Actes
Proceedings

Sous-thème 1-2

Étant donné le grand nombre de présentations, nous avons regroupé des présentations qui auraient pu à la fois relever du sous-thème 1 et du sous-thème 2.

Sub-theme 1-2

Because of the great number of presentations, we have grouped presentations that could have been at the same time in sub-theme 1 and in sub-theme 2.

Université de Montréal
26 – 31 Juillet 2009-06-28

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

ALGEBRAIC THINKING AND THE GENERALIZATION OF PATTERNS: a didactical experience with italian and Chinese students

Benedetto Di Paola Filippo Spagnolo
dipaola@math.unipa.it spagnolo@math.unipa.it
Department of Mathematics, University of Palermo, Italy

Le papier explore, à travers différentes enquêtes théorique/expérimentales, une expérience didactique, mené dans une classe multiculturelle et avec référence à l'étude d'aspects particuliers en rapport avec la phase d'argumentation et de démonstration dans activités de pensée algébrique et généralisation de modèle. À travers une approche linguistique-culturelle le papier voudrait examiner une thématique didactique relative à une possible comparaison entre pensée mathématique de l'Est et de l'Ouest. En particulier nous discutons quelques analogies et différences possibles qui se produisent dans les plans du raisonnement entre étudiants Chinois et Italien à Palerme (âge13) sur la conceptualisation de l'idée de variable et paramètre. La situation problématique présentée dans cet article a été analysée en parallèle d'après une analyse quantitative et qualitative. L'analyse quantitative a été menée en utilisent le logiciel CHIC (statistiques non paramétriques).

1. Theoretical perspective and purpose

The international research works published on the didactic problematic of the algebraic thinking and the difficulties of the student on this subject are now manifold (e.g. Arzarello & Bazzini & Chiappini, 1994; Høyrup, 2002; Malara and Navarra, 2003; Malisani & Spagnolo, 2008; Martzloff, 1997; Neria and Amit, 2004; Radford, 2004, 2006; Sfard, 1991). Some of these researches essentially contemplates a historical-epistemological analysis of treated topic and therefore they describes the formative value of Algebra for students. Others, instead, treat the problematic through a critical discussion of the learning environments of the introductory activities to algebraic symbolism and they are therefore particularly focused on the delicate passage from the arithmetical thought to the algebraic one with specific reference to the complex use of the concept of variable, unknown and parameter. Our study is centered in this field of research as a further reflection on the treated problematic, also taking into account a possible didactic multicultural milieu of the classes: a real context in the today's school situation[1]. One of the most interesting didactic problems that today is defined in our classes is then the possibility to *compare* ourselves with the "diversability" in situations of multiculturalism, a reality in our society, in continuous socio-cultural change, and therefore a central point for the research in didactics. *To analyze cognitive styles in different cultures, underlining those that can be the schemes of reasoning, the behaviours, the beliefs and the conceptions in respect to the acquisition of a particular mathematical concept*, it is certainly a complex operation, but it can be the key to more careful didactics to the "different" abilities and therefore to the integration of "different" knowledge.

[1] In the scholastic year 2007/08 the non-Italian citizen pupils within the national scholastic system corresponded to 574.133 units. The phenomenon of immigrations, increasing in our country, is continually reflected in the Italian school. The impact is so big that the affiliate students of foreign origin have increased to over 500.000 units in the last ten years.

In recent years, the research on didactics of mathematics appeared very sensitive to the treated problematic of multiculturalism. Different research studies allowed the highlighting of the role of history of mathematics as a tool of observation and analysis of teaching/learning situations in a multicultural setting; the role of the language and logic in the development of discipline and autonomous mathematical thought; the role of the socio-cultural context of the milieu in which the situation of multicultural teaching/learning situation is inserted and analyzed.

In this framework, our research, aimed to exploring a particularly complex field of study as the algebraic thinking and the phase of generalization of the students, would be a further close examination of the didactic thematic, related with a possible comparison between some aspects of the Chinese mathematical thought and the Italian thought. In our opinion, to analyze two different cultures such as the Chinese and the Italian, according to some relevant epistemological values of the two cultures (e.g. linguistic references, philosophical references, historical mathematical references) could indeed turn out to be interesting in many significant aspects as regard the analysis of the logical-argumentative scheme adopted in the algebraic reasoning and in the phase of generalization adopted by the *culturally different students*.

The research work discussed in this paper is placed within a framework of a more ample plan of research confronted within the GRIM of Palermo on the problematic of teaching/learning in multi-cultural didactic situation and it is a part of a PhD thesis on the same subject[2].

During the presentation of the paper, the proposed didactical activity will be also examined in relationship to the results underlined previously in other works conducted within the GRIM and coordinated by the Professor F. Spagnolo (Di Paola & Spagnolo, 2006, 2008), on the cultural difference in scholastic and non-scholastic environment.

The principal theoretical framework for the methodology of the study of the discussed experience, is the Brousseau`s theory of the situations (Brousseau, 1997). To be able to interpret the comparative study between the Chinese thought and the European one in situations of teaching/learning in multicultural perspective, we refer particularly to the studies of Bishop (1988), D'Ambrosio (2002), Needham (1985) and Nisbett (2001).

Could the cultural epistemological differences verified in the Italian and Chinese cultures tacitly influence the didactical sphere of the discipline in the algebraic thinking? Is it possible to observe, in a experimental way, an "equivalence" between the analogies and differences verifiable in the Chinese and Italian historical cultural tradition and the patterns of reasoning found today in multicultural situations of teaching/learning of mathematics? Can the definition of these differences be significance for the mediation of particular mathematical knowledge in our classes between Chinese and Italian students and particularly for a complex area as the Algebra?

With the aim to discuss the treated problematic and to answer, in a first approximation, to these research questions, we referred to the following paradigmatic "tools":

1. **the role of the history of mathematics as an instrument of observation and analysis of multicultural learning/teaching situations**. We focused our attention to the case of the Nine

[2] PhD Thesis of Benedetto Di Paola: "*The passage from the arithmetical thought to the algebraic thought: the Chinese case*".

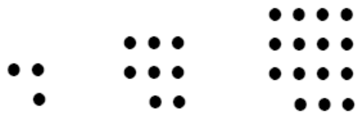
Chapter (the *Jiuzhang Suanshu*) as canon for the construction of mathematics of 1st Cent. B.C.-1st Cent. A.D. (Chemla, 2003, 2004; Granet, 1988);

2. **the role of natural language in the development of mathematics in the history of Chinese thought**. According to us, inside to the written Chinese language and the composition/decomposition of it, it's possible to find an organization of the characters with a scheme of parametric system "centered" on the idea of variable as a *thing that* is *varying* (Radford, 1998, 2003; Di Paola & Spagnolo, 2006, 2008) that *designates* objects, *indirectly* express, with the *use of signs* and a processes of *meaning production* of these (Spagnolo&Malisani, 2008; Radford, 2006);

3. **the role of fuzzy logic** (an approach of the linguistic type) as an interpretive instrument for the Chinese students of some problem situations in class correlated to "common sense" (Spagnolo, 2002, 2005). The main references are those of Zadeh, (as regards the fundamental considerations of fuzzy logic of the linguistic approach) and of Kosko (1995) as regards the relationships and analogies identified between fuzzy logic and oriental thinking.

2. Metodology

Taking into account the key epistemological "tools" presented before we conducted an experimental work at two different first classes of the Lower Secondary Schools with 57 Italian and Chinese student. Everyone was able to understand the language by which the text of the problem (reported below) was expressed[3].

"The sequence" Looks at this sequence of four figures of black dots  1° Figure 2° Figure 3° Figure	a) Are you able to draw the following one? What procedure have you followed? Please argument your answer; b) How many black dots the sixth configuration will have? What reasoning have you followed? Please argument your answer; c) The first figure has 3 black dots, the second one has 8 of them. If a figure has 80 dots, could you say me which figure is it? Please argument your answer; d) Could you find a figure of 143 black dots posed equally? e) Could you find a general expression that can represent the different figures?

The activity was conducted in small groups (Italian and Chinese students) after a first phase of autonomous work of reflection and argumentation. After this initial brief moment of work the students shared their approached strategies to the problems, discussing with all the class. This methodological procedure of investigation was chosen to encourage, at final step of the experimentation, the mediation of knowledge by the students and their resolution strategies as valida-

[3] The text of the problem was expressed in Italian. All the Chinese students involved in the experimentation were able to understand Italian and to read and write it in a correct way. All the Chinese students involved in the experimental phase had frequented the Italian scholastic system since the first year of school. This aspect was an important variable for the analysis of the results.

tion of the procedure of the mathematical situation; important aspect for a multicultural setting class. The role of the teacher was as a mediator and coordinator.

The choice of the experimental situation was made for two reasons: firstly, because, according to us, these kinds of problems could represent nodal points from which the students derive the concepts of the letters as unknowns or "*things which are varying*" and the "*functional relation*" aspect of the variable (Radford 2004), interesting aspect, as we indicate before, not only from the mathematical point of view (idea of generalities and veracity of an assertion) but also strictly linked to the written Chinese language and so to its internal structure and secondly, these kinds of problems, as a-typical mathematical problems, could give us the possibility to analyze the free phase of argumentation and "proving" in the process of generalization, from different viewpoints (culturally refereed) : *reasoning schemes, strategy of solution* and *possible different layers of generalization (Radford, 2006), argumentation and justification of the strategies* etc. These are the *behaviours variable* that we analyzed in a qualitative way and also in a quantitative way with the software of inferential statistic Chic (Gras et al., 2008).

3. Analyses of the results and first conclusion

In general, according to Gentner (1989), through the experimental results we identify three different types of processes of generalization mainly founded on strategies of similarity (*pure numerical, figural and pragmatic*). The Italian students generally after a few random attempts and numerical errors tried to think algebraically formalizing a possible rule of the treated problematic; in this phase they pointed out some difficulties with working in a formalized setting and so in many cases they reconsidered with a lot of attempts, as a help to their reasoning, the arithmetic strategies. The way to argue and prove some initial conjecturation on the phase of generalization is thus a continuing balance between arithmetic and algebraic thought. Few Italian students that proceed in their mathematical reasoning with pure arithmetical strategies, underline (for the questions *a*, *b* and *c*) strategies of similarity for attempts and errors (on the various represented figures) not contextualized on any reference pattern of the model of succession. The idea of *variable* in this sense doesn't assume for the students any meaning except a simple generator of linear sequences of numbers. The *figural* and *pragmatic* strategies of generalization, "common" exploratory strategy for the generalization phase of Chinese and Italian students, seems to highlight in a clear way their different conceptualization of the idea of *variable, parameter and generality*. Experimental evidences that confirm the result discussed in literature on the common pattern of Chinese mathematical thought (Cai and Stephen, 2002, Leung, 2000) and in particular on their idea of generalization of a pattern as to search possible invariants of "different known learning situations". For them, to generalize seems to be finding a *fundamental algorithmic* of solution, of construction. Their approach to the algebraic thinking is so very different from the Italian one, the idea of generality is different. Its conceptualization is different.

The reasoning adopted by the Chinese students to search the common construction of figures of the proposed didactical situation and so to generalize the possible configuration of the figures, could be read as an interesting example of the application of the cultural meta-rule "*Making homogeneous and making equal*" (Chemla, 2003) which is a elementary rule in the Chinese Mathematic and Philosophy. According to the paradigmatic "tools" discussed before, this kind of rule is also strictly linked to the Chinese writing system with the use of the *radical* (that we consider as a parameter, in a mathematical sense of the word); a stable reasoning that we found in other experimental research with Chinese students (Spagnolo & Di Paola, 2008) as a fundamental strategy/algorithm of "*reduction to unity*". In class, during the process of argumentation and generalization of the Chinese students, this basic algorithm was combined itself several times always arriving at a sure argument. The mediation of the different reasoning schemes adopted by the Chinese and Italian students were discussed with the all classes in terms of possible different approach to the treated problematic. This final step of our experimental work was able to integrate, in classes, the pragmatic, procedural, algorithmic behaviour of the Chinese students with the deductive logic utilized by almost all the Italian students.

As Liu Hui observes (in the historical Commentary of the *Jiuzhang Suanshu*) in this game of relationships between "serial thought" and "global thought" in reading, understanding and generalize a *mathematical situation*, the Chinese have to give particular attention to the examination of the algorithm on the classes of possible homogeneous cases to be able to highlight its correctness and to generalize their reasoning. According to us, this aspect could be important for the analysis of the didactical difficulties of the algebraic thinking of the Chinese students.

REFERENCES

Ajello M., Spagnolo F., Xiaogui Z., Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non-scholastic environments, Mediterranean Journal for Mathematics Education, Cyprus Mathematical Society (ISSN 1450-1104), Vol. 4, N. 2, pag. 27-65, 2005.

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G., L’Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto Strategico del C.N.R. Pavia: Dipartimento di Matematica: Università di Pavia, Quaderno n. 6, 1994.

Bishop A. J., 1988, Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1988.

Brousseau G., *Theory of Didactical situations in mathematics*. *1970-1990*, (304 pages) traduction M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (Kluwer Academic Publishers), 1997.

Chemla, K., Generality above abstraction. The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in ancient China, Science in Context 16, 413–458, 2003.

Chemla K. & Guo Shuchun (2004). Les Neuf Chapitres. Paris: Ed. Dunod

D’Ambrosio U. (2002). Etnomatematica. Bologna: Pitagora Editrice.

Di Paola B., Some experimental observations about the passage from the arithmetical thought to the algebraic thought, Podebrady, Czech Republic, 2004 http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/yerme/index.html

Di Paola B.&Spagnolo F., An experience of game in a multicultural milieu at infancy and elementary school, Proceeding CIEAEM 58, pp. 249-253, Prague, Czech Republic. ISBN 80-7043-478-3, 2006

Di Paola B. & Spagnolo F. (2008). A-didactical situations in multicultural primary school. *ICME11, The International Congress on Mathematical Education, Monterrey*, Mexico. Web site: http://tsg.icme11.org/document/get/787.

Gras R., Spagnolo F., Suzuki E., Guillet F. (2008). Statistical Implicative Analysis: theory and applications, Springer, 2008, pp. 1-513.

Høyrup J., Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin, Springer, N.Y, 2002.

Kosko B., Il Fuzzy Pensiero, Baldini & Casoldi, Milano, 1995. (Fuzzy thinking: the new Science of fuzzy logic, B. Kosko, 1993).

Leung F.K.S., An Exploration into the Reasons for the High Achievement of East Asian Students. Paper presented at the International Conference on Mathematics Education, History of Mathematics and Cultural History of Mathematics, Informatics and Learning Obstacles, Beijing, July, 2000.

Malara N., Navarra G., ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking. Bologna, Italy: Pitagora Editrice, 2003.

Martzloff J.-C., A History of Chinese Mathematics, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale francese: Histoire des Mathématiques chinoises, Masson, Paris 1987), 1997.

Needham J. (1981). Scienza e Civiltà in Cina. (Original title: Science and Civilisation in China, Cambrige University Press, 1959), *I e II Vol*., Einaudi.

