Article Publié in la matematica et la sua didattica n. 1- 2001 pp. 5-30 Traduction Maria Polo du texte L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : micro et macro-didactique (non encore publié en français).

# L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire :

# Micro et Macro - didactique

## 1. A l'aube d'un nouveau … millénaire?

A l'aube d'un nouveau siècle, il est d'usage de s'interroger sur ce qu'il apportera. Quelle sera sa capacité à résoudre les questions qui se posent aujourd'hui, et quelles seront les questions nouvelles qu'il pourra se poser et résoudre. Cet exercice est périlleux. Il aboutit le plus souvent à des prédictions dont certaines ne manquent pas de soulever l'hilarité des générations suivantes tant elles montrent d'ignorance et de prétention de la part de ceux qui s'y sont livrés imprudemment. Que dire alors à l'aube d'un nouveau millénaire ? Mais, quoiqu'il arrive, l'homme vit de perspectives, de craintes et d'espoirs,. C'est pourquoi, malgré la conscience aiguë de mon outrecuidance j'accepte aujourd'hui de livrer publiquement mes réflexions. Je compte sur votre indulgence. Elles seront donc à court terme et porteront sur quelques aspects de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire, et sur le développement de nos connaissances scientifiques sur les phénomènes didactiques.

Du 16$^{ième}$ au 19$^{ième}$ siècle, le monde connaît une explosion de la production industrielle et des échanges commerciaux, après plus de quatre mille ans de pratique. Elles ont donné l'illusion que l'âge d'or était à nos portes. Mais c'est seulement à partir de la fin du 18$^{ième}$ que l'on commence à entrevoir la nature des phénomènes économiques puis qu'on en entreprend l'étude scientifique. Les connaissances économiques sont encore bien hésitantes aujourd'hui malgré les moyens considérables qui leur sont consacrés, et l'économie elle même échappe largement au contrôle que nous souhaiterions exercer sur elle. Il a fallu beaucoup de temps et d'efforts pour se convaincre de l'inefficacité des actions volontaristes fondées sur des analyses sommaires et naïves.
Je crois que l'explosion des moyens techniques du traitement et de la diffusion des informations et des connaissances apparaîtra comme l'une des caractéristiques dominante de la fin du 20$^{ième}$ siècle. Elle donne l'illusion que les problèmes de l'enseignement vont s'en trouver résolus puisque tout le monde aura accès à tous le savoirs… mais après des milliers d'années de pratique l'étude des conditions de la diffusion des connaissances – la didactique - commence à peine, et les moyens mis en œuvre sont encore dérisoires.
Certaines analogies entre les deux phénomènes faciliteront l'examen des perspectives qui nous intéressent. Vous pouvez déjà deviner lesquelles sans doute : Il existe des phénomènes de didactique qui se développent inexorablement à l'insu des acteurs mais qui ont des conséquences bien visibles ; leur contrôle échappe aux praticiens ; la connaissance de ces phénomènes doit se développer, non pas principalement comme norme ou comme pratique mais comme science. Ce développement sera vraisemblablement lent etc. Mais suivant le dicton « comparaison n'est pas raison », Un débat sur l'émergence d'une science nouvelle manquerait d'intérêt si nous n'en percevions pas les enjeux et si ces enjeux n'avaient pas un rapport assez étroit avec nos préoccupations de citoyens et d'enseignants. C'est pourquoi je baserai mon propos sur l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : que doit-on et que peut-on enseigner à « tous » et à quelles conditions ? Cette évocation permettra de présenter quelques aspects de la didactique actuelle qui permettront à leur tour d'esquisser quelques perspectives.

## 2. Des conditions qui rendent des enseignements impossibles ?

### *1. La proportionnalité à l'école, aujourd'hui*

a) Traditionnellement, la proportionnalité était la notion la plus importante des notions élémentaires après celle de nombres. En mathématiques, elle avait été fondamentale jusqu'à la fin du 18ième siècle où elle servait à définir ou introduire les notions de fonction, de série etc. Dans l'enseignement, elle reste l'épine dorsale pour la résolution des problèmes élémentaires jusque dans les années 70.

Les nombres sont utilisés aujourd'hui à l'école primaire avec trois statuts différents :

- ils servent à exprimer une mesure comme dans « 3m » et n'ont de sens qu'accompagnés d'une unité (nombre « concret »)
- ils expriment un rapport, un nombre de fois etc. (nombre abstrait, scalaire)
- ils expriment le coefficient d'une fonction linéaire, représentent cette fonction et peuvent être alors accompagnés ou non de l'expression d'une dimension physique (comme F/m, Km/H, etc.)

En France, les notions de « proportions » et de « rapports » ont disparu des programmes, ainsi que les termes relatifs aux structures comme « ensemble », « application » ou « fonction » etc. Presque tout le métalangage de ce genre de questions, classique ou moderne s'est « libéré » du formalisme mathématique ou a disparu.

b) Dans sa thèse récente, Eugène Comin[1] montre le désarroi des enseignants et des élèves dans la reconnaissance de ces statuts et dans l'usage des notions correspondantes. Suivant son écriture, sa fonction ou sa place dans un problème, le nombre 5 en tant que 30 /6 peut s'appeler : coefficient de proportionnalité, opérateur, rapport, quotient, quotient exact, quotient euclidien, quotient entier, quatrième proportionnelle, raison, multiplicateur, fraction, division et même proportion comme dans la vie courante.

Il relève alors que le terme « rapport » étant exclu des programmes d'enseignement, les élèves et les maîtres utilisent le seul terme dont ils disposent : coefficient de proportionnalité… ce qui conduit « mécaniquement » à des erreurs si on veut appuyer les algorithmes par un raisonnement ou par un discours.

Ainsi lorsque des élèves considèrent un « tableau » de nombres et se demandent s'il « est de proportionnalité » ils ne peuvent désigner un rapport externe que par l'expression « coefficient de proportionnalité »

c) Eugène Comin relève alors que 90 % des candidats à un concours de recrutement des professeurs d'école et plus de la moitié des enseignants en service acceptent de dire que « si le reste de la division d'un nombre par un autre est 0 les deux nombres sont proportionnels » !

Seulement 40% des élèves de « seconde » (10ième année d'études) reconnaissent une partie du graphe d'une application linéaire dans un tableau de proportionnalité et 50% reconnaissent un lien entre linéarité et proportionnalité.

La moitié seulement des enseignants interrogés donnent des réponses conformes aux usages à la question « Quels nom pensez vous que les élèves doivent donner au nombre 5 dans chacun des exemples suivants : … » et les désaccords sont du même ordre lorsqu'il s'agit de leurs propres connaissances.

Pourtant, le champ des problèmes que les élèves peuvent aborder à l'aide de leurs techniques s'est beaucoup rétréci, mais sauf sur les cas les plus stéréotypés les résultats restent faibles et augmentent relativement peu entre le cours moyen et la 4ième (4ième à 8ième année).

d) En dixième année les techniques sont : l'utilisation du rapport interne (11%) l'utilisation du rapport fonctionnel (27,5%) et la technique des produits en croix (34%). Cette méthode, directement importée de l'algèbre ne peut pas être contrôlée par le « sens » donné aux grandeurs en présence comme il est nécessaire de le faire en arithmétique élémentaire. Quelle grandeur est le produit d'un nombre de chaussures par le prix d'un autre nombre de chaussures ? et pourquoi serait il égal au produit du prix des premières par le nombre des secondes ? C'est pourtant celle qui est déjà la plus utilisée en 6ième année. Ceci expliquerait-il cela ?

e) En même temps que les notions anciennes, l'étude des grandeurs est sortie des mathématiques. L'expression des unités a été chassée de l'écriture des calculs à faire, peut être de façon à simuler dès la première année les écritures numériques utilisées en algèbre dans le secondaire. Les mathématiciens ont retenu l'étude des structures d'espaces divers, en particulier mesurables, et, sauf en géométrie, ils ont rejeté vers les utilisateurs la détermination et l'étude des grandeurs auxquelles ces notions théoriques peuvent s'appliquer. De ce fait, la notion de proportionnalité n'a plus d'usage et doit disparaître. Deux grandeurs mesurables peuvent être proportionnelles, elles le sont par exemple indépendamment des unités à l'aide desquelles on les mesure. Mais

[1] **COMIN** Eugène. "Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire." Octobre 2000. Thèse de l'Université Bordeaux 1

dans une application linéaire, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée ne sont rien l'un à l'autre a priori : ils peuvent être le même ensemble. C'est l'application qui a ou n'a pas les propriétés de linéarité. Cependant, si la détermination de cette application par une formule algébrique est familière au professeur, la tâche est beaucoup plus difficile en arithmétique élémentaire pour les élèves. Serait-il devenu impossible de ce fait d'enseigner correctement la résolution des problèmes élémentaires de proportionnalité dans la scolarité obligatoire ?

f) De nombreuses recherches ont répertorié et enrichi les types de situations où la linéarité est utilisée au niveau élémentaire avec des motivations distinctes (nécessité logique, lois physiques, besoin d'équité dans les rapports sociaux, etc.), d'autres ont donné des exemples de genèses mathématiquement propres des différentes structures numériques en usage, la moitié des maîtres ne distinguent pas rationnels et décimaux, d'autres enfin en psychologie notamment ont décrit minutieusement les différents schèmes et procédures suivies par les élèves, constate Eugène Comin. Ces recherches ont été mises à la disposition des maîtres et des formateurs. Si elles n'ont pas eu d'effet ou même si elles ont peut-être parfois aggravé la situation (en suggérant des modifications inopérantes ou aux effets imprévus) ne serait-ce pas parce qu'elles se sont centrées sur les acteurs en présence : l'enseignant, l'élève, les connaissances, les manuels ou les matériels etc. D'autres types de conditions seraient-elles requises pour qu'un enseignement puisse se réaliser ? La manipulation inconsidérée des conditions didactiques de l'enseignement pourrait-elle rendre impossible l'enseignement de certaines notions ?

