COMMUNICATiONS

PEUT-ON AMELiORER LE CALCUL DES PRODUITS DE NOMBRES NATURELS ?

Guy Brousseau
DEPARTEMENT DE MATHEMATIOUES
UNIVERSITE DE BORDEAUX I

Nous nous préoccupons dans cette commission, de reconnaître, à travers des observations ou des expériences sur l'éducation, les différents statuts qui peuvent être attribués aux objets thématiques et leurs re1ations avec les objectifs de 1'enseignement.
J'ai pensé qu'il pourrait être utile de rapporter ici des résultats très simples d'une expérience que j'ai faite à l'I.REM. de Bordeaux dans le cadre dune recherche sur les conditions d'apprentissage des algorithmes et du raisonnement.
Pour des raisons de temps je me limiterai volontairement à l'étude sommaire d'un seul phénomène. Si cela ne satisfait notre goût commun pour les représentations fidèles de i'activité de l'enfant, j'espère que la manière dont les mathématiques interviennent dans cette étude n'en sera pas modifiée.

1. — *L'EXPERIENCE*

1. 1 — CADRE DE L'EXPERIENCE

Il s'agissait de trouver une méthode pédagogique qui permettrait aux enfants de se constituer progressivement une méthode de calcul du produit de deux naturels, sans qu'aucune technique ne leur soit communiquée ni qu'aucun entraînement formel au calcul ne soit exigé d'eux. Nous pensions qu'après, en appliquant cette méthode nous pourrions étudier, à travers l'évolution des algorithmes découverts et utilisés par let enfants, quelques unes des lois des processus naturels de mathématisation dont nous soupçonnons l'existence.
Avant de concevoir cette méthode nous avons examiné tout les algorithmes qui pourraient apparaître et tenté de les caractériser afin de prévoir, à travers Ies comportements observés, la manifestation de paramètres intéressants : nombre d'erreurs, vitesse d'exécution, vitesse d'apprentissage... etc.
Au court de cette analyse il nous a paru possible de vérifier la pertinence de certains modèles de comportement des enfants en organisant Ia courte expérience suivante.

1.2 — PRINCIPE DE L'EXPERIENCE

Nous avons préparé une épreuve comportant un certain nombre de multiplications que nous avons présentées à 600 enfants (dent 150 do niveau CM2 9 à 11 ans). Nous contrôlions à peu près un certain nombre de variables : effet d'apprentissage et de fatigue, QI, valeur des maîtres, origine socioculturelle des élèves, et nous en étudions d'autres taille de l'opération, présence de retenues, fréquence relative des produits élémentaires, niveau scolaire... etc.
Tous les enfants ont calculé avec la méthode « à l'italienne » (voir figure 1) qu'on leur avait apprise.
Nous avons alors enseigné à certains d'entre eux la méthode «per gelosia » (voir figure 1) (une heure d'apprentissage). Nous avons contrôlé qu'il y avait un progrès très net (test t de Student très significatif) dans les résultats (beaucoup moins d'erreurs) sans différence apparente dans le temps d'exécution.

1.3. — REALISATION

II n’est pas nécessaire de décrire ici les précautions délicates mais classiques que nous avons prises lors de cette expérience. *Le but des deux paragraphes suivants de cette étude est d’expliquer le progrès observé et de le prévoir pour une nouvelle expérience.*

2 - *INTERPRETATION: DESCRIPTION SIMPLIFIEE DU COMPORTEMENT D’UN ENFANT QUI CALCULE LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES*

2.1. — DESCRIPTION DU COMPORTEMENT OBSERVE

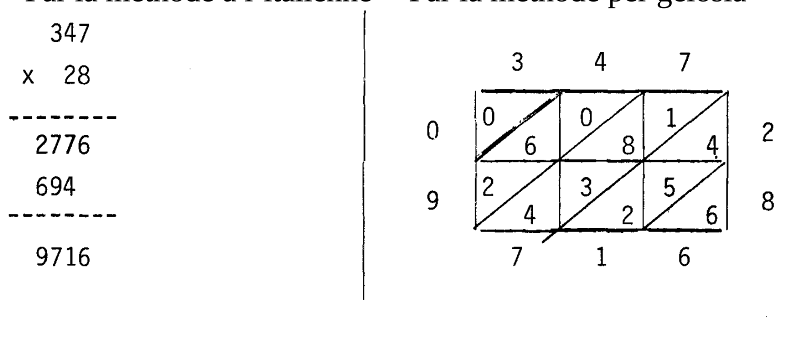
2.1.1. - *L’activité* :

Nous n’observons — de façon très grossière — que les comportements
— qui concrétisent l’objectif éducatif suivant : « l’enfant est capable de trouver le produit de deux naturels quelconques »
— qui se manifestent par une séquence d’activités observables (écrire un résultat partiel par exemple,..) ou décelables très directement (lire tels chiffres..)
et où il est fait appel à certaines formules (d’une table d’addition, ou d’une table de multiplication par exemple) supposées connues à l’avance,
Par exemple nous ne décrirons pas ici l’activité d’un sujet dont toutes les formules figurent dans une mémoire extérieure et qui cherche le produit dans une table, ou à l’aide d’une table (de logarithmes par exemple).

