Il problema della formalizzazione dell'Analisi Classica.

Quali sono i limiti formali dell'Analisi Classica:
1. L'Analisi Classica porta a modelli non standard (non è compatta).
2. L'Analisi Classica porta a definizioni impredicative. Non si può definire la coerenza dell'Analisi.

Brevi richiami sulla Logica Preposizionale del 1° e 2° ordine:

- Logica Proposizionale: l'analisi delle proposizioni riesce a riconoscere in esse altre proposizioni (con connettivi, etc…)
- Logica Predicativa del 1° ordine: la quantificazione è limitata alle variabili individuali. $\exists$, $\forall$ solo riferiti a singoli oggetti matematici.
- Logica predicativa del 2° ordine: con quantificazione di variabili predicative e/o funzionali. Due specie di variabili:
  - Varia sugli elementi delle strutture;
  - Varia su sottoinsiemi delle strutture. I linguaggi infinitari sono inclusi.

1. Il sistema di assiomi ZF per gli insiemi (con il solo simbolo di $\in$) rientra nella logica predicativa del 1° ordine e porta a modelli non standard.
2. Il Postulato di Eudosso-Archimede può essere espresso come una disgiunzione infinita: "se b>a e se a>0, a+a+>b" o "… a+a+a>b" o …
3. Il principio di compattezza, importante per il calcolo predicativo del 1° ordine non si applica a linguaggi infinitari.

Definizione impredicativa: quando si fa riferimento ad una totalità che contiene come elemento l'oggetto così definito.
Esempio: "Il più piccolo numero reale il cui quadrato sia maggiore o uguale a 2". Fa riferimento alla totalità dei numeri reali a cui $\sqrt{2}$ appartiene. Si perdono le tracce di come i nuovi insiemi vengono introdotti. Per giustificarle dobbiamo supporre che gli insiemi più o meno esistono già, in modo che la definizione serve semplicemente a descrivere certe proprietà di oggetti preesistenti piuttosto che a porre in essere l'insieme definito.

La difficoltà principale è quella di non poter vedere se e come una definizione impredicativa sia soddisfatta. Questo conduce a non poter definire la coerenza.
[Coerenza (Teoria della dimostrazione): Un sistema T è non contraddittorio (o coerente) quando non esiste una proposizione α di T tale che tanto α che $\neg\alpha$ siano teoremi di T. Altrimenti T è contraddittoria (o incoerente)].

Nessun Sistema particolare coglie fedelmente la nostra intuizione dei numeri reali.

Analisi costruttiva o predicativa: ogni numero reale viene presentato costruttivamente per mezzo di una successione di numeri razionali o di numeri reali. (Bishop, Fundations of constructive Analysis, 1967).
Analisi Ricorsiva: funzioni ricorsive e ricorsive primitive…

Teorema di compattezza della Logica dei predicati: Se ogni s.i. finito di un insieme di proposizioni A ha un modello, allora anche tutto A ce l'ha.