Needham J., Scienza e civiltà in Cina, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: Science and civilisation in China, Cambridge University Press 1959), 1985.
Neria D. and Amit M., Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication, in M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, Bergen, Norway, Bergen University College, pp. 409-416, 2004.
Nisbett R.E., Peng K., Choi I., Norenzayan A. (2001) Culture and Systems of Thought. *Psychological R.*, 108, p.291.
Radford L., On Signs and Representations. A Cultural Account, Scientia Paedagogica Experimentalis, 35 (1), 277-302, 1998.
Radford L., On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. Educational Studies in Mathematics. 52(2), 123-150, 2003.
Radford L. (2004). The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. *Plenary Lecture presented at the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference*, Uppsala, Sweden.
Radford L., Algebraic thinking and generalization of patterns: a semiotic perspective, Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) (2006). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2006.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1,1-36.
Spagnolo F., History and Ethno-Mathematics in the Interpretation of the process of learning/teaching, 13° ICMI Comparative Study Conference, University of Hong Kong, 2002. http://dipmat.math.unipa.it/~G.R.I.M./articles.htm .
Spagnolo F.**,** Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non scholastic environments, The International Conference on School effectiveness and School improvement in China, University of Shenyang, China, (pag.76), 2005.
Spagnolo F., La modélisation dans la recherche en didactiques des mathématiques: les obstacles épistémologiques, R.D.M. (Recherches en Didactiques des Mathématiques), 26/3, pp. 337-380, La Pensée Sauvage Edition, Grenoble (France), ISSN 0246-9367, 2006.
Spagnolo F.**,** Philosophy of Mathematics Education among east and west, Philosophy of Mathematics Education Journal, ISSN 1465-2978, n. 23, October 2008. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm
Spagnolo F. & Malisani E., From Arithmetical Thought to Algebraic Thought: the role of the “variable”, Educational Studies in Mathematics, 0013-1954 (Print) 1573-0816 (Online), Springer, October 2008.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

THE UNDERSTANDING OF SERIES: THE DIDACTIC DIMENSION

Alejandro S. González-Martín, Rachid Seffah
Université de Montréal (Canada)

Elena Nardi, Irene Biza
University of East Anglia (UK)

Résumé

Le concept de somme infinie (ou série) est assez complexe d'accepter, dû à sa complexité épistémologique. L'idée qu'une somme d'infini termes pourrait ne pas être infinie elle-même est difficile à saisir. Nous pensons que ceci est une des raisons pour lesquelles ce concept est souvent réduit à ses aspects algorithmiques.

Malgré l'importance et les applications de ce concept, il n'a pas été exhaustivement abordé par la recherche, mais les résultats existants montrent que son apprentissage n'est pas facile. Pour cette raison, nous nous sommes demandés si les processus d'enseignement prennent en compte les difficultés pour apprendre les séries. Notre présentation montre des résultats accumulés par deux équipes (au Canada et au Royaume-Uni) sur la façon dont l'institution présente les séries : programmes scolaires, manuels scolaires et pratiques enseignantes.

1. INTRODUCTION

The concept of infinite sum (or series) is quite complex to accept, due to its epistemological complexity. The idea that the sum of infinite addends might not give an infinitely great sum is difficult to bear. However, in spite of its complexity, we think that this concept if often reduced to its algorithmic aspects, hiding its actual meaning to students. This algorithmic approach (with an often blind application of formulae, an absence of a connection to other crucial concepts, and a lack of attempt to alter related misconceptions about infinity) may evade addressing students' difficulties.

Nevertheless, this concept is used as a basis to introduce the concepts of Riemann sum and definite integral. We can wonder how the students are expected to understand those concepts when their basis has been reduced to pure algorithms.

The concept of series, useful to introduce other key concepts, has also many applications on itself. One of the easiest applications to understand is the writing of numbers with infinite decimals (0.333… = 0.3 + 0.03 + 0.003 + …), together with the calculation of areas. But series also have extra-mathematical applications in economics, medicine, natural sciences, and many other complex applications in mathematics (they are the basis for functional series, useful for approximations, signal treatment, solving differential equations, …).

In spite of its importance, series have not been exhaustively addressed by international research. But authors seem to converge in the fact that students do not construct correct conceptions for this concept and that visualisation could help to build a better understanding.

Robert (1982) stated that in postsecondary studies, the exercises used in teaching did not let the students construct a correct notion for the convergence of numerical series. Boschet (1983) added that traditional teaching shows very few examples of graphic representation of convergence, which agrees with our results (González-Martín, 2006), which showed that students do not have visual images associated with the concept of series. Alcock & Simpson (2004) also stated that the use of a visual reasoning can be advantageous for students.

Fay & Webster (1985) showed that in most calculus textbooks, little or no relation between improper integrals and infinite series is given other than the integral test for the convergence of series. The results of our previous research (González-Martín, 2006) support this and we showed that our students usually learn the concept of improper integral without making any link with the concept of series. Bagni (2000, 2005) has suggested the use of historical examples to improve the teaching of infinite series and to overcome the misconception that “infinitely many addends, infinitely great sum”. He points out that the processes of *didactic transposition* to teach series must consider students’ possible reactions, similar to those that great mathematicians showed in history. Hence, two levels should be distinguished in the conceptualisation of mathematical concepts: an *operational* stage, and a *structural* stage (which are not usually taken into account by traditional teaching), adding that the main problem of passing from finite to infinite has a cultural root, so historical elements are important to approach this problem. He also encourages the use of visual representations to give a meaning to the concept of series, as do Codes & Sierra (2007), who have designed an activity to introduce infinite sums as the limit of a type of sequence, based on Oresme’s work and using graphical representations with the help of a computer.

Kidron (2002) has identified as difficulties to understand the notion of series the *process-object* duality that refers to this concept, and the intuition of this infinite process as *potentially infinite*, instead of as *actually infinite*. To these difficulties, we add the ones identified by Mamona (1990): the confusion between sequence and series, and the resistance to see sequences as a type of function.

All these research results show that the learning of series is not an easy task. This situation has led us to wonder whether teaching processes take into account the difficulties mentioned above, and whether visualisation is used to render this concept more accessible to students. To address these two questions, two teams (one in Canada, one in the UK) have started to analyse textbooks, official syllabi, and teacher practises. This presentation shows the data we have collected up to now in our two countries, and the results of our preliminary analyses.

2. THEORETICAL FRAMEWORK

Our study starts from the assumption that to have a good grasp of the learning and understanding of a mathematical concept, the study of three dimensions is necessary (Brousseau, 1983). These three dimensions are: epistemological, cognitive, and didactic. At present, we are studying the didactic dimension of the concept of series, associated with the ways in which the concept is presented to the students in pedagogical and curricular terms (Artigue, 1992). Our sources are: textbooks, official syllabi, and teacher practises.

According to Duval’s theory of the registers of semiotic representation (Duval, 1995), the distinction between an object and its representation is fundamental in mathematical understanding. To achieve this understanding, the use of different semiotic representations of a mathematical object is absolutely necessary. But not only the use of different representations is necessary; the learner must be able to make connections between them. Duval states that to understand a mathematical concept the coordination of at least two different representations is necessary. This is due to the fact that each representation is only partial with regard to what it represents, and shows different aspects of the object. It can be said, so, that a mathematical concept is constructed by tasks which involve the use of different representation registers and promote the coherent articulation between representations.

Hence, in our analysis of textbooks, syllabi, and teacher practises, we are paying special attention to the use of the algebraic and the graphic registers to introduce the concept of series. The choice of these two registers is motivated by the results found in our literature review, showing the impact of visualisation to better understand the concept of series.

3. METHODOLOGY

As we stated above, we want to address whether the teaching processes for series take into account the difficulties for its learning outlined by research. We also want to address whether visualisation is used to render this concept more accessible to students.

Our analyses take into account three different sources: 1) official syllabi, which will allow us to see the place of this concept for the institutions and whether these institutions give any indication about the use of visualisation or about the difficulties the concept of series entails; 2) textbooks, which will allow us to see the ways in which the concept is introduced to postsecondary students; 3) teacher practises, which will allow us to see whether teachers follow textbooks or not, and the constraints they meet to teach this concept. For the sources (1) and (2), analysis grids have been constructed, and for the source (3) we will design an interview protocol.

In addition to the latter, and to keep a view as extrinsic as possible of the teaching of this concept, not influenced by the practises in a single country, two teams have been created to develop these analyses in two countries: Canada and UK.

At present, the analysis of textbooks is advancing in both countries. Our analysis grid takes into account both quantitative and qualitative data, and we address questions as the following:

- Does the text support – and how – students' overcoming of the major misconception tantalising the learning of the concept of infinite sum, "infinitely many addends, infinitely great sum" through reference to examples from this concept's epistemology and history?
- Does the text use – and how – graphical or any other visual representations in order to enrich students' visual understanding of the concept?
- Does the text instil – and how – an algorithmic and mechanical approach to the concept (despite recent research and policy advice to the contrary)?
- Does the text contextualise – and how – the concept in terms of its *raison-d'être* in mathematics and its many applications in mathematical and other situations?

4. EXPECTED CONCLUSIONS

The initial impressions from the first textbooks and books analysis carried out in both countries (González-Martín, 2008; Nardi, Biza & González-Martín, 2008) are that, even though the concept enjoys substantial coverage in most texts, its presentation is largely a-historical and decontextualised, almost exclusively in the algebraic register and with few graphical representations and applications.

Up to now, we have analysed ten textbooks in Canada and seven books in UK. Through all of them, the student is never asked to produce a graph to represent a series. Inversely, the student is never explicitly asked to interpret a given graph. We think that the coordination of the graphic and the algebraic registers (essential to achieve understanding, according to Duval, 1995) is absent in all the textbooks we have analysed. So, even if some graphs appear in the textbooks, it is possible that they are meaningless for the students, who have not developed co-ordination skills for this concept.

Regarding applications of the concept, not all the textbooks give some applications (and sometimes, the applications are only intra-mathematical). But these applications appear usually only in the first half of the chapter for series; when the convergence criteria and alternate series are shown, no application appears. The exercises are restricted then to calculations and applications of criteria.

In the next months we will accomplish these analyses and will start the analyses for the sources (1) and (3). The interviews with some teachers will allow us to see whether teaching is restricted to the contents presented in textbooks, or whether teachers add other elements (especially graphical representations and applications). We are also interested in the use of exemplification, especially in the type of examples given by teachers to let the students understand the concept of series.

During the conference, we will share the results of our analyses in course with the participants of our working group. But our impression, at the moment, is that the approach used to teach series remains "traditional" and the register used is almost exclusively the algebraic one, with very few graphical or visual representations. In addition to that, series are usually introduced just as a mathematical object that meets technical mathematical needs, so students do not necessarily develop a vision of series out of mathematics or of its applications.

REFERENCES

Alcock, L. J., & Simpson, A. P. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role, *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 1-32.

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering, in R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactics of Mathematics* (pp. 41-65). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bagni, G. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom, in J. Fauvel & J. Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 82-86), Dordrecht: Kluwer.

Bagni, G. (2005). Infinite series from history to mathematics education, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Boschet, F. (1983). Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français), *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 141-163.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Codes, M. & Sierra, M. (2007). Actividad rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas, *Actas de las IV Jornadas internacionales de Innovación Universitaria*, Ed. Universidad Europea de Madrid.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Neuchatel : Peter Lang.

Fay, T. & Webster, P. (1985). Infinite series and improper integrals: a dual approach, *Mathematics and computer education, 19*(3), 185-191.

González-Martín, A. S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*, PhD Thesis, Univ. of La Laguna (Spain).

González-Martín, A. S. (2008). The concept of infinite sum: a first review of textbooks, in O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 262), Morelia (México): PME.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216), Norwich (UK).

Mamona, J. (1990). Sequences and series – Sequences and functions : Students' confusions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, 333-337.

Nardi, E., Biza, I., & González-Martín, A. (2008). Introducing the concept of infinite sum: Preliminary analyses of curriculum content, *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into the Learning of Mathematics, 28*(3), 84-89.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(3), 307-341.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes

Fernando Hitt
Université du Québec à Montréal

Christian Morasse
Collège de Montréal

Abstract

In this document, we shall present certain results of research. This research began in 2006, and is connected to the process of teaching in a context by competencies (Québec's program, MELS, 2007). In this new approach, a big emphasis is done to the use of didactical situations. In this line of thought, we want to show the importance of the concept of covariation between variables as a prelude to the concept of function and the importance of the functional representations in the construction of concepts in an environment of collaborative learning, scientific debate and self-reflection (ACODESA's methodology, Hitt, 2006; Hitt et Passaro, 2007).

Introduction

Dans le texte qui suit, nous présenterons certains résultats d'une recherche qui a commencé en 2006. Cette recherche est liée aux processus d'enseignement des mathématiques dans le cadre d'une implantation de programmes visant le développement de compétences. Dans le nouveau curriculum au Québec (MELS, 2007), une grande importance est accordée aux situations problèmes (SP), de sorte que la première compétence disciplinaire du domaine des mathématiques est : « résoudre une situation problème ». Nous voulons montrer l'importance du concept de covariation entre variables comme prélude au développement du concept de fonction et l'importance du rôle des représentations fonctionnelles dans la construction de concepts mathématiques, dans un contexte de résolution de situations problèmes (SP) et un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (méthodologie ACODESA, Hitt, 2006; Hitt et Passaro, 2007).

Puisque nous sommes intéressés aux processus de modélisation mathématique dans un contexte de résolution de SP, nous devons d'abord faire la distinction entre exercice, problème et situation problème. En général, dans la littérature, les définitions de *problème* sont données en termes de défi sans faire référence explicitement à une théorie sur la construction des connaissances. Dans ce qui suit, nous allons nous situer dans une approche théorique de construction de concepts sous l'angle des représentations pour élaborer une définition de *problème* et d'*exercice*.

Au début des années quatre-vingts (voir Janvier, 1987), une communauté de didacticiens s'est intéressée aux problèmes d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques sous l'angle des représentations. Par la suite, dans une approche théorique sur les représentations, Duval (1993, 1995) a développé un cadre théorique sur la construction de concepts mathématiques liée à l'articulation de registres de représentation. Selon Duval, un concept mathématique ne peut pas être développé avec une approche centrée sur une seule représentation car cette seule représentation ne peut pas exprimer toutes les caractéristiques du concept en jeu. L'articulation entre les différentes représentations du concept devient donc nécessaire et, en conséquence, la conversion entre représentations doit être un élément présent dans les tâches proposées aux élèves.

Cette approche nous permet de proposer une définition de problème dans un contexte d'apprentissage à travers la coordination entre représentations (voir Hitt, 2004, p. 353) :

> *Quand un énoncé mathématique fait appel à une procédure déjà établie par un individu, nous pouvons classer cet énoncé comme un exercice… Si un énoncé mathématique ne fait pas appel à une procédure déterminée et qu'il nous oblige à la construction d'une représentation interne particulière [représentation fonctionnelle] qui fera la liaison entre différentes représentations de ce qui est en jeu, promouvant l'articulation entre ces différentes représentations, et qu'il va aussi nous permettre de produire des représentations sémiotiques particulières liées à l'énoncé en question, alors cet énoncé, sera pour nous un problème.*

Notre position sur ce qui constitue un exercice et un problème étant clarifiée, maintenant, voici ce que le MELS (2007) propose comme définition pour *situation problème* :

- *la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;*
- *l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;*
- *le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement. (p. 19)*

Une conséquence de cette définition du MELS, selon notre interprétation, est que les SP doivent servir à déclencher une pensée divergente (dans le sens de Guilford, 1967) ou un processus heuristique. En d'autres termes, les SP doivent favoriser une ouverture de pensée, qui va promouvoir l'émergence des représentations fonctionnelles (voir Hitt, 2006, 2007) qui guideront l'action des étudiants dans leurs approches de résolution. La résolution de problèmes et d'exercices est nécessaire pour que la connaissance devienne un savoir (dans les sens de Conne, 1992).

Dans cet ordre d'idées, notre approche théorique sur le rôle des représentations fonctionnelles est très proche de celle de Bourdieu (1980), avec sa notion d'*habitus* :

> Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes.

La structure structurante dans notre cas est la structure mentale construite par l'élève, liée à la production d'un schéma, qui lui permet de comprendre la tâche (SP ou problème) et lui donne la possibilité de s'engager dans un processus de résolution de la SP ou du problème, c'est-à-dire, que la structure structurante est liée à l'organisation d'un plan d'attaque. Bourdieu fait la distinction entre habitude et *habitus*: « L'habitude est considérée spontanément comme répétitive, mécanique, automatique, plutôt reproductive que productrice… ».