2.1.2. Première décomposition de cette activité :

Dans ces conditions, I’articulation de cette séquence d’activités est observable — elle peut être représentée par un ordinogramme, c’est-à-dire par un schéma de programme de calcul
Voici par exemple (fig. 1) le calcul du produit 347 x 28

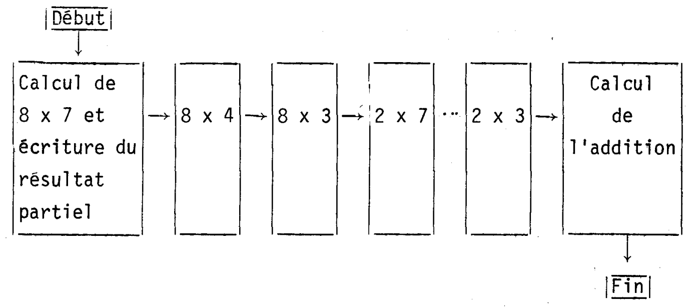
Par la méthode à l’italienne   Par la méthode per gelosia



Dans les deux cas, il a fallu calculer successivement tous les produits partiels
18x7; 8x4; 8x3; 2x7; 2x4; 2x3} dans cet ordre avec la première méthode, dans un ordre quelconque pour la seconde.
Le schéma 1 représente un ordinogramme pouvant correspondre aux deux méthodes.
[il est formé de la succession de 6 calculs de résultats élémentaires, puis du produit de ces résultats par des puissances de 10 appropriées (non représenté) et l’addition de ces nombres.][1]

[1] Les textes entre crochets sont des ajouts de mai 2001

Schéma 1



On peut en observant le sujet décider si chaque action été effectuée, dans cet ordre[2].

Il faut calculer p x q produits partiels et l'organigramme comporte p x q calculs de résultats partiels avant le calcul de l'addition Nous dirons que l'opération est de taille p x q. Exemple : l'opération de la figure 1 est de taille 6.

2.1.3 - Décomposition plus fine de l'activité :

Nous pouvons aussi décomposer le calcul d'un produit partiel en activités plus élémentaires. Les deux méthodes de calcul ne relèvent plus d'un même ordinogramme ; mais on s'aperçoit que le calcul de chaque résultat partiel fait appel à une même séquence d'actions ou de décisions Nous appellerons "boucle" une telle séquence répétitive. Les schémas 2 et 3 représentent une boucle de chaque méthode (les ordinogrammes complets pour 1 'exemple de la figure 1 comporteraient 6 boucles). La taille de l'opération donne le nombre de boucles. Bien sûr il est fait alors appel à des aptitudes dont il faudra vérifier que le sujet les possède.

2.1.4 - Vérification de ce modèle de comportement :

Il est plus difficile de vérifier directement que ces ordinogrammes dé taillés représentent bien l'activité effective de l'enfant. On peut néanmoins mettre en évidence l'existence de certaines parties du pro gramme en montrant que certains paramètres y sont attachés temps d'exécution, probabilités d'erreurs etc. .9ontrer que l'articulation prévue par l'organigramme est correcte en montrant qu'elle permet de calculer le temps d'exécution total et la probabilité d'erreur dans chaque boucle.

Dans l'exemple présent nous ne chercherons pas à analyser une boucle. Nous étudierons seulement la séquence représentée par le schéma I. Nous nous servirons seulement du fait que la boucle de la méthode à l'italienne (schéma 2) est beaucoup plus complexe que celle de la méthode per gélosia (schéma 3) après avoir vérifié expérimentale ment que cette complexité entraîne bien une différence dans les temps d'exécution ou la fiabilité.

---

[2] Note : Plus généralement si on calcule le produit de deux naturels a comportant p chiffres et b comportant q chiffres

$$a \times b = \sum_{i=0}^{i=p-1} a_i \cdot 10^i \times \sum_{j=1}^{j=q-1} b_j \cdot 10^j = \sum_{k=0}^{k=p+q-2} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \cdot 10^k \right)$$

Pour simplifier nous n'étudierons que la fiabilité. Mais il est clair que la conviction que l'ordinogramme est un bon modèle de comportement doit être étayée par des vérifications indépendantes et convergentes.

2.2 DESCRIPTION DES MODELES SIMPLIFIES DU SUJET

2.2.1. [Ordinogramme]

Chaque ordinogramme est réalisé en supposant que le sujet est capable d'accomplir une certaine liste d'activités (celles qui figurent dans les cases). On associe arbitrairement sou vent à ces activités certaines capacités du sujet : par exemple "le sujet est doué d'une mémoire où il loge le répertoire des formules de la "table".
Les systèmes comportant les différentes mémoires évoquées dans l'ordinogramme et doués de la capacité d'effectuer les calculs qu'il décrit constituent des modèles simplifiés du sujet[3]

2.2.2 - Valeur de ces modèles :

Ces modèles ne sont intéressants que dans la mesure où ils permettent de simuler le comportement de l'élève ou des élèves de façon satisfaisante. Ils représentent néanmoins le système d'objets et de règles sur lequel on est en train de raisonner et facilitent de ce fait le jugement que le chercheur peut porter sur la valeur de ses réflexions.

2.2.3 - Modèle :

Dans le cas présent nous nous contenterons d'un modèle grossier et nous supposerons que le sujet accomplit successivement p x q fois une même tâche (boucle)
- sans erreur sur l'ordre ou la nature de ces taches successives.
[nous supposerons aussi]
- qu'au cours de chaque boucle k, le calcul (nous dirons l'actualisation) d'une formule élémentaire est l'occasion d'erreurs qui se manifestent avec une certaine fréquence x_k
- que x_k est la manifestation aléatoire d'une probabilité d'erreur ek[4] : probabilité que l'élève se trompe à la kième "boucle" (à distribution gaussienne)
- que les épreuves (les boucles) successives sont indépendantes (l'erreur au rang k ne dépend pas des résultats aux rangs précédents).
- que toutes les probabilités sont égales à e que nous appellerons "erreur locale"

2 2.4 - Discussion du modèle .

Chaque condition limite le modèle et ne peut être acceptée que si les résultats expérimentaux le permettent : par exemple ïa dernière condition implique que l'on néglige les différences de fréquences d'erreurs entre les produits difficiles comme x 8 et les produits faciles comme 2 X 2 Nos observations montrent que ces différences sont significatives et même importantes On peut toutefois conserver le modèle en supposant qu'on I applique à des enfants résolvant des opérations où ce facteur serait maîtrisé convenablement

La condition précédente néglige les effets de fatigue. Nous ne serons fondés à l'accepter que si la fidélité du modèle obtenu est suffisante pour l'usage que nous en faisons.

