Actes
Proceedings

Université de Montréal
26 – 31 Juillet 2009-06-28

À la mémoire de Claude Janvier
(1940-1998)

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Pour une contextualisation de la mathématique des 14-17.

Claude Janvier (1940-1998)

Conférence prononcée le 27 juillet 1986.
Lecture given on July 27th 1986 .
CIEAEM 38 – Southampton England

Remarque préliminaire

C'est avec plaisir que j'ai accepté l'invitation des organisateurs de cette rencontre pour vous entretenir de mes réflexions sur le thème de la mathématique des 14-17. Mon plaisir est d'autant plus grand que c'est en Angleterre il y a maintenant dix ans que s'amorçait pour moi cette interrogation. En effet, bien renseigné par des amis québécois, je trouvais un terrain propice à une recherche préliminaire dans le domaine, bien qu'à l'époque l'espoir de faire une étude sur l'enseignement intégré des mathématiques et des sciences m'avaient attiré en Angleterre.

Introduction

Quand on songe à l'enseignement des mathématiques aux jeunes de 14 ans et plus, il nous vient à l'esprit le débat du programme pour tous, du « core curriculum ». Situons brièvement la question. Il n'y a pas si longtemps, l'instruction obligatoire se terminait vers les 14 ans. Maintenant, pour des raisons plus politiques que pédagogiques, on garde les jeunes à l'école jusqu'à 16 ans. C'est à peu près vers 14 ans que, dans la plupart des pays, on procède à une différenciation des élèves, à une classification (streaming) des élèves qui les amène à suivre des cours de mathématiques en fonction d'une orientation individuelle. Cette pratique peut amener les étudiants à fréquenter des établissements différemment conçus. On retrouve alors des programmes ou des cours spécialisés pour les littéraires les scientifiques les techniciens. Bien entendu, chaque pays possède ses particularités mais un phénomène est universel. Chaque orientation reçoit une formation mathématique qualifiable de forte, moyenne ou faible. De toute façon, les étudiants savent très bien s'y retrouver. C'est ainsi que se pose la question des doués et des moins doués. « Qu'entend-on par doués? » reste par ailleurs une question passablement ouverte (anecdote).

Les réflexions courantes que l'on lit sur le sujet nous laissent deviner les besoins directs de tous ceux qui deviendront les professionnels des mathématiques : mathématiciens, professeurs de mathématiques, statisticiens et mathématiciens appliqués. Ensuite, s'inscrivant dans cette perspective de besoins, on compte tous ceux qui manifestent des besoins indirects ou secondaires. Tous les métiers ou professions (que l'on pense aux ingénieurs, aux économistes, aux chimistes…) ont déjà dressé leur liste de compétences minimales requises des étudiants désirant s'inscrire aux cours Comptabilité 1, Électronique 2, Économie avancée… Une grande proportion des 14-17 ans sont alors considérés comme de futurs « applicateurs des mathématiques. Pour ceux qui dans leur métier n'utiliseront aucune mathématique au-delà des connaissances de base, on retient les objectifs de formation valable pour tous : développer le raisonnement déductif, l'esprit logique, la capacité d'abstraction, la capacité de communication.

L'essentiel des propos de cette conférence concerne les étudiants qui dans leur métier ou leur profession utiliseront les mathématiques plutôt que les futurs matheux.

La notion d'application

La notion d'application est donc au cœur de la question. Qu'est-ce qu'appliquer les mathématiques et comment enseigne-t-on les mathématiques pour qu'elles deviennent applicables? Première réponse tentative (pour utiliser un anglicisme) : en montrant des applications. Mais est-on bien au fait de la manière dont les mathématiques sont appliquées. Il me vient à l'esprit quelques expériences frustrantes alors qu'étudiant en sciences je tentais désespérément d'appliquer mes mathématiques pour suivre les raisonnements de mon professeur d'électronique. Il me semblait alors que ou bien on n'appliquait pas les mêmes mathématiques ou qu'on ne les appliquait pas de la même manière. Réussir l'examen était facile. Il y avait quelques équations à apprendre. Je les ai apprises. Bien préparer les montages au laboratoire était plus ardu. J'ai connu un dénommé Garry que je n'ai pas revu depuis. Je voudrais illustrer mes propos en m'appuyant sur ses compétences (anecdote). Il y avait donc un mystère à élucider celui qui m'avait brillamment guidé dans les laboratoires était celui qui échouait. Et celui qui l'avait péniblement suivi toute l'année réussissait l'examen.

Je rappelle que pour les étudiants concernés par cet exposé, cet âge 14-17 ans correspond à cette période où, ayant acquis l'essentiel d'une formation mathématique de base, ils reçoivent du programme beaucoup plus une formation spécialisée en fonction de leur orientation qu'un complément de formation générale par ailleurs toujours présente.

Il est donc important pour les concepteurs de programmes d'identifier explicitement les connaissances, les savoir-faire à reproduire (mot choisi délibérément)… Mais connaît-on vraiment les besoins des professions? Cette question à elle seule mériterait un long développement, je l'aborderai dans quelques instants. Je pense que les déconvenues et difficultés de Garry remet en question le mécanisme même par lequel sont identifiées et décrites les compétences mathématiques effectivement utilisées par les professionnels.

Dans cette conférence, je soumettrai une position personnelle inspirée de recherches qui portent sur l’utilisation de l’arithmétique par les consommateurs dans les supermarchés, les weight-watchers, les vendeurs dans les marchés, les contremaîtres en construction… Je considèrerai comment les conclusions de ces travaux (formulés surtout pour l’arithmétique) s’étendent d’une certaine manière aux mathématiques. Je tenterai donc de définir ce que pourrait être une mathématique contextuelle à partir, entre autres, des caractéristiques de l’arithmétique contextuelle.

Les recherches de Jean Lave, T. et D. Carraher et A. Schliemann

Comme le souligne Lave, ces travaux se situent au carrefour de trois domaines de recherche : la psychologie de l’apprentissage des mathématiques, l’anthropologie de la cognition mathématique et la sociologie des mathématiques. Ce qui apparaît manifestement dans ces études, c’est que la méthodologie de recherche s’inspire largement de l’anthropologie : beaucoup d’observations (souvent participantes), d’entrevues non structurées ou semi structurées sur le terrain. Tout comme d’autres chercheurs d’elle cite, elle discute de la portée de ses conclusions dans le cadre théorique élaboré à partir de la notion de transférabilité des apprentissages scolaires. Et c’est précisément ce cadre théorique que j’aimerais élargir.

Ce que l’on a constaté dans les travaux de recherche cités précédemment c’est que l’on utilise beaucoup de mathématiques et d’arithmétique. Cependant, l’arithmétique utilisée <u>diffère</u> de celle introduite en classe autant pour les algorithmes utilisés que pour les stratégies de résolution de problèmes mises en œuvre.

Nous le constaterons dans trois exemples. Mais auparavant, soulignons que le rapport Cockroft sur les mathématiques des travailleurs va dans le même sens. Voici comment on explique que les gens croient que peu de mathématiques soient utilisées.

Is it possible when observing work in progress to describe certain aspects of it in mathematics terms. (summetry for instance, geometry it. Stacking and packing material)… However, even if the mathematica, concepts involved have at some time been encountered in the classroom, the employee will probably not coniously analysed it in such terms, the operations which are being performed. « and if the were to do so, would he necessarily be able to do his job better ».

Voilà donc une raison pour laquelle très souvent les enquêtes faites auprès de travailleurs spécialisés, techniciens… sont peu révélatrices des mathématiques utilisées. On note donc une difficulté méthodologique que les chercheurs de Bach et de Nottingham (cités dans le rapport Cockroft) et ceux déjà mentionnés ont pu contourner. J’en présente une autre extraite du rapport Mathematics Counts.

« However, even when mathematics is being used, frequent repetition are increasing familiarity with a task may mean that it may cease to be though of a mathematics and become an almost automatic par of the job.. a frequent remark was : « that’s not mathematics, it’s common sense. »

Il existe donc des caractéristiques (implicites bien entendu) des mathématiques qui font qu’on refuse à certaines activités l’étiquette mathématique. Je crois que les exemples que nous verrons sauront les mettre en relief.

Passons maintenant aux trois exemples

Ces observations nous révèlent donc l'existence d'une **arithmétique contextuelle** qui fonctionne dans un contexte particulier dans lequel les nombres, les opérations usuelles ont un sens rattachés à une situation ou à une classe de situations.