Ainsi, les *habitus*, selon Bourdieu, produisent des anticipations chez l'élève qui sont des sortes d'hypothèses pratiques fondées sur l'expérience passée, leur évolution dans un milieu socioculturel est très importante. Alors, sous cette perspective, la SP, le problème et l'exercice ont les rôles respectifs suivants :

- La SP comme promoteur de la pensée divergente. Elle favorise la production de représentations fonctionnelles (d'*habitus* dans le sens de Bourdieu) par les élèves. De ce point de vue, la SP aide à l'évolution des *habitus*, surtout si l'élève est placé dans un milieu socioculturel pour la construction social des connaissances.
- Le problème comme promoteur de la pensée divergente-convergente. Cette approche nous permet de promouvoir un développement des *habitus* (implicitement dans un contexte de processus d'institutionnalisation des connaissances),
- L'exercice comme promoteur de la pensée convergente. Cette approche nous permet de consolider la construction du savoir.

Puisque les problèmes et les exercices sont bien connus de la communauté des didacticiens et enseignants, nous allons nous restreindre aux SP, élaborées selon notre approche théorique et les exigences du programme du MELS. Il nous reste toutefois à définir ce qu'est une compétence mathématique. Nous adopterons la définition de Perrenoud (1999) :

> Une compétence est une capacité d'action efficace face à une famille de situations, qu'on arrive à maîtriser parce qu'on dispose à la fois des connaissances nécessaires et de la capacité de les mobiliser à bon escient, en temps opportun, pour identifier et résoudre de vrais problèmes.

Méthodologie

Les SP ont été choisies pour constituer un bloc d'activités, enchainées dans les sens de Glaeser (1999, p. 82), pour couvrir le thème sur la modélisation mathématique en 3ème secondaire et pour promouvoir l'apprentissage du concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction (Hitt et Passaro, 2007; Hitt *et al*., 2008 ; Gonzàlez-Martin *et al.*, 2008 et Morasse et *al.*, en presse).

Nous avons adapté cinq S-P pour développer le concept de covariation : le photographe, le jacuzzi, le randonneur, les carrés et les ombres. Les deux premières ont été conçues pour promouvoir, principalement, l'utilisation des représentations verbales, schématiques et graphiques. Avec les trois autres, la représentation algébrique vient s'ajouter à la liste des représentations. Deux groupes de 3ème secondaire (24 et 36 élèves) ont travaillé sur ces activités pendant 13 cours dans une ambiance d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto réflexion (méthodologie ACODESA, Hitt, 2006 et 2007). En résumé, la méthodologie est la suivante :

- Travail individuel : production de représentations fonctionnelles pour comprendre la tâche ;
- Travail en équipe sur la même tâche. Processus de discussion et validation. Raffinement

des représentations fonctionnelles ;

- Débat (qui peut devenir un débat scientifique). Processus de discussion et validation (raffinement des représentations fonctionnelles) ;
- Retour individuel sur la tâche (travail individuel: reconstruction et auto - réflexion) ;
- Institutionnalisation. Processus d'institutionnalisation et utilisation des représentations institutionnelles.

Notre méthodologie fait appel à un travail individuel et à un travail d’équipe. L’élève doit avoir une idée de ce qu’il va faire pour confronter ses idées avec celles de ses co-équipiers. C’est à ce moment que commence l’apprentissage collaboratif. Parfois, il n’y a pas de discussion, mais d’autres fois, des élèves déclenchent un débat qui peut se transformer en un débat scientifique. Le retour individuel sur la tâche permet à l’élève de faire une reconstruction de ce qui a été fait dans son équipe et lors du débat. Finalement, le processus d’institutionnalisation est fait par l’enseignant.

Analyse d’un épisode lié à la dernière activité : « Les ombres ».

Supposons que nous avons une source lumineuse d’une hauteur de 6 m (un lampadaire). Nous observons l’ombre sur le sol lorsqu’une personne de 1,5 m de hauteur marche dans la rue. Nous nous intéressons aux relations entre les grandeurs en jeu.

Existe-t-il des grandeurs qui sont dépendantes les unes des autres? Lesquelles?
Sélectionne deux grandeurs qui sont dépendantes l’une de l’autre et décris le phénomène à l’aide des différentes représentations que tu as utilisées dans les activités précédentes.

Figure 1. Activité utilisée pour la recherche

Les élèves dans ce qui suit ont été nommés ***A***, ***C***, ***H*** et ***L***.

Travail individuel

Production de ***A*** (travail individuel):

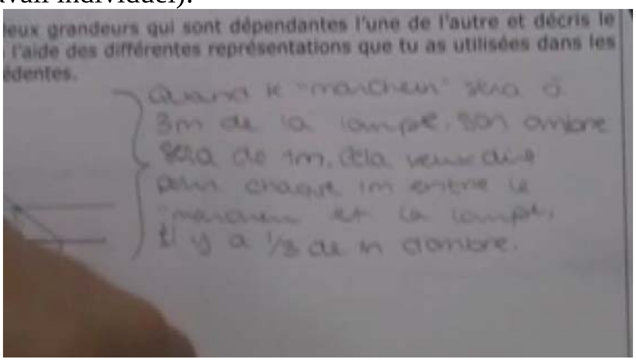


Figure 2. Production individuelle

Travail en équipe

Dialogue entre ***C*** et ***A***

A : [elle fait un travail individuel et ***C*** l’appelle]
C : ***A,*** là je suis comme bloquée… J’ai catché que ça ici c’était ça…
A : Ça marche parce que quand il est rendu à 6…
C : Ah mais c’est ça, ça double !
A : pour chaque 3 mètres… son ombre mesure… pour 1 mètre son ombre est comme 3…3.. .33,3
C : [Silence]
A : parce que regarde : pour 3 mètres, son ombre mesure 1 mètre. Pis rendu pour 1 mètre, ça serait le tiers de 1m.
C : Ah ! Ça fait que ici, c’est le tiers, ici le 2 tiers et ici c’est 1. Ça fait que si tu rajoutes 1 tiers, 2 tiers…. À 6 tu arrives à 2 mètres.

La production en équipe a donné comme résultat une règle et une représentation graphique:

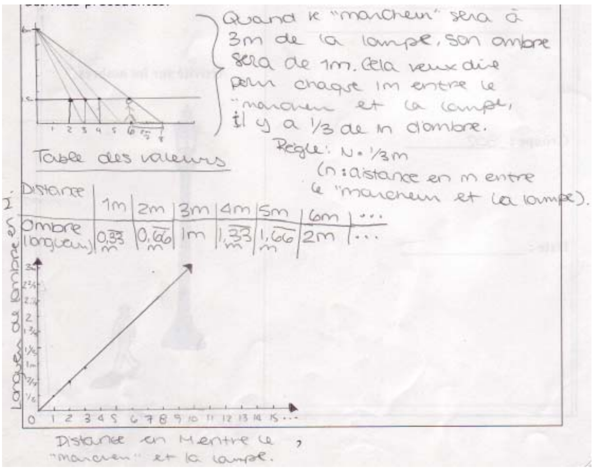


Figure 3. Production en équipe

Pendant que les deux filles travaillaient et obtenaient un résultat qu’elles jugeaient satisfaisant, deux garçons (***H*** et ***L***) travaillaient de leur côté tout au fond de la classe. Ils ont suivi une approche purement algébrique sans prendre en compte les directives sur la façon d’effectuer la tâche. Ils ont fait des erreurs et ne pouvaient pas se sortir de la situation contradictoire que leurs erreurs ont provoquée. Il faut signaler que pour ces deux élèves, la représentation algébrique est la plus importante. Il est possible que ceci soit dû à la formation qu’ils ont reçue dans leurs pays d’origine.

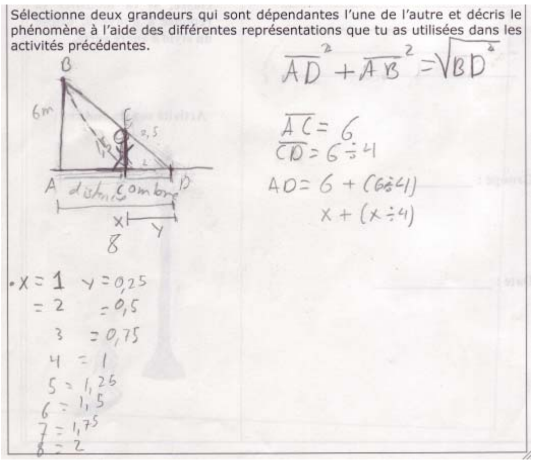
Un d’entre eux (***H***), en se promenant dans la classe, a demandé aux filles, sans indiquer que lui et son co-équipier étaient bloqués, si elles avaient fini. La fille nommée ***C*** qui “était bloqué" et qui avait bien compris l'explication de sa co-équipiere, lui a donné la réponse : « l'ombre mesure un tiers de la distance parcouru par le bonhomme ». ***C*** a fait un geste du bras qui montre qu'une ligne droite représente graphiquement la situation.

H est ensuite retourné à sa place et a transmis la solution du problème à L. Ils ont par la suite réussi à trouver l'expression algébrique, à l'aide de triangles semblables, qui représente la situation. (voir la Figure 4).

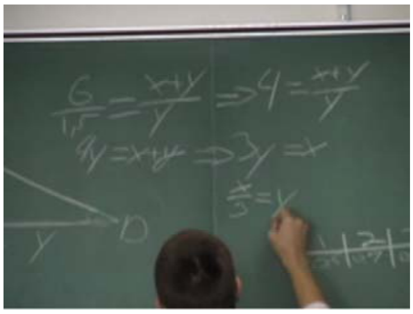
Étape de présentation en grand groupe (sans débat)

Le professeur qui a remarqué le résultat des 2 garçons (à ce moment, il n'avait pas eu connaissance du travail des deux filles, c'est l'analyse des vidéos, obtenus par deux caméras, qui a permis de constater leur travail), leur a demandé de montrer leur résultat à toute la classe. Sans débat, tous les autres élèves ont accepté le résultat des deux garçons et ont été bien impressionnés par leurs habiletés algébriques.

Erreurs algébriques (travail individuel et en équipe)



Le résultat des filles, obtenu par un raisonnement proportionnel a permis aux garçons de trouver la réponse par une approche algébrique.



Les garçons (ici ***L***) montrent leurs résultats à toute la classe

Figure 4. Erreurs algébriques, rétroaction numérique et solution finale (travail en grand groupe)

Étape d'auto réflexion (retour individuel sur la tâche)

Selon la méthodologie ACODESA (voir Hitt, 2007, Gonzalez-Martin et al, 2009), le professeur ramasse toutes les productions des élèves et leur demande de refaire toute l'activité à la maison. Nous avons vu que C a bien compris les explications de sa co-équipière. La figure 5 et montre ce qu'elle a fait à la maison pendant le processus d'auto-refléxion.

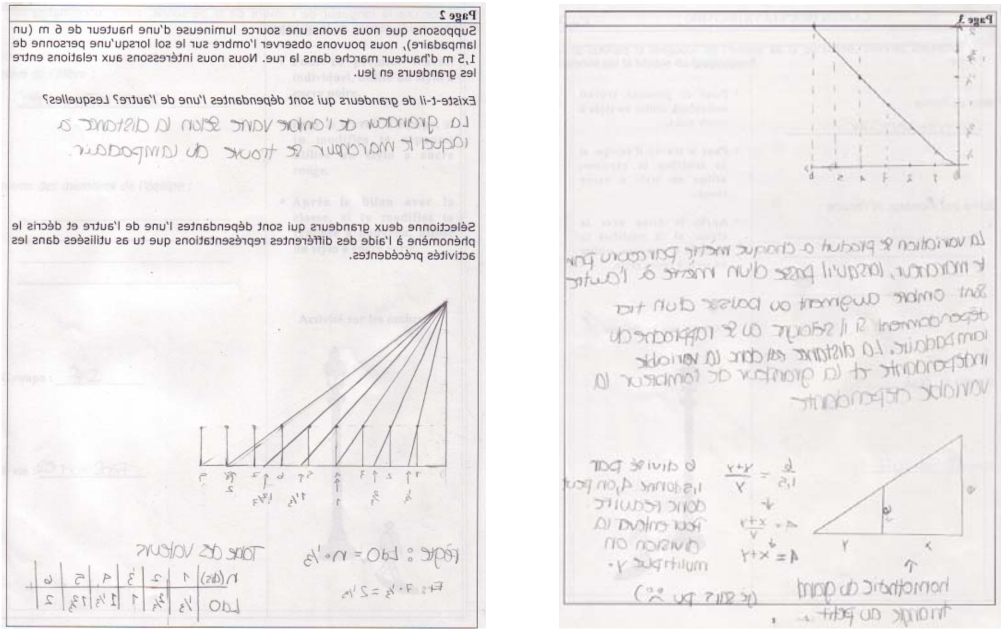


Figure 5. Productions liées au processus d'auto-refléxion de C

C énonce bien la règle, mais elle a des problèmes dans l'interprétation pour donner un exemple (en bas de la reproduction de gauche). De plus, elle a essayé de reproduire ce que les deux garçons ont fait, mais elle s'est trompée et n'a pas fini le processus algébrique (« je sais pu :o(» en bas de la production de droite). Nous pouvons constater ce que la fille a retenu deux jours après le travail en équipe et en grand groupe.

Étape d'institutionnalisation

Le professeur, après le travail des élèves sur les cinq activités, a pris en considération leurs résultats et a procédé à une phase d'institutionnalisation en montrant les représentations standard dans la résolution des situations problèmes.

Résultats

Les élèves, avec l'aide du matériel ad hoc, ont construit un pont entre le schéma et la représentation graphique. C'est-à-dire que les SP ont joué un rôle important dans le développement des structures structurantes (*habitus*). Les élèves dans cette expérimentation, ont développé des connaissances liées à l'acquisition du concept de covariation en travaillant les trois premières activités (photographe, jacuzzi et randonneur). Les deux autres activités se sont transformées en problèmes puisque les élèves ont développé, avec les deux premières, des compétences pour résoudre des problèmes. Ce qui est important, aussi, c'est que la représentation algébrique a émergé en travaillant sur les deux dernières activités (les carrés et les ombres) et elles ont ainsi servi à la consolidation des connaissances. C'est-à-dire, à la transformation des connaissances en savoir et leur utilisation pertinente, montrant que ces élèves, en général, ont développé des compétences.

La méthodologie ACODESA a bien fonctionné avec le groupe de 24 élèves promouvant une construction sociale des connaissances. Par contre, dans le groupe de 36 élèves (cas présenté dans ce document), pendant la résolution des SP, il y avait beaucoup de bruit et pour l'enseignant, c'était difficile de gérer les discussions. Il faut signaler que l'enseignant travaillait avec cette méthodologie pour la première fois. Les activités se sont bien déroulées avec le groupe de 24 élèves. Nous avons constaté, en accord avec ce que l'on trouve dans la littérature, qu'avec plus de 30 élèves une méthodologie d'apprentissage collaboratif est beaucoup moins efficace.

Remerciements

Un remerciement spécial à Alejandro González-Martín de l'Université de Montréal, pour ses suggestions pour l'amélioration de ce document. Nous remercions aussi Denis Tanguay, Gustavo Barallobres et Stéphane Cyr (Université du Québec à Montréal) pour leurs contributions dans le projet global de recherche. La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (Appuie # 008-SE-118696). Nous remercions aussi les élèves qui ont participé à cette recherche.

Références

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.

Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5(1993) 37-65.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.Glaeser G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. *La Pensée Sauvage Éditions*. France.

Gonzalez A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME-32,* and *PME-NA XXX*, Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.

Guilford J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence.* McGraw-Hill Book Company.

Hitt F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Giménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM-54, Vilanova i la Geltrú. Spain, pp. 351- 359.