[3] Human problem solving. Newell et Simon : 1971
[4] Note 2001 une variable de Bernouilli

2. 2. 5. Ajustement

Pour ajuster cette fidélité nous pouvons après analyse des résultats introduire dans le modèle de base certains paramètres que nous pouvons faire varier pour simuler les observations Par exemple : A chaque produit i x j de la table est attribuée une probabilité d'actualiser de façon erronée ou encore, à chaque rang k de la boucle est attribuée une fonction croissante de k, k_{eij} qui modifie e_{ij} et représente la fatigue; etc.
Nous pourrons être amenés â faire appel à un modèle plus fin et à distinguer les boucles comportant une retenue et celles qui n'en comportent pas dans l' algorithme à 1 italienne ou le nombre des mémoires de travail mobilisées à un instant donné ; ou lorsque nous nous intéresserons à l'apprentissage la dimension des mémoires permanentes - c'est-à-dire le nombre des formules à retenir - ou le nombre d'opérations élémentaires à effectuer.
Les précautions, les choix et les vérifications nécessaires ont fait l'objet de travaux que je ne rapporterai pas ici. Acceptons que le sujet fait p x q boucles et qu'à chacune il à une probabilité e de se tromper.

2.3. - VALEURS DES PARAMETRES

2.3.1 Pour fixer les idées voici quelques pourcentages d'erreurs dans des boucles, mesurés, dans différents cas) au cours d'opérations à l'italienne.

$m \pm \sigma/\sqrt{N}$ (N)	Sans retenue	Avec retenue
Produits seuls Taille 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Taille 2 x 1	1,20 + 0,55 (17)	7,46 - 1,78 (19)
Taille 3 x 1	2,40 + 1,32 (13)	11,47 - 1,47 (17

établi sur 141 enfants de 9 à 11 ans

Tableau 1

2 - 3 – 2. La taille des opérations proposées aux enfants de cet âge est assez généralement comprise entre 8 et 16.

3 - INTERPRETATION : ANALYSE DU MODELE

Nous avons maintenant un modèle mathématique assez simple pour traiter certaines données retenues.

3.1. **- PROBABILITE D'ERREUR DANS LA SUITE ENTIERE D'ACTIVITES**

A chaque boucle un sujet donné à une probabilité (1-e) de ne pas se tromper (fiabilité). Si l'opération comporte p x q boucles la probabilité de ne se tromper à aucune est

$$(1 - e)^{p \times q} = 1 - e_g = F$$

e_g probabilité d’erreur “globale” ; F fiabilité.
Note : Dans le cas où les probabilités locales sont différenciées suivant divers facteurs, la formule devient

$$1 - e_g = \prod_{k=1}^{k=p\times q} (1 - e_k)$$

ek : probabilité d’erreur à la kième boucle

3.2. - **VERIFICATION**

La vérification du modèle peut se faire par exemple à l’aide d’un autre "modèle mathématique ”très classique (test du χ^2) qui permet de tester l’écart entre la valeur prévue par notre jeu d’hypothèses et la valeur observée.

3.3. **- CONSEQUENCES**

Le modèle est peu précis mais fidèle et assez satisfaisant (admettons le ici en tout cas). La figure 2 montre des courbes représentatives de F en fonction de la taille t de l’opération pour 3 valeurs voisines de la probabilité d'erreur c dans une boucle.

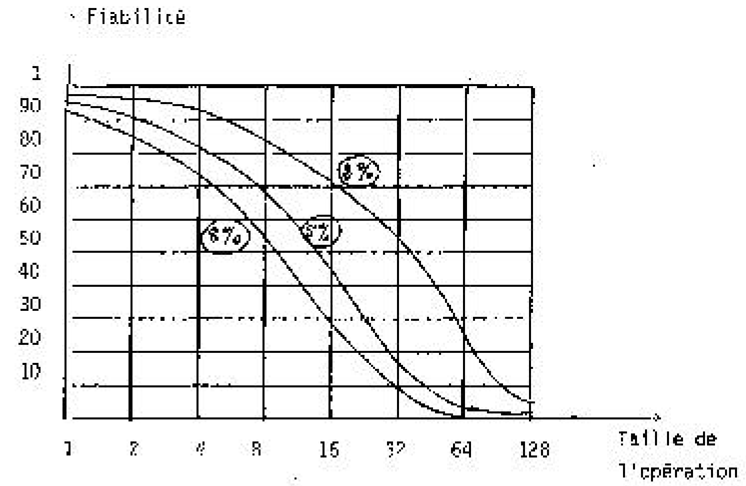


Figure 2

3.3.1 –
On peut y vérifier que la fiabilité devient très vite négligeable lorsque la taille de l’opération croît.
Supposons que nous fixions à 75 % de réussite le seuil inférieur de réussite admis par l’élève (ou l’institution). Il veut réussir ses opérations 3 fois sur quatre. La taille maximum des opérations qu’il peut entreprendre en fonction de sa probabilité d’erreur est donnée par la figure 3.
La relation que nous venons de mettre en évidence joue sans doute un grand rôle au cours de l’apprentissage. Pour des fiabilités de 0,85 à 0,99, pour des tailles d’opérations “raisonnables"’ (entre 8 et 16), la sensibilité de F aux variations de fiabilité locale est assez grande.
En dehors des intervalles que nous signalons les progrès I seront inappréciables quels que soient les efforts des enfants. (Fig. 4).

Un élève qui passe de 92 % à 96 % de fiabilité locale passe de 26 % à 50 % de réussite : résultat peu sensible. Lorsqu'il passe de 96% à 98 % sa réussite globale passe de 50% à 72 %. Le progrès apparaît plus nettement!