A mon sens, ces conclusions nous mènent droit à la question : *« Comment doit-on tenir compte de cette arithmétique contextuelle dans l'enseignement. »* En effet, la situation actuelle est bien décrite par Jean Lave.

« The more general and context-free the knowledge offered in school, the more school alumni will be to apply it in viher situations. Thus, schools teach general and context-free versions of arimetic… Of course, comme elle le précise, somme pedagogical strategies may emphasize teaching by specific example more than other approaches, but the end goal, whatever the strategy, is to equip children with general and transferable knowledge. »

Doit-on en effet enseigner une mathématique non transférable? Comment la rendre transférable?

Voici exposée d'une manière percutante et délibérément sans nuance ma position sur les mathématiques des 14-17. L'école offre dans l'ensemble une mathématique non-généralisable. Il existe un grand nombre d'habiletés, de manière de faire encore absentes de nos programmes d'étude et qu'il faudrait répertorier et décrire. Je ne crois pas cependant que cet état de fait soir irrémédiable. Je vais donc tenter d'examiner le pourquoi et le comment de cette situation.

<u>Le pourquoi</u>

D'abord, il existe une tradition épistémologique que la plupart d'entre nous entretenons, tradition qui situe le rôle des mathématiques par rapport aux sciences en général. Selon cette manière de voir, les concepts mathématiques sont d'abord appris dans la classe de mathématiques pour être ensuite appliquées (je souligne) dans les classes de sciences. Il est à remarquer que cette position est relativement contemporaine du moins en pratique étant donné que l'enseignement des mathématiques et des sciences n'était pas à ce point cloisonné il y a deux ou trois siècles. On n'a qu'à penser à Laplace, Gauss, Newton. Présentement, le concept mathématique a un statut en soi par rapport à d'autres concepts mathématiques et n'a donc pas de teneur contextuelle. C'est l'application qui viendra plus tard qui lui donnera cette « richesse contextuelle ». C'est en quelque sorte l'organisation inter-conceptuelle des notions mathématiques qui détermine les concepts mathématiques. Qu'on pense par exemple à la notion de variable qui est devenu une particularisation du produit cartésien. Les applicateurs, les utilisateurs font donc usage, pour leur lègue. Il arrive présentement qu'il y ait des querelles de factions, le scientifique alléguant qu'il existe pour les étudiants et ce, dans la plupart des pays, les fonctions du cours de mathématique et les fonctions du cours de physique. Ceci est aussi vrai tantôt pour les fonctions logarithmiques.

Analysons plus en profondeur comment sont utilisées les mathématiques en sciences. Pour ce, reportons nous au processus de modélisation que l'on trouve décrit chez plusieurs auteurs. Le schéma suivant en fournit les grandes lignes. *** figure 1 ***

On remarque donc que les relations retenues entre les éléments du problème sont formulées mathématiquement. A partir de cet instant, le problème est essentiellement mathématique car une manipulation « mathématique » des objets mène à la solution. On se situe, comme vous l'aurez constaté, dans le cadre de la science qui se crée.

Ce portrait est un peu idyllique. En pratique, ces efforts qui mènent à mathématiser certaines relations entre les facteurs de la situation expérimentale ou expériencielle sont le lot d'une infime minorité. En pratique, l'univers qui est objet d'expérience se résume à quelques explications verbales et éventuellement aux problèmes de fin de chapitre. Pour moi, il faut questionner la pratique de l'enseignement des sciences.

Malgré beaucoup de plans de réforme, l'essentiel de l'utilisation des mathématiques en sciences est contenu dans la solution des exercices que l'on retrouve à la fin de chaque chapitre. En gros, il s'agit de pouvoir bien appliquer quelques formules. L'utilisation que l'on fait de la mathématique dans l'enseignement se trouve bien décrit dans le diagramme suivant. *** figure 2 ***

<u>*Circuit électrique*</u>

Dans plusieurs problèmes d'électricité simples, on fournit un diagramme comme le suivant.

<u>ELECTRICAL CIRCUIT</u>

If many simple electricity problems, the following diagram is provided to the student. *** figure 3 ***

Let us suppose that we ase the value of R1 for a current of 3 amperes flowing in the circuit. We are given the R2 = 10 ohms and V= 120 volts. Suppons que l'on demande (ceci est un cas particulier) quelle valeur doit-on donner à R2 pour qu'un courant de 3 ampères traverse le circuit. Dans ce cas, R2 = 10 ohms et V = 120 volts.

Comme nous l'avons constaté dans le premier cas, la solution du problème ne s'inspire en rien des particularités du phénomène considéré. On constaté dans le deuxième cas que la **solution de l'équation a été dirigée et organisée par le diagramme. On peut je crois réellement affirmer que l'équation a été contextualisée par le recours à l'organisation spatiale du diagramme.**

We note that in this case as I have shown the solution of the equation was guided by the diagram. We can, I believe, state that the equation has been contextualized because spatial setting of the diagram was used to support the solution of the equation.

Vers une mathématique contextuelle

La contextualisation d'une équation vise donc à rapprocher les opérations effectuées sur celle-ci du support concret défini par le contexte : diagramme, description verbale, image mentale, opération gestuelle. En d'autres mots, **une mathématique contextualisée rapproche les deux côtés du schéma proposée ci-haut.** Le problème n'est jamais résolu exclusivement en se situant dans la région à droite, en d'autres mots en n'utilisant que les processus mathématiques. Il y a un continuel aller-retour qui transforme nécessairement les procédures ou algorithmes utilisés pou résoudre l'équation ou encore sa version contextalisée. *** figure 4 ***

Un second exemple : l'exponentielle

Considérons un autre exemple : *Un étang de nénuphars a une aire de $256M^2$. Les nénuphars qui la couvrent doublent leur superficie à chaque jour. Si l'étang est couvert au $7^{ème}$ jour, quand était-il à demi couvert?*

A pond of lilly-pads covers an area of 256m2. The lilly-pads covering it double their area each day. If the pond is covered in 7 days, when was it half covered?

L'élève doué établira l'équation du phénomène et résoudra d'une manière non contextuelle ce petit problème. Il aurait pu revenir à l'essence même d'un phénomène exponentiel dont la croissance est mutliplicative. Dans une mathématique contextuelle, la signification de chaque paramètre des équations et relations considérées est utilisée dans le processus de résolution de problème.

Troisième exemple : l'appareil photo

Examinons, à cet effet, le maniement des appareils-photos pour lequel on a recours au concept de « stop ».
As a third example, we will examine the use of cameras involving the notion of stop.

Quatrième exemple : un cas de pourcentage

Un marchand nous accorde une réduction de 15%. Est-il plus avantageux d'ajouter la T.V.A. (10%) avant ou après la réduction?
A merchant is offering a 15% reduction. Is it more advantageous to add the V.A.T. (10%) before or after the reduction?
On constate que la contextualisation du problème nous a amenés à restructurer la notion mathématico-contextuelle de réduction et de taxe.

Les lois de la sensation

Nous allons finalement aborder un cas ou l'on utilise la notion d'intégrale et la notion de logarithme.
Our final example will be about integrals and logarithms.
On remarque dans ces derniers cas, comment la mathématique contextuelle part du discret pour s'étendre au continu. Alors que l'arithmétique contextuelle est mentale (elle se fait dans l'ensemble sans papier ni crayon), la mathématique contextuelle est non équationnelle. Les problèmes sont posés de manière telle que seules sont utilisées les propriétés caractérisant les équations. On pourrait alors avancer qu'elle est pré-équationnelle.
One notices in the examples how contextual mathematics can be discrete and eventually leads us to continuous cases. We observed that contextual arithmetic is basically mental (non pencil, no paper); contextual mathematics is non-equationnal. Problems are posed in such a way that one makes use only the equation features. One can say that contextual mathematics is pre-equational.
The immediate question is can mathematics be derived from contextual mathematics? You have certainly noticed that contextualized procedures or processes are often loosely recognized as being intuitive. In fact, the implicitness of such procedures is certainly what will make people associate them will intuition in general. We could get at some answers to those questions using the notions of "contrat didactique" and epistemological obstacles of Brousseau and Bachelard.

On est conduit à une question : « Est-ce que la mathématique peut être tiré de la mathématique contextuelle? Vous avez sans doute remarqué que les procédures contextualisées sont souvent décrites comme intuitives. En fait, leur caractère implicite est sans doute la raison qui nous pousserait à les associer à l'intuition est général. On pourrait prolonger cette réflexion en utilisant les notions de contrat didactique et d'obstacles épistémologiques de Brousseau et Bachelard.