Hitt, F. (2006). Apprentissage en collaboration, débat scientifique et auto-réflexion (ACODESA). *En Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-58)*, Srni, République Tchèque, pp. 121-126

Hitt F., et Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM-59). Dobogókö, Hongrie, juillet, 2007, pp. 117-123.

Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In ICME-11, Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. http://tsg.icme11.org/tsg/show/21.

Janvier C. (1987). Representation and Understanding: The notion of Function as an Example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum Associates.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. (Nov-2007). http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp /menusec.htm.

Morasse C., Hitt F. et Gonzàlez-Martìn A. (en presse). Représentations fonctionnelles dans les processus de modélisation chez des étudiants de niveau secondaire : La co-variation comme 1ère étape dans la construction du concept de fonction. *Actes du Colloque GDM*. Sherbrooke, Québec.

Perrenoud, P. (1999). Construire des compétences, tout un programme ! *Vie pédagogique*, n° 112, pp. 16-20.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Le jeu de rôles en formation initiale des maîtres du primaire : une situation-problème visant une réflexion pour, dans et sur l’action

Caroline Lajoie
Université du Québec à Montréal (UQAM)

Summary

The recent changes in the Québec school curriculum as well as in the University teacher-training programs have prompted us to rethink teacher-training in mathematics for the bachelor of education program in pre-school and primary school teaching at UQAM. An approach requiring role-play was developed for a course of didactic of arithmetic at the elementary level. Following this approach, problematic situations are staged with students playing given roles. The proposed problem-situations are all realistic in that they are likely to occur in an elementary class. For the purpose of this conference, I use an example to point to some apprenticeships that our pre-service elementary school teachers seem to be realizing through role-play.

Le système scolaire québécois vit actuellement des changements importants. D’une approche par objectifs, le curriculum de l’école primaire québécoise de même que celui du secondaire sont passés au cours de la dernière décennie à une approche par compétences. Les programmes de formation des maîtres dans les universités québécoises vivent eux-aussi des transformations importantes. Ils doivent être modifiés pour tenir compte des transformations en cours actuellement dans tout le système scolaire.

Ces diverses modifications ont forcé notre équipe de didacticiens des mathématiques du primaire de l’UQAM à repenser la formation didactique offerte aux étudiants du baccalauréat en éducation préscolaire et enseignement primaire. Pour cette conférence, je me propose, à partir d’un exemple, de présenter une approche développée pour un cours de didactique de l’arithmétique, soit celle des « jeux de rôles ». Aussi, à partir de cet exemple, je tenterai de faire ressortir le potentiel de ce dispositif pour la formation didactique de nos étudiants. En particulier, je montrerai comment ce dispositif leur permet de mener une réflexion pour l’action, dans l’action et sur l’action.

Première partie : Contexte de la formation des maîtres du primaire au Québec

Un des changements auxquels les universités québécoises ont dû se plier récemment est l’introduction dans la formation des maîtres d’une approche par compétences « professionnelles ». Suivant un document ministériel provisoire (MEQ, 2001, pp. 50-53), une compétence professionnelle se déploie en contexte professionnel réel, elle se situe sur un continuum qui va du simple au complexe, elle se fonde sur un ensemble de ressources, elle se situe dans l’ordre du savoir-mobiliser en contexte d’action professionnelle, elle se manifeste par un savoir-agir réussi, efficace, efficient, récurrent, elle est liée à une pratique intentionnelle et elle est un projet, une finalité sans fin. Ainsi, quelques unes des compétences attendues des futurs enseignants sont : concevoir et piloter des situations d’enseignement-apprentissage pour les contenus enseignés, évaluer la progression des apprentissages et le degré de maîtrise des compétences des élèves pour les contenus enseignés, adapter ses interventions aux besoins et aux caractéristiques des différentes clientèles.

Au sein de notre équipe de formateurs, un problème s’est rapidement posé, soit celui de l’articulation entre la formation de nos étudiants dans les cours dits « théoriques » (dont ceux de didactique des mathématiques) et les conditions réelles d’exercice de la profession enseignante. À l’UQAM, en effet, les didacticiens des mathématiques au primaire n’ont pas facilement accès aux milieux de formation pratique (stages). Ainsi, compte tenu de cette contrainte, comment espérer contribuer au développement des compétences professionnelles de nos étudiants en contexte « réel » (tel que mentionné précédemment) ? Nous avons alors mis en place un contexte simulé mais « réaliste » d’intervention en classe du primaire – le « jeu de rôles » - dans lequel nos pourrions plonger nos étudiants pour contribuer au développement de leurs compétences professionnelles.

2^e^ partie : Le jeu de rôles

Le jeu de rôles est la mise en scène d’une situation problématique impliquant des personnages ayant un rôle donné. Le jeu de rôles peut être utilisé à des fins thérapeutiques, de formation personnelle, de formation professionnelle, ou encore comme méthode pédagogique (Mucchiellli, 1983, p. 3). L’idée derrière le jeu de rôles est que des personnes, par exemple des étudiants, doivent se glisser dans la peau de personnages plongés dans une situation donnée et agir exactement comme ils croient que ces personnages pourraient agir. L’objectif du jeu de rôles, lorsque utilisé dans l’enseignement, est d’amener les étudiants-acteurs, de même que tout le reste de la classe, à rapprendre quelque chose à propos des personnages eux-mêmes et/ou de la situation (van Ments, 1989, p. 16).

3^e^ partie - Les jeux de rôles dans le cours de didactique de l’arithmétique

Notre cours de didactique de l’arithmétique s’articule autour d’une dizaine de jeux de rôles. Chaque jeu de rôles est structuré de la même manière. En tout premier lieu, les étudiants, placés en équipes, sont informés des principaux objectifs du jeu de rôles. Puis, une mise en situation est posée, laquelle présente une situation-problème de nature didactique (et non de nature mathématique) qui implique généralement des élèves et des enseignants (du primaire) et qui appelle toujours une solution. Une fois la situation posée, toutes les équipes se préparent pour le jeu de rôles, en ne sachant pas à l’avance si un de ses membres devra jouer le rôle d’un élève ou d’un enseignant devant toute la classe. Par la suite, le professeur choisit les équipes qui devront envoyer une personne pour jouer le rôle d’un enseignant ou d’un élève, et fait en sorte que les différents acteurs proviennent d’équipes différentes, de manière à éviter que le jeu devienne un sketch où tous les acteurs sont arrangés entre eux (ce qui ne reflèterait aucunement le contexte d’une classe du primaire). Enfin, le jeu a lieu et un retour est fait sur la prestation de chacun, sur la situation, de même que sur les apprentissages réalisés par tous les étudiants grâce au jeu de rôles en question.

À travers l’ensemble de nos jeux de rôles, les étudiants sont appelés à développer certaines compétences professionnelles. Plus spécifiquement, ils sont appelés entre autres choses à : réfléchir aux contenus arithmétiques à être enseignés au primaire; juger de la pertinence d’une situation d’enseignement-apprentissage face à l’enseignement d’un sujet mathématique donné et proposer des améliorations s’il y a lieu; juger de la pertinence de certaines approches pédagogiques et de certains matériels didactiques face à l’enseignement d’un sujet mathématique donné et proposer des améliorations s’il y a lieu; analyser des productions d’élèves et élaborer des stratégies d’intervention qui tiennent compte de ces productions; anticiper des réactions d’élèves dans une situation donnée et intervenir en respectant ces réactions, etc. Aussi, les étudiants sont amenés à travailler en collaboration, à prendre des décisions, à débattre leurs idées dans leurs équipes et devant toute la classe, à communiquer « mathématiquement », à faire face à l’imprévu, etc.

4e partie : Illustration du potentiel des jeux de rôles à l’aide d’un exemple : « La calculatrice comme source de questionnement et de réflexion »

Dans un premier temps, les étudiants sont informés que le jeu de rôles à l’étude, soit « la calculatrice comme source de questionnement et de réflexion », vise à les amener à voir comment la calculatrice peut être exploitée en classe, non pas en tant que simple outil de calcul et de vérification, mais bien en tant que source de questionnement et instrument de découverte, d’approfondissement et d’expression du savoir-faire.

Dans un deuxième temps, ils reçoivent la mise en situation suivante et sont informés (voir dans l’encadré la note suivant la mise en situation) de ce qui sera attendu d’eux lors du « jeu » en tant que tel :

Mise en situation :

Vos élèves de troisième cycle [10-12 ans] explorent avec l’aide de leur calculatrice personnelle [ils ne disposent pas tous de la même calculatrice] quelques problèmes mathématiques. Ce faisant, ils doivent effectuer un certain nombre de calculs. Or, ils n’obtiennent pas tous les mêmes résultats aux différents calculs, ce qui semble les choquer puisqu’ils affirment tous avoir utilisé correctement leur calculatrice ! Que se passe-t-il ? Vous souhaitez amener vos élèves à répondre eux-mêmes à cette question !

Les calculs qui posent problème sont les suivants[4] :

1) 2 x 12 + 3 x 10 = ? 2) 123 456 x 456 789 3) (4 ÷ 3) x 3 = ?

4) 500 – 8% = ? 5) 5% + 2% = ?

Note :

Chaque « enseignant » aura quelques minutes pour traiter un de ces calculs avec trois « élèves ». Chaque élève aura en mains sa calculatrice.

Dans un troisième temps, les équipes (qui restent toujours les mêmes, d’une séance à l’autre) examinent la mise en situation. Elles effectuent les calculs, essaient de comprendre les réponses données par les calculatrices, se questionnent à savoir si une réponse est meilleure

[4] Seuls quelques uns des calculs généralement présentés aux étudiants ont été retenus ici.

« mathématiquement » qu'une autre, etc. Elles doivent aussi penser à la manière dont un enseignant pourrait traiter chacun de ces calculs avec ses élèves, les questions qu'il poserait, etc. en parallèle avec ce que des élèves pourraient amener comme hypothèses, questions, réponses, etc. Puisqu'il s'agit d'un travail fait préalablement au « jeu » lui-même, nous voyons dans ce type de réflexion, que pourrait mener un véritable enseignant avant son entrée en classe, une réflexion POUR l'action.

Pendant le travail de préparation dans les équipes, le professeur circule dans la classe, répond aux questions et en pose, pousse les étudiants à approfondir leur réflexion, etc. Les observations qu'il fait pendant ce temps de préparation lui permettent de faire plusieurs choix : les calculs qui feront l'objet d'un jeu à l'avant ; les équipes qui enverront chacune à tour de rôle un « enseignant » à l'avant (un par calcul); les équipes qui enverront des « élèves » à l'avant (trois ou quatre à la fois, provenant d'équipes différentes, provenant d'une autre équipe que celle de l' « enseignant »).

Dans un quatrième temps, un « enseignant » se présente devant la classe avec des « élèves », et le « jeu » commence. S'amorce alors une réflexion DANS l'action pour l'enseignant, mais aussi pour les « élèves ». L' « enseignant » est particulièrement sollicité puisque, dans le feu de l'action, des réactions (hypothèses, questions, réponses) qu'il n'avait pas prévues de la part des « élèves » le forcent à prendre des décisions immédiates, des « micro-décisions » pour employer les mots de Comiti (2002, p. 40). Comment réagir par exemple face à un résultat fourni par une calculatrice, ou à une hypothèse formulée par un « élève », que le travail de préparation n'avait pas permis d'anticiper ? Que répondre à l' « élève » qui demande « mais quelle est LA bonne réponse » et/ou à des « élèves » qui ne s'entendent pas sur ce que devrait être cette bonne réponse ? Les « élèves » aussi sont sollicités puisqu'ils doivent en quelque sorte suivre l' « enseignant » (faire ce qu'il demande, répondre à ses questions, etc.) mais ils doivent aussi s'investir dans le jeu (par exemple en posant des questions, en formulant des commentaires, comme le feraient des élèves) tout en ne prenant pas la place de l' « enseignant ».

Pendant ce temps, une réflexion a lieu aussi chez les spectateurs, i. e. chez les autres étudiants : Que se passe-t-il ? Pourquoi l' « enseignant » aborde-t-il la situation de cette façon ? Pourquoi prend-il ces décisions ? Qu'aurais-je fait à sa place ? Qu'attend-il de ses « élèves » ? Le résultat sur lequel s'entendent finalement les acteurs est-il réellement le « bon » résultat ? etc. Suite à ce premier « jeu », d'autres acteurs se présentent à l'avant pour jouer à leur tour.

Dans un cinquième et dernier temps, une discussion a lieu en grand groupe. S'amorce alors la réflexion SUR l'action, à laquelle participent les spectateurs, les acteurs, et bien sûr le professeur. Des commentaires sont alors formulés sur les interventions des différents acteurs, des comparaisons sont faites, mais surtout plusieurs questions sont posées et des réponses sont offertes. À cette étape, le professeur doit s'assurer que des erreurs (qu'elles soient de nature didactique ou mathématique) ne soient pas laissées en suspens.

5^e partie : Discussion et conclusion

Dès la première année d'expérimentation des jeux de rôles, notre équipe de formateurs en a reconnu le potentiel (Lajoie et Pallascio, 2001). Depuis lors, ils s'avèrent toujours être à nos yeux un moyen de formation potentiellement riche (Lajoie, à paraître). À titre d'exemple, nous considérons que le fait que puisse avoir lieu, dans un contexte simulé mais réaliste - en plusieurs points semblable à un contexte réel d'exercice de la profession enseignante -, à la fois une réflexion POUR l’action, DANS l’action et SUR l’action, est un grand avantage que présentent les jeux de rôles par rapport à d’autres pratiques de formation.

Nous devons toutefois faire face à des réticences importantes de la part de certains étudiants, qui préféreraient que les jeux de rôles ne fassent pas l’objet d’une évaluation par le professeur, que les acteurs d’un même jeu puissent se préparer ensemble (question d’éviter les imprévus) ou encore qu’une place moins importante soit laissée aux jeux de rôles de manière à ce que nous puissions fournir davantage de « recettes » pour l’enseignement. Ces commentaires nous ont amenés au fil des ans à apporter quelques ajustements à nos jeux de rôles mais nous sommes conscients que nous devrons toujours faire face à des résistances de la part de certains étudiants puisque notre dispositif va à l’encontre de conceptions bien ancrées à propos de l’enseignement des mathématiques (Lajoie, à paraître). Malgré tout, nous demeurons convaincus que le « jeu » en vaut la chandelle …

Références

Comiti, C. (2002). À la recherche d'une modélisation de l'enseignant. Brève histoire de dix ans de réflexion sur la question de l'enseignant et de la modélisation de ses pratiques ou L'évolution d'une problématique, en relation avec le développement des avancées théoriques de la didactique des mathématiques. *In* A. Bessot (dir), *Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti : Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant*, Les cahiers du laboratoire Leibniz, No 53, Juin 2002.

Lajoie, C. (à paraître). Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM, *In* J. Proulx et L. Gattuso (dir), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Éditions du CRP.

Lajoie, C. et R. Pallascio (2001). Le jeu de rôle : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement de compétences professionnelles, *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, Colloque des didacticiens et des didacticiennes des mathématiques (GDM), Montréal, 7, 8 et 9 mai 2001.

MEQ (2001). *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.* Gouvernement du Québec : Ministère de l'Éducation.

Mucchielli, A. (1983). *Les jeux de rôles.* Paris: Presses universitaires de France, Que sais-je ?

Van Ments, M. (1989). *The effective use of role-play: A handbook for teachers and trainers.* New York: Nichols publishing.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

SEQUENCES OF ACTIVITIES WITH STUDENTS THROUGH THE PROCESS OF MATHEMATICAL AGREEMENT

Gustavo MARTINEZ-SIERRA
National Polytechnical Institute of Mexico
Mathematics Education Program
CICATA-IPN, Legaria Campus
Calzada Legaria #694 Col. Irrigación Del. Miguel Hidalgo, C.P.11500, México, D.F.