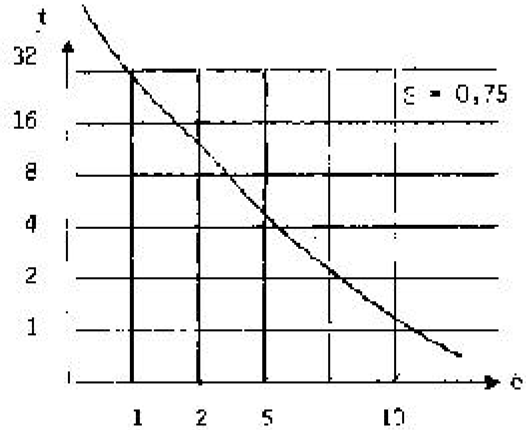


figure 3

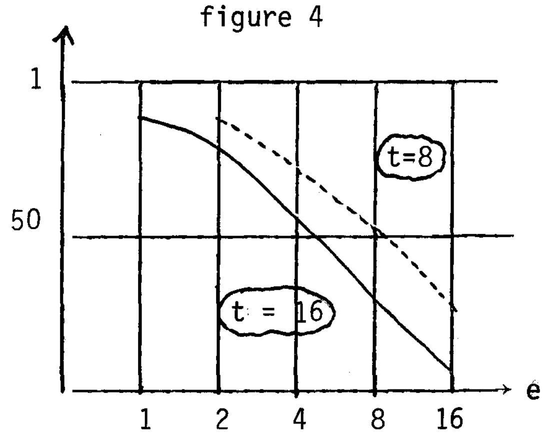


figure 4

3.3.2- [gain de fiabilité]

Supposons que, par un moyen quelconque, nous puissions obtenir d'un seul coup un important gain de fiabilité locale. Si nous connaissons le nombre d'enfants, soumis à l'expérience, ayant une fiabilité locale donnée alors nous pourrons prévoir le nombre d'enfants qui vont passer de la zone des résultats médiocres (moins de 3 réussi tes sur 4) à celle des résultats acceptables (plus de 75 % de réussite). Voir l'exemple du § 3.4.2

3.3.3-   Remarquons à ce propos que nous pouvons alors étudier l'importance relative des facteurs du modèle (comparaison des $\frac{dF}{dx}$ par exemple) ou comparer leur efficacité sur l'ensemble des élèves (accroissement du taux de réussite par rapport au temps d'apprentissage). Il s'agit moins d'optimiser directement l'action de 1 'éducateur que de détecter quel genre de facteurs commandent l'évolution du système de l'élève, par exemple par la recherche inconsciente de l'économie, ou de l'efficacité optimum.

3.4. - **VERIFICATION**

3.4.1   - En nous appuyant sur la comparaison de nos deux méthodes (schéma 2 et 3) nous avons émis l'hypothèse que la fréquence des erreurs commises dans une boucle de 1 algorithme per gélosia devait être dans tous les cas inférieure ou égale à celle de l'algorithme à l'italienne en l'absence de retenue.

3.4.2. - Cette hypothèse plausible nous a permis d'estimer le gain que l'on pourrait espérer du point de vue des résultats du remplacement d'un algorithme par un autre,

Exemple : Voici une classe ordinaire de 25 élèves répartis en 6 groupes dont les fiabilités locales moyennes e_{SR} (sans retenue), et e_{AR} (avec retenue) sont données dans les colonnes 2 et 3 du tableau II, avec les effectifs de chaque groupe (la colonne 1).

L'amélioration de la fiabilité est plus forte pour les élèves moyens

TABLEAU II

N	e_{SR}	e_{AR}	Taille 8 F_A $(1-e_{SR})^2(1-e_{AR})^6$	Taille 8 F_N $(1-e_{SR})^8$	Amélioration de la fiabilité	Taille 16 F_A $(1-e_{SR})^4(1-e_{AR})^{12}$	Taille 16 F_N $(1-e_{AR})^{16}$	Amélioration de la fiabilité
5	0,3	2	0,87	0,97	10 %	0,75	0,94	19 %
7	0,5	4	0,76	0,96	20 %	0,57	0,92	35 %
6	1	7	0,62	0,92	30 %	0,39	0,85	46 %
3	2	9	0,53	0,85	32 %	0,27	0,72	45 %
1	4	11	0,45	0,72	27 %	0,17	0,52	35 %
3	8	15	0,36	0,52	16 %	0,10	0,27	17 %
25 élèves	Moyenne 1,8	Moyenne 6,55						
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

Nous supposons que les opérations proposées aux enfants comportent 25 % de produits partiels sans retenue et 75 % de produits partiels avec retenue. Pour chaque groupe d'enfants les fiabilités globales cal culées pour l'algorithme à l'italienne et pour les tailles 8 et 16 colonnes 4 et 7 sont comparées aux fiabilités correspondantes prévisibles avec l'algorithme per gelosia (colonnes 5 et 8). Le gain, en %, de fiabilité : 100 (F nouvelle – F Ancienne), est porté dans les colonnes 6 et pour la taille 8 et 9 pour la taille 16.

1ère conclusion : Il est visible que l'amélioration de fiabilité est plus forte pour les élèves moyens et pour les tailles plus grandes.

2ème conclusion : Au seuil de réussite acceptable de 70 %, pour la taille 8 ; la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves, soit 48 % - l'autre permet d'espérer la réussite de 22 élèves soit 88%-

Nous pourrions dire que le gain pédagogique est de 40 %.

Pour la taille 16 le gain serait de 84 - 20 = 64 %

3.4.3 En fait cette hypothèse s'est trouvée à peu près confirmée mais nous étudions et vérifions un modèle plus complexe l'amélioration obtenue a été meilleure que celle qui était espérée, d'autres facteurs ont joué.