Des explications. Explanations

Examinons ensemble comment cette situation est rendue possible. J'estime qu'il faut considérer en premier lieu la construction des programmes. Les **exigences mathématiques** des sciences utilisatrices sont établies par **les professeurs de chacune de ces disciplines** et surtout dans la perspective d'une **exposition correcte** de la matière et en vue de la résolution des **problèmes écrits de fin de chapitre**. Or, c'est précisément là que la contextualisation des mathématiques s'écarte de ce schéma. Les **problèmes ne sont pas réductibles à des problèmes écrits** et les **processus de pensée se rapprochent de l'étape de la quantification** dans le processus de mathématisation, processus trop souvent escamoté étant donné, entre autres, la difficulté qu'il y a à procéder à des évaluations en ce sens. **Mesurer au sens large** et **estimer** sont certainement deux processus car ils sont à l'origine de la contextualisation. Il ne faut donc pas s'étonner que le rapport Cockroft les ait retenu comme essentiels et fondamentaux.

Why is such a situation possible? One must look mainly at how the curricula are constructed. Mathematics requirements for the other subject-matters by teachers of those subject-matters in order to **facilitate a correct exposition** of the matter and clearly to help students **solve the end-of-chapter problems**. Now, this is precisely at these points that contextualisations of mathematics is in total opposition with such practices. More precisely their problems are not **reducible to end-of-the chapter problems** and their **reasoning processes are much closer to the stage of quantification** in the process of modelling. They are often neglected because they are not easily assessable. **Measuring (in a wide acceptation)** and **estimating are certainly two basic processes** intimately linked with contextualisation. One must not then be surprised that they were recognized as essential and fundemental by the Cockroft report.

Conclusion : enseignement et contextualisation

Comme nous l'avons constaté, le contexte est utile car il guide le processus de résolution de problèmes. D'ailleurs toute mathématique contextuelle se présente bien entendu dans le cadre d'un problème (dit réel) à résoudre. Cependant, il faut bien comprendre qu'il s'agit pour chaque élève et aussi pour le maître d'une sélection personnelle d'images mentales, de gestes, d'actions rattachées à un contenu expérientielle que nous appelons le contexte.

Toute contextualisation implique donc ces versions personnalisées de contextes qui doivent **converger tout en restant présent avec toute leur richesse** dans chacun des participants au processus d'apprentissage. Converger renvoie à une sélection dans le temps d'éléments appropriés, renvoie à une focalisation à un moment donné sur les éléments contextuels concernés. (la marée, les microbes) D'où la nécessité absolue d'introduire une **forme d'expérimentation** qui, à mon sens, doit dépasser la présentation purement magistrale d'une situation. Il faut donc une personnalisation du contexte, car c'est cette **appropriation**

personnalisée qui permettra une utilisation efficace et souple (flexible) du contexte dans le processus de modélisation.

Research must be undertaken

I reckon that projects related to intuition, internal representations, primitive conceptions, "raisonnement spontané", mental models, modelling from the point of view of the thinker would contribute to clarify the questions presented during this lecture.

Final words

I forgot to mention that the notion of context is relative and that if we take contextual mathematics as the context in our process we might get the sort of mathematics we are fighting for.

J'oubliais. Le terme contexte est tout à fait relatif. Si nous prenons la mathématique contextuelle comme contexte dans le processus que nous avons décrit dans la conférence il se peut bien que nous aboutissions à la mathématique que nous entendons diffuser et défendre.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Thème de la conference / This year's theme

L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DANS LA PRATIQUE DE LA CLASSE ET COMME OBJET DE RECHERCHE EN DIDACTIQUE: DEUX PERSPECTIVES COMPLÉMENTAIRES

L'activité mathématique est au cœur de tout enseignement des mathématiques. C'est à la fois un outil de motivation des élèves, un moyen de contextualiser les concepts mathématiques étudiés et de faire le lien avec d'autres matières scolaires ou avec le quotidien des apprenants (que ce soit des élèves du primaire, du secondaire, des étudiants au collège ou à l'université, des travailleurs en milieu de travail, des enseignants en formation continue). L'activité mathématique conçue par diverses personnes, enseignants, conseillers pédagogiques, concepteurs de manuels scolaires, chercheurs en didactique des mathématiques s'adresse ainsi à un public varié et peut prendre diverses formes.

Nous proposons aux participants de la 61[e] rencontre de la CIEAEM de réfléchir et de débattre autour de ce thème, que nous avons décliné en 5 sous-thèmes.

MATHEMATICAL ACTIVITY IN CLASSROOM PRACTICE AND AS RESEARCH OBJECT IN DIDACTICS: TWO COMPLEMENTARY PERSPECTIVES

Mathematical activity is at the center of any mathematics teaching. It is a means for motivating students and for putting mathematical concepts into context and linking them to other academic subjects and everyday life or with the students' own every day lives (whether they are primary school students, high school, college or university students, workers or in-service teachers). Mathematical activities elaborated by different people (teachers, pedagogical counselors, textbook authors, researchers), for different students can take many forms. Participants of the 61st meeting of the CIEAEM are invited to reflect on and discuss this theme which is divided into 5 sub-themes.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

1. L'activité mathématique dans la classe du 21e siècle

Comment caractériser l'activité mathématique? Quels sont les divers types d'activités mathématiques que nous retrouvons dans la classe du 21e siècle? Avec le renouveau pédagogique observé dans plusieurs pays et l'approche par compétences qui y est associée, il est souvent fait appel à la pédagogie par projets ou à l'intégration des matières. Mais qu'en est-il en classe de mathématique? Il est souvent constaté que les projets voulant intégrer les matières dont les mathématiques, se servent du langage mathématique sans pour autant amener les élèves à construire le sens des concepts mathématiques. Quelles seraient les caractéristiques d'activités mathématiques pertinentes et réussies? Qu'en est-il des activités mathématiques hors des murs de l'école? Comment les nouvelles technologies peuvent-elles aider au développement d'activités mathématiques? Quels nouveaux sujets mathématiques peuvent être introduits grâce à ces nouvelles technologies? Comment les nouvelles technologies et les technologies plus anciennes peuvent co-exister et se renforcer mutuellement?

1. Mathematical activity in the 21st century classroom.

What are the characteristics of mathematical activity? What are the various types of mathematical activity that one can find in the 21st century classroom? Along with the pedagogical renewal observed in several countries and the competency approach associated with this renewal, project-based pedagogical approaches and the integration of mathematics with other subjects are called upon. What about the mathematics class? It is often stated that projects aiming at integrating several domains, one of which is mathematics, use the mathematical language but fail at helping the students build the meaning of the mathematical concepts involved. What are the characteristics of both pertinent and successful mathematical activities? What about mathematics activities outside the classroom? What activities can we offer outside the classroom? How the new technologies help the design of mathematical activities? What kind of new topics can be discussed because of the existence of these new technologies? How might new and ancient technologies live together and strengthen each other?

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Computer Assisted Assessment through Moodle Quizzes for Calculus in an Engineering Undergraduate Course

Mónica Blanco, M. Rosa Estela, Marta Ginovart, Joel Saà
Department of Applied Mathematics III - Technical University of Catalonia, Barcelona, SPAIN

Résumé: L'Espace Européen d'Éducation Supérieure (EEES) favorise un système centré sur l'étudiant, basé sur le travail nécessaire pour atteindre les objectifs d'un programme d'étude. Dans le contexte de l'EHEA, les outils d'apprentissage en ligne (*e-learning*) offrent une bonne opportunité pour réfléchir à l'activité mathématique dans la classe du 21ème siècle. En 2002 l'Université Polytechnique de la Catalogne (UPC) entrepris l'utilisation d'un outil d'enseignement virtuel, le campus virtuel Atenea. Despuis 2005 Atenea est basé sur Moodle, une plate-forme d'apprentissage en ligne sous licence *open source* avec un système de gestion de contenu, qui permet aux enseignants de construire des cours en ligne –tout en assurant leur qualité– et de gérer les résultats de l'aprentissage. Parmi les outils ajoutés par Moodle, notre intérêt est centré essentiellement sur le module Test. Ce module permet la création de tests composés de questions de types différents, adaptés aux buts spécifiques à atteindre dans chaque étage du processus d'enseignement-apprentissage. Le module Test peut aider à l'intégration des nouvelles stratégies pédagogiques, autrement impossibles à implanter avec les outils traditionnels. Afin d'éxaminer comment ces nouvelles stratégies peuvent être employées à travers la création d'une banque substantielle de questions, nous sommes en train d'exécuter des projets financés par l'Institut de Sciences de l'Éducation de l'UPC. Cette communication est basée sur l'évaluation de trois tests Moodle concernant le sujet Calcul et répondus par environ 70 étudiants de première année de l'École des Ponts et Chaussées (UPC) pendant le cours 2007/2008. Nos buts sont d'un côté, analyser les réponses des étudiants, et de l'autre, exécuter une analyse psychométrique pour identifier si les questions proposées sont proprement effectifs.

