Un Modello per individuare gli Ostacoli epistemologici (Il postulato di Eudosso-Archimede), teoria delle situazioni didattiche

(Laboratorio di Didattica dell'Analisi)

F. Spagnolo

- **Il sistema di riferimento Sapere-Allievo-Insegnante-Situazione Didattica; (il lucido sul sistema)**
- **L'epistemologia sperimentale come meta-paradigma: la posizione dell'insegnante (Mediatore) e la posizione del ricercatore.**
- **Possiamo servirci di altri paradigmi per affrontare il problema? (il lucido sui paradigmi)**
- **Confronto Ricerca/Azione e Ricerca in Didattica. (Vedi lucido)**
- **L'epistemologia sperimentale è un paradigma che utilizza sia la riflessione**

epistemologica e storico-epistemologica che quella _*sperimentale*_;

- **E' necessario: 1) un linguaggio appropriato per questo paradigma;
  2) strumenti metodologici ad hoc;
  3) strumenti statistici appropriati.**

- **Che cosa è l'analisi a-priori: "Data una situazione/problema, si definisce analisi a-priori di detta situazione/problema l'insieme delle: 1) rappresentazioni epistemologiche; 2) rappresentazioni storico-epistemologiche;
  3) Comportamenti ipotizzati.**
- **Per "Rappresentazioni epistemologiche" si intendono le rappresentazioni degli eventuali percorsi conoscitivi riguardo un particolare concetto. Tali rappresentazioni possono essere messe a punto da un soggetto apprendente o**

da una comunità scientifica in un determinato periodo storico.

- **Per "Rappresentazioni storico-epistemologiche" si intendono le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi (sintattici, semantici, pragmatici) riguardo ad un particolare concetto.**
- **L'analisi a-priori di una situazione come garanzia per la Ricerca in Didattica.**
- **L'importanza di saper individuare i "problemi di ricerca" e quindi le "ipotesi" necessarie.**
- **Dalla scelta delle ipotesi alla loro falsificabilità.**
- **Gli strumenti per la falsificabilità: i questionari, le interviste (singole, a coppia, ecc.), le registrazioni audio/video di situazioni didattiche complesse, ecc. .**

- **Come si traducono questi strumenti per l'analisi statistica.**
- **Analisi a-posteriori sui dati sperimentali e conclusioni riguardanti le ipotesi della ricerca. Eventuali problemi aperti.**
- **La ripetibilità dell'esperienza e la sua comunicazione.**
- **L'analisi a-priori di una situazione problema: ESEMPIO.**

Un modello teorico-sperimentale per l'individuazione degli ostacoli epistemologici.

- **Che cos'è un ostacolo?**
- **Che relazione c'è tra errore ostacolo?**
- **Possiamo classificare diversi tipi di ostacolo?**

Una premessa sulla matematica come linguaggio: un approccio semiotico.

- **Aspetto sintattico delle matematiche: sistema formale, modelli sintattici, modelli semantici (Bourbaki);**
- **Aspetto semantico delle matematiche: teoria del significato, teoria del riferimento (Quine);**
- **Aspetto pragmatico: comunicazione, paradossi.**

In questa prospettiva il linguaggio matematico nasce con una certa ambiguità semantica ed è in costante evoluzione, con una grammatica che si riorganizza per approssimazioni successive. Quando un linguaggio si formalizza si attribuisce un certo significato alle formule e si perde il significato precedente.

- **I matematici: aspetto sintattico;**
- **I ricercatori in didattica: “alla ricerca del senso perduto”;**
- **La pragmatica utilizzata per le ingiunzioni paradossali. (fare esempio)**

I paradossi possono essere:

- **logico-matematici: antinomie (Russell);**
- **semantici: antinomie semantiche (Richard);**
- **pragmatici: ingiunzioni paradossali (o conflitti cognitivi).**

Si ha nella comunicazione umana una ingiunzione paradossale quando si verificano le seguenti tre condizioni:

1. **Due o più persone sono implicate in una relazione intensa che ha un valore di sopravvivenza fisica e/o psicologica per una sola, per qualcuno, per tutti. (Interazione padre-figlio, invalidità, amicizia, amore, dipendenza materiale, insegnante-allievo, ecc...);**
2. **Viene dato un messaggio in un determinato contesto:**
    - **afferma qualche cosa;**
    - **afferma qualche cosa sulla sua propria asserzione;**
    - **queste due asserzioni si escludono reciprocamente.**
3. **Infine, si impedisce al ricevitore del messaggio di uscirne al di fuori dello schema stabilito o con una metacomunicazione sul**

messaggio (con un commento) o chidendosi in se stesso. ("Sii spontaneo", "Ti devi divertire a giocare con i bambini, come tutti gli altri padri")

Si possono considerare i paradossi logico-matematici e semantici come degli ostacoli epistemologici poiché nella storia dei linguaggi matematici si sono sempre piazzati attorno alla sintassi dei nuovi linguaggi (Russell costruisce la teoria dei Tipi per evitare i paradossi logici).

Un ostacolo epistemologico può trovarsi nella fase di superamento del paradosso attraverso strumenti storico- epistemologici: è il momento della generalizzazione del linguaggio considerato.

Quando in una certa epoca storica, la comunità matematica cerca di passare da un campo semantico significativo ad un nuovo linguaggio relativo a una certa classe di problemi, entrano in gioco degli "oggetti" matematici particolari.

Definizione: Gli oggetti matematici dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) sono gli ostacoli epistemologici.

1.-Ostacoli genetici
2.-Ostacoli ontogenetici →

3.-Ostacoli epigenetici: a) Ostacolo didattico ¬ ® Ingiunzione Paradossale

b)Ostacolo Epistemologico ¬ ® Paradosso Logico-Matematico
Paradosso Semantico

- **ostacolo genetico: bagaglio cromosomico: comportamenti innati (connessioni neuronali rigide): predisposizione alla lingua naturale Chomsky;**
- **ostacolo ontogenetico si evidenzia in tre situazioni particolari:**
  1. **nell'insufficiente sviluppo delle connessioni neuronali;**
  2. **nell'assenza dello sviluppo di connessioni neuronali;**
  3. **nell'ancora insufficiente sviluppo delle connessioni neuronali (stati di sviluppo Piaget).**

Per il caso 1 e 2 si organizzano delle attività didattiche particolari con un intervento costruttivo sull'ambiente con attività legate alla psicomotricità e alla percezione.

Per il caso 3 l'ostacolo sarà superato dall'evoluzione temporale dello sviluppo del pensiero.

- **ostacolo epigenetico: in processi di comunicazione. Gli ostacoli didattici e epistemologici sono di questo tipo.**
- **l'ostacolo si presenta come ingiunzione paradossale;**
- **Gli ostacoli epistemologici si identificano con i paradossi logico-matematici e paradossi semantici.**
- **Ogni ostacolo epistemologico è didattico, non il viceversa.**

Dopo aver dato una definizione operativa di Ostacolo Epistemologico fondata su una indagine epistemologica dei linguaggi matematici seguenti un punto di vista semiotico, presentiamo il *Modello di Ostacolo Epistemologico*[1] *(Teorico-sperimentale):*

[1]Il riferimento è la tesi di Dottorato di F.Spagnolo, *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat de Eudoxe-Archimede*, Bordeaux, 31.7.1995 (Quaderni G.R.I.M., Supplemento al n.5, 1995).

1. Gli ostacoli sono da cercare tra gli elementi costitutivi dei linguaggi matematici che si vogliono studiare. L'analisi si restringe su quello che i matematici chiamano fondamenta del linguaggio.

2.Una volta ristretto il campo d'azione, si può riprendere la classificazione dovuta a Brousseau-Duroux[2]:

- **Un ostacolo epistemologico è una conoscenza: la si può verificare con strumenti storico-epistemologici;**
- **Questa conoscenza produce delle risposte adeguate in un certo contesto frequentemente riscontrato: verifica sperimentale attraverso indagini che fanno vedere come si accumulano le concezioni attorno a delle questioni poste in un contesto determinato con un linguaggio determinato.**
- **Questa conoscenza produce delle risposte false fuori dal contesto. Essa non riesce a trasferire delle risposte relative a un contesto diverso, sia perché si è cambiato il punto di vista [c_1] sia perché si è considerato un contesto più generale [c_2] nel quale la prima**

[2] A. Duroux, *La valeur absolue. Difficultés majeurs pour une notion mineure*, Bordeuax, 1982, Tesi di laurea.

