsque la didactique explique les causes effectives d'une difficulté d'enseignement par un phénomène ou par une loi, elle soulage les enseignants d'une partie de la suspicion illégitime d'incompétence qui pèse sur eux. Par contre, elle précise leurs responsabilités et donne des moyens de régulation de leur travail qui peuvent être vécus comme contraignants. C'est le cas notamment lorsque la didactique se fait l'écho et le promoteur de prescriptions inférées directement et sans analyse des résultats obtenus dans d'autres disciplines, ou qu'elle reprend sans études sérieuses les objurgations de tel ou tel organisme ou groupe de pression. L'enseignement est le dernier refuge de tous les fantasmes collectifs ou individuels, le dernier champ clos où peuvent s'affronter en toute bonne conscience toutes les idéologies. Pour gérer l'enseignement, la société lui applique arbitrairement des modèles inadéquats : le consumérisme, le productivisme industriel, l'utopisme politique ou religieux, le scientisme... Dans ces conditions, les enseignants, surchargés d'obligations incompatibles, de prescriptions inapplicables, de représentations exotiques, perdent la capacité de contrôler les paramètres fondamentaux de leur action, quand ils n'en profitent pas pour se décharger de ce qu'ils pourraient assurer et qui disparaît de l'attention générale.

Examinons à titre d'exemple, l'idéologie de "l'innovation", qui a soufflé longtemps dans mon pays et dans quelques autres. Une innovation intéresse un certain nombre de professeurs parce qu'elle les interroge sur leurs pratiques et les aide à lutter contre l'obsolescence. Elle intéresse tous ceux qui gravitent autour de l'enseignement : formateurs, éditeurs, responsables divers parce qu'elle nourrit leur discours et justifie leur intervention, Elle intéresse tous ceux qui ont intérêt à laisser entendre que l'enseignement est inadapté etc. Mais en faisant de la nouveauté le critère essentiel de la valeur de l'action proposée, on détruit les chances de réussite des actions proposées et on montre que ce n'est pas l'amélioration de l'enseignement qui est visé. En effet, le propre d'une innovation c'est de disqualifier une pratique ancienne afin de la remplacer par une autre, et non pas de la corriger. On a l'illusion empiriste que parmi les cent fleurs de l'innovation, les enseignants vont cueillir celles qui seront le plus adaptées, mais une innovation chasse l'autre, elle critique la précédente mais ne la régule pas. Certaines connaissances ne peuvent plus être enseignées et disparaissent, non pas parce qu'on a décidé qu'elles sont devenues inutiles mais parce que des cascades d'innovations ont fait

disparaître l'écosystème qui leur permettait d'exister comme objet d'enseignement. Les modes passent, ou reviennent sans progrès véritable. L'idéologie de l'innovation tue l'innovation.

Ce qui ne veut pas dire que le conservatisme didactique ne présente pas d'autres inconvénients tout aussi redoutables

Intérêt pour la formation des professeurs.

En donnant aux professeurs une science intégratrice et une mémoire propre, la didactique permet la création d'une culture commune ainsi que la prise en compte de l'expérience acquise et des résultats des recherches scientifiques. La dépendance de l'enseignement par rapport à de nombreux domaines de connaissances conduit à un engorgement décourageant de la formation. La didactique réduit les redondances qui en résultent et rend plus facile l'organisation de cours centrés sur l'activité principale visée.

Appuyée sur un édifice scientifique, l'ingénierie qu'elle proposera ne sera pas nécessairement accompagnée partout d'une pratique plus élégante que celle des meilleurs enseignants, mais elle pourra améliorer les résultats d'ensemble ou éviter certaines catastrophes.

Les difficultés de l'enseignement de la didactique pour les professeurs en formation viennent de ce que le travail de transposition didactique de la didactique elle-même reste à faire. Le volume et la complexité des résultats de recherches parcellaires dispersées dans de nombreux champs disciplinaires disparates et concurrents, s'est accru beaucoup plus vite que la durée de formation et que la hiérarchie des ouvrages de synthèse utilisables pour les débutants. Pour comprendre et utiliser l'un de ces résultats dans une classe, il faut apporter des connaissances préalables sur tous les autres sujets, dont seuls certains enseignants en service disposent.