Résume

Cet article présente les résultats de l'enquête sur la production de connaissances à partir de l'étude sur les processus présents dans l'articulation systèmes mathématiques. Plus précisément, l'objectif ici est de présenter la base de preuves qui nous permettent de rendre compte d'un processus, que nous avons appelé processus de mathématiques accord (Martínez-Sierra, 2005,2008), qui permet d'établir une déclaration en même temps que sa vérité. La vérité de la déclaration peut être interprétée comme "accepté la vérité", dans le sens où il est établi de la théorie à la nécessité d'articuler un système conceptuel. Nous allons vous présenter deux exemples qui montrent qu'il est possible de produit au sens de la puissance zéro et le sens de la racine carrée de nombres négatifs en tant que précurseur sur le sens des nombres complexes.

1. THE PROCESS OF MATHEMATICAL AGREEMENT

In previous works (Martinez-Sierra, 2005, 2008) we have developed some theoretical notions which have been useful, on one hand, in the explanation of some didactic phenomena and, on the other, in the interpretation of knowledge production processes. In particular, on the knowledge production plane we have provided evidence that certain pieces of knowledge, which we have called mathematical agreements, can be understood as the product of a mathematical articulation process or knowledge integration. process In this same way, on the plane of explanation of didactic phenomena, we have realized that some of the conceptual breaks at school have their origins in the disarticulation of certain part of the corpus of mathematics in school.

A process of *mathematical agreement* (Martínez-Sierra, 2005, 2008) may be understood as a consensus-seeking process within the community that works to give unity and coherence to a set of knowledge. The production of consensus is possible because the *norm of systemic integration of knowledge* exists in this community. This means that there is a *social norm* of mathematical activity to relate diverse pieces of knowledge and articulate them into a coherent and interrelated whole. By nature this social norm is found on the plane of mathematical theorization, understanding by this the interrelated elaboration of concepts which try to describe, and explain an object of study which is, in this case, the system of accepted knowledge. The process of mathematical agreement brings the appearance of emergent properties unforeseen by earlier theoretical corpus. The emergent properties could be a *statement whose truth we must agree* (*agreed truth*), a definition, an axiom, an interpretation or a restriction, among others, in order to make a coherent and interrelated conceptual system. The form of the property depends on the specific, theoretical goals.

The search for integration present in the process of mathematical agreement, which is a search for relationships, could take two paths: 1) *rupture* caused by leaving aside one meaning in favor of another which is eventually built for the task of integration; that is, changing the focus of the meaning, and 2) *continuity* by conserving the meaning in the integration task. The mathematical agreement, then, as a product, can be interpreted as an emergent property to establish a relationship of continuity or rupture of meanings.

For example, in order to construct the statement $2^0 = 1$, we can do it through reasoning such as the following: if we *want* $2^0 * 2^2 = 2^{0+2} = 2^2$ *we must agree* that $2^0 = 1$ and *we must agree* that the meaning of the symbol 2^x is no longer a repeated multiplication.

2. EXAMPLES FROM THE HISTORIC EPISTEMOLOGY

2.1. The exponents

Towards the end of the XVI century it was known that the curves $y = kx^n$ (n = 1, 2, 3, 4,…), called by index n, had a property called “characteristic ratio”. This knowledge was a general part of the fundamental problem at the time of the mechanical and algebraic calculation of areas defined by distinct curves (Bos, 1975). Taking as an example the curve $y = x^2$ it was said that the characteristic ratio was equal to 1/3; since, if we take an arbitrary point on the curve, **C** (Figure 1) the area of **AECBA** defines a proportion of 1:3 with respect to the area of the rectangle **ABCD.** In general, it was known that the characteristic ratio of the index curve n is $1/(n+1)$ for all positive whole numbers n [5].

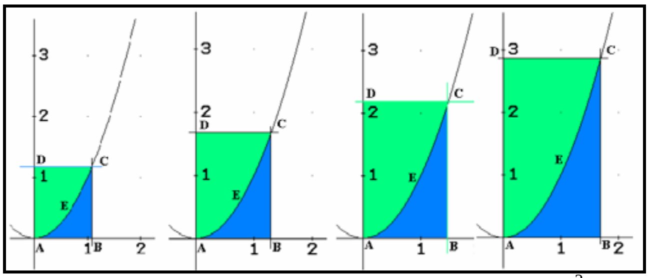


Figure 1. Characteristic ratio of the curve $y = x^2$

In his investigations on the quadrature of curves, John Wallis (Struik, 1986, p. 246; Confrey and Denis, 1996) used the above to make the following reasoning, which is basically a way of agreeing that the index of $y = \sqrt[2]{x}$ must be equal to 1/2 in order to unify the notion of characteristic ratio with the notion of index (a paraphrase of the reasoning is given here): “As the curve $y = x^2$ has a characteristic ratio of 1/3, the curve y = $\sqrt[2]{x}$ should have also a characteristic ratio and must be equal to 2/3 (it can be observed that the areas under both curves complement each other to make a rectangle). Also, as the curve of index 2 has a characteristic ratio it

[5] In modern terms the notion of characteristic ratio is helped in that $(a>0)$ $\left(\int_0^a x^n dx\right) \div a^{n+1} = 1 \div (n+1)$

can be supposed that that a curve which has a characteristic ratio also has an index, so, what index should the curve $y = \sqrt[2]{x}$ have? As 2/3=1/(1+1/2) the index *must be* 1/2"
The example of Wallis's formulation of the index 1/2 indicates the *agreed truth* component of the mathematical agreement process with respect to the integration of the notions of index and characteristic ratio and the algebraic and graphic representations.

2.2. The square root of negative numbers as precursor of the meaning of complex numbers
In 1545 Cardano published (Stillwell, 1989) in his *Ars Magna* Tartaglia's solution method of the cubic equation $y^3 = py + q$ takes the form:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ --------(I)}$$

The formula involves complex numbers when $\left((q/2)^2 - (p/3)^3\right) < 0$. Nevertheless, this cannot be considered an unsolved case, because the cubic equation always has at least one real root. So Cardano's formula poses the problem of agreeing on a real value, found by inspection, let's say, with an expression of the form: $y = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-N}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-N}}$ (*N* being a positive number). Cardano did not confront this problem (the simplification of $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-N}}$, called the irreducible case) in his *Ars Magna* (Stillwell, 1989, p. 190), considering these numbers to be "as subtle as they are useless"; he was incapable of doing anything with the so-called "irreducible case" of the cubic equation, in which there are three real solutions that appear as the sum or difference of what we now call complex numbers.
In summary (Stillwell, 1989, p. 190-192; Dunham, 1999, p. 85-86)., the first formulation in relation to numbers of the form $A + B\sqrt{-N}$ (*N* being a positive number) was accepted in a limited algebraic domain because they appeared useful in the solution of third grade equations $y^3 = py + q$. Our interpretation is that the existence of the square root of negative numbers *was accepted*, along with its operativeness, to *articulate* an algebraic formula (Cardano's formula)**,** with the fact that a cubic equation always has at least one real root. In terms of the *mathematical agreement* process we can say: if *we want* that the Cardano's formula gives the real solution of $y^3 = py + q$ *we must agree* the existence and operativeness of numbers with the form $A + B\sqrt{-N}$ whit $\left(\sqrt{-N}\right)^2 = -N$ and $\left(\sqrt{-N}\right)^3 = -N\sqrt{-N}$.

3. EXPERIMENTAL SEQUENCES OF ACTIVITIES WITH STUDENTS

In order to experiment the process of mathematical agreement, we design some experimental sequences of activities for junior high school students (pupils between 12 and 15 years old) and high school students (pupils between 15 and 18 years old). The analysis of the staging of those sequences of activities suggests that it is possible to construct the meaning of the power zero and the meaning of the square root of negative numbers as precursor on the meaning of complex numbers.

3.1. A production of the meaning of the power zero

The sequence of activities, for junior high school students, for a construction on the meaning of the power zero is intended that the student, through verbal manipulation (objectivization) of powers, will construct the product rule for exponents in an arithmetic-algebraic way, and then use this law to confront his knowledge of 2^0: the zero as “nothing” and the interpretation of the expression base$^{\text{exponent}}$ through repeated multiplication. More specifically, with our design, the student is intended to construct the mathematical statement $2^0=1$, through the product of reasoning such as the following: if we *want* $2^0 * 2^2 = 2^{0+2} = 2^2$ *we must agree* that $2^0=1$.

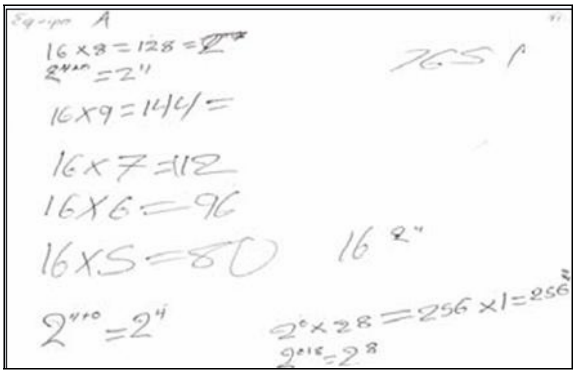
In our staging, where two teams of three students work independently, we can see that knowledge was built (always from the point of view of the *processes of mathematical agreement* as knowledge generators): Team A *agreed* that 2^0 was equal to 1, and Team B *agreed* that 2^0 was equal to 2.

By example, in Team A – Stage 4, For a time they analyze other values (8 and 9) in the exercise $2^0 \times 2^4$ using a non scientific calculator and become desperate, until they reach the conclusion that two to the power zero has no value because it only works with 4, and the professor asks:

P: What other numbers are missing?

C: 7, 4, 3, and 2, no, 1, let’s see 7, 6, 5, and the 1 (They take these values and do the corresponding operations).

An example of the analysis which students of this team carried out to find an appropriate value for 2^0 can be seen in Figure.



They finally concluded that $2^0 = 1$ because:

E: 16×1 = 16 which is the fourth power of two.

C: The fourth power of two plus zero is the same as 2^4, you get the same.

P: Conclusion.

E: That 2^0 is 1.

P: Reason?

E: Because you can’t with the others.

C: Because all the numbers you multiply give the same results (he refers to multiplication by 1)
P: So two to the power zero must be one so that all the others do, right?
C: So that all the others give the same result when you go to multiply.

3.2. A production of the meaning of the square root of negative numbers

For the construction of the sequence of activities, we have *transposed* the process of mathematical agreement presented in section 3.2 to polynomials of the form $x^n - 1 = 0$. In particular, the objective of the sequence is to *favor the acceptation and the operativeness of the square root of negative numbers* in students of high school, within a context of the calculation of roots in polynomials of the form $x^n - 1 = 0$. The main idea is that the students find the roots of polynomials through the explicit petition to factorize and to use the usual second grade formula and, finally, they use the tools of the development of a binomial to corroborate that their calculation is correct[6].

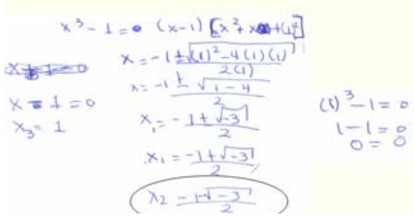
Our hypothesis is that the idea that such polynomials have different "*n*-rootscan be supported the acceptance of the operativeness of the square roots of negative numbers. In terms of the *mathematical agreement* process we can say: if *we want* that $x^n - 1 = 0$ have "*n*-roots" *we must agree* the existence and operativeness of numbers with the form $\sqrt{-N}$ with $\left(\sqrt{-N}\right)^2 = -N$ and $\left(\sqrt{-N}\right)^3 = -N\sqrt{-N}$.

The exploration of the sequence was done in the high school, where we worked with 10 students (6 girls and 4 boys) of second grade for three and a half hours. The staging results provide evidence that in spite of the students insisting that *"square roots of negative numbers do not exist"*, our sequence induced them to operate with them to find the roots of some polynomials proposed in the activities, thus, accepting that the values obtained in some activities, in an operative way, are roots. The basic argument is that "they can be equal", that is, that when the values are substituted in the equation, the result is zero. The above considering that they did not prove all the values obtained in the equations, only some.

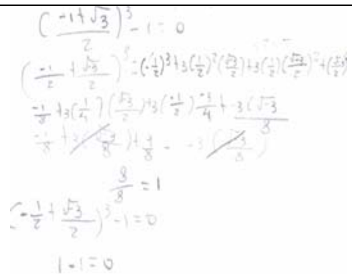
By example, in third phase (Activities 9, 10, 11 and 12) the student was expected to operate and accept the square roots of negative numbers as solutions to these equations. To motivate them, they were asked to verify if the roots found satisfy the equation. Here they will use the tools of the development of a binomial, factorization and the usual second grade formula. The aim of these activities is that on doing the factorizations of the polynomials in Activities 10, 11 and 12, the students will realize that they already have some of the roots, which they found in the previous activities. In the following table we show the description and interpretation of the students' production in the two teams reported here.

[6] For example, for the equation $0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, the first factor gives $x - 1 = 0$. The second, via an application of the quadratic formula, yields $x = \left(-1 \pm \sqrt{-3}\right)/2$. Finally, simply expand and confirm that $\left(\left(-1 \pm \sqrt{-3}\right)/2\right)^3 = 1$.

Team 1 – Activity 9

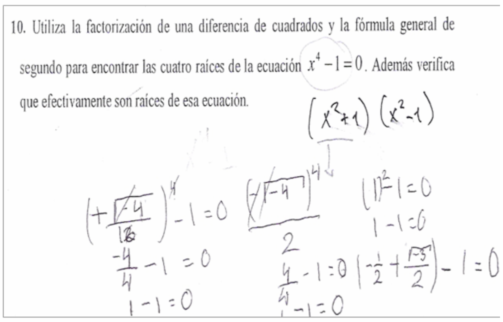


As they did in Activity 8, this team tries to simplify the solution obtained $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$



The reaction of these students was worse than in Activity 8 by getting this value and more so when they were asked to verify if it was the root of the cubic equation; it was not easy for them to do because of the calculations required, especially $\left(\frac{\sqrt{-a}}{b}\right)^n$

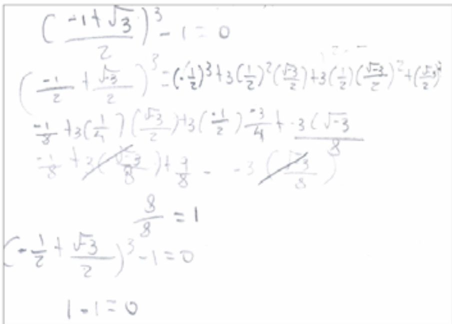
Team 1 – Activity 10



In Activity 10, we can see that in the two verifications the square root is eliminated directly with the exponent four and they raise the denominator to the square.

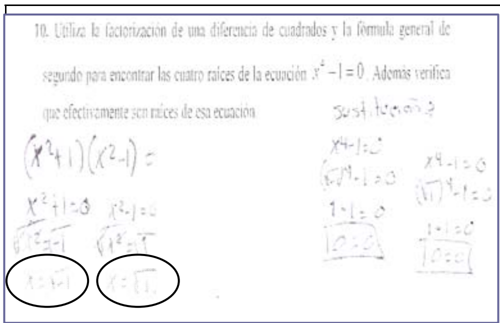
Team 2 – Activity 9

In this team there were no concrete arguments in terms of these activities (9 and 10), as to why the values found in the proposed equations are roots. The only thing they said was what they observed when they calculated them: *they are difficult to do, they have a long process and some are more difficult than others of lesser power.*



In this team only one member did the operations of **Activity 9** and explained to the rest the operations carried out, but s/he was unable to get the others to do the verification calculations.