conoscenza era un caso particolare. Si può verificarlo sperimentalmente attraverso il cambiamento del contesto per ciò che concerne[c_1]. Questi due momenti, cioè il punto di vista e la generalizzazione rappresentano due strumenti importanti per la costruzione dei linguaggi, sia nella storia delle Matematiche, sia nella riorganizzazione delle fondamenta delle Matematiche. Dunque, essendo due momenti importanti per la messa a punto delle conoscenze matematiche, costituiscono due momenti significativi per la caratterizzazione degli ostacoli epistemologici. Si può verificare sperimentalmente attraverso un ampliamento del contesto dove non si può più riconoscere il ruolo della conoscenza oggetto d'ostacolo per ciò che riguarda [c_2]. Questo corrisponde ad un ampliamento del linguaggio dove la conoscenza, oggetto d'ostacolo, non è più riconosciuta come elemento fondamentale (per esempio assioma), ma dovrà essere riconosciuta come una qualunque proprietà del linguaggio.

- **Questa conoscenza resiste alle contraddizioni con le quali è confrontata. In fondo questo aspetto, legato al punto precedente, consiste piuttosto in un fatto di procedura che di analisi sulle fondamenta nel senso che la conoscenza si presenta nella stessa maniera quando si riproduce parecchie volte la stessa situazione. Le contraddizioni potrebbero nascere da informazioni supplementari, situazioni didattiche costruite ad hoc nelle quali dovrebbe essere messo ben in evidenza il ruolo della conoscenza/ostacolo, del nuovo linguaggio esteso.**

Questa conoscenza continua a manifestarsi anche dopo la sua presa di coscienza. Cioè, dopo aver preso coscienza del ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio, vi sono ancora le concezioni relative al ruolo della conoscenza/ostacolo del linguaggio iniziale. Resta il ruolo delle fondamenta del linguaggio iniziale. Si può verificarlo sperimentalmente in questo caso ancora con opportune situazioni didattiche.

Un esempio: Il Postulato di Eudosso-Archimede. Analisi delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche.

"...il fatto di poter misurare tutte le dimensioni e tutte le distanze dell'universo (da quelle dei corpi celesti a quelle dei corpi che costituiscono il mondo atomico) riportando una volta dopo l'altra una data lunghezza terrestre, non è per nulla una pura conseguenza logica dei nostri teoremi sulla congruenza e della configurazione geometrica, ma piuttosto un vero dato dell'esperienza. E cioè, la validità dell'assioma di Archimede nel mondo della natura richiede proprio una conferma sperimentale, allo stesso modo che la richiede l'assioma delle parallele".

D. Hilbert

Euclide nella Def. IV del Libro V afferma :"Si dice che hanno ragione fra loro le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente"[3].

La Formulazione iniziale è dovuta ad **Eudosso** in una forma traducibile in termini moderni nel seguente modo:

$$\forall x,y\ \exists m\ (m \in N : mx > y) \qquad \text{(a)}$$

ciò equivale a dire che due grandezze possono, se moltiplicate, superarsi l'un l'altra. Questa è anche la posizione di Euclide.

Archimede utilizzò frequentemente il postulato di Eudosso espresso però nella seguente forma:

$$\forall x,y,z\ [\text{ se } x > y \text{ allora } \exists m\ (m \in N : m(x-y) > z] \qquad \text{(b)}$$

Questa seconda versione è quella che equivale al metodo di **esaustione.**

[3] Frajese - Maccioni, *Gli Elementi di Euclide*, Classici UTET, 1970.

In Euclide vi è sempre riferimento ai multipli di grandezze, nessun riferimento viene fatto per i sottomultipli. Sicuramente questo è dovuto al fatto che, mentre per una grandezza qualsiasi è sempre possibile costruirne i multipli secondo un intero qualunque assegnato, per i sottomultipli non sempre tale operazione è possibile. E questo può anche essere legato alla sistematizzazione degli insiemi numerici.

La Prop. I del Libro X degli Elementi dice: "Date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore (inizialmente) assunta".

Questa proposizione sembra poterci ricordare la simmetrica del Postulato di Archimede, ma in essa vi è sempre riferimento alla metà di una grandezza data non a sottomultipli.