## *2. D'autres notions subissent des effets similaires*

Ces observations viennent se joindre à d'autres pour former un réseau de présomptions.

a) Joël Briand[2] a montré que l'apprentissage du comptage était tributaire de celui de l'énumération, lequel n'est pas perçu –et donc pas utilisable **-** par les professeurs, parce qu'il n'existe pas en tant que savoir mathématique. Ainsi le rôle des institutions et de la société toute entière dans la diffusion des connaissances mathématiques pourrait être prépondérant pour certaines réussites ou certains échecs que l'on impute actuellement aux seuls professeurs ou élèves.

b) Par exemple, parce qu'en tant qu'étudiant ils ont appris à opposer « raisonnement » et « calcul » et parce que le modèle du raisonnement mathématique est celui exposé en logique et qui est utilisé en géométrie, les professeurs ne considèrent plus l'organisation des calculs d'arithmétique élémentaire et même l'algèbre, comme du le fruit de raisonnements et ils n'y voient plus de démonstrations . Comme de plus certaines idéologies les conduisent à associer à ces statuts de « calcul » ou de « raisonnement » des méthodes pédagogiques très différentes en ce sens qu'elles font appel soit à la répétition et à la mémoire par opposition à la compréhension et à l'explication, et comme enfin ces méthodes sont tenues en estime de façon très différentes aujourd'hui, il en résulte des méprises (Dominique Woillez).

c) D'autres emprunts de répertoires didactiques entre des institutions différentes peuvent avoir des résultats similaires. Ainsi Florence Esmenjaud- Genestoux[3] montre qu'à une époque récente, les professeurs français ont simplement renvoyé aux élèves (et donc aux parents) la responsabilité de l'apprentissage des tables (parce qu'il apparaissait alors répétitif et non technique. Quand aujourd'hui ils reprennent cette responsabilité, ils le font avec les méthodes des parents (simple répétition). Ainsi vidé de son contenu et de ses étayages *mathématiques* cet apprentissage a perdu une bonne part de son intérêt et de son efficacité.

d) Dans une thèse récente Edgardo Locia-Espinoza[4] montre que l'usage des contre-exemples est très fréquent et présent dans l'activité mathématique des mathématiciens, mais que le travail mathématique tend à le faire disparaître des textes. Ces derniers étant repris comme des modèles de raisonnements pour les élèves, l'usage des contre-exemple est raréfié dans les situations d'enseignement.

## *3. Conséquences*

Tous ces travaux, établis dans le cadre de la théorie des situations, prolongent et confortent ceux de l'école d'anthropologie du didactique, conduits par Yves Chevallard et sont illustrés par d'autres encore. Une partie de la communauté mathématique peine à renoncer à l'idée que les mathématiques peuvent rester stables « de la maternelle à l'université » pour peu que l'enseignement s'adapte aux organisations mathématiques qu'ils proposent. Ils résistent à l'idée que, pour être enseigné dans une autre institution, un savoir doit subir une **transposition**, c'est à dire une adaptation qui en change la forme, le sens, l'usage, et donc les conditions de validité. En conséquence, ce que soutient René Guitart[5]: M = P = E (les mathématiques du mathématicien, du

[2] BRIAND Joël "L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique". (Thèse de l'Université Bordeaux 1, 1993)

[3] ESMINJAUD-GENESTOUX Florence. « Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques ». octobre 2000. Thèse de l'Université Bordeaux 1

[4] Egardo LOCIA-ESPINOZA "Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques" (Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse 3)

[5] René GUITART « la pulsation mathématique » L'Harmattan p286

professeur et de l'élève sont les mêmes) n'est pas un état « naturel » ou une loi, c'est un idéal que la didactique se donne le projet d'approcher autant que possible par des moyens appropriés, même si c'est aussi une fiction nécessaire au bon fonctionnement de la relation didactique.
La communauté a peine à reconnaître que l'activité propre de celui qui apprend (élève ou institution), a parfois pour résultat des erreurs légitimes, et même la constitution d'obstacles, quelle que soit la qualité de l'enseignement reçu. Les mathématiciens, et le public ont du mal à accepter ces écarts autour du « vrai » savoir, et les professeurs ont du mal à les prendre en charge autrement que comme des fautes. Tous enfin peinent à croire que ces phénomènes ne seront pas régulés efficacement tant que l'on ne possèdera pas les connaissances spécifiques nécessaires, et que ces connaissances sur le fonctionnement des mathématiques et sur les mathématiques doivent surgir de la communauté mathématique elle-même et que vraisemblablement elles devront figurer dans la formation des professeurs de mathématiques.

## 3. Sur l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire

### *1. Remarques préliminaires*

Avant d'évoquer ce qui peut être enseigné, quelques remarques seront utiles

#### *a) Sur l'articulation générale des enseignements de mathématiques de l'école primaire aux divers niveaux scolaires.*

A chaque niveau scolaire, les mathématiques qui peuvent être enseignées sont une *transposition* des mathématiques connues, elles en diffèrent d'autant plus que le niveau scolaire est plus bas. Elles doivent donc être organisées spécifiquement pour être enseignées à un niveau puis reprises et réorganisées aux niveaux suivants.
**Conclusions** : pour pouvoir enseigner une notion mathématique à l'école primaire, un professeur d'école a besoin de posséder certaines connaissances mathématiques supplémentaires, différentes de celles qu'il veut enseigner relativement à cette notion, mais bien spécifiques.
Il ne suffit donc pas de citer une notion mathématique pour évoquer auprès des professeurs le contenu d'un enseignement à l'école primaire et a fortiori la forme et la signification qu'elle peut prendre avec les élèves (indépendamment de toute considération pédagogique.

L'expérience montre que dans les conditions actuelles de leur formation professionnelle, il n'est pas possible de compléter ni de modifier sensiblement la plupart des connaissances mathématiques " de base " des professeurs d'école. Cette impossibilité reste largement vraie quel que soit le "niveau mathématique " atteint par ces professeurs dans les mathématiques de l'enseignement secondaire. Dans ces conditions, l'utilisation (et la non utilisation) pour l'enseignement primaire des connaissances mathématiques rendues disponibles par les enseignements du collège est loin d'être satisfaisante (anticipations prématurées et incorrectes, multiplication de vocabulaires relâchés, etc.).
**Conséquences** : les seuls enseignements qui peuvent être proposés dans un premier temps à l'école primaire avec quelques chances de succès, sont ceux qui peuvent être maîtrisés avec les mathématiques telles qu'elles sont apprises (et non pas enseignées) au collège.
**Remarque**. Cette condition devrait limiter fortement certaines ambitions précipitées. Mais si les réformateurs l'ont souvent ignorée c'est afin d'obtenir des moyens de la part d'autorités plus intéressées par le spectaculaire et le court terme que par l'intérêt éducatif et l'efficacité réelle de leur action.

Les mathématiques enseignées au collège ne sont pas bien adaptées à l'école primaire. Par exemple les professeurs d'école ne connaissent pas bien les structures numériques et l'arithmétique élémentaire, ils ne savent pas bien résoudre les problèmes élémentaires autrement que par l'algèbre, ils n'envisagent d'initier les élèves aux relations spatiales que par le biais de la géométrie etc.
**Conséquence :** Sans reconstituer l'antique forteresse des connaissances primaires, il serait utile d'introduire au collège un minimum d'instruments mathématiques d'articulation, "de contrôle " et de " clôture " relatifs aux acquisitions du primaire et aux notions nouvelles visées. Ces modifications ne seraient d'ailleurs pas inutiles pour les études longues.
Il est nécessaire d'effectuer ces corrections dans la perspective de modifications futures de programmes.