Team 2 – Activity 9



The calculations obtained by one member of the team are shown, who argues their verification: *"It's the root to power 4* $\left(\sqrt{-1}\right)^4=\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ *and the equal roots are added together and you have double roots, you have four roots and they are two, this and this would be* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ *and this, too, this is eliminated, minus by minus gives plus, it would be one, minus one, would be zero equal to zero".*

Some team members only prove one root, the positive, and they verify if they are roots of the proposed equation. Lastly, they are asked if they are roots of this equation to which they respond, *"yes, because they can be equaled".*

REFERENCES

Bos, H.J.M.(1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Science 14,* 1-90.

Confrey, J. & Dennis, D. (1996). The Creation of Continuous Exponents: A Study of the Methods and Epistemology of John Wallis. *CBMS Issues in Mathematics Education 6,* 33-60.

Dunham, W. (1999). *Euler. The master of us all.* The Dolciani mathematical expositions N.22. EEUU: The Mathematical Association of America.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento (The processes of mathematical convention as knowledge generators). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 195-218.

Martínez-Sierra, G. (2008). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of eulerian analysis to the interpretation of the conceptual breaks present in its scholar structure. *Proceedings of the HPM 2008 conference, History and Pedagogy of Mathematics*.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. New York: Springer-Verlag.

Struik, D. J.(1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Difficultés des élèves du collégial à identifier l’hypothèse et la conclusion dans une proposition mathématique

Louise Maurice PhD en didactique des mathématiques
Cégep de Saint-Hyacinthe
lmaurice@cegepsth.qc.ca
www.reflets.ca

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de cerner plus précisément les difficultés qu’ont les étudiants en science, âgés de 18 et 19 ans à identifier dans une proposition mathématique l’hypothèse et la conclusion, au début d’un cours sur les méthodes de preuve. Une quarantaine d’élèves ont répondu à un questionnaire portant sur le sens qu’ils donnent aux termes « hypothèse » et « conclusion ». Par la suite, à partir de leurs réponses, je tenterai d’expliquer ces difficultés à la lumière des différents types de connaissances (Maurice, 2000), des registres sémiotiques (Duval, 1995) et des études liées aux preuves (Duval, 1991, 1993, 2007).

2. PROBLÉMATIQUE

Dans un article récent (Maurice, 2008), je décrivais certaines difficultés des élèves de niveau collégial lors de l’apprentissage des méthodes de preuves. Une des premières difficultés rencontrées est la différenciation de l’hypothèse de la conclusion. Cette distinction est importante tant avant de débuter une preuve qu’à l’intérieur même d’une preuve lorsque celle-ci fait appel à d’autres propositions où la distinction entre hypothèse et conclusion est sollicitée. Duval (2007, p. 150) souligne cette difficulté de distinction entre l’hypothèse et la conclusion, éléments ayant le « statut opératoire » d’une proposition.

La signification d’une proposition est déterminée par trois « composantes internes de signification » (Duval, 2007, p. 138) aussi appelées dimensions. La première est la dimension sémantique liée au contenu mathématique. La seconde est la dimension logique liée aux valeurs de vérité (proposition vraie ou fausse ou conjecture) et finalement la troisième est la dimension épistémologique. Cette dernière dimension reflète la compréhension qu’ont les élèves du statut de la proposition (évidente, incontestable, vraisemblable, incertaine, conjecturale, absurde, indécidable) (Duval, 1991, p. 254). La valeur épistémique change lorsque les élèves apprennent à écrire des preuves. Duval (1991, 1993, 2007) décrit deux niveaux de preuve soit l’argumentation axée sur le contenu des propositions et le raisonnement déductif basé sur leur statut opératoire.

La dimension logique des propositions de cette étude est celle qui est présentée par les manuels utilisés en classe. Une proposition mathématique contient généralement une hypothèse et une conclusion. L’hypothèse pourrait être définie comme une information (présente dans la proposition) sur laquelle est basée la démonstration et qui permet de passer à la conclusion. La conclusion est la nouvelle connaissance obtenue par un raisonnement à partir de l’hypothèse. Selon Solow (2005, pp. 2-3) et Rossi (2006, p. 47) une proposition est vraie ou fausse : la proposition est formée de deux phrases qui peuvent être vraies et / ou fausses (selon la table de vérité). Lors d'une preuve directe, la première phrase est généralement l'hypothèse (A) considérée comme vraie et la conclusion (B) est la seconde phrase dont on doit démontrer la véracité : ce cas peut se traduire par « A implique B ».

Pour étudier la dimension épistémologique ou encore l'épistémè des élèves sur le sens qu'ils donnent aux des termes « hypothèse » et « conclusion », la section suivante portera sur une description de leurs significations liées à des connaissances antérieures (Maurice, 2000, p. 238).

Le retour à des connaissances antérieures se fait par le biais du champ sémantique (Pierce, 1978; Vygotski, 1985; Davis et Vinner, 1986; Pimm, 1987; Duval, 1995). Le sens donné à une notion ou à un mot utilisé antérieurement (dans des cours précédents) peut assimiler une nouvelle notion ou idée quand celles-ci ne sont pas clairement définies (Maurice, 2000, p. 213). Une assimilation des termes « hypothèse » et « conclusion » en mathématiques est possible car ces termes ne sont généralement pas définis dans les manuels utilisés en enseignement. Or selon que l'on appartienne au domaine des sciences ou des mathématiques, le sens de ces termes change.

Blondin et Trân (1993) suggèrent une définition d'hypothèse dans le contexte de l'enseignement des sciences expérimentales lors de résolution de problèmes. L'hypothèse scientifique est caractérisée comme une explication provisoire, une idée ou conception. Elle propose une inférence ou plus précisément une inférence inductive. Une autre caractéristique de l'hypothèse est qu'elle permet de focaliser le champ d'investigation à partir des observations pertinentes en lien avec des concepts pouvant faire émerger la bonne « hypothèse ». L'hypothèse scientifique est suivie d'une déduction qui sera vérifiée expérimentalement. L'hypothèse, en sciences expérimentales, est une conclusion probable et doit être vérifiée, contrairement à l'hypothèse en mathématiques.

D'autres activités mathématiques soit la résolution de problèmes et la réponse à une question mathématique pourraient assimiler les idées d'hypothèse et de conclusion. Bair, Haesbroeck et Haesbroeck déterminent deux types de problèmes en se basant sur la définition de « problème » : « un problème est toute question à résoudre portant soit sur un résultat inconnu à trouver à partir de certaines données, soit sur la détermination de la méthode à suivre pour obtenir un résultat. » (Petit Robert, cité par Bair, Haesbroeck et Haesbroeck, 2000, p. 10). Le premier type de problème est un problème de détermination où l'élève répond à une question. Le second type de problème est un problème de décision qui est la démonstration d'un énoncé mathématique. La démarche de résolution de problèmes proposée par les auteurs est la même pour les deux types de problèmes. Cette démarche comporte trois étapes soit comprendre le problème, concevoir un plan et exécuter un plan. L'appropriation du problème fait partie de la première étape. L'objectif de cette étape est de dégager les données (hypothèses) et ce qui est à trouver (inconnues) ou à prouver (thèse ou conclusion) (Bair, Haesbroeck et Haesbroeck, 2000, p. 16). Lors de la résolution de problèmes, les données pourraient être associées à l'hypothèse et la réponse à la conclusion. Les problèmes à détermination, les plus maîtrisés par les élèves assimileraient les problèmes de décision.

3. MÉTHODE

Le but de la présente étude est de cerner plus précisément les difficultés des élèves à identifier l'hypothèse et la conclusion dans un énoncé mathématique et à les expliquer. Pour atteindre cet objectif, un questionnaire, avec trace écrite, a été soumis à quarante-quatre élèves, âgés de 18 et 19 ans, inscrits au cours sur les méthodes de preuve ». Ce dernier a été rempli avant de débuter le cours de méthodes de preuve, c'est-à-dire à la première heure de la première rencontre avec ces élèves. Ceux-ci étudient à un niveau pré-universitaire (13ième année d'étude) dans la concentration de sciences appliquées (et non pas de sciences de la santé). Ces élèves suivant le cours de méthodes de preuve ont déjà à leur actif d'autres cours de science, dont des cours de physique, de biologie et de chimie. Ils sont sensibilisés à la notion d'hypothèse et de conclusion via le registre des sciences. Les étudiants du cours de méthodes de preuve ont vu quelques énoncés de théorèmes mathématiques sans nécessairement en faire la preuve. Ce cours tente de remédier à cette lacune avant que les élèves s'acheminent à l'université.

4. RÉSULTATS

Dans ce texte, je présenterai qu'une partie des résultats en lien avec les réponses des élèves à trois interrogations du questionnaire. La tâche était d'identifier les termes métathéoriques (Richard, 2004, p. 19) que sont l'hypothèse et la conclusion dans des propositions mathématiques écrites dans différents registres (Duval, 1995, p. 5l) soit algébrique et géométrique. À la dernière question (tirée de Nelsen, 1993, p. 4), les élèves devaient déterminer l'hypothèse et la conclusion à partir de deux figures et de la précision « théorème de Pythagore » située au-dessus des figures. Les réponses des élèves ont été catégorisées par thème et par la suite résumées quantitativement. Les catégories thématiques ne sont pas exhaustives. Un élève peut faire partie de plus d'une catégorie.

5. DISCUSSION

La discussion portera sur l'importance relative du registre des sciences, sur la présence éventuelle du registre de résolution de problèmes, sur la coordination des registres linguistique et mathématique, sur le registre géométrique et la valeur épistémique, sur le registre mathématique sans les autres registres lorsque les élèves déterminent l'hypothèse et la conclusion dans une proposition mathématique.

5.1 Importance relative du registre des sciences

Les élèves puisent dans la terminologie du registre des sciences lorsqu'ils répondent aux questions sur l'identification des termes métathéoriques. Si l'on regroupe les catégories thématiques de la première proposition en lien avec les sciences (« conclusion, confirmation et vérification de l'hypothèse » et « répétition partielle ou complète de l'hypothèse dans la conclusion et la présence de n=84 dans les deux termes métathéoriques »), 25 % des élèves auraient été influencés dans leur choix par le domaine des sciences. Ce pourcentage diminue à 14 % (« Répétition de l'équation complète et/ou de n(3n-2) dans les deux termes métathéoriques ») dans le cas de la deuxième proposition et à 2 % (« Répétition de l'hypothèse dans la conclusion ») dans le cas de la troisième proposition.

5.2 Présence éventuelle du registre de résolution de problèmes

Les résultats liés à la catégorie thématique « hypothèse-question, conclusion-réponse ou conclusion-résultat » pourraient être interprétés de trois façons différentes. Cette catégorie est présente dans les réponses des élèves aux différentes questions.

Premièrement, des élèves seraient sous l'effet du registre des sciences où l'hypothèse est une question de recherche et la conclusion est la réponse à cette question. Dans le cas des trois propositions, respectivement 9 %, 9 % et 5 % des élèves reformulent l'énoncé mathématique sous forme de question.

La deuxième interprétation serait que certains des élèves associent les termes métathéoriques à des problèmes de détermination (Bair, Haesbroeck et Haesbroeck, 2000, p. 10), où il s'agit de repérer les données qui forment l'hypothèse et la réponse à la question qui constitue la conclusion ou le résultat. Ces élèves feraient appel à leurs connaissances antérieures (Maurice, 2000, p. 238) en résolution de problèmes mathématiques avec lesquelles ils sont familiers.

La troisième explication est que les élèves pourraient superposer les deux manières de concevoir l'hypothèse et la conclusion; ils ne feraient pas la distinction entre les deux registres précédents.

5.3 Coordination des registres linguistique et mathématique

Les questions portant sur les trois premières propositions sont exprimées dans la langue naturelle des élèves et avec la terminologie mathématique contrairement à la dernière « question » où le registre linguistique est absent, sauf pour l'expression « Théorème de Pythagore ».

Dans la première proposition, le verbe sert à scinder l'hypothèse et la conclusion chez 30 % des élèves. La deuxième proposition est sans verbe. La virgule agit comme séparateur pour 5 % des élèves contre 25 % qui ont choisi l'égalité pour démarquer l'hypothèse de la conclusion. Une proportion de 23 % des élèves ont séparé l'équation mathématique (prise comme hypothèse) du reste de la proposition, écrite linguistiquement. Suite à ces constatations, la coordination des registres mathématique et linguistique pour identifier les termes métathéoriques dans une proposition mathématique semblerait être basée sur la présence de verbes, de virgules, d'équations (à prouver) et de valeur numérique (à trouver) qui serviraient de démarqueur. Quelquefois, le registre linguistique (verbe et virgule) semble prédominer sur registre mathématique (équation, égalité et valeur numérique) et inversement.

5.4 Registre géométrique et valeur épistémique

La dernière proposition « sans énoncé » est constituée de deux figures avec la précision « théorème de Pythagore » au-dessus des figures. Dans cette situation, le registre linguistique est absent et ne peut pas interférer avec le registre géométrique. Les élèves se sont basés sur ce qu'ils voyaient pour identifier l'hypothèse et la conclusion. Les cinq catégories thématiques montrent une progression dans la complexité des termes métathéoriques ou dans la capacité à intégrer les connaissances géométriques. Le degré le plus simple est d’associer une des figures à l’hypothèse et l’autre à la conclusion : une proportion de 14 % des élèves ont adopté cette façon de faire. Au deuxième niveau, la visualisation leur permet de comparer les figures et d’observer des éléments semblables sans les identifier pour 11 % des élèves. Au troisième niveau, la visualisation autorise 20 % des élèves à comparer les figures et à identifier les êtres géométriques. Au quatrième degré, les élèves (34 %) tentent d’intégrer, dans la conclusion, le théorème de Pythagore sous forme linguistique ou algébrique. Au dernier niveau, 7 % des élèves ont écrit la preuve en faisant le lien entre les deux figures et en identifiant les côtés des triangles rectangles et des carrés.

Cette progression d’énoncés devenant de plus en plus complexes est-elle liée à valeur épistémique (Duval, 2007, p. 150) que les élèves accordent à leur proposition (hypothèse et conclusion)? Au premier degré, la valeur épistémique serait incontestable, car mentalement, l’élève repositionne les objets géométriques d’une autre manière. L’élève pourrait une confiance totale en la véracité de sa proposition. Au deuxième niveau, l’élève porte un jugement sur les composantes (sans les nommer) des deux figures qu’il compare : elles sont pareilles. Le risque que l’énoncé soit faux est minime et sa valeur épistémique serait assurément évidente. Au troisième degré, les élèves comparent les aires et identifient les objets géométriques. Les élèves puisent donc dans leurs connaissances antérieures afin de nommer les objets géométriques. Le risque de se tromper en utilisant le concept d’aire étant faible, ils attribueraient à leur proposition une valeur épistémique de vraisemblance. Le quatrième niveau est celui où les élèves intègrent le théorème de Pythagore soit dans la conclusion seulement (34 %), soit dans l’hypothèse seulement (20 %) ou à la fois dans deux termes métathéoriques (14 %). Généralement, les élèves n’identifient pas les côtés de l’angle droit et l’hypoténuse sur les figures, même s’ils énoncent le théorème de Pythagore. Cette lacune et les diverses façons d’inclure le théorème de Pythagore indiqueraient que la confiance des élèves dans leur proposition varie selon la valeur épistémique qu’ils y associent. Au dernier niveau, les élèves font la preuve du théorème de Pythagore et la valeur épistémique de leur proposition devient incontestable.

5.5 Registre mathématique sans les autres registres

Une proportion de 9 % des élèves ont filtré les mathématiques dans la première proposition et 2 % dans la deuxième proposition. Ces résultats s’expliqueraient par certaines habitudes prises par les élèves quand ils « font » des mathématiques. Premièrement, dans le contexte de résolution de problèmes, les élèves extraient les mathématiques du texte. Deuxièmement, ils ont tendance à écrire un développement de solution mathématique sans le commenter par des explications linguistiques. La dernière façon de faire arrive lorsque l’élève « lit » un texte qui contient des symboles mathématiques; il lit les symboles mathématiques sans lire les « mots » qui encadrent les symboles. Ces habitudes pourraient éventuellement justifier l’évacuation du registre linguistique de leur hypothèse et de leur conclusion au profit des expressions mathématiques.