Alcuni storici sostengono che la Prop. I del Libro X degli Elementi rappresenti la simmetrica del Postulato di Archimede. Enriques[4] sostiene che *"...fra le grandezze considerate da Euclide ve ne sono talune per cui egli non sa costruire i sottomultipli, dei quali non vuole perciò affermare l'esistenza. A questa categoria appartengono gli angoli, per i quali è noto che già la trisezione costituisce un problema non risolubile con la riga e il compasso."*

Galileo sostiene che : *"Date due grandezze egli cerca una parte aliquota dell'una che sia contenuta nell'altra e si appoggia sulla considerazione che, se vi è un resto, questo può ridursi, in ogni caso, piccolo ad arbitrio".* [Enriques, op. cit.]

Enriques considera questa interpretazione di Galileo dinamica in contrapposizione a quella statica di Euclide. L'impressione che si ha analizzando queste interpretazioni del Postulato di Eudosso è che attraverso tale principio si ipotizza l'esistenza dell'infinitamente grande.

J.L. Gardies[5] sottolinea il fatto che bisogna giungere a **Pascal** per poter avere una formulazione della simmetrica del Postulato di Archimede in una forma definitiva :

$$\forall\, x,y\ \exists m\ (m \in N : x/m < y) \qquad \text{(c)}$$

Nel linguaggio matematico corrente quando ci si riferisce al Postulato di Eduosso-Archimede si intende l'insieme delle tre precedenti proposizioni (a), (b), (c).

	Geometria elementare	**Aritmetica**	**Analisi Classica**
Infinito Attuale	**Postulato dell'ordine**	• **Assioma Infinito** • **Cantor** • **Assioma Scelta**	• **Relazione Ordine** • **Assioma Infinito** • **Assioma Scelta** • **Dedekind** • **Estremo Superiore**

[4] F. Enriques, *Gli elementi di Euclide e la critica moderna*, A. Stock, Roma, 1925.(libro V, p. 12)

[5] Gardies J.L., *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Librairie Philosophiques J. Vrin, Paris, 1984.

Infinitesimo attuale	• **Angolo Contingenza**[6] • **Grandezze Incommensurabili**		
Infinito Potenziale	• **Postulato Archimede (diretta)**	• **Induzione Matematica** • **Postulato Archimede** • $\forall n \in N, \exists$ **successivo** • **Definizioni ricorsive** • **Funzioni computazionali**	• **Postulato di Archimede** • **Limite** • **Induzione Matematica**
Infinitesimo potenziale	• **Proposizione X,1 di Euclide** • **Esaustione**	• **Simmetrica del P.A.**	• **Simmetrica del P.A.** • **Cantor**

- **P.A.= Postulato di Eudosso-Archimede**
- **X,1= Proposizione X,1 degli Elementi di Euclide**
- **Cantor= Postulato della continuità di Cantor**
- **Dedekind= Assioma di completezza (Postulato di continuità della retta)**