3.4.4. Nous nous garderons bien pour l'instant de tirer de ces réflexions des conclusions hâtives au sujet des méthodes d'enseignement mais il a été vérifié qu'auprès des élèves qui ne parviennent pas au CM ou en 6ème à des résultats satisfaisants dans le cal cul des produits, l'apprentissage rapide de la méthode "per gelosia" donne des résultats excellents.

4- CONJECTURES : MODELES D'APPRENTISSAGE

4.1. - LANGAGE

4.1.1 - *Répertoire - Ordinogramme*

a) - Pour calculer un produit quelconque suivant l'un de nos ordinogrammes il est fait appel à des formules de référence que l'on suppose stockées dans une mémoire interne (pro duit appris par cœur par exemple) ou externe (table consultée sur le champ).

L'ensemble R des formules de référence dont dispose un élève à un moment donné constitue son répertoire. La suite O d'activités qu'il est capable d'exécuter, et dont l'organigramme est un modèle, jointe à ce répertoire, lui permet de produire un certain ensemble de formules F

b) - Par exemple : si R est l'ensemble des produits de naturels de la forme a x b = c, où $a \leq 5$, $b \leq 10$, (R est "les tables de 1 à 5") et si O est l'algorithme à l'italienne, < R, O > permet à l'élève de produire l'égalité : 32 x 5 = 160 mais pas 49 x 8 = 392

c) - Soit $f_{a,b}$ la fiabilité du produit a x b, v_i la vitesse d'exécution d'une tâche élémentaire, r la fiabilité de la boucle de retenue... A un instant donné les possibilités de l'élève peuvent se déduire

- du couple <R O > qui caractérise en quelque sorte la compétence du sujet
- d'un n—uplet $< f_{1,1}., f_{1,2}, \ldots, f_{i,j} \quad \ldots f_{amax}, , f_{b\,max}, r, v_i, \ldots v \ldots >$

qui caractérise la manière dont le sujet actualise <R,O> et qui permet « d'expliquer » sa performance.

4.1.2 Processus et modèles d'apprentissage

a) - Au cours de l'apprentissage les composantes de ce n-uplet se modifient : Nous suggérons le vocabulaire suivant : la suite des n-uplets qui décrit les états successifs des possibilités du sujet -quand elle peut être décrite- constitue un "processus d'apprentissage"

Si un système de règles et d'hypothèses permet d'engendrer cette suite, à la manière d'un automate déterministe ou d'un processus stochastique) il constitue un modèle d'apprentissage.

La suite des activités didactiques à organiser pour obtenir les états successifs du sujet est un programme d'apprentissage[5]

b) - Exemple : Ne considérons que les couples < R,O > composés d'un répertoire et d'un ordinogramme de cal cul. Les méthodes classiques n'envisagent que les processus tels que $R_i \subset R_{i+1}$: c'est à dire où le répertoire augmente d'une étape à l'autre[6] (avec des mesures pédagogiques pour empêcher ou corriger des diminutions) et tels que est O_i un sous-ordinogramme de O_{i+1}

Exemple : Dans l'apprentissage de l'algorithme à l'italienne, en France, les enfants de 7 à 8 ans disposent d'un répertoire réduit aux tables de 1, 2, 3 et d'un ordinogramme simplifié : produits sans retenues multiplicateurs à un chiffre. Leur répertoire s'enrichira plus tard des

[5] Note 2001 : Il aurait mieux valu dire « ou d'enseignement »
[6] Note 2001 : Strictement, le répertoire R à l'étape i est contenu strictement dans le répertoire à l'étape i+1

tables suivantes et leur ordinogramme se complexifiera : produits de plus grands nombres ; retenues produits de nombres à virgule.. Les ensembles (F i) de formules calculables sont emboîtés et croissants.
Nous essaierons de montrer qu'il existe d'autres modèles[7].

c) - Comme pour les modèles de comportement il faut d'abord mettre en évidence les facteurs et les paramètres qui devront figurer dans le modèle d'apprentissage
Nombre de formules du répertoire, fréquence d'emploi, seuil de fiabilité acceptable de l'élève, fiabilité de l'ordinogramme, nom bre de mémoires de travail utilisées simultanément, ensemble des for mules engendré par > , incertitude liée au modèle sur un champ d'application donné, temps d'exécution, temps d'apprentissage fatigue du sujet.. etc.

On peut alors découvrir que certains processus d'apprentis sage sont optimaux d'un certain point de vue et expliquer par exemple leur apparition spontanée ou en trouver les conditions. C'est la fidélité des modèles de comportement et d'apprentissage qui commande la valeur de ces points de vue et non pas seulement leur qualité mathématique.

4.2 - OBJECTIFS DE LA RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE DES ALGORITHMES

4.2.1 - *Difficultés avec les méthodes classiques*

Les principaux reproches que l'on peut faire à 1'apprentissage classique sont :
- le temps d'apprentissage démesuré (3 ans)
- le manque d'intérêt et de retombées mathématiques de la méthode, elle-même basée sur des processus de mise en mémoire et d'exécution étrangers au contenu mathématique. Ces connaissances acquises sont mécaniques et se prêtent mal à l'analyse et à l'adaptation.
- La difficulté à motiver chacune des étapes de l'apprentissage; seule motivation : Il faut savoir calculer, donc il faut apprendre à le faire. La méthode demande coercition et volonté de réussir , attention soutenue.
- Les résultats de l'apprentissage ne sont pas aussi bons qu'on le voudrait : de nombreux enfants ont des difficultés avec le sens de 1 'opération; d'autres sont bloqués dans un refus des mathématiques3 la fiabilité n'est pas très grande.