1. Introduction

It goes without saying that the introduction of e-learning and information and communication technologies provides a new, but rather complex, framework for mathematical education. There are many ideas, items and experiences to present and discuss, such as how the new technologies can help in the design of mathematical activities, and what kind of topics have emerged from the existence of these new technologies. It is essential to know how to put new activities into practice, as well as how to improve them through the assessment of their implementation. The European Higher Education Area (EHEA) promotes a student-centered system based on the student workload required to achieve the objectives of a study program. These objectives should preferably be specified in terms of the learning outcome to be acquired. Learning outcomes are sets of competences, a dynamic combination of attributes, abilities and attitudes, expressing what the student will know, understand or be able to do after completion of a process of learning. Hence, in the context of EHEA, e-learning tools provide an outstanding opportunity to discuss the mathematical activity in the 21st-century classroom.

In 2002 the Technical University of Catalonia (UPC) undertook the use of a virtual teaching tool, the virtual campus Atenea, as a first step towards the EHEA. Since 2005 Atenea is based on Moodle, an open source learning management system designed to help educators create quality online courses and administer learner outcomes. From the wide range of tools offered by Moodle, we are focusing on the quiz module. This module allows the creation of quizzes with different question types, adapted to the specific objectives to be achieved at any step in the teaching-learning process. A powerful tool for monitoring and diagnosing a student's understanding, Moodle quizzes contribute to the development of new strategies not feasible with paper-and-pencil exams. To explore how to apply these new strategies in the development of a substantial bank of quiz questions, we are carrying out projects subsidized by the Institute of Education Sciences of the UPC. We intend to design effective questions to supervise students' progress at each level of the learning process, articulated in specified learning outcomes and skills: knowledge, comprehension, application, analysis and problem solving. In this contribution we outline a preliminary experience regarding the use of the quiz module for Calculus topics which constitute primarily the core of a compulsory undergraduate course developed at the School of Civil Engineering (UPC). The development of teaching materials involving Calculus had already been attempted as early as 2003 within the framework of Moodle. Once implemented on Atenea, these materials proved suitable for independent and private study, plus self-assessment, in agreement with EHEA guidelines [1-4]. To the purpose of this contribution, in the course 2007/2008 three Moodle quizzes were designed to be answered by around 70 first-year students of the School of Civil Engineering. In the design of each of the questions, we took into account the following points: i) Why is this an interesting question? ii) What skill or procedure is being assessed here? iii) What answers do we expect? iv) What obstacle could there be when answering this question?

As it is an interactive and dynamic tool, we believe that Moodle quizzes will serve to boost effectiveness and promote student performance, as well as change teachers' and students' attitude towards the virtual campus Atenea. Besides, the automatic assessment of the quizzes frees up time for the teacher to concentrate on other aspects of the learning process. However, it is essential to bear in mind that the whole process should be permanently revised and updated. In this sense it was worth carrying out an assessment of the first experiences in the Calculus course mentioned above, since it provided insights into the entire process. This contribution focuses on the assessment of the three Moodle quizzes for Calculus topics. In particular, the aims are to analyse students' answers on the one hand, and to carry out a a psycometric analysis to identify the appropriateness of the questions stated in the quizzes on the other. From this first experience, we intend to generate improved quizzes suitable for the compulsory undergraduate subjects in the applied mathematics field, which are included in the first and second year syllabus for all branches of Engineering.

2. Design of Moodle quizzes for the evaluation of Calculus topics

In the context of this work, students' progress is assessed by a weighted combination of two written pencil-paper exams during the course (Exam1 and Exam2), a final summative written examination (FinalExam) and several coursework assignments. If the mean of Exam1 and Exam2 does not exceed the pass mark, students have to take the final exam at the end of the course. This being a first experience in the field, we did not consider it convenient to confer an essential weight to the three Moodle quizzes. Therefore, they were regarded as plain coursework assignments to be carried out in the classroom. The quiz dates were: Test 1 in October 2007;

Test 2 November 2007; Test 3 March 2008. The three quizzes consisted of ten multiple-choice questions, offering in this case only weaker feedback, that is, students were given only the knowledge of their own score or grade, often described as "knowledge of results," without the knowledge of correct results, nor any additional explanation or suggestions for improvement. The topics covered by Test 1 were complex and real numbers, and topology. Test 2 covered mainly limits and series, while Test 3 focused on geometry in R^3 and multivariable functions. The mathematical tasks may be classified in different requested levels of mastery of knowledge. MATH taxonomy (Mathematical Assessment Task Hierarchy) for the structuring of assessment tasks [6] turns out to be more appropriate for mathematical tasks than Bloom's taxonomy. We agree with Smith [6] in that "the aim of the descriptors is to assist with writing examination questions, and to allow the examiner's judgment, objectives and experience to determine the final evaluation of an assessment task". The MATH taxonomy uses eight different descriptors that are shown in Table 1, along with some illustrative questions used in these tests.

Table 1. Examples of classification according to the MATH taxonomy.

Factual knowledge	**5_Test 1.-** Which statement is true?: **a)** Every numerable set is finite. **b)** Every subset of a numerable set is numerable. **c)** R is numerable. **(d)** N is not numerable.
Comprehension (recognition of formulas and situations)	**1_Test 3.-** The surface given by $2x^2 + 3y^2 = 1$ is: **(a)** an elliptic cylinder **b)** an elliptic cone **(c)** an ellipse **(d)** a hyperboloid of one sheet **(e)** none of the above.
Routine use of procedure or algorithms	**1_Test 1.-** The value of the expression $i^{101} + i^{-207}$ is: **(a)** 1+i **(b)** 1/i **(c)** -2i **(d)** 2i **(e)** None of the above.
Information transfer (classification of math objects)	**6_Test 1.-** Considering the sets of real number R, of rational numbers Q and of the irrational numbers I, then: **(a)** All the statements are true. **(b)** $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N}$ such that $n_0 > x$ **(c)** $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x < y \Rightarrow \exists p\sqrt{2} \in \mathbf{I}$ with $p \in \mathbf{Q}$ such that $x < p\sqrt{2} < y$ **(d)** $\overline{\mathbf{Q} \cap (0,1)} = [0,1]$
Application in new situations (planning work, selection of methods)	**5_Test 3.-** The spheres $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ **(a)** do not intersect **(b)** are tangent at the point (0,0,2) **(c)** are tangent at the point (2,0,0) **(d)** are perpendicular at the point (2,0,0) **(e)** None of the above.
Justifying, proof, reasoning and interpreting	**8_Test 3.-** The expression $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ in polar coordinates is: **(a)** $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}$ **(b)** $r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}$ **(c)** $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}$ **(d)** $r\frac{\partial f}{\partial r} + 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta} = 1$ **(e)** None of the above.
Implications, making conjectures, comparisons and finding patterns	**9_Test 1.-** In Euclidean space (R,d) for any $x, y, z \in \mathbf{R}$ the inequality $\lvert x+y\rvert \le \lvert x+z\rvert + \lvert z-y\rvert$ (a) only holds if $\lvert z\rvert \le \lvert y\rvert$ or $\lvert z\rvert \le \lvert x\rvert$ **(b)** only holds if $z=x=y$ **(c)** always holds **(d)** never holds.
Evaluation	**6_Test 2.-** Decide which is the only true statement: **(a)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = 1$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^n = e^2$ **(c)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 0$ **(d)** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = e^3$ **(e)** None of the above.

3. Results and discussion

Given the novelty of the technological tools and the pedagogical approach involved, an analysis of students' results and a psychometric analysis are essential in this kind of assessment [5], all the more so because, the quizzes covered an important part of the syllabus of a Calculus course for undergraduate engineers. The three tests have the same form for all students in this group, so a straightforward statistical analysis is possible.

3.1. Analysis of students' results

The descriptive summary in Table 2 shows that the first quiz is the best scored and that the second test bears the highest coefficient of variation. Remarkably enough, the third quiz was the one taken by the lowest number of students. The overall scores of the students in the three tests are displayed in Figure 1.