Il faut admettre et respecter l'existence nécessaire d'une "didactique de débutant", garante d'un comportement professionnel minimal, qui puisse cohabiter dans la formation avec une formation théorique qui prépare un usage plus raffiné de savoirs de didactique plus avancés. La projection de toutes les idées "nouvelles" est gratifiante pour le formateur de professeurs mais il arrive qu'il ne soit pas capable de prévoir ce que ses étudiants en feront. Inversement, l'utilitarisme à cours terme de toute la formation des professeurs aboutit au pire : l'illusion de la simplicité et l'impossibilité de comprendre et de traiter la cause de ses échecs.

Intérêt pour les parents et pour le public

Qu'est-ce qui est possible, qu'est-ce qui est illusoire ou fallacieux? Toutes les réformes butent sur les insuffisances et les différences de conceptions épistémologiques entre les partenaires sociaux. Le contrôle du public sur l'enseignement est légitime, mais il exige un minimum de connaissances et d'informations, et toute une hiérarchie sociale et scientifique qui traite les différents niveaux de connaissance et de régulation des actes didactiques. Ce modèle existe dans le domaine de la médecine : le vocabulaire du biologiste, celui du médecin, et celui du malade diffèrent entre eux. Chacun a sa nécessité et son domaine d'efficacité dans l'usage et la régulation de la médecine. Ni la confiance aveugle dans le corps professoral, ni la suspicion généralisée ne sont les meilleures solutions. Mais pour cela, il est nécessaire que des répertoires didactiques minimaux soient maintenus, utilisés, hiérarchisés et "reconnus" comme légitimes. De ce point de vue, la diffusion universelle de l'opinion de chacun sur tous les sujets, permise par les médias modernes, a tendance à détruire le fonctionnement social de ces répertoires. Avec les meilleures justifications idéologiques, elle détruit les transpositions et pose de redoutables problèmes dans la gestion de tous les systèmes fondamentaux traditionnels.

C'est d'ailleurs sur ce modèle médical que certains parents tendent à concevoir et organiser la régulation de l'enseignement de leurs enfants. Les difficultés sont conçues comme des maladies, auxquelles il convient de trouver remède, au besoin avec des institutions spécifiques qui, à l'occasion, trouvent dans la complaisance des médecins le moyen de faire

passer leur travail pour des soins de santé. De plus en plus d'enfants et d'activités sont ainsi retirés du projet social commun. L'enseignement collectif est contaminé: on a relevé une nette tendance à réduire les leçons à la "remédiation" des erreurs individuelles des élèves, constatées dans les exercices.

Ces actions s'autorisent d'une conception individualiste et consumériste de l'enseignement qui se répand de plus en plus et qui accroît la confusion. Ce qu'on apprend à l'école n'est pas seulement ce dont on aura personnellement besoin dans l'avenir pour survivre (personne ne peut savoir cela). C'est d'abord la culture que la société considère comme le minimum nécessaire pour chacun de ses membres adultes, c'est aussi le service civil que les enfants doivent remplir en relevant des défis d'apprentissage, qui permettront à la société de trouver les différentes sortes de spécialistes dont elle aura besoin. Un élève n'apprend pas les mathématiques que pour ses besoins, mais aussi pour offrir une chance à la société de trouver, le moment venu, aussi bien les mathématiciens que les modestes utilisateurs de mathématiques dont elle aura besoin.

intérêt pour la science elle même:

Améliorer la production de connaissances scientifiques sans perdre le contrôle de leur validité, est un souci pour la communauté, en particulier pour les mathématiciens. Pour que la communication et la restructuration des savoirs puisse se développer, il faut que ces deux activités entrent dans le processus social scientifique d'évaluation. La didactique aurait vocation d'être le moyen de cette entrée si elle résolvait certains des problèmes théoriques qui se posent à elle...

Dès lors que l'on touche à l'organisation des savoirs, c'est avec ses producteurs qu'il faut discuter. C'est donc au sein même de la communauté scientifique que les didacticiens et les professeurs doivent gagner la légitimité de réorganiser les savoirs enseignables. Ces réorganisations font d'ailleurs partie intégrante de l'activité scientifique. On oublie trop souvent que l'élagage et la réorganisation imposés par la communication et l'enseignement des sciences sont nécessaires et contribuent fortement à leur évolution.

Ce point explique pourquoi la didactique d'une discipline scientifique doit se placer sous la responsabilité de cette discipline, même si elle peut être l'objet de didacticiens d'origines scientifiques diverses.