4.2.2 - *Causes*

- Divers travaux récents nous ont conduit à penser qu'une même cause pouvait être à l'origine de toutes ces difficultés : l'analyse qui a conduit au choix du modèle d'apprentissage.
Essentiellement cette analyse conclut ainsi

a) - Le calcul d'un produit de naturels est un algorithme complexe. Il ne peut être inventé par l'enfant. Il doit être appris précocement de façon à pouvoir être utilisé mécaniquement, sans faute, plus tard.

b) - Pour enseigner un mécanisme, il faut enseigner l'organigramme par emploi répété, sous la forme où il sera utilisé finalement et mettre en mémoire les formules du répertoire (par apprentissage sériel). Le "sens" de l'opération, c'est-à-dire la reconnaissance des occasions d'utiliser le calcul, ne peut pas dans ces conditions découler de sa "compréhension" et doit faire l'objet d'un apprentissage séparé.

[7] Note 2001 lire « modèles didactiques », c'est à dire modèles à usage didactique

Il faut bien voir que ces conclusions sont fondées sur l'idée que le calcul est un mécanisme, qu'on connaît un moyen d'enseigner les mécanismes, et donc que l'on peut appliquer l'un à l'autre.

Le modèle d'apprentissage classique est d'ailleurs si bien accepté par les professeurs de mathématiques qu'ils ont essayé de transférer à l'apprentissage des théories mathématiques voire même du raisonnement, en se servant de certaines analogies logiques (voir plus loin) ceci, le plus souvent, il est vrai, à l'intention des moins bons élèves.

C'est ainsi que, traitant un peu les théorèmes et les axiomes comme un répertoire, on cherche à expliciter auprès des élèves des procédures et des méthodes de résolution de problèmes qui permettraient d'utiliser le répertoire de la "bonne manière". Evidemment, on ne con naît pas de classes de problèmes sur lesquelles ces méthodes de résolution donnent sûrement le résultat attendu ; il faut les essayer l'une après l'autre. Ces méthodes ne constituent pas des algorithmes (sauf si, par hasard, elles s'appuient sur un théorème ignoré de l'élève), mais on les enseigne pour jouer le même rôle. L'heuristique est issue de ce point de vue et a donné à ce jour en didactique des succès limités. On sait bien à quelles difficultés se heurtent ces méthodes pédagogiques consistant en une mécanisation basée sur une décomposition arbitraire des tâches.

4.2.3 - *Perspectives*

Inversement, on peut remettre en cause l'apprentissage mécanique de la multiplication. Si un enfant construit lui-même un procédé pour établir l'exactitude d'une formule, c'est une manière de démonstration. Si ce procédé est réemployé, il sera appris et amélioré, jusqu'au moment où il sera reconnu comme algorithme et décrit.

Bien que la règle à inventer soit compliquée, œ point de vue n'est pas utopique : l'enfant acquiert plus tôt un système linguistique beaucoup plus complexe, qui fonctionne mécaniquement, sans qu'on soit amené à lui enseigner séparément
- du vocabulaire par apprentissages sériels
- de la grammaire, comme ordinogramme de productions des phrases
- le sens de ces phrases (ou plutôt, la liste des occasions de les dire, comme des citations)

Cette contestation répondrait à des soucis pédagogiques énoncés depuis longtemps. Le problème est de lui trouver des fondements mathématiques, psychologiques, linguistiques et didactiques suffisants. Ce sont là les objectifs généraux de certaines recherches poursuivies à l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Dans un premier temps, en se gardant de croire trop tôt aux vertus d'un changement de modèle séduisant mais superficiel[8] il s'agit toutefois de se donner un vocabulaire correct et qui permette d'échapper le plus possible aux "évidences" qui ne sont que des conséquences cachées, qu'un système classique.

.

4.3. - **PROPOSITION D'UN LANGAGE DIFFERENT**

Nous travaillons dans deux directions à la fois : Nous essayons de réaliser concrètement des

[8] Mme SINCLAIR de ZWART a montré combien il fallait être circonspect à ce sujet

processus qui échappent au schéma critique et nous essayons de nous donner une théorie appropriée utilisant des termes différents.

4.3. 1 - *Vers un nouveau processus d'apprentissage*

Nous étudions depuis 3 ans un processus où i'enfant fabrique son algorithme. On veut qu'il conçoive le problème calculer le produit" avant d'en étudier la solution, Ainsi le produit n'est plus "ce que l'on trouve en effectuant une multiplication". Par exemple l'enfant sait que "a x b" désigne le cardinal d'un ensemble comportant a lignes de b objets, Pour "calculer" a x b, il invente de découper cet ensemble en morceaux qu'il peut déjà compter et de faire la somme. Il améliore son découpage et le choix des morceaux de façon â rendre son algorithme plus rapide, plus sûr, plus efficace, plus général. Il ne sait pas encore qu'il existe une unique méthode de calcul. Chaque activité est une démonstration de la formule basée sur des propriétés de la théorie mathématique (distributivité, produits de partitions...) connues explicitement ou non.

4. 3. 2. - *Système d'axiomes* - *Règle de déduction*

Nos expériences nous ont suggéré d'utiliser le vocabulaire suivant :

Considérons que l'ensemble des formules sans variables. de la forme "a x b = c" où "a", "b" et 'c" sont les écritures décimales des naturels, constitue les formules atomiques d'un langage mathématique L. Donnons à ces formules leur signification habituelle dans {IN, + , x }; certaines sont vraies, d'autres sont fausses.

L'ensemble des règles qui permet d'associer à tout couple d'écritures (a, b) une écriture c de L tel le que « a x b = c » soit vrai dans IN, est une règle de production : le calcul du produit ou multiplication. Il est fait appel dans cette règle à une suite de formules de L : par exemple il est fait appel dans le calcul de 347 x 28 à la formule : « 8 x 7 = 56 », à la formule « 8 x 4 = 32 ». etc.