Pour que des mathématiques spécifiques de la maîtrise des connaissances de l'école primaire puissent exister au collège, il faut qu'elles y soient enseignées par des professeurs de collège qui eux-mêmes, possèdent les

connaissances mathématiques complémentaires nécessaires. On pourrait espérer que les mathématiques “ minimales ” requises pour accéder aux niveaux supérieurs exigées par les professions mathématiques contiennent aussi les instruments mathématiques nécessaires à leur enseignement et donc à leurs transpositions. Tel n’est pas le cas. Or, on a pu observer récemment en France l’ignorance, pour ne pas dire le mépris, officiellement affiché à l’égard des connaissances mathématiques spécifiques de l’école primaire (et à l’enseignement en général) dans la formation des professeurs de collège. Il en résulte que les diverses tentatives des partenaires pour corriger les défauts de l’articulation entre l’école primaire et le collège sont toujours empiriques, toujours fondées sur des représentations erronées et différentes, et toujours en échec.
**Conséquence** : il est indispensable d’introduire dans la formation mathématique des professeurs de collège, un minimum des connaissances mathématiques nécessaires à la compréhension des connaissances mathématiques de l’enseignement primaire, et de montrer leur position par rapport aux mathématiques qu’ils ont apprises à l’université.
Il est aussi indispensable, pour cela, que ces mathématiques soient perçues comme nécessaires et respectables par les “ connaisseurs ” (la noosphère) et donc par les mathématiciens eux-mêmes.

Divers travaux montrent que les nombreuses influences didactiques et pédagogiques qui se sont manifestées depuis cinquante ans, entre autres par de nombreux trains de réformes, ont profondément modifié et opacifié les pratiques et les connaissances mathématiques disponibles pour l’enseignement élémentaire. Il existe un écart considérable entre les représentations que s’en font les divers partenaires, y compris les professeurs, et le déroulement effectif des cursus scolaires. Ces représentations erronées affectent l’efficacité des enseignements et en rendent chaotiques la conduite et les réformes.
**Conséquences** : Une modification du cursus, même modeste, doit être précédée et accompagnée par un ensemble de mesures d’explication et de formation en direction des diverses institutions concernées.
**Commentaire.** La sous-évaluation du coût social, culturel et financier des réformes conduit les décideurs à proposer d’énormes utopies dont les exigences contradictoires ravagent les pratiques des professeurs.
Par contre les modifications “réalisables ” (dont l’efficacité a pourtant été calculée et prouvée expérimentalement, par exemple une simple modification de la disposition des calculs pour effectuer les multiplications et les divisions), soit, paraissent dérisoires et ne sont pas entreprises, soit échouent par suite d’un engagement insuffisant.

## *2. Sur l’évolution, voulue ou non des pratiques de l’enseignement de certaines mathématiques à l’école primaire.*

Sur l’enseignement des notions mathématiques traditionnellement considérées comme nécessaires à l’école primaire, nous avons pu faire les observations suivantes :

i. L’affaiblissement, considérable, signalé plus haut, des études leçons et exercices relatifs à la **mesure des grandeurs** et à la connaissance du système métrique. (les machines à affichage direct on rendu obsolète l’utilisation des divers “unités concrètes pour la plupart des grandeurs). Cet affaiblissement réduit aussi la connaissance de la numération décimale et par conséquent celle de la sexagésimale, ainsi que, très sensiblement, le champ des problèmes liés à de nombreuses pratiques sociales. (les achats et les ventes sont maintenus, mais les échanges de monnaies, et tout ce qui concerne le commerce de l’argent est négligé ou exclu alors que son importance dans la vie ordinaire des citoyens augmente).
   **Conséquence** : Le couple <nombre ; unité> n’est pas reconnu comme un objet mathématique et son traitement est renvoyé “au physicien” (à l’école primaire !) ou au praticien. Les normes pour leur écriture sont flottantes. Le professeur, gêné, fait effectuer les calculs sur les nombres et rejette l’écriture des unités dans le texte. Banalement les unités sont oubliées et leur traitement réduit à sa plus simple expression.
ii. La disparition de l’étude de la proportionnalité dans le secondaire a été étudiée plus haut
iii. Les professeurs ne « savent » pas résoudre les problèmes que les élèves pourraient résoudre avec des connaissances à leur portée et introduisent des pratiques et des exigences directement issues de leur formation en algèbre. Leur formation dans ce domaine, toute orientée vers la pratique, ne leur permet pas de distinguer les sauts épistémologiques qu’ils demandent à leurs élèves ni d’inventer les situations didactiques qui permettraient de rendre ces connaissances accessibles. (par exemple ils enseignent pour les calculs ou la vérification de la linéarité, la technique des produits en croix, qui néglige les grandeurs en présence, fait perdre le sens des opérations en cours et rend plus difficile la conception des propriétés globales de l’application).
   La question de savoir si l’on peut et si l’on doit algébriser l’enseignement élémentaire de l’arithmétique n’a pas fait l’objet d’études suffisantes, Beaucoup d’améliorations sont possibles, mais l’introduction de

la pensée algébrique est impossible avant un certain âge et l'articulation entre ces deux cultures mathématiques (arithmétique et algèbre) devrait pouvoir faire l'objet d'études fructueuses. Mais les pratiques vont beaucoup plus vite que les études au détriment des enfants et de la culture mathématique.

iv. Les abus que les mathématiciens pratiquent couramment parce qu'ils ne risquent guère de s'y tromper, tels que confondre l'élément avec sa classe, l'objet avec son nom ou son dessin, la fonction avec son image, sont utilisés aussi par les professeurs qui les tiennent, bien à tort, pour des « simplifications adaptées aux élèves », et pour des indices de proximité avec « les vraies mathématiques ». Par exemple dire qu'un segment de droite orienté est un exemple de vecteur n'est pas plus difficile que de définir « un vecteur est un segment de droite orienté », c'est plus exact et plus conforme aux usages.

v. De façon générale les mathématique présentées aux élèves sont pleines de connaissances, introduites visiblement trop tôt dans un environnement inapproprié, qui semble plus destinées à intriguer les curieux et à borner un territoire interdit à certains qu'à aménager véritablement un accès au savoir.

Par exemple, l'introduction déjà ancienne du symbole d'égalité à un niveau trop précoce ou avec une culture didactique insuffisante, conduit jusqu'à un niveau scolaire élevé à des méprises et à des difficultés récurrentes bien connues. L'introduction du calcul littéral suit la même voie.
Autre exemple, on a voulu introduire des symboles logiques (en particulier le signe d'implication) alors que les professeurs ne savaient pas distinguer avec leurs élèves des cas où il s'agissait d'une implication dans l'écriture des formules qu'ils traitaient (où le symbole était légitime), des cas où il s'agissait d'inférences pour organiser la démonstration, auquel cas il n'aurait pas fallu utiliser ce symbole. Les commentateurs n'ont pas retenu de l'aventure qu'on avait mal introduit un nouvel usage, mais que « le formalisme était détestable ».

vi. Ces errements et quelques autres sont, en partie, des conséquences de l'ignorance des professeurs au sujet de la structure du langage mathématique et du fonctionnement effectif des connaissances mathématiques. L'usage “ sauvage ” des raisonnements et des argumentations de tous types et l'irruption incontrôlée de formalismes importés sans réelle utilité ni compréhension y contribuent aussi.

vii. Dans le même esprit l'étude de la «géométrie » tend à se substituer à celle de l'espace. Les professeurs ne distinguent pas l'une de l'autre.

viii. L'absence d'initiation élémentaire aux statistiques ne prépare pas la compréhension de leur usage dans les débats et les décisions de la société. Dans l'ensemble les professeurs de collège ignorent totalement ce domaine quand ils ne le méprisent pas. Les plus avertis n'y voient qu'un champ d'application pour des concepts et des techniques mathématiques. Culturellement et didactiquement nous avons besoin de deux générations de professeurs si nous voulons corriger ce défaut et tenter de rattraper les pays avancés dans ce domaine. Dans cette même perspective la scolarité obligatoire n'introduit pas le vocabulaire minimum de base pour traiter les événements incertains, ni même pour traiter les événements advenus.

ix. On a pu observer, en même temps que disparaissaient les exigences formelles relatives à un langage limité mais précis, une inflation de métalangage mal maîtrisé et de glissements métadidactiques (le professeur enseigne ses moyens d'enseignement, son vocabulaire professeionnel etc.). Pour éviter des usages exigeants, les enseignants et les auteurs de manuels utilisent des discours très contextualisés, des “ conventions implicites, et très peu d'élucidations. Il est presque impossible pour les auteurs d'ouvrages de tenir un discours mathématique “ correct ”.

x. Dans de nombreux cas la distance est assez grande entre ce qui est dit et ce qui est fait, par suite de l'usage grandissant de termes « savants » importés et peu adaptés aux décisions didactiques.

xi. La multiplication des objectifs et des contraintes tend à produire un émiettement des leçons. Dans certains cas cet émiettement aboutit à une compilation d'algorithmes et d'apprentissages formels. Dans d'autres la «recherche du sens » conduit les professeurs à noyer leurs intentions dans un flot de situations particulières, de détours et de méthodes finalement inefficaces pour satisfaire de multiples exigences pédagogiques formelles inadaptées ou mal comprises. Par exemple, la mise en groupe, qui peut être un excellent moyen de multiplier les engagements pertinents des élèves dans les différents usages de leurs connaissances peut devenir une technique « facile » et lorsqu'elle n'est pas effectuée dans des circonstances favorable elle dévore un temps précieux en pure perte pour les élèves.