6. CONCLUSION

Cette étude sur l’identification de l’hypothèse et la conclusion à partir de propositions montre que le choix des élèves est basé sur les registres sémiotiques qu’ils connaissent : linguistique, géométrique, algébrique et scientifique. Il apparaît aussi important de comprendre comment les élèves coordonnent ces différents registres.

L’influence réciproque de la valeur épistémique accordée par les élèves à une proposition sur l’idée qu’ils se font de l’hypothèse et de la conclusion de cette même proposition pourrait faire l’objet d’études ultérieures.

BIBLIOGRAPHIE

Bair Jacques, Haesbroeck, Gentiane et Haesbroeck, Jean-Jacques (2000) *Formation mathématiques par la résolution de problèmes*, De Boeck Université, Bruxelles.

Blondin André et Trân Khanh-Thanh (1993) *La formulation de l'hypothèse en sciences expérimentales*, Document produit pour la C.E.C.M., Montréal.

Davis, Robert B. et Vinner, Shlomo (1986) 'The Notion of Limit : Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages', *Journal of Mathematical Behavior*, 5, pp. 281-303.

Duval, Raymond (1991) 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 233-261.

Duval, Raymond (1993) 'Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive?' *Petit x*, 31, pp. 37-61.

Duval, Raymond (1995) *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Neûchatel, Suisse.

Duval, Raymond (2007) *Cognitive functioning and understanding of mathematical processes of proof*, Ed Paolo Boero, Sense Publishers, Rotterdam / Taipei.

Maurice, Louise (2000) *Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir zéro et l'infini*. Thèse de doctorat, Université Laval, Canada.

Maurice, Louise (2008) *Reflexions on Teaching Methods of Proof to College Students and Students' Difficulties*, ICME 11 (International Congress on Mathematical Education), Monterrey, Mexique.

Nelsen, Roger B. (1993) *Proofs Without Words*, The Mathematical Association of America, USA.

Pierce, Charles S. (1978) *Écrits sur le signe*, Éditions du seuil, Paris.

Pimm, David (1987) *Speaking Mathematically, Communication in Mathematicis Classrooms*, Routledge & Kegan Paul Ltd, London.

Richard, Philippe R. (2004) 'Étude fonctionelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie', *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 30, no. 2, p. 379-409.

Rossi, Richard, J. (2006) *Theorems, Corollaries, Lemmas, and Methods of Proof*, John Wiley & Sons, Inc. USA.

Solow, Daniel (2005) *How to Read and Do Proofs*. Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc. USA

Vygotski, Lev Semionovitch (1985) *Pensée et langage*, Ed. Sociale, Paris.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Real world problems in the classroom: Functions and calculus with spreadsheets

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
alerosas@ipn.mx
CICATA-IPN, México
Leticia del Rocío Pardo Mota
rociopardo2000@yahoo.com.mx
SEV, México

Résumé

Pendant beaucoup d'années l'utilisation des calculatrices et des ordinateurs a été encouragent dans beaucoup d'écoles en le premier monde, bien que dans le système éducatif mexicain elle n'ait pas été les explorent dans un éventail. L'utilisation des bilans est un inconnu d'outil presque pour la plupart des professeurs dans l'école de base et le lycée ; même au niveau d'université dans beaucoup de secteurs des bilans ne sont pas utilisés. Dans ce travail nous présentons une série d'activités qui impliquent la solution des problèmes de monde réel en employant les avantages des bilans. Les étudiants résolvent plus les problèmes appliquant des fonctions exponentielles, des dérivés numériques et l'intégration numérique.

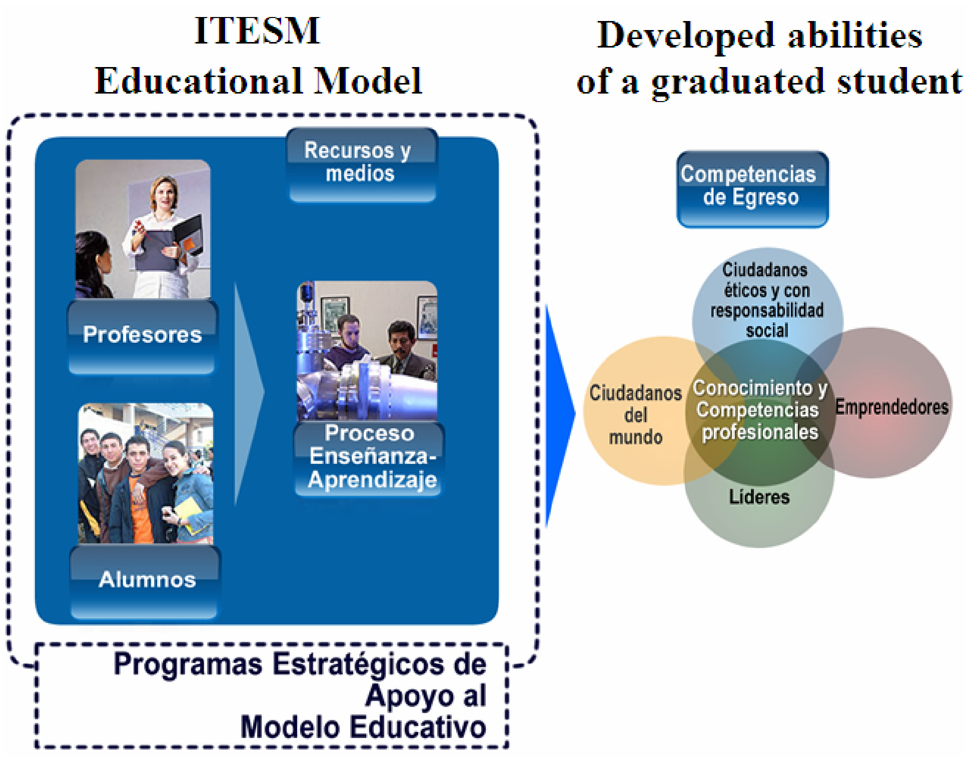
INTRODUCTION

The class Mathematics I (Ma1012) contains basic functions, polynomial, trigonometric, rational and exponential functions, limits and derivatives. Every student in university programs like psychology, international relations, economics, management and marketing have to course this Ma1012. The main problem is student's attitude, why a psychologist should learn mathematics? Why a manager must learn derivatives?

But, is this the real problem? As far as our experience shows the answer is NO, and the problem seems to be a lack of real world experiences. Students think that mathematics are only useful in the classroom, but in the job mathematics are useless. Our challenge was to design classroom activities based on spreadsheets use.

DESIGN OF ACTIVITIES

In Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) in Mexico, teachers are encourage to apply the Problem Solving and Project Based Learning in their class (ITESM, 2006). The objective is to present a real world situation to the class, students can work individually or in teams (many times the activity needs the collaborative work approach). Then students have to find relations between mathematics and the problem they need to solve.



(ITESM, 2009)

SOME EXAMPLES

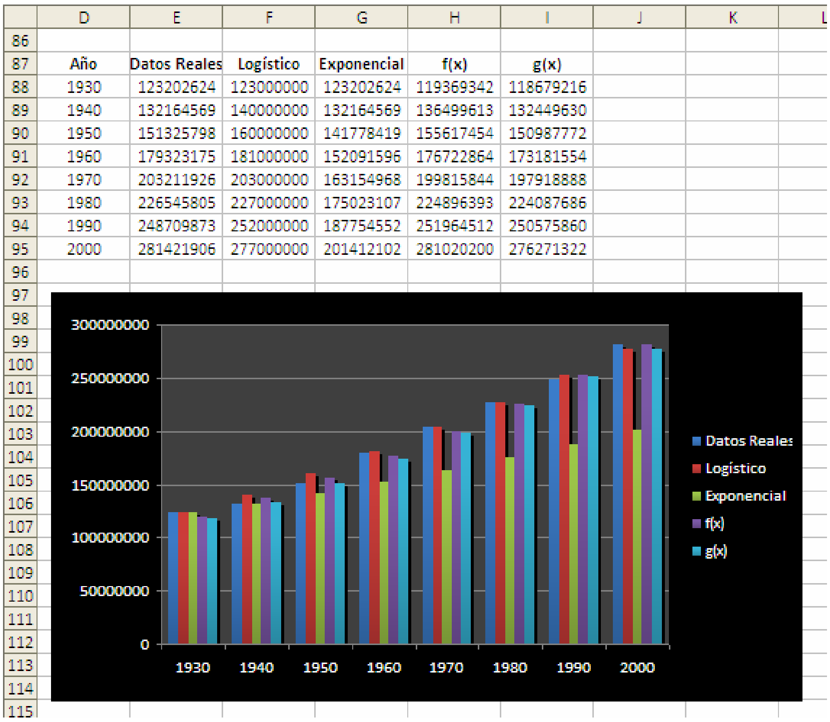
We have developed many activities involving spreadsheets use, some of them are

- Mathematical Models: In this activity students have to find a least squares linear model to fit a set of population data. Students must compare the official population data and the approximated values given by the linear model. They have to explain why the model fits or not the data.
- Population Models: In this activity students are given four different models exponential, logistic, quadratic and cubic. They have to graph the four models and find which one fits better the official data.
- New Car Buying Plan: Students must find the best credit plan for buying a new car. They have to compare simple interest, compound interest and annuities. Every choice must be explained.
- Rate of change of Oil Exportations: In this activity, derivative is presented as a needed way to approximate the rate of change of oil exportations to calculate the total amount of US dollars earned. The rate of change is necessary because oil price is constantly changing and produces variations in the total sell.
- Total Oil Exported: Students are introduced to the meaning of definite integral although they will study integral calculus in the next course. By using numerical integration and real data they have to find the total amount of oil exported.

SOME ANSWERS

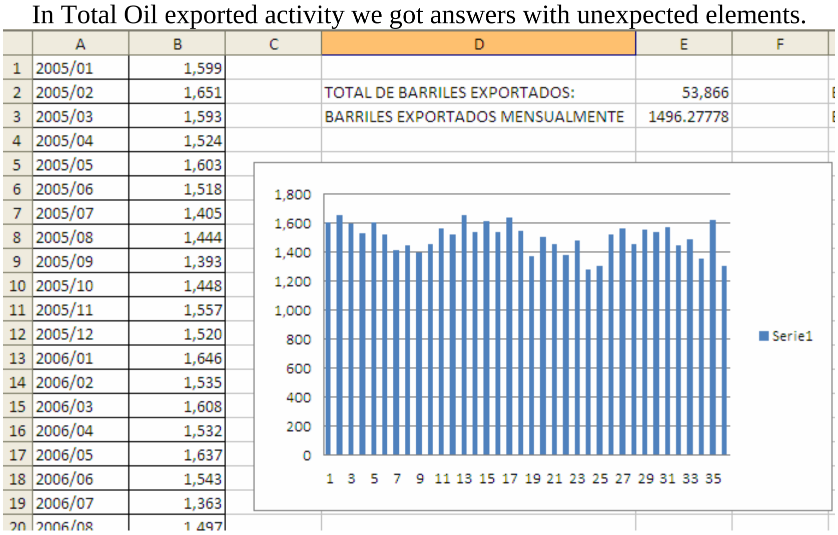
We present a few images showing some answers provided by the students.

In Population Models activity many students made graphs of every model in different screens, but some students compared the differences with one graph or by calculating percentage errors.



	Año	Datos Reales	Logístico	Exponencial	f(x)	g(x)
88	1930	123202624	123000000	123202624	119369342	118679216
89	1940	132164569	140000000	132164569	136499613	132449630
90	1950	151325798	160000000	141778419	155617454	150987772
91	1960	179323175	181000000	152091596	176722864	173181554
92	1970	203211926	203000000	163154968	199815844	197918888
93	1980	226545805	227000000	175023107	224896393	224087686
94	1990	248709873	252000000	187754552	251964512	250575860
95	2000	281421906	277000000	201412102	281020200	276271322

In Total Oil exported activity we got answers with unexpected elements.



	A	B
1	2005/01	1,599
2	2005/02	1,651
3	2005/03	1,593
4	2005/04	1,524
5	2005/05	1,603
6	2005/06	1,518
7	2005/07	1,405
8	2005/08	1,444
9	2005/09	1,393
10	2005/10	1,448
11	2005/11	1,557
12	2005/12	1,520
13	2006/01	1,646
14	2006/02	1,535
15	2006/03	1,608
16	2006/04	1,532
17	2006/05	1,637
18	2006/06	1,543
19	2006/07	1,363
20	2006/08	1,497

	D	E
2	TOTAL DE BARRILES EXPORTADOS:	53,866
3	BARRILES EXPORTADOS MENSUALMENTE	1496.27778

CONCLUSIONS

The results we have observed are

1. Students are more interested in applying mathematics when they need to solve a real world problem.
2. Students find necessary to use mathematics to predict some behaviors.
3. Even those students that did not know how to use a spreadsheet find interesting the class with this technological tool.
4. Creativity is an unexpected partner of the solutions. Most students produce and justify they results in beautiful presentations with colors, fonts, graphs and pictures.
5. Students’ attitude to mathematics change in a positive way.

These results are important for us because they let us to justify and promote the use of spreadsheets in the classroom.

BIBLIOGRAPHY

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM). (2006). *Cómo forma y educa el Tecnológico de Monterrey a sus alumnos (The way that Monterrey’s Technologic teaches and raised its students)*. Monterrey, México.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM). (2009). Main page of the ITESM recovered from http://www.itesm.edu/wps/portal?WCM_GLOBAL_CONTEXT=/wps/wcm/connect/ITESMv2/Tecnol%C3%B3gico+de+Monterrey/Con%C3%B3cenos/Modelo+educativo/ on January 15, 2009.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Extending the Edges of the classroom: Students and cell phones

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
alerosas@ipn.mx
CICATA-IPN, México
Leticia del Rocío Pardo Mota
rociopardo2000@yahoo.com.mx
SEV, México

Résumé

Depuis le milieu des années 90 où les téléphones portables ont restons en contact avec toutes les personnes qui doivent agir l'un sur l'autre avec nous dans chaque moment du jour à n'importe quel endroit. Mais la nouvelle question est : que se produisent quand les étudiants utilisent le téléphone portable dans la salle de classe ? Elle semble être que nous avons un nouvel ensemble de distractions pour les étudiants. Dans ce travail nous donnons quelques résultats d'un projet où nous laissons des étudiants utiliser des téléphones portables dans la salle de classe seulement s'ils l'emploient comme outil. Ce nouvel outil a laissé des étudiants être dans un tutorship permanent parce qu'ils peuvent lire ou observer des vidéos au sujet de leurs notes de classe en dehors employer un cahier ou un dessus de recouvrement. Les applications suivantes nous laissent supposer que des téléphones portables peuvent être utilisés comme outil puissant pour motiver des étudiants.

INTRODUCTION

When cell phones first appear in the classrooms, they were like a toy for students. Only a few kids had one because they were expensive and to make a phone call was expensive too. After some years technology produced better and cheaper telephones that were so highly popularized that almost every student has one.

What is happening in the classroom? We have a new problem. Students always get driven to distraction, they talk each other, they play, they write anything… And now, they send messages, they call someone else, they take pictures, they exchange music, pictures, etc.

Our challenge is to find new ways of teaching so that students have the opportunity of learn and apply their knowledge about new technologies in the school.

WHAT IS MOBILE LEARNING?

We are currently in a global and dynamical economy, where the access to information and communications is critical. Every people have had to adapt to new technological environments in his office, his home, his car or the classroom. The new technologies are getting involved in every aspect of our lives.