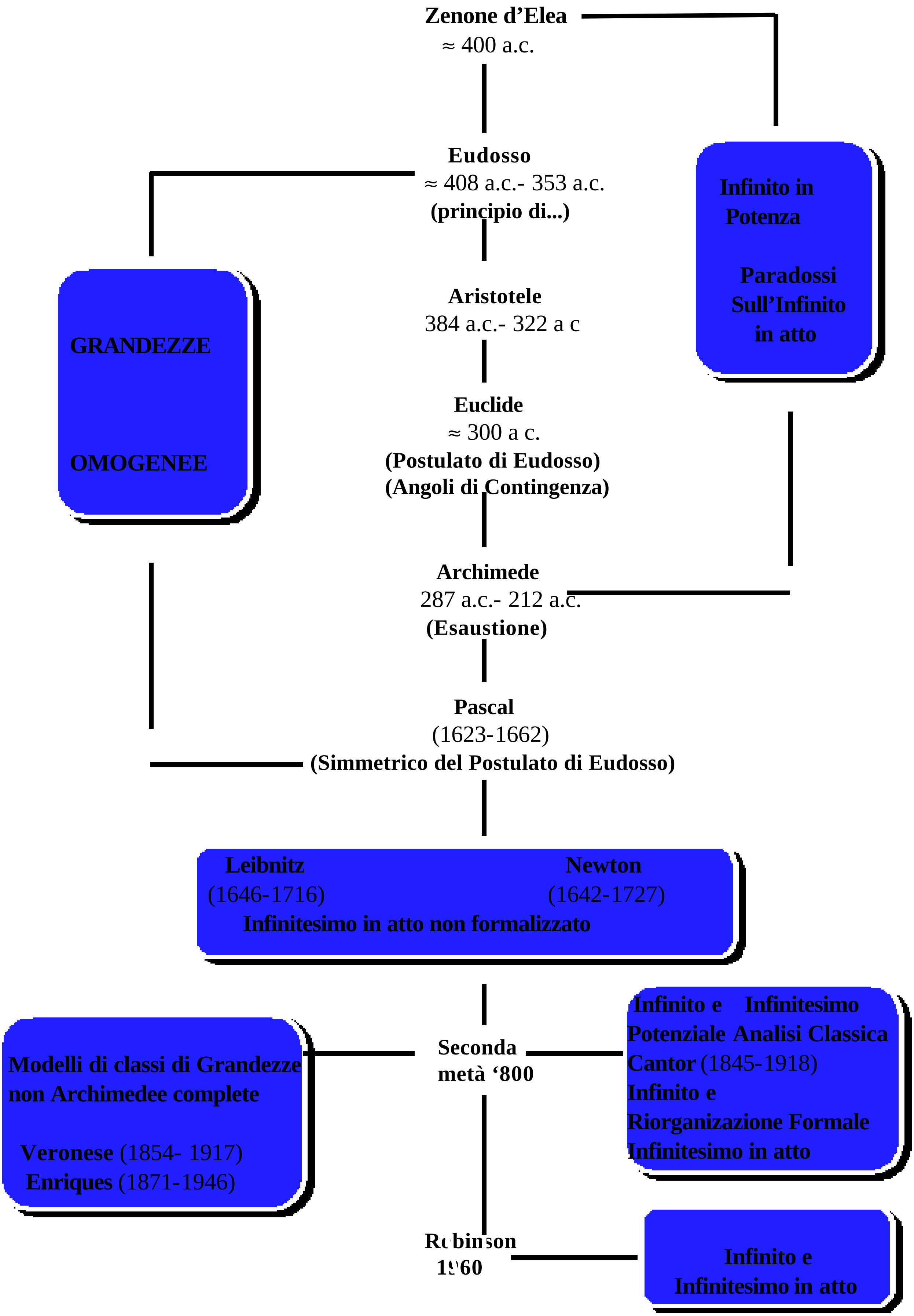
Concludendo possiamo affermare di avere analizzato due dei possibili percorsi storico-epistemologici legati al Postulato di Eudosso- Archimede :

1) Le grandezze;

2) L'infinito/infinitesimo Attuale/Potenziale.

[6]Per angolo di contingenza si intende l'angolo formato da una circonferenza e da una tangente in un suo punto. Nella proposizione 16 del libro III di Euclide vengono presentati gli angoli di contingenza (chiamati anche successivamente angolo di contatto, angolo cornuto) ma che Euclide, una volta dimostrato che questi angoli sono più piccoli di qualsiasi angolo rettilineo piccolo a piacere, non considererà più nella sua trattazione. In un lavoro già citato, nota 15 del presente capitolo a nome di Camarda - Spagnolo, gli angoli di contingenza vengono utilizzati per la messa a punto di un modello geometrico degli iperreali.

TABELLA 1


Zenone d’Elea
≈ 400 a.c.
Eudosso
≈ 408 a.c.- 353 a.c.
(principio di...)
Infinito in Potenza
Paradossi Sull’Infinito in atto
GRANDEZZE
OMOGENEE
Aristotele
384 a.c.- 322 a c
Euclide
≈ 300 a c.
(Postulato di Eudosso)
(Angoli di Contingenza)
Archimede
287 a.c.- 212 a.c.
(Esaustione)
Pascal
(1623-1662)
(Simmetrico del Postulato di Eudosso)
Leibniz (1646-1716)
Newton (1642-1727)
Infinitesimo in atto non formalizzato
Modelli di classi di Grandezze non Archimedee complete
Veronese (1854- 1917)
Enriques (1871-1946)
Seconda metà ‘800
Infinito e Infinitesimo Potenziale Analisi Classica
Cantor (1845-1918)
Infinito e Riorganizzazione Formale Infinitesimo in atto
Robinson
1960
Infinito e Infinitesimo in atto