## *3. Sur les rapports de la société avec l'école obligatoire.*

L'école est un enjeu d'abord pour les parents mais aussi pour tous les idéologues et encore trop souvent un terrain de jeu pour les politiques.
L'école, seule, ne peut pas réduire les différences entre les hommes et préparer une certaine société future.
L'absence de vrais débats fondés sur des informations sérieuses sur le fonctionnement et les possibilités

effectives de l'école, la multiplication des déclarations générales et des utopies à son sujet, rendent de plus en plus difficile sa gestion.
Exemple : Il n'est pas possible pour l'école de « tirer le meilleur parti de chaque élève, selon ses dispositions » et en même temps d'orienter chaque élève de façon à satisfaire globalement la demande sociale. (la première condition conduit à des distributions des élèves sur les résultats, essentiellement gaussiennes, incompatibles avec les distributions correspondant à la deuxième condition. La gestion politique de ces contradictions est dans les limbes. Elle se nourrit toujours de concepts « nouveaux » et de mots d'ordres transversaux qui sont le plus souvent autant de leurres.
Il faut penser la formation mathématique des cinq premières années dans la perspective des dix ans de la *scolarité obligatoire* et non plus comme la formation mathématique de l'école primaire. (La formation mathématique de la scolarité obligatoire n'a pas pour unique objet de préparer tous les élèves aux épreuves des baccalauréats scientifiques, et leur entrée dans les faculté de mathématiques).

## *4. Sur les mathématiques et le traitement social de la vérité*

L'école primaire doit permettre le développement de la personnalité rationnelle de l'élève et lui enseigner les comportements sociaux relatifs à la prise de décision et à l'établissement de la vérité et à l'utilisation des savoirs

L'apprentissage le plus fondamental que les enfants puissent trouver dans les mathématiques à l'école primaire me semble être celui de la gestion personnelle et sociale de la vérité. Les mathématiques n'ont pas le monopole de la recherche de la vérité mais elles sont le domaine où on la rencontre le plus précocement et où on peut apprendre à la traiter avec le moins de savoirs préalables.

Quand une déclaration mathématique est-elle "vraie"? Dans ce que l'élève accepte ou apprend, quelle est la part de ce qu'il peut constater par lui même, de ce qu'il voit avec "évidence", de ce qu'il comprend dans ses rapports avec un milieu "objectif"?

Comment apprend-il qu'il doit parfois changer d'avis?

Quelle est la part de ce qu'il doit accepter ou refuser de l'opinion des autres et par quels moyens? Comment peut il les convaincre? Dans quelles conditions doit-il se rendre à l'opinion des autres?

Que lui apporte la culture et l'autorité du maître. Comment une vérité s'établit-elle dans la société, comment se contrôle-t-elle, et quels avantages y a-t-il à le faire? Quelle est la responsabilité de chacun dans ce rapport à la vérité?

Ces questions semblent bien éloignées des ambitions de l'enseignement primaire des mathématiques, pourtant elles s'y présentent immanquablement très tôt et la façon de les traiter est d'une grande importance pour les enfants et pour la société.

## *5. Sur la pratique du débat et la rhétorique naturelle des enfants*

Il est souvent nécessaire de prévoir avec assurance, de savoir sans avoir à chercher, de comprendre pour économiser de la mémoire, de démontrer pour comprendre, de discuter pour aimer le faire, de s'étonner pour le plaisir d'interroger ses compagnons, etc.

L'éveil de l'enfant à ces pratiques, aux plaisirs et aux déboires qu'il y trouve, est pour le professeur des écoles qui y est attentif une source permanente d'émerveillement. Je crois que la plupart des enfants sont capables de raisonner et d'apprendre à raisonner très jeunes à condition de leur en donner l'occasion, à bon escient. Ils doivent pouvoir utiliser leurs forces avec une bonne efficacité, autant pour établir et comprendre la vérité que pour apprendre des savoirs nouveaux. Pour qu'ils aiment le débat et la discussion, Il faut aussi leur en faire respecter les règles et les leur enseigner.[6]

Le travail de l'enseignant va consister à ménager ces occasions. Ce n'est pas facile car, en tant que moyen d'action, la compréhension est toujours - localement - plus chère que l'application d'un algorithme. Pour acquérir une connaissance il parait toujours meilleur marché de l'acheter que de la refaire soi-même: la réflexion, le débat, le raisonnement et la démonstration, ou le recours à l'expérience, paraissent toujours extrêmement plus coûteux que l'emprunt des conclusions, l'application, l'étude ou l'apprentissage formel. Et c'est souvent vrai! De plus, même bien préparés et bien menés, les débats entre élèves peuvent souvent s'enliser dans du verbiage sans objet, des "conflits" sans issue et des considérations sans intérêt, entreprises dangereuses en ce qu'elles habituent certains élèves à fuir les "vrais" débats de savoir pour de fumeux artifices.

Mais la somme de comportements économiques localement optimaux ne produit pas nécessairement un processus - globalement - optimal. L'art didactique consiste à maintenir un ***équilibre*** entre des conditions opposées qui tendent à faire échouer le projet.

[6] Voir P. ORUS-BAGUENA, Le raisonnement des élèves dans la relation didactique, effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire Thèse 1992 (LADIST)

Car, pour que cet art puisse s'exercer, il faut une bien meilleure connaissance des phénomènes qui agitent et régissent la transmission des connaissances, le plus souvent à l'insu de ses protagonistes, et des indices qui permettent de les déceler. Il faut des moyens "techniques" c'est-à-dire des situations effectives, spécifiques de chaque savoir, capables de déterminer les relations effectives que les élèves doivent établir et que le professeur doit ménager et gérer. Il faut à la fois une bonne connaissance -réaliste- et une représentation OPTIMISTE de ce que PEUVENT faire les enfants, de ce qu'on peut attendre d'eux.

La première expérience qui me persuada de la possibilité d'organiser des situations de débats entre les élèves de l'école primaire, à propos d'énoncés de mathématiques, portait sur la découverte de la division à propos de la "course à vingt". Il y en a eu beaucoup d'autres depuis.

## *6. Sur la démonstration et la preuve.*

En tant que pratique sociale, la preuve est le moyen légitime de convaincre un interlocuteur : un tel moyen doit respecter l'interlocuteur en n'utilisant seulement que son répertoire et que les informations dont il dispose, lui, actuellement (répertoire logique, mathématique, scientifique...), et il doit exclure tous les autres moyens de pression, rhétoriques (habileté formelle), psychologiques (tels que la séduction, l'autorité, l'apitoiement) ou contrainte matérielle (menace, violence, etc.).

La pratique de la preuve se construit contre toute une série de barrières psychologiques, culturelles ou sociales telles que l'amour propre, l'instinct grégaire ou la fidélité... L'instrument de cette initiation est l'apprentissage de la démonstration, non pas (seulement) comme savoir officiel mais comme moyen courant de pratiquer la preuve (et de la limiter à son domaine de pertinence).

Elle est fondatrice de l'individu, et particulièrement de l'individu rationnel, tout autant que des rapports sociaux les plus essentiels. Il ne peut pas y avoir de démocratie sans une organisation sociale qui intègre le rôle de la connaissance dans la décision et sans une gestion commune et correcte du savoir, de la vérité et de la preuve.

A l'école primaire, cette formation civique fondamentale ne se formule pas, mais elle se fait aussi et peut être d'abord en mathématiques.

## *7. Sur les connaissances et sur les savoirs*

Quelle est la place de ce que l'élève comprend, de ce qu'il apprend lui même et de ce qu'on lui suggère ou qu'on lui enseigne et de ce qu'il étudie dans ce qu'il sait?