We need an evolution of the classroom; it can not be just as it has been for centuries. Teachers, education officers, students and parents need to take advantage of technology and information systems. After this we define

Mobile Learning:

> It is the convergence of traditional education in classrooms and on line education models with the use of wireless and mobile technology, whose goal is to support new alternatives of interaction and access to didactic materials designed for the student. (ITESM, 2008)

WHAT IS THE PROJECT?

Our project’s main objective is to let students to keep in contact with mathematics, physics, etc., even when they are not in the school.

Some of the advantages of mobile learning are:

- More flexibility in didactic materials access because students can use their cell phones at any time and any place they want for downloading their class information.
- Personal learning experiences because every student will study in their own speed and will.
- Significant learning because with the use of specially designed virtual environments students get involved in real world mathematical models.
- Students have their own ideas about using technology as a learning tool, and they think it is more funny and interesting.

The Mobile Learning project has divided in many different little projects; in this work we present some results about one of those sub-projects called “Virtual Tutorship”.

Virtual Tutorship is the extension of teachers work, from the classroom to the house, the streets, to everywhere. The project consists in the design of software animations and videos that explain the use of some specific software or that explain some particular mathematical theme from the school.

METHODOLOGY

The process has the following steps:

1. The teacher selects a specific theme, linear equations for example.

2. Specific software is chosen to be used in an animation or a video (didactic material).
3. The didactic material is produced.
4. The didactic material is tested and validated by other teachers.
5. The videos are uploaded to the internet server of ITESM.
6. Students can download the didactic material to their cell phones.

One of the objectives of the project is to get students involved in the design and production of didactic material for them and other students, so students are encourage participating in steps 1, 2 and 3.

TWO EXAMPLES

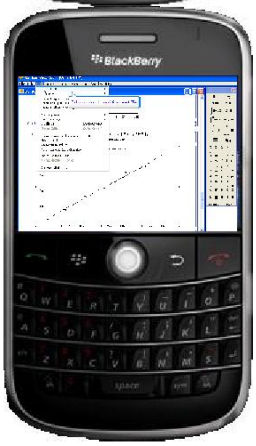
We have already produced about ten video for our Virtual Tutorship that cover some themes like graphing, using spreadsheets, doing symbolic calculations with algebra, solving equations, using derivatives and integrals, and mathematical modeling.

In the first example we developed a video explaining the use of a graphing program (graphmatica).

The video shows the correct way to type a function, a voice explains the steps to follow while in the image we can see the action.

This video last about 10 minutes.

After the video, students receive their homework in a SMS message and they will report their graphs in the web platform we use (Blackboard)



In the second example we developed a video explaining the use of Mathematica® for producing models.

The video shows how to use Mathematica® capabilities to assign values and store data in variables and arrays. It is shown how to fit a list of data points to generate a line.

This video last about 8 minutes.

After the video, students receive their homework in an email message and they will report their graphs in the web platform we use (Blackboard).

CONCLUSION

Virtual Tutorship started by September 2008 and after six months we have some promising results:

1. Students have actively participated designing and programming their own animations.
2. Those teachers who have tested the animations were amazed by the many possibilities for producing didactic materials.
3. Students like the way the animations let them to study at any place and any time.
4. Some teachers are trying to develop multiple choice exams to be solved with the cell phone and reported as a message.

We hope that after one year, the global evaluation of the projects will be positive.

BIBLIOGRAPHY

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM). (2008). *Aprendizaje móvil* (*Mobile Learning*). Non published internal document.

® Grupo Iusacell. México.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

OUTILS POUR ANALYSER LA CLASSE DE MATHÉMATIQUE

Yuly Marsela Vanegas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá). Vicenç Font y Joaquin Giménez (Universtat de Barcelona)

Abstract

In this presentation, it’s presented an integrative approach of two different methodologies of analysis for mathematics and science classrooms : so called Mortimer & Scott model for the analysis of interactions and meaning production and the ontosemiotic model for mathematic knowledge and instruction . The context for our reflection is a class in which the content was units of measurment.

1.- PROBLÉMATIQUE.

On considère l‘analyse didactique de processus d’étude comme un ensemble de démarches cherchant à décrire, expliquer et évaluer les divers phénomènes qui se produisent dans la classe de mathématique. Nous entendons par « processus d'étude mathématique » un ensemble de configurations et de trajectoires (Godino, Batanero & Font 2007) où sont articulés les rôles du professeur et de l'élève, les connaissances attendues, les signifiés personnels et les ressources associées. On interprète le processus comme l’analyse de pratiques actuelles (de lecture et production de textes), et discursives (réflexion sur la pratique éducative) interpreté comme mathématique par les experts. Nous analysons les tâches données aux élèves et leur déroulement effectif en classe dans la formation des enseignants eux-mêmes en rapport avec la nécessité de caractériser leurs compétences professionnelles. Etant donnée l'hétérogénéité des propositions méthodologiques d'analyse didactique qui ont été développées, il est pertinent d'identifier des différences et des similitudes entre elles (Coll et Sánchez, 2008) de sorte qu'on permette placer des modèles d’analyse par rapport aux autres. C’est dans ce sens comparatif qu’à notre travail se présentent les avantages des outils d'analyse de deux modèles: l'analyse ontosemiotique de la connaissance et l'instruction mathématique (EOS) et les propositions de Scott et de Mortimer pour l'analyse des interactions et la production de signifiés (SM). Dans cette présentation, on essaie une proposition integratrice des deux modèles et ses bénéfices.

La proposition de Scott - Mortimer (2006), appartient à la ligne de recherche de l'enseignement des sciences. Elle cherche changer l'attention des études pointées sur la compréhension individuelle des étudiants à propos des phénomènes spécifiques, vers des études centrées sur l’analyse des signifiés dans le contexte social de la classe. Pour faire l’analyse d’une classe dans ce modèle on se centre sur trois aspects: (a) reconnaître les foyers (propos et contenu) de l'enseignement, (b) identifier le point de vue (approche) communicatif, et (c) l’analyse des actions (patrons d'interaction et formes d'intervention). Par ailleurs, l’analyse didactique d’EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), se situe dans une vision pragmatique, sémiotique et anthropologique en didactique des mathématiques. Ce modèle, se propose d’avoir cinq niveaux d’analyse: 1) Analyse des types de problèmes et systèmes de pratiques. 2) Analyse des configurations, objets et processus mathématiques. 3) Analyse des trajectoires et les interactions didactiques. 4) Identification du système de normes et metanormes. 5) Évaluation de “l'idoineité didactique” du processus d'étude. Les quatre premiers niveaux d'analyse ils sont sont considérés comme des outils pour une didactique descriptive et explicative tant qu'ils servent à comprendre et à répondre à la question « qu'est-ce qui se produit et pourquoi? ». Le niveau 5 s'occupe d'une analyse de valeur.

On présente ici une partie d'une plus large étude (Vanegas 2008) dans laquelle les deux modèles sont analysés et des éléments communs et non communs sont constatés. On s’applique d’abord les outils d'analyse des deux modèles à différents épisodes d'une classe, de tel façon qu’on puisse établir des intégrations méthodologiques des deux modèles. Dans un troisième moment, on discute sur le schéma et l’analyse avec un groupe de professeurs-aprenants chercheurs, à l’interieur d’un projet de formation. On montre ici une partie de l’analyse de seulement l’un des épisodes par des raisons d'espace.

2. METHODOLOGIE

Pour faire le travail comparatif des analyses, on a choisi une classe qui appartient à une séquence de travail sur la mésure. La classe est conduite par un professeur avec 25 années d'expérience, et il s'agit de d'une des premières classes du cours. Dans la classe il y a 25 étudiants de 12 -13 années dans la province de Barcelone et la classe dure 45 minutes. L'intention générale du séquance cherche d’éloigner les étudiants de la conception usuelle que mesurer est calculer. Les activités antérieures de la séquence se concentrent, sur l'identification d'unités arbitraires traditionnelles non décimales associées au corps humain (des empans, des coudes, etc.). Pendant la séance précédente, on avait travaillé sur les mesures anthropométriques et on avait montré l'utilisation des “canes” comme mesure d'accord conventionnel. On était arrivé à la conclusion que dans des lieux différents de la région (où il y a l'école) on utilisait des unités avec taille différente, de manière semblable à ce qui arrivait avec les empans des personnes.

On comence la classe en rapellant le travail effectué sur l'utilisation de mesures conventionnelles de type local. On énonce les données numériques qui indiquent la taille de ce qui est “cane” dans divers lieux, et on souligne les différences suivant le lieu où ils étaient utilisés. Voici le miniepisode utilisée pour exemplifier nos analyses et essayer l’intégration des modèles.

> (X) Par conséquent voyez que la cane de Montpeller est un virgule neuf. Il veut dire presque…?
> (E) (A coeur) Deux mètres
> (X) – Presque deux mètres ! Il était une cana mrès large . Plus ou moins comme cela… Vous savez que la hauteur d’une personne est à peu près 2 m avec la main levée, où la hauteur d’un joueur de basquetball.

Le professeur commence à souligner l'information numérique, changeant le ton de voix, et obtient que tous les étudiants le surveillent avec attention. Quand il dit que la “cana” est très longue, le professeur fait le geste avec les bras et la main, en indiquant une hauteur supérieure à celle de lui. Les activités des séances suivantes se rapportent au désir européen d'arriver au mètre, comme unité de mesure commune pour tous.

Après cela, nous identifions les catégories qui utilise chacun des modèles d'análయse. On compare les résultats par un instrument-table intégratrice utilisé ad hoc avec les catégories suivantes: connaissance et la construction de signifiés, l'action des étudiants, l'interaction dans la salle de classe, et les règles sociales. Depuis EOS, on cherche les pratiques, les objets, les processus, les formes de comportement (rôle) du professeur, les configurations didactiques, les conflits et les normes. Depuis le point de vue de SM on montre les propos d'enseignement, le contenu, le point de vue, les patrons d'interaction et les formes d'intervention. Les rangs de l’instrument correspondent aux groupements de lignes de la transcription qu'indiquent différents moments de l'épisode où il est souligné des aspects différents en rapport avec les buts de la classe. On utilise des colonnes ombragées pour indiquer les aspects qui se caractérisent depuis l'EOS et celles non ombragées ceux qui se caractérisent depuis le modèle Scott et de Mortimer. Dans le tableau (figure 1) on va montrer les catégories d'analyse intégratrice correspondant.

3. RÉSULTATS DES ANALYSES.

À suivre, on exprime l’usage des outils de recherche apliquées à l’episode choisi. Sur les connaissances, on montre les pratiques mathématiques du professeur (PP1) et pratiques mathématiques de l'étudiant (PE1) (Font et Planas, 2008). On a trouvé un langage verbal oral (L1), et verbal écrit (L2). On décrivent objets comme l'approche (M1) et la comparaison (M2). Les procéssus constatés sont de d'algoritmisation (AL), réprésentation (Re), et matérialisation (Ma). On voit le langage explicatif utilisée (Ex).

Conaissances				Professeurs		Étudiants		Intéractions				Règles sociales	
Pratiques	Objets	Procéssus	Lan-gage	Fonc-tion du profe	Formes intérven-tion	Fonction de l’étudi-ant		Configu-ration di-dactique	Conflits	Patron interac-tifs	Foyer commu-nicatif	Nor-mes	Propos d’ enseigne-ment
PP3 PP5 PE3	M1, L1, L2	AL Re MA	Ex	Re Co	FS SC	Me Fo		Magistral	CE12 CE31	IRE	Intéractif Autoritaire	M1 L1, L2 N2, N5, N10, N11	Développer l'histoire scientifique *Proposer un problème *Supporter internalisa-tion

Figure 1. Table comparative des outils d’analyse à partir des modèles utilisées.

À propos des intéractions, on trouve un conflit epistémique situationnel (CE12), et aussi un conflit linguistique (C31). Le patron d'interaction est de début-réponse-évaluation (IRE). Les formes d’intervention sont : donner forme aux signifiés (FS) et présenter signifiés clé (SC). Les fonctions du professeur sont la régulation (RE), et constatation (CO), et celles des étudiants sont la mémoire (Me) et la formulation (Fo). À propos des normes, il y a des éléments relatifs au « quotidien » qui nous aident à comprendre mieux la mathématique et établir des relations (N2). Le professeur a un rôle déterminant au dans l’episode (N5). Il est important considérer que les moments que le professeur dicte des informations, les elèves doivent être attentifs (N10). Les étudiants répondent les questions et les observations du professeur (N11).

4. REMARQUES FINALES

À partir des discussions après cette analyse, nous pouvons reconnaître que dans les tous les épisodes analysés, il est montré comme les catégories du contenu du discours de la classe en SM, s'étendent et détaillent avec les catégories d'analyse proposées par EOS pour la caractérisation de la construction de signifiés. Dans les épisodes analysés, on observe que les propos d'enseignement (SM) sont associés à des normes (EOS), bien que celles-ci ne soient pas toujours d'un type déterminé.

A partir des analyses dans le travail plus large, on peu conclure que la diversité d'outils proposés dans chacun des modèles reflète la complexité des analyses de processus d'étude qui va aider mieux à comprendre le travail scolaire. Cette perception sert au professeur aprenant-chercheur qui effectue l'analyse dans un groupe de recherche, puisqu'il peut reconnaître des éléments qui l'étaient passée inaperçus.

Il est important d'avoir le regard global de la classe, pour pouvoir spécifier les possibilités des outils d'analyse de chaque modèle. L'application conjointe des deux systèmes de catégories permet de développer une analyse en profondeur de ce qui arrive aux classes. En plus, faire cela avec un groupe de recehrche, offre des possibilités à fiabiliser les commentaires qualitatives. L'instrument méthodologique comparatif qui a été utilisé pour comparer les éléments du processus dans les deux modèles, permet de caractériser le type de configuration didactique et la complexité des processus d’instruction.

Une caractéristique intégratrice des deux modèles, qui est perçue par l'instrument utilisé, est qu'on peut faire des lectures horizontales comme verticales, suivant ce qu'on veut décrire ou étudier. Horizontalement la table permet de voir comment c'est la structure sémantique des épisodes, tandis que la verticale permet de voir la cronogenese (développement temporaire). Les catégories des buts d'enseignement en SM on constate qu'ils s'étendent et détaillent avec les catégories d'analyse proposées par EOS dans le sens qui sont caractérisées au moyen de normes diverses de type épistémique, interactif et affectif, et ils sont mis en rapport avec la configuration correspondante. Ce qui est normatif est plus vaste, bien que les buts d'enseignement caractérise plus ce qui est intentionnel du processus.

Les catégories que considèrent les patrons d'interaction dans le modèle de SM permettent de caractériser mieux comment se produit l'interaction que le modèle EOS. Toutefois, l'application des outils nous permet de conjecturer que peut-être une reformulation des appelés patrons d'interaction didactique, compris comme régularités dans des trajectoires didactiques, pourrait arriver à inclure les patrons de SM comme cas particulier. Les configurations d’enseignement en EOS ont un statut équivalent aux formes d'intervention de SM. Toutefois, sa caractérisation pourrait plus être enrichie dans l'analyse EOS par l'analyse des idoineités, bien qu'elle n'ait pas été effectué dans notre étude empirique.

References

Coll, C. y Sánchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346*, 15-32

Godino, J. D.; Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*, 127-135.

Font, V. y Planas, N. (2008). Mathematical practices, semiotic conflicts, and sociomathematical norms. Proceedings of the 32nd PME Conference. Morelia, México.

Sccott, P.; Mortimer, E & Aguilar, O. (2006) The Tension Between Authoritative and Dialogic Discourse: A Fundamental Characteristic of Meaning Making Interactions in High School Science Lessons. Wiley InterScience [En línea]. En: <http://www.interscience.wiley.com>