Table 2. Descriptive analyses of the scores of the quizzes. N: Number of examinees; N*: Number of non-examinees; SE: Standard Deviation of the Mean; CV: Coefficient of Variation; Q1: Percentile 25%; Q3: Percentile 75%.

	N	N*	Mean	SE	CV (%)	Q1	Median	Q3	% of pass
Test 1	66	8	5,50	0,22	31,7	4,0	6,0	7,0	72,7
Test 2	73	1	4,14	0,26	53,3	3,0	4,0	5,5	41,1
Test 3	61	13	4,30	0,21	37,9	3,0	4,0	5,0	42,6

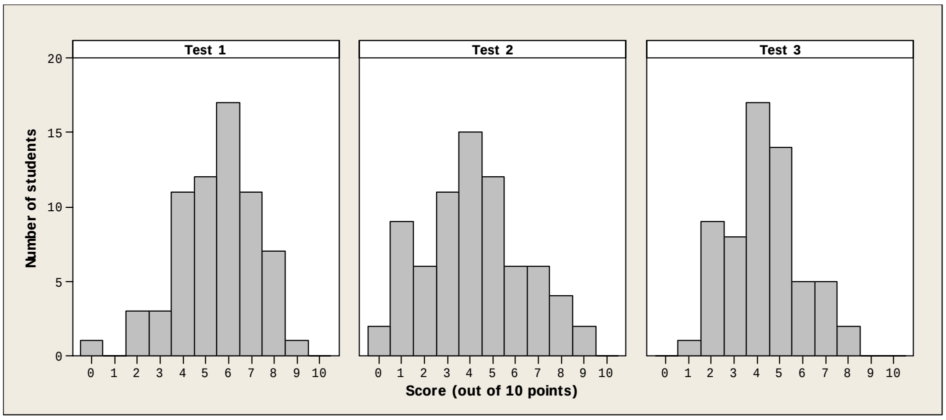


Figure 1. Histogram of students' scores in the three tests.

We performed a regression analysis relating the score mean of the three quizzes to the marks of the three written exams. Should the analysis display good correlation, they would render Moodle quizzes a convenient tool to inform students of their performance throughout the learning process. Figure 2 shows that correlation between the mean of the three quizzes and Exams 1 and 2 is positive (r = 0.483 and 0.499, respectively) and greater than the one corresponding to the final written exam (r = 0.161). For both Exam1 and Exam2, linear regression is significant (with p-values 0.001 and 0.008, respectively), while the model concerning the final written exam is not significant (p-value=0.339). This can be explained by the fact that those students who took the final exam were the bad performers.

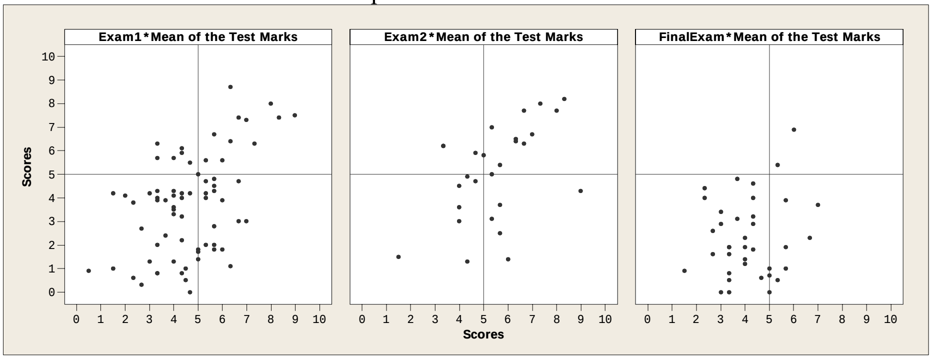


Figure 2. Scatter diagrams of students' scores in the three tests (mean) versus Exams 1, 2 and final scores (sample sizes 70, 27 and 37, respectively).

3.2. Psychometric analysis

In this section we analyze the psychometric quality of the assessments, which can help us to answer whether there are appropriate questions, well chosen to demonstrate concepts and of an appropriate level of difficulty and whether the questions discriminate between higher and lower mathematical abilities. Again Moodle offers a range of resources to carry out a psychometric analysis of a particular quiz, namely the Facility Index (FI), the Discrimination Index (DI) and the Discrimination Coefficient (DC). Item FI describes the overall difficulty of the questions. This index represents the ratio of users that answer the question correctly. In principle, a very high or low FI suggests that the question is not useful as an instrument of measurement. There are two descriptors to measure effectiveness, DI and DC, both ranging from -1 to +1. The DI provides a rough indicator of the performance of each item to separate high scores vs. scorers. The DC is a correlation coefficient between scores at the item and at the whole quiz. In both cases, positive values indicate items that discriminate proficient learners, whereas negative indices mark items that are answered best by those with lowest grades, hence not helping to discern between the good and the bad performers. In short, these coefficients can be used as powerful methods of evaluating the effectiveness of the quiz when assessing differentiation of learners. The advantage of using DC over DI is that the former uses information from the whole population of learners, and not just the extreme upper and lower thirds. Thus, this parameter may be more sensitive to detect item performance.

Let us summarize briefly the psychometric analysis for the three quizzes involved in this contribution. FI for ranges from 27% to 88% for Test 1; from 16% to 66% for Test 2; and from 3% to 70% for Test 3. By and large, most of the questions in Test 1 show high values for DI, yet lower values for DC. On the contrary, DI turns out to be rather low in most of the questions of Tests 2 and 3. For instance, question **9_Test1**, with a FI of 70%, displays a high DI (0.889) and medium DC (0.464); **6_Test2,** with a FI of 59%, shows a low DI (0.107) and a low DC (0.377);

8_Test3 bears really low values for FI (13%), DI (0.056) and DC (0.256) (see Table 1 to check the statements).

4. Final remarks

As mentioned above, this paper gathers the results of a preliminary study. To construct more suitable quizzes in the future, our intention is to carry out an analysis of some computational or algebraic mistakes, and other common misconceptions, using the total results given by the psychometric analysis. We are also planning to add a wider variety of questions and to include further feedback facilities.

Acknowledgements. We gratefully acknowledge the financial support received from the Institute of Education Sciences and the School of Civil Engineering of the UPC, and from the AGAUR 2006MQD00192 of the Generalitat de Catalunya.

References

[1] Blanco M., Eixarch R., Estela M.R., Franch J., Ginovart M., Jarauta E., Roman N., Xambó S. (2006a). Teaching and Learning Calculus using WIRIS Technology in Moodle environment. In: Abstracts of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006. European Mathematical Society, p. 604.

[2] Blanco M., Ginovart M., Estela M.R., Jarauta e. (2006b). Teaching and learning mathematics and statistics at an agricultural engineering collage, Proceedings of the CIEAEM 58 "Changes in Society: A Challenge for Mathematics Education", pp. 152-157, University of West Bohemia, Plzen 2006.

[3] Estela M.R., Xambó, S. (2006c) Teaching and Learning Mathematics using MapleTA and WIRIS technology in a Moodle environment. 12th Internacional Conference on Technology Supported Learning & Training. Online Educa Berlin 2006.

[4] Estela M.R., Saà J. (2008a) Cálculo con soporte interactivo en Moodle. Pearson Prentice Hall. 2008.

[5] Heck A. & van Gastel L. (2006). Mathematics on the threshold. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(8), pp. 925-945.

[6] Smith G. H., Wood L. N., Coupland M., Stephenson B., Crawford K. & Ball G. (1996). Constructing mathematical examinations to assess a range of knowledge and skills. International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 27(1), pp. 65-77.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

MATHSHOPPING
a different look on mathematics for basic school students

Fernando Bravo, Basic Scholl Gonçab Nunes, Barcelos, Portugal
bravof@netcabo.pt

Résumé

Matshopping est un projet qui a l'intention de stimuler des étudiants collégiens des 6ème et 5ème années à voir la Mathématique comme une source de connaissance et d'amusement. Il a évolué depuis la première idée de construire un centre de ressource pour les enseignants, destiné à conserver et grouper des informations mathématiques et des ressources, à un concept plus complexe auquel les étudiants pourraient participer en contribuant aussi bien qu'en apprenant.

Le fait de profiter la nouvelle ère technologique qui est survenue au Portugal avec le projet public "Magalhães", l'équipe Mathshopping avait une idée de créer un centre de ressource pour toute la communauté scolaire, en profitant de la plateforme "Moodle" récemment installée dans notre école. C’est probable que, avec un peu d’optimisme, tous les étudiants auront, dans lun avenir rapproché des ordinateurs portables grâce au projet " Magalhães ".