Résoudre un problème ou connaître une théorie mathématique mobilise un amalgame complexe de connaissances et de savoirs. Distinguons-en deux, pour simplifier, et appelons "connaissances" les ressources et les moyens, souvent implicites et complexes, développés plus ou moins spontanément, pour répondre aux exigences du milieu (par exemple on connaît son quartier, on reconnaît ses voisins sans pouvoir dire exactement comment). Ces connaissances sont mises en oeuvre par un élève dans la résolution des problèmes pour solliciter et organiser les formes explicites et institutionnellement acceptables qui constituent la solution. Appelons "savoirs" ces formes, techniques et concepts (par exemple, savoir que les diagonales d'un rectangle sont égales). Ils sont produits par les institutions, et destinés à permettre le repérage, la reproduction, le contrôle, la justification et la diffusion des connaissances. Les connaissances ne sont pas la conversion, loin s'en faut, des savoirs utilisés officiellement pour la correction du problème, elles ne peuvent donc pas non plus se convertir directement en savoirs.

L'usage et l'apprentissage des savoirs exige toujours la présence de connaissances relatives à la notion enseignée (mais aussi à d'autres). Le professeur s'attend à ce que l'élève convertisse les savoirs qu'il lui enseigne en moyens de résolution des problèmes qu'il lui pose, et inversement à ce qu'il convertisse en savoirs, des connaissances qu'il considère comme cachées mais accessibles dans ses exercices.

Au cours de l'enseignement, les notions glissent d'un statut à un autre, mais à chaque instant le professeur ne peut en isoler une et la traiter avec un statut unique. Il gère ainsi un ensemble de notions dont quelques unes seulement peuvent être explicitement traitées.

A l'école primaire, la part des connaissances indicibles mais nécessaires est particulièrement importante et délicate et la gestion de leurs rapports avec les savoirs enseignés ne l'est pas moins.

L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire offre des exemples typiques des difficultés à développer de façon harmonieuse la connaissance de l'espace et les savoirs de géométrie, ainsi que l'ont montré R. BERTHELOT et M. H. SALIN[7]

Dans les passages d'un niveau scolaire à un autre, il est souvent impossible pour l'enseignant du niveau supérieur d'utiliser les connaissances, pourtant acquises par ses élèves au niveau précédent, mais non converties

[7]R. BERTHELOT et M. H. SALIN, L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse 1992 ( LADIST)

en savoirs évaluables (impossibilité due au fait, entre autres, que l'enseignant ignore ou est sensé ignorer les situations, les exercices et les méthodes utilisées par son prédécesseur, due à l'absence de culture commune, ou à un goût prononcé pour les "questions vierges" ou supposées telles). En conséquence, les connaissances mal gérées perturbent les apprentissages ultérieurs, de nombreux savoirs "fonctionnent" mal, et la progression est ralentie.[8]

## *2. . Que peut-on enseigner en mathématiques dans la scolarité obligatoire ?*

### *a) Les questions*

Ce vaste problème est sans cesse discuté dans tous les pays, je ne veux en évoquer que quelques aspects.
La question a été prise dans des sens différents, certains très réducteurs.:
1. Qu'est-ce que le développement psychologique et psychogénétique des enfants permet de leur enseigner pendant la scolarité obligatoire, sous réserve des conditions didactiques. et pédagogiques favorables ?
2. Que peut-on désirer enseigner aux élèves, compte tenu des finalités de la scolarité obligatoire et des exigences ultérieures de la scolarité et de la société ?
3. Quelles améliorations, selon quels critères peuvent être envisagées par le moyen de modifications "marginales", ou au contraire « profondes », et à quels "coûts" ? Que peut on enseigner de plus .
4. Qu'est-ce que les conditions didactiques et pédagogiques actuellement "disponibles" dans le milieu (enseignants, société) permettent d'enseigner aux élèves ?
De leur côté, les réponses, leur forme et l'accent mis sur tel ou tel aspect, varient selon la position de leurs auteurs : responsables politiques en quête d'actions prestigieuses ou de critiques faciles, scientifiques de divers domaines désireux d'affirmer leur compétence, d'exporter leurs connaissances ou de montrer l'utilité sociale de leur discipline, journalistes et noosphériens friands de nouveautés séduisantes, public inquiet de recettes faciles, enseignants sceptiques ou prompts à anticiper et à interpréter de façon excessive les hypothèses à l'étude, commerçants divers intéressés à exploiter les ressources que le public peut réserver à l'enfance etc. Il est bien connu que trop d'intérêts et trop d'enjeux sans véritables rapports avec le bien privé et public des élèves s'expriment trop égoïstement et trop fort en éducation.
Ma première remarque sera que les différents points de vue ne peuvent pas être dissociés : L'adaptation d'une connaissance mathématique aux possibilités et aux pratiques d'un niveau scolaire (et à l'inverse l'adaptation des pratiques à un projet) dépend de nombreux facteurs. En particulier elle demande en retour *une adaptation et un consentement de l'ensemble des partenaires culturels et sociaux et de toute la chaîne scolaire* dont on sous-estime tragiquement la difficulté et le temps de réponse. Nous examinerons cette question dans le paragraphe qui suit. En attendant nous allons relever quelques unes des difficultés observées

### *b). A propos des connaissances fondamentales de la scolarité obligatoire.*

Les *nombres* ***(naturels, décimaux et rationnels)*** et leurs opérations constituent un objectif reconnu par tous. Mais on observe de grandes difficultés (du moins en France) à obtenir une pratique fluide des divisions avec des élèves normaux de 11 ans. Ce qui est interprété comme un échec dû professeurs. Le retard observé dans la maîtrise de la soustraction et du calcul mental ne font guère de doute, mais les causes incriminées dans ces retards sont diverses : priorité donnée à l'homogénéité des populations qui alignerait les progrès sur les plus lents, désaffection des parents et des enfants pour une pratique abandonnée dans la société au profit de l'usage des calculettes, dédain des enseignants pour une activité « répétitive » vilipendée par les psychologues, au profit d'activités plus « nobles ».
Les nombres semblent avoir changé de statut : Traditionnellement comme nous l'avons déjà remarqué ils sont au service des *mesurages* de différentes grandeurs et se présentent donc presque partout accompagnés d'unités (nombres « concrets »), les «nombres abstraits » étaient définis comme des rapports. Dans la pratique actuelle, le professeur les considère implicitement et directement comme des objets mathématiques. Ils ne sont ni concrets, puisque l'expression des unités est exclue de l'écriture des calculs, ni abstraits car le mot même de *rapport* a disparu des programmes et des manuels. Cette position permet au professeur de considérer les calculs écrits par l'élève comme des « égalités numériques » semblables à celles que l'on écrira au collège en « algèbre ». Quelles sont les causes de cette évolution. Quel est son impact sur les difficultés des élèves ? Faut-il et peut-on réintroduire sous une forme nouvelle peut-être, l'écriture et le traitement des ***unités de mesure,*** (comme le proposait Whitney) ainsi que les changements

[8] J. CENTENO et G. BROUSSEAU Communication à ICME (Budapest)
et J. CENTENO, Thèse postume "la mémoire de l'enseignant" (LADIST)

d'unités et l'étude du système métrique (dont la quasi disparition affaiblit la connaissance de la numération).

La ***linéarité*** est une propriété essentielle, mais Monsieur Comin, a montré que sa transposition didactique dans la scolarité obligatoire sous forme de ***proportionnalité*** ne semble plus du tout satisfaisante.

Les ***grandeurs***. Les enfants rencontrent et doivent connaître différents types de grandeurs (ensembles finis petits ou grands, segments, surfaces, "volumes", événements, angles, capacités, temps, vitesses et densités constantes etc.). Même si les propriétés d'espace mesurable sont les mêmes dans chaque cas, il semble impossible de les tenir pour évidentes : l'étude des opérations propres à chaque type, c'est à dire l'identification des opérations correspondant à la réunion, à l'intersection et au complémentaire, etc., ne semble pas superflue, aussi bien pour les mesure discrètes (dénomination des objets et des classes, l'énumération des collections et les comparaisons de listes) que pour les mesures denses (ensembles isométriques et transformations physiques les respectant). La difficulté vient de ce que les grandeurs sont sorties du domaine des mathématiques. La référence de l'enseignement des mathématiques à l'école ne peut être réduite aux mathématiques « savantes »

Le désir de faire précocement "comme en mathématiques" conduit les enseignants à plusieurs choix discutables : faire écrire aux élèves des "formules numériques" correctes et abstraites qui préfigurent les écritures algébriques ne serait peut être pas impossible mais le faire pour représenter leurs programmes de calculs arithmétiques conduit sûrement à fausser la signification des symboles mathématiques ("+" et surtout "=") sans préparer en rien l'étude de l'algèbre et prépare les malentendus futurs sur ce que les élèves savent ou pas. Ce même choix a conduit à rejeter le traitement explicite des unités vers les programmes de sciences du collège et à ne traiter que des nombres "abstraits" (sans d'ailleurs rien faire pour les abstraire de quoi que ce soit). Cette position met l'enseignement primaire dans l'embarras.