La grande difficulté de cette fonction de la didactique, c'est qu'elle prétend enseigner aux professionnels de la recherche, un art qu'ils pratiquent inconsciemment dans leur travail d'une façon qui les satisfait, en l'appuyant sur une science qu'ils considèrent par conséquent comme évidente ou étrange, donc inutile.

intérêt pour l'ensemble de la société

C'est en science et plus précocement en mathématiques que les élèves peuvent apprendre comment établir et gérer la vérité scientifique dans une société démocratique. Les moyens de réaliser ce projet ne sont pas faciles à inventer ni à mettre en œuvre, mais il est encore plus difficile de faire entrer ce projet et ses conséquences dans la culture. Seule la pénétration de la didactique dans la culture permettra d'améliorer la gestion politique de la diffusion des savoirs et d'en rendre plus démocratiques l'usage et la création.

c) Les mathématiques, la didactique des mathématiques, l'éducation et les sciences de l'éducation.

Termes et idéologie : L'instruction, l'enseignement, l'éducation

Le terme "éducation mathématique", a remplacé "instruction en mathématiques", et même "enseignement des mathématiques" au cours des années 60. Il s'agit d'un élargissement progressif de l'ambition assumée. "Instruction" consiste à structurer et informer : structurer l'élève par les connaissances, les connaissances par le savoir ; l'accent est mis sur la culture à

transmettre. L'enseignement consiste à faire connaître, à faire savoir, à faire apprendre, l'accent est mis sur le moyen de transmettre. L'éducation consiste à conduire, à élever ou à dresser, l'accent est mis sur l'ensemble du processus par lequel un enfant devient adulte.

Dans ces conditions, il devient plus difficile aujourd'hui de prétendre traiter de l'instruction et de l'enseignement sans les placer d'emblée dans le cadre global d'une éducation. Les ambitions respectives de l'enseignement, de la méthodologie, de la didactique, de l'éducation mathématique, et de la T.S. ont été suffisamment évoquées ci-dessus. Elles sont légitimes, distinctes et complémentaires. Et après tout, en sciences, les approches multiples d'un même objet ne sont pas une nouveauté.

Mais il semble qu'il soit difficile d'en déduire une organisation sociale convenable pour assurer la responsabilité de l'enseignement, la formation des professeurs de mathématiques et de la recherche dans ce domaine.

En fait, une coopération est nécessaire et les institutions ne semblent pas avoir d'intérêt à cette coopération.

L'appartenance à la sphère des mathématiciens

Les professeurs de mathématiques devraient se sentir appartenir à la sphère des mathématiciens,

- d'abord parce qu'ils travaillent sur de la matière mathématique et que leur activité est en bonne part une activité mathématique.
- mais surtout parce que, transposant des savoirs mathématiques, ils doivent s'en approprier les formes et les modifications actuelles, comme un professeur de langue doit être familier de la culture de cette langue et faire aussi des séjours assez fréquents dans un pays appartenant à cette culture.

C'est d'ailleurs ainsi que les jeunes étudiants en mathématiques se vivent en France avant de s'orienter vers l'enseignement.

Or ils en sont rejetés actuellement, dans la mesure où le terme de mathématicien est réservé à l'université, aux producteurs de savoirs mathématiques stricto sensu. De plus toute une population d'ingénieurs, et d'experts les a remplacés auprès de la population dans le rôle de recours et de médiateur pour les mathématiques "utiles". Les enseignants sont "enfermés" dans leur fonction de professeurs, isolés dans une culture éloignée des pratiques et des soucis du public.

Les étudiants qui viennent aux mathématiques par d'autres voies, celles de l'éducation par exemple, peuvent mieux considérer leur propre évolution de façon positive. Mais en fait, ils sont considérés à leur insu comme encore plus éloignés de la sphère des mathématiciens

L'appartenance à la sphère éducative

Les professeurs devraient se sentir appartenir intellectuellement à la sphère éducative. Mais souvent cette appartenance se fait davantage par l'intermédiaire de la profession que par celle de la culture, trop vaste, trop disparate. Ils la visitent au mieux en amateurs éclairés. Les deux questions qui se posent à eux sont celles-ci :

- des intentions, des théories et des techniques éducatives dans l'enseignement peuvent-elles affecter les connaissances mathématiques à enseigner et leur organisation didactique ?
- Réciproquement des variétés didactiques de l'enseignement des mathématiques ont-elles des propriétés éducatives différentes ?

