***Un esempio di modellizzazione matematica attraverso le equazioni differenziali*[1].**

(Corso di Laurea in Scienze Forestali, 1998-1999 - Bivona)

(Filippo Spagnolo)

1° Esempio: Dinamica di una popolazione isolata.

Studio di una specie biologica in una regione isolata nell'evoluzione temporale. Cioè variazione della popolazione nel tempo[2].

Sia p(t) la variabile dipendente che fissa il numero di individui nel tempo t di una determinata popolazione.

All'istante iniziale, t=0, il numero di individui p_0 si supporrà noto, cioè $p(t=0)=p_0$.

Chiameremo N ed M i tassi di natalità e mortalità rispettivamente che dipenderanno dall'ambiente in cui essa vive che dal tipo di specie biologica considerato.

La variazione della popolazione p nel tempo t potrà seguire la relazione:

$$\frac{dp}{dt} = (N - M)\,p = ap, \quad \mathrm{N} > 0,\ \mathrm{M} > 0,\ \ \mathrm{a} \in \mathrm{R}.$$

Questa è un'equazione differenziale del 1^0 ordine nella funzione incognita $p(t)$: $R_+ \to R_+$.

Risolviamo l'equazione differenziale separando inizialmente le variabili dp e dt:

$$\frac{dp}{p} = adt \quad \to \quad \text{Integrando ambo i mebri} \quad \to \quad \int \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} = a\int dt$$

$$\ln\ \mathrm{p} = \mathrm{at} + \mathrm{c} \quad \to \quad \mathrm{p} = \ell^{\mathrm{at}+\mathrm{C}} \quad \to \quad \mathrm{p(t)} = \mathrm{K}\ell^{\mathrm{at}}, \quad \text{dove } \mathrm{K} = \ell^{\mathrm{C}}.$$

[1] Una bibliografia minima di riferimento:
- Giorgio Israel, Modelli matematici (Introduzione elementare ai problemi della matematica applicata), Editori riuniti, Roma, 1986.
- Roberto Monaco, Le equazioni differenziali e le loro applicazioni, Celid Editrice, Torino, 1995.

[2] Il modello che viene presentato è noto come legge di Malthus ed ha descritto con buona approssimazione l'incremento della popolazione mondiale dagli anni 1700 al 1961.

Se adesso poniamo $K=p_0$, che é la nostra condizione inizialesi otterrà l'integrale particolare:

$$p(t) = p_0 \ell^{at}, \qquad (1)$$

che rappresenta la legge dinamica della popolazione che andavamo cercando.

Si rappresenti adesso la funzione (1) tenendo conto che p_0 è noto e quindi va considerato come costante, ed $a=N-M$ (differenza tra natalità e mortalità). La funzione è definita nei Reali positivi ed ha immagine nei Reali positivi. Bisognerà tenere conto sia del caso $a>0$ che di $a<0$, natalità maggiore o minore della mortalità.

Cosa succede quando $t \to \infty$?

Un accrescimento illimitato o l'estinzione completa della specie?

2° Esempio: Legge di Verhulst (equazione della logistica). Un modello di distribuzione delle aree verdi.

Il problema da studiare si presente nella forma:

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \quad p(t = 0) = p_0 > 0 \ \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Con a si intende il tasso di natalità-mortalità naturale e con b un parametro che tiene conto della competizione, tra individui della specie studiata, per assicurarsi le risorse necessarie alla propria esistenza.

Separando le variabili si ha:

$\frac{dp}{ap - bp^2} = dt$ e integrando membro a membro e considerando delle funzioni integrali si ha :

$$\int_{p_0}^{p} \frac{du}{au - bu^2} = \int_0^t ds = t.$$

Calcoliamo il primo membro:

$$\int \frac{du}{au-bu^2} = \int \frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{(a-bu)}{u}}\,du \quad \text{con il metodo di sostituzione si pone } z = \frac{a-bu}{u} \quad \text{da cui} \quad dz = \frac{-bu-(a-bu)}{u^2}du$$

$$dz = -\frac{a}{u^2}du \quad \rightarrow \quad du = -\frac{1}{a}u^2 dz. \quad \rightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{(a-bu)}{u}}du = -\int \frac{\frac{1}{u^2}}{z}\left(-\frac{1}{a}u^2 dz\right) = -\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{a}\ln|z| = -\frac{1}{a}\mathrm{l}$$

Quindi ritornando all’integrale di partenza:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{du}{au-bu^{22}} = -\frac{1}{a}\left[\ln\left|\frac{a-bp}{p}\right| - \ln\left|\frac{a-bp_0}{p_0}\right|\right] = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\frac{a-bp}{p}}{\frac{a-bp_0}{p_0}}\right| = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-bp}{p}\,\frac{p_0}{a-bp_0}\right| = t$$

posto $k_0 = \frac{a-bp_0}{p_0}$ si ha $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\frac{p}{a-bp}}\,\frac{1}{\frac{a-bp_0}{p_0}}\right| = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\frac{pk_0}{a-bp}}\right| = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{pk_0}{a-bp}\right| = t$

Dall’ultima uguaglianza possiamo dedurre che:

$\frac{k_0 p}{a-bp} = \ell^{at} \quad \rightarrow \quad p(t) = \frac{a}{k_0\ell^{-at}+b}$ che é la nostra soluzione.

Questo lavoro ci consente adesso di introdurre il modello per la distribuzione di aree verdi.

Si consideri un’area destinata a diventare parco naturale in presenza di un ridotto numero programmato di insediamenti abitativi.

Si vuole studiare l’evoluzione delle aree verdi nel tempo. Sia V(t) la variabile di stato della superficie di zone verdi nel tempo t.

La superficie viene data in rapporto alla superficie totale del parco, quindi sarà una funzione che da $R_+ \rightarrow [0, 1]$, la funzione V(t) quando raggiunge il valore 1 (V=1) rappresenta l’intera area occupata di verde.

Possiamo considerare la variazione di superficie verde nel tempo, in assenza di insediamenti umani, come proporzionale alla stessa quantità di verde ed alla superficie percentuale (1-V) di zone non adibite a parco naturale., e cioè:

$$\frac{dV}{dt} = rV(1 - V).$$

Il parametro r dipende da fattori ambientali e climatici e tiene conto della rapidità di espansione delle zone verdi (r>0).

L'incremento di verde sarà tanto più grande quanto più sarà esteso il verde stesso.

L'equazione é della forma:

$\frac{dV}{dt} = rV - rV^2$, analoga all' quazione precedente dove $a = b = r$. Se $V(t = 0) = V_0 < 1$ si otterrà la soluzione

$$V(t) = \frac{r}{k_0 \ell^{-rt} + r}, \quad \text{dove} \quad k_0 = \frac{r - rV_0}{V_0}.$$

Quando $t \to \infty$, V convergerà ad 1.

Studiare la funzione.