On ne peut vraisemblablement pas revenir en arrière mais il faut corriger cette dérive que l'on observe aussi dans le développement d'un enseignement de "**géométrie**" excessivement ambitieux et coûteux en temps.. Il consiste essentiellement à "montrer" les objets et les propriétés qui seront étudiés plus tard en géométrie. Mais ces ostensions ne servent pas et elles brouillent le caractère déductif de la géométrie et le rôle de "modèle d'une théorie mathématique" qu'elle devrait tenir dans le secondaire alors que l'étude des connaissances spatiales pratiques (comment représenter, se diriger, mesurer... dans l'espace familier, urbain rural...) est négligée.

La ***résolution de problèmes*** "de la vie courante" ou non devrait s'achever par un compte rendu où les élèves devraient montrer clairement les expressions arithmétiques qu'ils traitent et les identifier (dénommer ce qu'elles représentent), le programme de calcul suivi (représenté) et qu'ils doivent justifier (oralement), et les résultats. Il faudrait donc leur faire utiliser (sans formalisme mais avec les termes élémentaires nécessaires), les moyens actuels utilisés pour ces tâches (expressions numériques, déclaration, diagrammes, valeur et unités.

La tendance à utiliser l'***algèbre*** dès les premières classes de l'école primaire se manifeste de plus en plus bien que de façon très confuse. Cette tendance vient de ce que les professeurs d'école n'ont pas appris autre chose, plutôt que d'une décision raisonnée en fonction des élèves et des enseignements ultérieurs. D'ailleurs des enquêtes tendent à montrer que depuis que nous savons définir mathématiquement « une » algèbre, la connaissance de ce qu'est l'algèbre comme domaine scolaire s'est diluée. L'introduction de l'algèbre au collège en est, elle aussi, brouillée et semble se réduire à des collections de techniques formelles.

***Langage et rigueur.*** Il n'est pas possible de laisser entrer dans les classes n'importe quel vocabulaire et n'importe quelle conception sous prétexte qu'ils sont utilisés quelque part hors de l'école, pas plus qu'il n'est possible de prétendre à un usage "parfaitement" monosémique et rigoureux du langage mathématique. Or, les formulations populaires reviennent en force (TV) et sont « légitimées » par diverses idéologies.
De toute façon, le sens des termes évolue avec l'environnement l'usage et le niveau. "Donner du sens" est utile, mais cela revient souvent à plonger une notion assez simple dans un univers "concret" qui la rend beaucoup plus obscure et difficile et qui contrarie la compréhension et l'apprentissage. Une propriété essentielle des mathématiques est de permettre de se débarrasser des conditions particulières.

Il a été montré qu'il est possible assez précocement d'enseigner à la plupart des élèves de l'arithmétique élémentaire, du calcul mental ou non, des rudiments d'algèbre, et de vraie géométrie déductive, de

statistiques et même de probabilités, une construction mathématique des rationnels et des décimaux, des éléments de logique etc. cela s'est fait Mais il n'est pas possible de "généraliser" à tous les professeurs et à tous les élèves ce qui s'est réalisé dans des conditions particulières (qu'elles soient d'innovation ou d'expérimentation rigoureuse) ni de "tout faire".
L'enseignement de ces connaissances suppose qu'elles sont suffisamment ***utilisées et répétées*** aux niveaux suivants. Les ***transpositions*** nécessaires en changent le sens, qui doit être ***repris et "régulé" à tous les niveaux.*** Ce qui précède implique que l'ensemble du processus est pris en charge par ***l'ensemble des professeurs de la scolarité obligatoire*** et au delà. La distance entre les cultures des professeurs des écoles et celle des professeurs de collèges, ces derniers étroitement assujettis à la culture des lycée et des préparations aux grandes écoles, est excessive et très dommageable. Il est indispensable de la réduire!
Les successions de trains de réformes souvent chaotiques favorisent l'abandon des projets cohérents et des pratiques éprouvées au bénéfice d'improvisations fugitives. Elles aboutissent à rechercher des positions immédiates de "moindre effort" pour les élèves et leurs professeurs, qui se révèlent en fait ensuite très coûteuses (en efforts) sur le long terme.

Il faut aussi que les professeurs sachent (et conviennent de) distinguer leur savoir de celui de leurs élèves. La tradition qui établissait implicitement un partage entre les connaissances de différents niveaux et par conséquent entre celles du maître et celles de ses élèves tend à disparaître lorsque les réformes se succèdent rapidement ; elle doit être remplacée par des conventions s'appuyant sur des techniques didactiques connues ou apprises par les professeurs - ceux du niveau considéré et ceux des autres niveaux - et acceptées par les autres. Il serait malveillant d'assimiler ces propositions avec "un retour aux mathématiques modernes" ou avec "les mathématiques anciennes" et de réveiller ainsi des malentendus qu'il faut dépasser.

Rien n'est possible si la formation des professeurs de mathématiques soumise aux deux conceptions. Selon la première, quasi officielle, il suffit de bien savoir "des" mathématiques « pures » (celles visées et plus ou moins bien atteintes en France pour l'Agrégation et le CAPES) pour enseigner celles dont les enfants et la société ont besoin. Les aptitudes pédagogiques se détectent au concours, le métier s'acquiert sur le terrain. L'enseignement est un amateurisme distingué. Selon la seconde, à l'inverse, il suffit de compléter une formation mathématique moins poussée mais plus ouverte par l'enseignement de diverses branches des sciences de l'homme, non spécifiques, comme la pédagogie, la psychologie cognitive, la sociologie, les sciences de la communication etc. Entre ces deux conceptions aucune place n'est réservée pour l'étude des connaissance scientifiques et des techniques propre à la didactiques des mathématiques.

## 4. Qu'entendons nous par didactique des mathématiques ?

**a) Présentation**
Le mot sonne mal dans les pays anglo-saxons, où on préfère le concept plus flou de «mathematic education ». Pourtant le terme « Didactique » est très ancien. Il a pris des sens différents selon les époques et les institutions qui l'ont utilisé. Il tend à désigner aujourd'hui à la fois l'art d'enseigner et les études scientifiques de cet art. La didactique des mathématiques devrait donc englober l'ensemble des recherches sur *la diffusion des connaissances mathématiques*.
Une partie de ces recherches peut relever d'approches très diverses mais classiques : psychologiques, sociologiques, linguistiques, pédagogiques etc. Ceux qui font ces recherches, quelle que soit leur origine – y compris les mathématiciens –, peuvent s'intituler didacticiens des mathématiques, mais ils doivent prendre ou garder le nom de la discipline d'approche, celle qui garantit la validité de leur travail. Ainsi un *psychologue didacticien des mathématiques* pourrait être un mathématicien qui a changé de discipline.
Il existe cependant des problèmes et des sujets où les compétences classiques – et même leur réunion - est insuffisante. Un schéma répandu voudrait que ces problèmes relèvent d'une discipline générale, la didactique, branche des sciences de l'éducation dont la didactique des mathématiques serait une spécification. Les recherches de ce type seraient l'affaire des *didacticiens des mathématiques*. Or ce schéma ne répond pas bien à la réalité de la plupart des recherches relatives à la diffusion des mathématiques et à leurs résultats actuels, ni à l'importance des enjeux qu'elles représentent pour les mathématiciens.
La production de chaque connaissance mathématique nouvelle relève de processus spécifiques originaux. Il en est de même pour son apprentissage et son enseignement. Leur compréhension relève d'une activité mathématique propre, elle-même originale. Il existe donc des recherches où les mathématiques jouent un rôle prépondérant non seulement comme objet mais aussi comme instrument d'études. De plus ces recherches sont appelées à jouer un rôle important dans l'organisation de la diffusion des mathématiques,

en particulier dans celle dont les mathématiciens ne sauraient se départir. A ce double titre elles devraient être conduites par des *mathématiciens didacticiens* sous la responsabilité de la communauté des mathématiciens.
C'est à ces recherches et aux connaissances qu'elles produisent que nous réservons le terme de « didactique des mathématiques », conformément à un usage majoritaire dans les pays francophones depuis une trentaine d'années.
Dans la didactique des mathématiques telle que nous la concevons, on peut distinguer trois grandes sortes *d'activités.*

*1 La ``didactique fondamentale des mathématiques"*
C'est l'étude des phénomènes généraux liés à la diffusion des connaissances mathématiques relativement indépendants des thèmes particuliers. Elle progresse par la mise en évidence de concepts, théories et modèles et par la conception d'expériences permettant de les valider. Son objet principal est la consistance mathématique et scientifique des concepts, des méthodes et des théories développés à ce jour pour l'analyse de la diffusion des mathématiques. On constate que la plupart d'entre eux sont spécifiques aux mathématiques. Ce n'est pas un a priori et rien ne s'oppose à l'utilisation de concepts plus généraux ou venus d'autres domaines (didactiques, épistémologiques) si l'expérience démontre qu'ils sont pertinents pour les mathématiques.