Il s’agit d’un centre de ressource numérique, où toute la communauté peut apprendre différents aspects des Mathématiques et contribuer avec ses idées et matériel, poser des questions, faire des devoirs, améliorer leur connaissance et avoir un regard diffèrent sur une discipline scientifique souvent mal aimée.

Mathshopping Project

1-Introduction

The Matshopping Project came from the idea of building a digital resource center in the school.

The need of such a center showed up from various needs: To compile tests, texts, problems, investigations, exercises and various types of pedagogical documents used in mathematics; to motivate students to look to the discipline more often and in different ways; to show to the students other aspects of the discipline beyond calculations, algebra, geometry and problem solving activities; to induce teachers and pupils to connect different areas of knowledge; to give the school community fast and more comfortable access to learning documents, and to take advantage of Moodle Platform.

Besides, there are some aspects connected with math skills of Portuguese students, displayed in national and international evaluation tests, which were considered and impelled the team towards the “Mathsopping” project. They were the results of National Evaluation Tests and TIMSS (2007). These evaluation instruments showed that Portuguese students seem to have an ill mathematic proficiency in subjects as reasoning and communication, geometry and mathematic procedures. TIMSS (2007) made us think about the exams failure and consequent year repetition. In Portugal we have the idea that students who have not acquired the minimum skills defined for a given year of a grade should repeat the year. This leads to the fact that we have older students in lower scholar grades, and this is a handicap when attending to international exams that are made with the logic of the student’s age and not the student’s degree of attendance.

Thus, we can think that in our scholar system students that can take advantage of a different approach to mathematics, more comprehensive and personalized, allowing that pupils can discover new focus items in "old subjects". Also the new Portuguese Mathematic Curriculum for Basic School (M.E. 2007) emphasizes the importance of new technologies in the teaching/learning process of mathematics stressing applets and dynamic geometry environments. The fact that our school has been engaged for three years till now in the Action Program for Mathematics interfered also with our intention of building such a project, because in the formation sessions that we attend we are stimulated to try new approaches to Mathematics subjects, such as problem solving methods. Furthermore there is a new curriculum for Basic School to be applied next year although without text books in a first phase. Matshopping team thinks that this will be a wonderful opportunity to use Matshopping.

For all these reasons our project's goals are: 1) To create an interactive resource center that can by any means enrich the study of mathematics; 2) To integrate several and different knowledges from different subjects, by proposing the making of various kinds of work types, like texts, investigation, "fairy tales", jokes, puzzles, riddles, photos, etc. focused in mathematic subjects; 3) To motivate students to the study and understanding of different mathematics aspects, stressing problem solving, reasoning and reasoning communication, oral and written, and proof; 4) To show, study and discuss less well treated subjects in classroom, such as mathematics history, works of famous mathematics, etc.; 5) To give a personal attendance, in a relevant period of time, to students, giving them a "cabinet of study support", so that they can ask questions and ask for explanations to their doubts in private; 6) Playing a text book role, to allow students to have the necessary study items without the use of photocopies.

There are four main frame ideas that led us to engage in such a project:

- **Interaction and attractiveness** - The main idea was that Mathematics is a complex science, involving different subjects, and connecting knowledges of various kinds, such as History, Mather Language, Physics, and Science. By the other hand, mathematics, at least in Portugal, never loosed is serious character, despite the use of games and other resources, intended to soften the harsh and formal aspect of the discipline. Thus, the Matshopping team concluded that there are several important aspects of mathematics that children skip, because most of the teachers spend very few time (or no time at all) in classroom dealing with subjects like history of mathematics, writing and reading of mathematics texts, beyond those necessaries to solve problems. The project team thought that even when we learn Mathematics, we should have space for a good laughing, when seeing, cartoons solving puzzles or reading mathematical curiosities.

- **Resource center** – This project intends to become a resource center for students and teachers, by displaying tests, games, theoretical information, links to interesting sites, translations, suggestions, activities and so on, to be used by the school community. Besides there is a site in the "project building" where students can pose their doubts and difficulties, receiving explanations and suggestions in a short period of time.

  The students will be challenged to contribute with their own works, suggestions, and experiences.

- **Moodle** - On the other hand our school has just installed a Moodle Platform, which has not been fully exploited yet. As we need a restricted access area to the project, we though in using the platform as a restricted gate and counter. Nevertheless, the platform is working in a desperately slow way, thus forbidding the installation of the project directly in it, but from here people can link into the project which will be displayed in webpage, not in the school webpage because of the same problem as the platform.

- **Technological Conjuncture –** We think the present time is favorable to these kinds of projects, once the government has invested in offering to each student a cheap computer for scholar usage. So we thought that students could put their brand new computers to good use, by participating in a project like this.

In this communication is my intention to show some possibilities of the work with "Math-shopping", some tasks directed to the students and how it could be useful, not only for teachers but, moreover to stimulate students in engaging with mathematics.

2- Inside Mathshopping

2.1- Structure and contents

Mathshopping is a "shopping mall" where users can find information and activities displayed in "stores" as in a real mall.
There are four "floors" connected by a lift. In each "floor" there are four or five "stores" that "sell" subjects as algebra, geometry, tests, problems, weekly tasks, there is a specialized "store" were students can put their doubts to be answered, a connection to downloading *Geogebra,* a store for games, riddles and things like these, a "PC store" with applets, another one with suggestions of links, four "cinemas" with different programs that vary from Mathematic history to Mathematic curiosities, fairy tales on Mathematic subjects and an "art gallery" where there will be, for example, photography contests, geometry works and other works made by students. There will be also a cinema where cartoons and jokes on Mathematics will be displayed.

2.2-Some usage possibilities

2.2.1 Exploring

As soon as a Matshopping newcomer enters the "mall hall", he will see a panel displaying the stores, and he must search for new subjects. He can have direct access to the mail box, for instance, where he can see other people´s contributions and leave their own. Then he can wander among the shops and see what eventually can be of interest for him.

2.2.2 Test training (Exams)- *An example of a classroom activity*

As a classroom activity helper, Matshopping can be used as follows:
Most of the students brought their laptop with them. They were directed to the "Gymnasium", the Mathshopping area where they can find the tasks selected for the session.

In that particular class, teacher intended to train the students in the 2007 National Evaluation Test (6th Grade). Students searched for the test and started to solve it, as in a "normal class". The teacher suggested that they could answer the questions using paper and pencil, or they could use "Word". Students that don't have *Windows Vista* installed needed to make some adjustments for

instance, in the way they represent fractions: instead of using **,2-3**, they could write 2/3.

The class worked normally, but some of the pupils didn't have time to finish the task. They were told they could use the "Mail Box" (An Internet mail account) to send their work to the teacher. They could send it as a Word text or digitalized from their paper work sheets. Teacher corrected and gave suggestions via mail. Actually he received only some of the works and gave feedback of them. Nevertheless he decided to discuss some of the test aspects in the next class, with all the students.

2.2.3 Noticing & Explaining

Another activity for the classroom that gained some extra interest when was transformed in a contest. In the "Jokes Store" there are some cartoons displayed. Children were told to see and analyze one in particular and to answer some questions about it. This could have been made using the e-mail account. First place we have told children, to write us their findings. The contest, in terms of a series of questions, was intended to see who could notice the most details and to connect what could be seen with mathematic aspects. The following questions are some examples of those asked: Are these numbers a pair? Why? Is the number an odd number? Why? What does the polygon comment means? Why we say that a 0 in the left has no value[1], and questions like these.

Another task was made with photos, making use of the "Photo Contest", whose photographs were displayed in 4th floor store "Gallery"

When we received our student's mails with the material for the contest, we had to ask most of them to reformulate their works, because they didn't match with the contest goals. Eventually some of the works were useful, but we decided to use some photos taken by us, because they were best fitted for the activity we had in mind.

And so, we published in the 2nd floor' s Shop number 2 ("Sauna") a photo that was taken in Barcelos, so that students could answer the following questions: Where was this photo taken? What does it show? At what time of the day was it taken? Why do you say that? What Mathematics' elements can you see in the image? Can you find any element built with the help of a translation? Which is it?...

As soon as we started to receive answers, they were analyzed and the best of them were published in the same shop for further discussion. Nevertheless we wrote back to the students,

[1] In Portugal we use the expression "being a zero on the left" to refer to someone who we think is worthless.

giving some suggestions of analysis, ask them to improve their answers, and urge them to write us once again.
Two weeks later we discussed the task in the class. We urged those students who had not succeed in doing the task, or didn't care about making it, to write and send now their (improved) answers.