Considérons la suite de ces formules figurant dans le calcul, comme les antécédents d'une règle de déduction dont le conséquent serait « a x b = c »[9]. D s'appuie sur le procédé (ici métalinguistique) de la "multiplication" pour associer à un n-uplet de formules de une autre formule de L . Evidemment D fournit un procédé de décision sur tout L et est donc aussi un algorithme.(la règle pourrait s'appliquer à des formules fausses. Elle donnerait alors d'autres formules généralement fausses dans IN).

L'ensemble des formules auxquelles il est envisageable de faire appel avec une certaine "règle" sera comparable à un système d'axiomes on pourra vérifier si engendre bien les formules vraies de L , et rechercher d'autres systèmes formels équivalents ou non.

4. 3. 3 - *Intérêt de cette formulation*

Ce point de vue nous a paru justifié entre autres par le fait que les élèves de l'école élémentaire manipulent les produits comme un langage à part. Il reste à prouver la fécondité de ce point de vue qui se heurte à des difficultés dans l'analyse de la sémantique du langage employé.

Cette formulation pourrait permettre d'unifier nos conceptions relatives à la manière dont une théorie mathématique intervient dans l'activité de l'enfant

7 cf. Lentin et Gross. Notions sur les grammaires formelles p. 30

- de façon implicite, pour permettre de prendre des décisions
- comme langage
- comme système de validations [5]

Elle permettrait de comprendre l'économie et l'efficacité que L'enfant emploi d'une théorie mathématique, dans les situations qu'il rencontre et de comprendre quand et pourquoi ces processus d'économie aboutissent naturellement à des mécanismes.

Nous pensons alors que ces notions pourraient être utiles pour isoler les facteurs didactiques importants pour l'organisation de l'enseignement.

5 - CONCLUSIONS

Les exemples que nous donnons ci-dessus, bien qu'un peu naïfs, ont le mérite de mettre en évidence les différentes manières dont les théories mathématiques peuvent être engagées dans l'analyse des phénomènes didactiques, qu'il s'agisse d'appréhender les facteurs pertinents de la situation présentée à l'élève, de construire des modèles du comportement de 1 élève, ou des modèles d'apprentissage, ou de mettre en œuvre des méthodes de validations de ces modèles.

En général les modèles ne sont pas aussi simples, ni aussi sûrs, les conclusions aussi nettes, les écarts aussi importants. Il ne faudrait pas croire qu'une voie royale s'ouvre, qui va permettre de résoudre n termes mathématiques tous les problèmes de la didactique mathématique. Chaque observation soulève tous les problèmes à la fois et nous en sommes encore à accepter pour thèses des faisceaux convergents de conjectures empruntées à la psychologie, à la linguistique, à la sociologie, aux mathématiques . Cependant il se dégage de notre exemple une méthodologie scientifique de la recherche, valable encore dans des cas plus complexes, et qui commence à pouvoir servir 1'enseignement sans l'asservir.