*2. La didactique des mathématiques stricto sensu.*
Elle étudie les problèmes didactiques particuliers se posant à propos d'une théorie ou d'un concept mathématique (didactique de l'analyse, didactique de la continuité uniforme,...). Pour chacun de ces thèmes, elle s'intéresse à son histoire, à son développement, à la manière dont il est enseigné, à l'usage qui en est fait tant par les élèves que par les mathématiciens, aux difficultés que soulève son appropriation, à l'intérêt qu'il présente dans l'apprentissage des mathématiques. Cette étude utilise naturellement des outils créés par la didactique fondamentale, mais elle nécessite de les adapter aux problèmes spécifiques et au besoin en produit de nouveaux. Elle procède par une confrontation permanente entre les théories et l'expérience.

*3. L'ingénierie didactique.*
C'est la didactique des mathématiques appliquée: à l'aide des instruments de la didactique fondamentale et des résultats de la didactique proprement dite, elle propose des ``aides" à l'enseignement. C'est la partie la plus visible par les non spécialistes mais, contrairement à ce que voudraient certains, la didactique ne détermine pas plus l'ingénierie ou la pratique de l'enseignement que la thermodynamique ne détermine la construction des moteurs. Cette étude ne peut faire abstraction des projets didactiques de la société. Ceux-ci dépendant de nombreux facteurs (historiques, sociologiques, politiques...), cet aspect de la didactique des mathématiques est nécessairement pluridisciplinaire.
Pour être plus concret, voici quelques uns des domaines qui sont typiquement de la compétence du didacticien mathématicien ou du mathématicien didacticien :

- Décrire et analyser comment les divers utilisateurs, notamment les professeurs et les élèves, adaptent les connaissances mathématiques et l'usage qu'ils en font. Identifier les causes de ces adaptations ou ``transpositions" et les difficultés qu'elles provoquent.
- Rechercher les conditions de la diffusion des connaissances spécifiques à chaque domaine des mathématiques (géométrie élémentaire, algèbre linéaire,...). En particulier, imaginer un univers de situations, de problèmes et d'exercices dans lequel ces connaissances trouvent leur fonction et leur signification.
- Réorganiser certaines théories mathématiques pour qu'elles deviennent compatibles avec les contraintes liées à leur diffusion auprès d'un public particulier (par exemple comment aborder l'intégration auprès de futurs physiciens ou ingénieurs devant savoir utiliser le théorème de Lebesgue mais n'ayant que peu de temps à consacrer cette théorie).

**b) Didactique des mathématiques et mathématiques**
La didactique des mathématiques telle que nous la concevons, ne peut se réduire à une simple application de disciplines telles que la psychologie, la sociologie, la pédagogie, la linguistique ou l'histoire même si elle doit avoir des échanges avec elles. Entre autres parce que sa pratique exige une solide formation mathématique permettant le recul nécessaire sur les différentes théories étudiées.
A l'inverse, toute personne expliquant des mathématiques, de l'enseignement primaire jusque y compris aux séminaires de recherche, fait, plus ou moins consciemment, de la didactique des mathématiques. Mais cette pratique spontanée s'accomplit sans mémoire, sans culture scientifique véritable, sans instrument de reconnaissance, d'échange et de progrès. Le propre du mathématicien didacticien est d'entreprendre une

réflexion systématique sur ces problèmes qu'il enrichit en les plaçant dans un cadre plus conceptuel. Il n'en demeure pas moins qu'il ne peut travailler sans des contacts et des liens institutionnels avec les mathématiciens et les enseignants de mathématiques. D'une part, l'ingénierie mathématique se justifie et s'enrichit par des échanges permanents avec les enseignants. D'autre part, un contact avec les mathématiques vivantes permet à la didactique de se renouveler constamment et d'éviter une dérive scolastique.

Il résulte des caractéristiques ci dessus que la didactique des mathématiques doit être considérée comme une branche des ``sciences mathématiques".

C'est pourquoi nous pensons que le choix des mathématiciens français, il y a trente ans, de garder les didacticiens parmi eux, contrairement à ce qu'ont fait la physique ou la chimie par exemple, était le bon. Nous suggérons donc de poursuivre dans cette voie. En réalité, la situation actuelle des études doctorales (et en particulier des DEA) de didactique des mathématiques dans des universités françaises n'est pas tout à fait aussi claire. Les premières ont été créées en 1975, d'abord dans des IREM et dans une UFR de didactique des disciplines, puis dans des laboratoires relevant d'écoles doctorales ``mathématiques et informatique" ou ``psychologie et sciences de l'éducation". Toutefois, à l'origine, elles étaient en général dirigées par des mathématiciens didacticiens (appartenant à la 26-ième section). Leurs programmes recouvrent à peu près les trois grands axes de la didactique des mathématiques telle que nous l'avons décrite plus haut.

**c) Organisation de la didactique comme science**

*1. Précisions*

La didactique des mathématiques est la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques utiles aux hommes et à leurs institutions.

Nous pouvons reprendre notre comparaison initiale : cette "définition" permet de penser que la didactique s'occupe de la diffusion des connaissances, comme l'économie s'occupe de la diffusion des biens matériels[9]. Il ne s'agit que d'une métaphore car ces deux domaines diffèrent considérablement par leur contenu et leurs méthodes mais elle va nous être utile.

On a montré qu'une part importante des conditions de diffusion des connaissances mathématiques et les lois qui leurs sont attachées peuvent différer beaucoup suivant les connaissances en questions.

On a montré d'autre part que le succès de la diffusion dépend de l'acquisition convenable par le destinataire des connaissances diffusées : Le destinataire doit pouvoir non seulement citer ou reproduire les connaissances, mais les "produire" lui-même comme moyens de décisions dans des circonstances nouvelles appropriées. Ainsi l'étude de certaines des conditions de production des connaissances mathématiques fait partie de la didactique.

Par contre, la diffusion de connaissances qui se fait à la demande du destinataire et sous son entière responsabilité ne devraient pas entrer directement dans le champ de la didactique proprement dite. Car celle-ci s'intéresse essentiellement au cas où la cible de la diffusion ne ressent pas directement le besoin de cette connaissance et où c'est une autre institution qui a l'intention de la lui faire acquérir. Cette définition rappelle une présentation ancienne et provocante : est didactique une personne qui veut enseigner quelque chose à quelqu'un qui ne veut pas l'apprendre. Elle place la didactique comme science de référence de l'enseignement[10].

Cependant l'autodidactisme - le cas où le destinataire est aussi le demandeur et l'enseignant - n'échappe pas au champ de la didactique dans la mesure où il se distingue de l'information ou de la documentation. La demande de l'autodidacte (ou la décision d'apprendre) est motivée par une position culturelle du savoir à acquérir et par la représentation qu'il s'en fait, mais non par son usage direct et par sa fonction dans une activité précise. De même les pratiques culturelles ou scientifiques incluent des pratiques et des considérations justifiées par des conditions ou des considérations didactiques; naturalisées, ces pratiques se perpétuent en dehors de toute

---

[9] "l'économie est la science qui étudie comment les ressources rares sont employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société; elle s'intéresse d'une part aux opérations essentielles que sont la production, la distribution et la consommation des biens, d'autre part aux institutions et aux activités ayant pour objet de faciliter ces opérations" Edmond Malinvaud : "leçons de théorie microéconomique" p. 1 (1982) Dunod, Paris.

[10] du moins de la dimension qui concerne spécifiquement la connaissance enseignée. L'activité didactique de l'enseignant est la partie principale de son activité. On retrouve ainsi un des usages courants de l'adjectif didactique : "qui sert à enseigner". Les moyens divers utilisés pour enseigner sont banalement qualifiés de didactiques. La production de ces moyens fait appel à une ingénierie didactique etc.

nécessité didactique et deviennent transparentes. Le didactique est ainsi présent, et même dense dans le savoir lui-même et donc dans toute pratique de savoir, y compris la production scientifique.

La didactique "tend à expliquer les comportements d'agents" (ou d'institutions) "jouissant d'une certaine liberté mais soumis à des contraintes que la nature et les institutions leur imposent"[11], et elle étudie les conséquences de ces comportements individuels sur l'état qui se réalisera dans la collectivité.

Comme l'économie, la didactique tend à remplir deux fonctions sociales : une fonction de science explicative des faits observés, et une fonction normative où elle s'interroge sur le meilleur moyen d'organiser des conditions favorables à la diffusion qu'elle étudie.

### 2. *Micro didactique et macro didactique*

Et comme l'économie, elle comprend aussi deux grands champs d'études: la microdidactique et la macrodidactique.