2.2.4 Dynamic Geometry *(Using GSP and preparing Geogebra)*

In this communication I'm going to show an activity made with *Geometer's Sketchpad* and not with *Geogebra*, because my students used the *GSP* to do it. This fact was concerned with my very poor proficiency with *Geogebra*, fact that is my strong intention to change in a short period of time. This activity was made only by me and not by my other colleagues, because I had it planned since last year, and I decided to risk it alone.
Following to some class sessions using *Geometer's Sketchpad*, I intended to evaluate student's proficiency and ability to answer some geometry questions and justify their reasoning. So, I made a worksheet were children could answer. Students were told that they must do all they could and send me their works by mail, so that I could analyze, give them feed-back, and then making a brainstorming session the following week.
Most children did as I ask, sending me their works, and I wrote them back giving suggestions of improvement. In the following class we were able to discuss some of the answers and improve reasoning methods. Some of the works were displayed in 2nd floor in "Geometry shop"

2.2.5 Researches

The researchers can now use Mathshopping to have access to various links on various subjects, or they can suggest other links they consider useful.
The research work can be made in two steps, using the "mailbox". First step, children send their researches and wait for us giving them feedback.
Next step consists in students sending us the complete research work. These works or at least those we consider the best ones will be published and discussed.

Expected conclusions

"Mathshopping" is an experimental long-term project, thus is difficult to foresee conclusions. Nevertheless children are showing great enthusiasm when told about the project, and have even made some works to be stored and shown in the "mall".

At the moment we have a great number of students that are using Mathshopping, not only to show up their works but also to train for national and school evaluation proofs.

Nevertheless we still don't know if this project is a success or a failure, because we didn't have enough time to evaluate it properly. There are a great number of students in our school that don't care about Mathematics, and don't use "Mathshopping". There are also some teachers that see "Mathshopping" as overwork, and still haven't used it or told their pupils todo so.

This is a very young project that needs time to show its real power.

For now, we had a great deal of enthusiasm from pupils and teachers, and not only students as well as teachers showed us they were interested in participate, giving cooperation.

Time and performances will show whether Mathshopping is a useful tool or just a well intended worthless curiosity.

References

Lehrer, R. e Chazan, D. (1998): *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* London: Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Mason, J. (2003). The discipline of noticing. In *Actas do Encontro A Matemática e A Criança.* Viana do Castelo (cd-rom).

Ministério da Educação-Departamento de Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico, competências essenciais.* Lisboa: Antunes & Amílcar, Ldª.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R. (1997). Meaning mathematically with computers. In T. Nunes e P Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics-An international perspective*. Hove: Psychology Press, Ltd.

Ministério da Educação (2008). *Mathematics National Curriculum for Basic Education.* Lisboa : Direcção Geral do Ensino Básico.

TIMSS (2007) results http://www.dgidc.min-edu.pt/inovbasic/proj/timss/

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Un logiciel pour le développement d’activités d'apprentissage en géométrie analytique[i]

José Carlos Cortés Lourdes Guerrero
jcortes@umich.mx gmagana@umich.mx
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Mexique

Abstract

Learning mathematics is one of the main objectives of the education system at all levels of training. The process of teaching and learning resources designed to promote understanding of concepts by students. In this regard, it is important that class, we make use of all resources and tools possible in order to promote learning. In particular, technology and software designed for educational purposes have been useful to teaching in many areas of mathematics, especially those with close relations with "the visual and graphic representations. We present here the results of experiments, activities around the design involves RecCon interactive environment. These activities aim to promote understanding of concepts and develop skills among the students, relating to themes of analytical geometry during high school and college. It also describes the main features of the dynamic design of software that allowed the system's development and activities.

Introduction

Le présent texte vise à documenter la conception des activités interactives d'apprentissage, sur des thèmes du cours de géométrie analytique du «bachillerato» (soit à un niveau qui équivaudrait plus ou moins à la 5^{e} secondaire ou à la 1re année de Cégep), en mettant l'accent sur les idées et les processus centraux du curriculum. Nous y exposons également les principales caractéristiques de conception du logiciel dynamique RecCon, celles-ci ayant permis le développement des activités en question.

Les fondements théoriques de cette conception reposent sur le fait qu’en mathématiques, il est nécessaire de présenter et traiter les objets mathématiques selon différents registres de représentations (Duval, 1988), non seulement pour varier la façon dont se communiquent les connaissances mathématiques aux étudiants, mais aussi pour que ceux-ci interagissent avec ces objets, afin qu'ils puissent les reconnaître, les comprendre et savoir comment les utiliser de façon appropriée. C'est l'expérimentation et la manipulation interactive des objets mathématiques qui favorisent la compréhension et les traitements adéquats de ceux-ci.

Disposer à tout moment de différentes formes de représentations, selon différents registres, d’un objet mathématique donné, de sorte qu’on puisse en extraire l'essence même, conduit à une meilleure compréhension des concepts et des notions liés à cet objet. L'ordinateur est l'un des meilleurs outils à cet effet, lorsqu’on peut s’appuyer sur le logiciel approprié, au regard des buts spécifiques d'apprentissage.

Le cours de géométrie analytique du «bachillerato» inclut généralement l'étude de la droite et des coniques, selon leurs différentes représentations. Or, la conversion entre les différents registres de représentations est précisément l’un des processus fondamentaux de l’apprentissage ici visé. Ainsi est-il escompté que les élèves apprennent à tracer le graphique d’une conique dont l’équation est donnée (c'est-à-dire à effectuer une conversion du registre symbolique au registre graphique, selon la théorie de Duval (1993)), apprennent à reconnaître les coniques à partir de l'identification de caractéristiques spécifiques, ou encore à mettre un graphique spécifique en relation avec une équation (DGB, 2006). Ces représentations peuvent être déployées de manière efficace grâce à l'utilisation d'un système informatique, associé à un logiciel conçu en fonction du type d'activités d'apprentissage qui se seront avérées performantes.

La conception efficace d'un logiciel éducatif doit être fondée sur des modèles d'apprentissage qui peuvent être articulés à l'intérieur d'un environnement technologique. En outre, l'implémentation doit être exempte d'erreurs de programmation, celles-ci étant trop souvent associées à l'incapacité de l'ordinateur de réaliser certains processus et de traiter certains concepts mathématiques, en particulier ceux qui sont liés à la variation continue, ou à la définition d'un domaine de variation spécifique.

Description et conception du logiciel RecCon

Une des plus grandes potentialités des logiciels et de la technologie est leur capacité à représenter les objets mathématiques et à permettre leurs interactions ; ces caractéristiques permettent d'augmenter et d'améliorer les ressources pour l'apprentissage des mathématiques, grâce aux logiciels éducatifs spécifiques. En particulier, le logiciel dynamique donne à l'étudiant l'opportunité de travailler les mathématiques selon une approche constructiviste, à travers laquelle son activité est plus conforme au véritable travail mathématique, privilégiant l'exploration, la découverte et l'énonciation de conjectures.

Le registre graphique est un registre de représentation particulièrement important en géométrie analytique. Dans le logiciel RecCon (droites et coniques) sont intégrés des algorithmes fondés sur des méthodes graphiques particulières, comme la paramétrisation (Guerrero & Morales, 2007), pour ainsi générer un logiciel éducatif dynamique et robuste, qui a servi de plate-forme pour l'implémentation d'activités d'apprentissage qui font intervenir, en même temps, différents types de représentations (tableaux, graphiques et équations) permettant à l'étudiant-utilisateur d'interagir directement, pour changer les données, manipuler des graphiques ou générer des équations.

Cela inclut des activités et des exercices donnés dans une forme semi-aléatoire, où l'utilisateur a la possibilité de répondre et d'être évalué immédiatement. Les réponses de l'utilisateur peuvent être données par la manipulation d'un graphique, l'entrée de données numériques ou algébriques (Cortés, 2005).

Les activités proposées dans RecCon

RecCon comprend des activités visant à:

a) aider l'utilisateur à identifier les unités significatives (Duval, 1988) dans une équation, un tableau ou un graphique;
b) encourager la mise en œuvre de la composante visuelle dans les processus de traitement et de conversion entre les registres de représentation.

Les objectifs didactiques visés par les activités sont :

1. De donner à l'étudiant l'opportunité de travailler dans un environnement interactif, qui intègre simultanément trois registres différents (numérique, algébrique et graphique) de représentations manipulables.

2. De déployer une stratégie éducative d'un point de vue informatique, pour aborder les thèmes spécifiques des mathématiques du «bachillerato».
3. De faire en sorte qu'on puisse compter sur un logiciel intégrant des activités utiles, tant pour les enseignants que pour les étudiants.