Si la réponse à ces deux questions était négative, il suffirait de juxtaposer les deux cultures, sous une responsabilité commune ou non, tierce ou non, comme cela se fait pour d'autres formations professionnelles au niveau universitaire. Mais la réponse n'est pas négative, en particulier pour la seconde, comme il est facile de le montrer : faire utiliser des théorèmes, les faire réciter, faire répéter les démonstrations, les faire trouver, initier les élèves

aux débats de preuve ou leur révéler le génie exemplaire d'Euclide, ont des propriétés éducatives différentes.

D'autre part, l'enseignement effectif ne peut se dérouler sans que les communautés disciplinaires et culturelles ne soient ou ne se sentent interpellées à ce sujet auprès du public à un moment ou à un autre. A ces moments, l'absence de culture didactique des uns et des autres se fait sentir, ainsi que l'absence d'une communauté capable d'assumer la responsabilité scientifique de cette culture et des recherches qui l'alimentent.

Or, les solutions "universitaires" ne tendent pas à répondre à ces attentes. On peut concevoir qu'une institution développe les connaissances mathématiques dont elle a besoin et les transmette sous sa responsabilité, quitte à l'interpeller si nécessaire. Mais la société ne peut accorder ce privilège à une institution comme l'enseignement, qui n'a pas de besoins propres de mathématiques et dont la seule légitimité est de se référer à une institution savante. Une faculté d'éducation peut préparer des professeurs compétents sur la base d'une culture fixe ou convenue. Elle risque d'avoir du mal à influencer une communauté extérieure sur des problèmes où la compétence de cette communauté extérieure est requise. Si la première génération de didacticiens est formée au contact de mathématiciens professionnels, elle peut entretenir la proximité nécessaire avec la discipline dans l'ambiance d'une faculté d'éducation. Il ne lui est pas facile de maintenir auprès de ses étudiants les exigences d'un niveau mathématique correspondant à celui qu'elle a connu, ne serait-ce qu'à cause de la motivation différente. La deuxième génération de docteurs, quelle que soit sa valeur, sera réputée plus éloignée des mathématiques.

Avec ce dispositif, les mathématiciens restent à l'écart des questions d'enseignement et de formation, jusqu'au jour où une cabale les mobilise et fait tomber sur le corps des enseignants une volée d'anathèmes au nom de la science !

Alors? Faut-il reprendre à chaque génération le même dispositif initial et former les professeurs avec d'éternels grands commençants en didactique ? Je crois qu'il faut intégrer dans les universités scientifiques des options didactiques sous la responsabilité de chaque secteur scientifique. Ainsi se forment des mathématiciens didacticiens, futurs ou actuels responsables de la formation "mathématique et didactique" des professeurs. En France où cette solution est tentée depuis trente ans, quelques universitaires ont montré leur répugnance pour cette solution. Mais il apparaît que cette répugnance est plutôt motivée par des considérations d'intérêt et de confort. Il est normal de vouloir utiliser les mathématiciens qui ont terminé ou ralenti leur phase de production mathématique à l'enseignement et en particulier à l'enseignement aux futurs professeurs. Et il est facile, du moins en France, d'exiger la responsabilité de la totalité de cette formation, de se déclarer compétent de facto pour cette tâche, et de faire que les concours administratifs écartent de l'examen tout autre compétence que mathématique. C'est en tout cas plus facile que de se mettre à apprendre "officiellement" les connaissances et les savoirs nécessaires. Ce qui paraîtrait normal dans d'autres professions.

La recherche en didactique et la formation des professeurs devraient-elles donc ainsi être "réservées" aux mathématiciens ? Ce serait absurde! La plupart des recherches sont menées sous la responsabilité des sciences de l'éducation. Partout où cette branche assume institutionnellement une participation à la formation, ces recherches prennent une valeur évidente pour l'enseignement.

Il est nécessaire de développer dans les universités, qu'elles soient dévolues à la formation de professeurs ou qu'elles soient généralistes, des équipes d'enseignement et des laboratoires de recherche composites ouverts à des chercheurs d'origines diverses, disposés à prendre place dans les débats scientifiques avec des arguments vérifiables par les autres. C'est ce qui se fait assez souvent. Mais la principale difficulté est alors de trouver les moyens conceptuels de fédérer ces dispositions et ces compétences disparates. Les concepts migrants,

les idées brillantes mais superficielles, les idéologies supra disciplinaires, les nouveautés ont alors les plus grandes chances de l'emporter sur l'étude de difficultés familières, avec des concepts complexes, ayant donné lieu à une énorme quantité de publications...