La *microdidactique* considère une connaissance particulière comme un objet isolable et étudie les comportements "didactiques" qui accompagnent sa production ordinaire (pas seulement sa production primitive ou historique), sa diffusion, son apprentissage (ou son acquisition, les deux termes sont métaphoriques) et son usage. Ces comportements consistent principalement dans l'aménagement de situations (leçons, exercices, problèmes, suites de leçons, processus à court et à long terme, etc.) et dans le réaménagement des connaissances (choix, ordre, forme, dépendance, fonction, et même statut ou représentation). Ces deux aménagements ne sont pas indépendants.

Parce qu'elle ne concerne qu'un petit nombre de savoirs, parce qu'elle décrit les interactions d'un petit nombre d'agents, en ne prenant en compte qu'un petit nombre de leurs caractères, la microdidactique peut sembler ne concerner principalement que les aspects les plus évidents, les plus concrets, les plus spécifiques et les plus familiers des activités sociales d'enseignement. Or, il ne s'agit pas, en première approche, de collecter en naturalistes ou en ethnologues, toutes les observations relatives à toutes les pratiques enseignantes formulées dans le langage des acteurs eux-mêmes, mais au contraire de ne retenir que ce qui est essentiel au savoir diffusé et à l'intention didactique, que l'apprenant soit un élève, une entreprise ou une institution, que la connaissance soit un énoncé où une théorie entière, et l'enseignant un professeur ou une société.

Diverses approches de ce qui est essentiel peuvent se concevoir et fournir des théories différentes, compatibles entre elles ou non. Elles donnent lieu à des confrontations avec la contingence et soulèvent parfois des problèmes de consistance, c'est-à-dire de cohérence logique.

La théorie des situations propose, pour la microdidactique,

- des modèles de conditions de diffusion,
- des systèmes minimaux d'interactions entre des actants,
- des modèles simplifiés d'actants

Elle ne rapporte pas les comportements décrits à des dispositions psychologiques très particulières des agents, mais à des conditions et à des causes extérieures. Et parmi ces conditions, celles qui ont un caractère marginal, "historique", et qui sont donc peu reproductibles ont un moindre intérêt.

Mais ces modèles n'ont d'intérêt que dans l'utilisation qui en est faite pour expliquer les propriétés didactiques de tel ou tel agencement des énoncés d'une même théorie mathématique, pour mettre en évidence l'aventure qui consiste à découvrir, à comprendre et à embrasser la géométrie, dans ce qu'elle a de différent de l'aventure qui consiste à pénétrer l'univers de la théorie algébrique ou celui des mathématiques de la statistique. Elle permet, par exemple, de retrouver ce qui caractérise la preuve ou la démonstration mathématique par rapport aux pratiques rhétoriques utilisées dans les débats etc.

La *macrodidactique* s'intéresse au fonctionnement didactique global des institutions et des systèmes didactiques réels, notamment à leurs interactions à propos de la diffusion des connaissances, à leurrépertoire et à leurs idéologies didactiques. Elle s'intéresse aux effets des régulations didactiques et des réformes imprimées par les différentes institutions intervenant dans les processus, sur les pratiques des élèves, des professeurs, des parents et de la société. Elle tend à expliquer l'évolution des savoirs et des pratiques didactiques qui leur sont associées, leur apparition, leurs difficultés ou leur disparition etc. et les phénomènes originaux auxquels donnent lieu ces évolutions. On peut citer par exemple les études de l'augmentation ou de la diminution de l'homogénéité et de diverses formes d'hétérogénéité, l'évolution et l'obsolescence de certains enseignements ou de certains savoirs (comme par exemple la proportionnalité, la géométrie scolaire, la théorie ensembliste des structures), les effets didactiques de certains obstacles épistémologiques, etc.).

La théorie des situations permet, dans ce domaine aussi, de fournir des instruments d'études, c'est-à-dire des concepts et des méthodes, et de les mettre en œuvre dans des travaux spécifiques.

Il n'échappera pas au lecteur attentif qu'à l'intérieur de ces grandes divisions, il existe des possibilités d'organiser les études de différentes façons. La science didactique est jeune et ne bénéficie pas encore d'une

[11] opus cité note 1

tradition solide à laquelle puissent se référer les chercheurs pour la modifier comme les étudiants pour l'apprendre. Cependant, puisque ce sont les connaissances elles mêmes qui précisent les différences les plus significatives entre les faits de didactique, c'est *l'organisation des connaissances mathématiques* qui donne sa structure la plus féconde à l'ensemble des travaux de didactique, que ce soit en micro ou en macrodidactique. La partie principale de la didactique est donc celle qui traite de l'enseignement de telle ou telle connaissance mathématique. Une partie des concepts et des méthodes propres à la didactique ont néanmoins, par rapport à ces études, une position particulière - métadidactique - un peu comme l'algèbre, qui permet une étude particulière de la géométrie (la géométrie analytique). Ce fait est une des premières raisons pour lesquelles il importe de rattacher étroitement la didactique des mathématiques telle que nous l'avons définie aux mathématiques elles-mêmes.

Cela n'exclut nullement qu'il existe d'autres approches des faits auxquels elle s'intéresse en tant que contingence. Avec d'autres moyens, d'autres buts et d'autres résultats ces faits intéressent aussi, et légitimement, beaucoup d'autres domaines, de la psychologie à l'ethnographie ou à la linguistique. Ces domaines peuvent aussi identifier leurs études, potentiellement utiles à l'enseignement comme une sorte de "didactique des mathématiques", branche appliquée de leur domaine. Nous pouvons ensuite discuter de la pertinence ou de l'adéquation de ces approches.

Ils intéressent aussi et au premier chef tous les enseignants et beaucoup de mathématiciens qui les traitent en praticiens et peuvent penser n'avoir aucun besoin d'aucune autre approche, ou qui la confondent avec la leur.

Mais il importe de distinguer la nature des savoirs et leurs domaines de validité, c'est pourquoi j'affirme qu'il existe des raisons scientifiques, épistémologiques, sociales et culturelles de rattacher ce que je suis en train de vous présenter aux mathématiques.

### 3. Différentes approches théoriques de la didactique

De nombreux travaux de ces trente dernières années se sont organisés autour de trois grandes approches théoriques qui servent à identifier les objets de recherches et à fournir des méthodes :

- *la théorie des situations*[12] , dont nous venons de parler, dont la conception remonte au début des années 70, mais qui ne cesse de se développer
- *l'approche anthropologique et praxéologique*[13] qui vise directement la modélisation des faits de didactique.
- *la théorie des champs conceptuels*[14] d'inspiration plus psychologique est d'avantage centrée sur la recherche des regroupements de comportements et de situations qui s'organisent autour d'une notion mathématiques

L'approche anthropologique et praxéologique modélise les rapports des sujets à un savoir en termes de tâches, de techniques, de technologie et de théories pour identifier les « écosystèmes » de connaissances. La théorie des situations prend comme objet de base le système des acteurs et des milieux qui permettent la production et la diffusion d'une connaissance précise. Elle permet de modéliser certaines conditions d'équilibre et d'existence de ces systèmes. D'autres constructions théoriques plus partielles peuvent s'articuler avec certaines des trois principales (en particulier celles de Régine Douady dialectique outil objet, théorie des cadres, des registres etc.) Ces théories présentent des applications pratiques importantes. Enfin de nombreux travaux de didactique plongent leurs racines et empruntent leur légitimité scientifique dans d'autres domaines tels que la sociologie[15], la linguistique ou même l'économie[16].

[12] Guy BROUSEAU, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques in « Didactique des mathématiques » de Jean Brun, Delachaux et Niestlé (1996) Lausanne

[13] Yves CHEVALLARD Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. In « Recherches en didactique des mathématiques » 12/1, 73 –111 (1992) La pensée sauvage (Grenoble)

[14] Gérard VERGNAUD La théorie des champs conceptuels in « Didactique des mathématiques » de Jean Brun, Delachaux et Niestlé (1996) Lausanne.

[15] Il existe une « Théorie des situations » développée en sociologie de façon apparemment indépendante de la théorie des situations didactiques par J. Barwise, puis par K. Devlin et Rosenberg depuis la fin des années 90. Le lecteur pourra consulter Michel de Formel et Louis Quéré : La logique des situations nouveaux regards sur l'écologie des activités sociales (Editions de l'école des hautes études en sciences sociales

[16] Consulter par exemple l'article de Bertrand Munier Décision et cognition in « les nouvelles théories économiques » un numéro des cahiers français n° 272 de la documentation français (1995)

Les textes récents évoqués dans le texte sont cités en note. Le lecteur trouvera une bibliographie très complète dans le remarquable ouvrage de Bruno D'Amore : Elementi di Didattica della Matematica (Pitagora editrice Bologna)