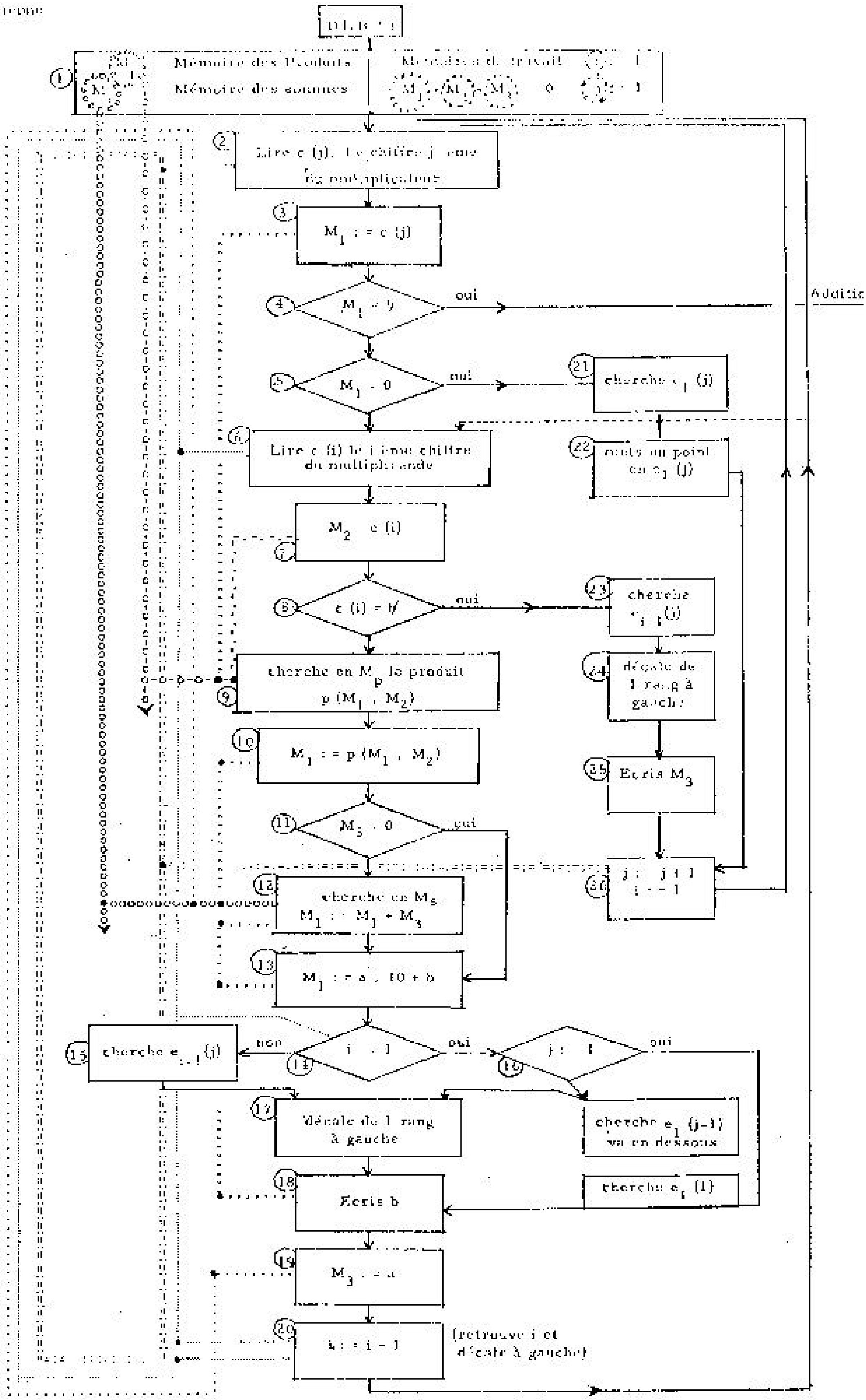
G. BROUSSEAU

BIBLIOGRAPHIE

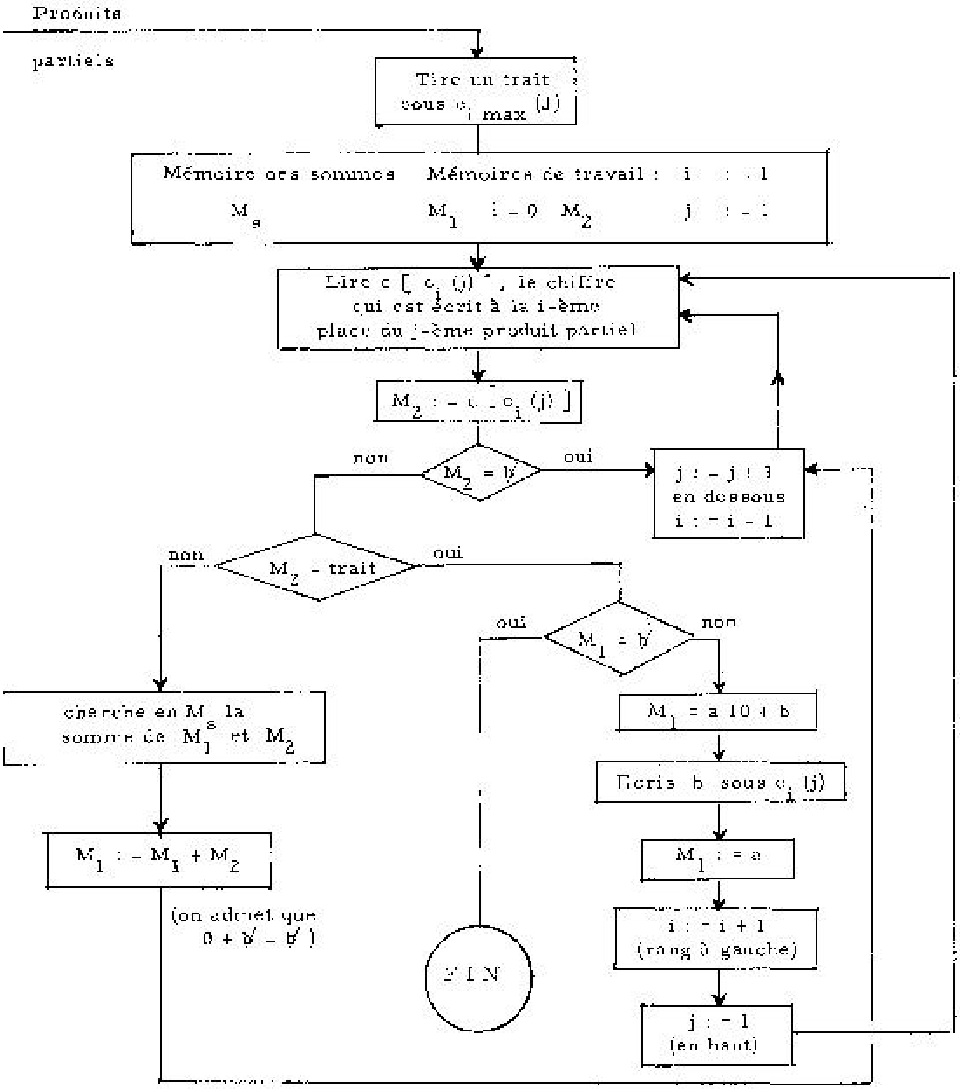
(1) KREISEL-KRIVINE - Logique mathématique - Dunod (1970) Paris
(2) LENTIN - GROSS - Notions sur les grammaires formelles GAUTHIER VILLARS
(3) H.SINCLAIR de ZWART - Acquisition du langage et développement de la pensée Dunod (1970) Paris
(4) G. DRAMAUD du BOUCHERON, R. CHAMPAGNOL P.
(5) S. et M.F. EHRLICH - Le comportement verbal. DUNOD
(6) G. BROUSSEAU - Processus de mathématisation - In. la mathématique que à l'école élémentaire - Publication A. P. M. Paris 1972.

LA MULTIPLICATION
dans l'
algorithme à l'italienne

Ordinogramme II. Produits Partiels



e_i (j) : place du i ème chiffre du j ème produit partiel


Produits partiels
Tire un trait sous $c_{i\,max}(j)$
Mémoire des sommes M_s
Mémoires de travail : M_1 : = 0 M_2
i : = 1
j : = 1
Lire c [c_i (j)], le chiffre qui est écrit à la i-ème place du j-ème produit partiel
M_2 : = c [c_i (j)]
non
M_2 = b̸
oui
j : = j + 1
en dessous
i : = i - 1
non
M_2 = trait
oui
oui
M_1 = b̸
non
cherche en M_s la somme de M_1 et M_2
M_1 : = M_1 + M_2
(on admet que 0 + b̸ = b̸)
FIN
M_1 = a 10 + b
Ecris b sous c_i (j)
M_1 : = a
i : = i + 1
(rang à gauche)
j : = 1
(en haut)

Algorithme "per gélosia"