C'est dans ces conditions qu'apparaît la nécessité de théories assez fortes

5. Conclusions

Plus de trois mille ans après l'invention du commerce, l'économie - science des conditions de diffusion des biens matériels nécessaires aux hommes - a mis deux cent cinquante ans pour commencer à sortir des fantasmes. Elle est loin de proposer des solutions satisfaisantes.

Pour éduquer les quelque 2 milliards de non adultes il doit y avoir dans le monde environ 50 millions de personnes qui s'occupent professionnellement de leur enseignement et de leur éducation aux côtés de quelque 4 milliards de parents..

Le nombre des créateurs et des diffuseurs initiaux de sciences et de techniques est probablement largement inférieur à 1 million de personnes. Si la cible de la didactique est très importante la source ne l'est pas moins.

Or l'étude scientifique des phénomènes de diffusion des savoirs scientifiques, elle, ne mobilise qu'un nombre très restreint de chercheurs, dispersés dans des institutions différentes parfois concurrentes, éparpillés sur des voies de recherche divergentes. La faiblesse des moyens d'élaboration et de diffusion des connaissances didactiques est manifeste.

Cependant, malgré certains vents actuels, parfois un contraire, la didactique des mathématiques n'est pas si mal partie et progresse. Je suis convaincu qu'elle entrera progressivement dans les pratiques scientifiques et sociales, et qu'elle contribuera à l'amélioration de l'éducation de tous les enfants.

BIBLIOGRAPHIE

AEBLI H. (1959) *Didactique psychologique*. Genève : Delachaux et Niestlé

ARBIB M. A. *Memory limitations of stimulus response models*. Journal of Structural learning 5 (1/2), 19-23

BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

BAHRA Mohammed "Problèmes de didactique de la numération; échecs et succès de la remathématisation." (Thèse d'Université, Bordeaux 1, 1995)

BOURDIEU P. (1980) *"Le sens pratique"*. Paris : Les éditions de Minuit.

BRIAND Joël "L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique". (Thèse d'Université, Bordeaux 1, 1993)"

BROUSSEAU Guy, BROUSSEAU Nadine (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. 535 pages IREM de BORDEAUX.

BROUSSEAU Guy (1989). "Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques", in N. Bednarz et C. Garnier (Eds): CONSTRUCTION DES SAVOIRS. pp 41-63. CIRADE. Agence d'arc. Canada.

BROUSSEAU G. (1997) "Theory of Didactical situations in mathematics". 1970-1990" (304 pages) traduction M. COOPER, N. BALACHEFF, Rosamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD. (KLUWER Academic Publishers).

BROUSSEAU G. (1998) *La Théorie des situations didactiques* Grenoble : *La pensée sauvage*

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage (1991).

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, dans *Didactique des Mathématiques*. J. Brun Ed., Delachaux et Niestlé, pp. 145-196.

- CHOMSKI N., MILLER G. A. (1968) *L'analyse formelle des langues naturelles* Paris : Gauthier Villars.
- EL BOUAZZAOUI Habiba. (1982)."Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération". (Thèse d'Université, Bordeaux 1)"
- GONSETH F. (1936,1974) *Les Mathématiques et la Réalité; essai sur la méthode axiomatique*, Paris,. A. Blanchard.
- GRAS R. (1996) *L'implication statistique. La pensée sauvage*. Grenoble
- GRECO P. (1991) *Structures et Significations* Paris : EHESS
- JOHSUA S., DUPIN J.-J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris: PUF.
- MARGOLINAS C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In : Margolinas C. (ed.) *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- NELSON *Stochastic automatas*
- PIAGET J. (1969) *Psychologie et pédagogie*. Paris : Éditions Denoël.
- QUEVEDO de VILLEGAS Blanca (1986) "Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement" (Thèse de 3^e cycle, Bordeaux 1)
- RATSIMBA-RAJOHN H. (1982) Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. Dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3/1, pp. 65-113.
- RATSIMBA-RAJOHN H. (1992) Contribution à l'étude de hiérarchie implicite. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions. Thèse. Université de Rennes 1.
- SHOENFELD A. (ed) (1987) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale Lawrence Erlbaum Associates.
- SKINNER B. F. (1952) "Science and human behavior".
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10 n°2/3, 133-169.
- VIGOTSKI *Thought and Langage*