Les contenus thématiques sont en phase avec les lignes curriculaires directrices du cours mentionné. Il s'agit ici : du plan cartésien et de la distance entre les points, de la droite, du cercle et des coniques (DGB, 2006). Dans RecCon, ces sujets thématiques ont été structurés en un menu (voir Figure 1), donnant accès aux options qui constituent en fait une variété d'unités significatives (ordonnée à l'origine, abscisse à l'origine, etc.) associées à ces sujets.

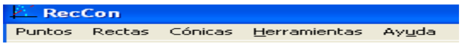


Figure 1. Les sujets thématiques dans le menu principal RecCon

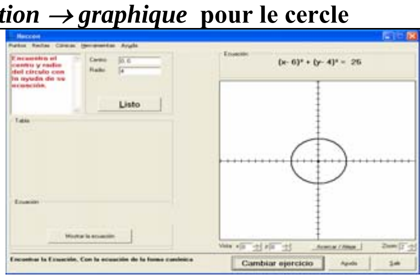
Afin de montrer le travail de conception lié aux séquences d'activités implémentées dans RecCon, nous présentons dans ce qui suit certains éléments d'une séquence d'activités portant sur le cercle.

Des activités portant sur le cercle

L'étude du cercle est une des activités fondamentales de la géométrie analytique. Au niveau scolaire qui nous occupe, ce concept peut servir à établir un lien entre la géométrie euclidienne et la géométrie analytique. En effet, tout comme pour la droite, il s'agit là d'un concept qui est étudié dans les deux domaines. L'objectif des activités dans RecCon est d'établir les relations entre les unités significatives et les caractéristiques que présente l'équation du cercle ; autrement dit, mettre l'emphase sur le traitement graphique et sur les conversions

$$\textit{graphique} \rightarrow \textit{équation} \quad \text{et} \quad \textit{équation} \rightarrow \textit{graphique}.$$

Activité de conversion *équation* → *graphique* pour le cercle

Pour travailler cette activité, on sélectionne l'option ***encontrar el centro y radio*** → ***con centro, radio y gráfica***, ce qui activera un écran semblable à celui de la figure 2.	 Figure 2. Interface des activités portant sur le cercle

La tâche de l'utilisateur consiste à manipuler et ajuster le cercle, le déplaçant à partir de son centre et le dilatant à partir de son rayon (voir Figure 3), pour que le graphique corresponde à celui de l'équation qui est présenté (voir la séquence des figures 4 à 6).

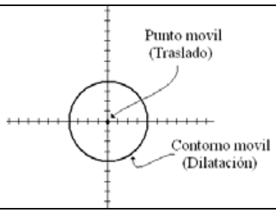


Figure 3. Deux façons de faire un traitement graphique du cercle

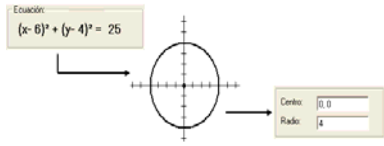


Figure 4. Situation initiale de l'activité

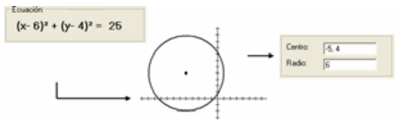


Figure 5. Résultat après un premier traitement

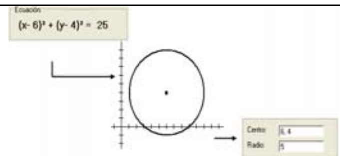


Figure 6. Réponse attendue

Activité de conversion ***graphique*** **→** ***équation*** **pour le cercle**

Ces activités sont activées par la suite de commandes ***encontrar la ecuación → con centro, radio y gráfica***, dont l'interface est celle qui apparaît à la Figure 7.

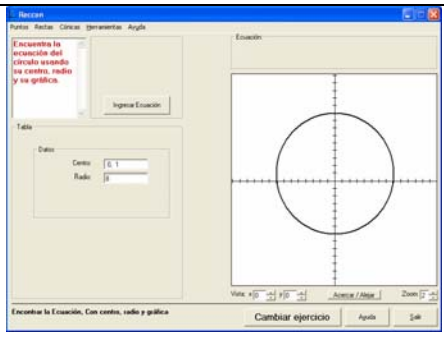


Figure 7. Interface des activités ***graphique*** **→** ***équation*** **pour le cercle**

Deux caractéristiques de cette interface sont les suivantes :

1) la zone de données, où sont représentées numériquement les caractéristiques du cercle donné graphiquement

2) le bouton pour entrer l'équation, qui permet d'afficher une calculatrice spéciale incluant les structures symboliques spécifiques aux coniques, facilitant ainsi l'encodage de l'équation (voir figure 8).

Lorsque l'on considère que l'encodage symbolique rentré via la calculatrice correspond à l'équation du cercle donné graphiquement, on appuie sur la touche 'terminar', qui permet une évaluation immédiate de la réponse.

Figure 8. Une calculatrice à structures symboliques spécifiques aux coniques

Conclusions

L'informatique fait partie de notre vie quotidienne; en particulier pour ce qu'il en est de la mathématique, l'informatique est en train de changer la façon même dont on l'enseigne et l'apprend. En tels domaines de la connaissance, la technologie et les logiciels éducatifs ont une grande potentialité comme outils d'apprentissage, parce qu'ils donnent un accès facile à de multiples registres sémiotiques de représentation et à des formes de visualisations qui font partie des mécanismes essentiels à la compréhension des concepts (Hitt 1998).

La géométrie analytique est un de ces domaines; en effet, la visualisation graphique et les diverses représentations — symboliques, graphiques, sous forme de tableaux— y sont nécessaires pour analyser et comprendre les idées et les concepts fondamentaux. Il est donc important de générer des ressources pour appuyer l'enseignement, de façon à donner aux étudiants la possibilité de comprendre les idées et les concepts de la géométrie analytique, dans un environnement d'apprentissage dynamique qui leur permet de travailler ces mathématiques à un niveau expérimental.

RecCon est un logiciel éducatif dont la conception est basée sur l'utilisation et la coordination des différents registres de représentation, en vue de l'apprentissage des concepts mathématiques. En outre, il s'agit d'un logiciel robuste, dont les algorithmes sont conçus pour garantir l'efficacité dans le traitement et la conversion des trois différents registres de représentation que le logiciel permet de manipuler, à savoir les registres graphique, symbolique et numérique.

Bibliographie

Cortes, C. (2005) Manual del Software RecCon.

DGB (2006). Dirección general del Bachillerato. Página de Internet de la Secretaría de Educación Pública. Disponible en: http://dgb1.sep.gob.mx. Consultada el 23/02/2006.

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: l'Articulation de deux registres. En *Annales de Didactique et de Sciances Cognitives*. (1988). pp. 235-253.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de las matemáticas.* SME-CINVESTAV, México, pp. 118-144.

Guerrero, L., Morales, Ch. (2007) Una mirada al interior del software dinámico: el caso de las cónicas. En: *Memorias del Primer Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. UMSNH-CINVESTAV. México 2007, pp. 49-60.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum, *Revista de Educación Matemática*, Vol. 10, 1998.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Visualization of the `Fundamental Theorem of Algebra`.

J. Klasa-Bompoint, Collège Dawson, Montréal, Canada.

J.L. Soto, University of Sonora, Hermosillo, México.

Résumé

Inspirés par la démonstration de Gauss du Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFA), nous avons conçu un instrument pédagogique, le ' grapheur' ; c'est une suite de codes en Maple exhibant dans le plan complexe, à la fois les racines et leurs multiplicités pour toute équation polynomiale. Dans les cégeps (collèges au Québec) et universités, les étudiants utilisant le 'grapheur' surtout comme une boite noire, vont saisir le sens du FTA de façon inductive. Nous allons montrer le groupe d'activités proposées aux étudiants de la Faculté de Génie, à l'Université (UNISON) du Sonora, Mexique.

1. Introduction.

Since the 90's we have faced many reform movements in the teaching of mathematics at the college and university levels; the emphasis has been directed to the facilitation of algebraic calculations, the visualization of concepts together with more socialization (Collaborative learning). Many mathematicians and teachers advocate the use of CAS (Computer Algebraic System) to relax the students from algebraic calculations but which allows them to explore concepts and test their intuitive ideas. However, as M. Artigue warns us [1], we have to be aware that Mathematics learned in such an environment of software are changing.

Also nowadays we become more and more interested in using the History of Mathematics [8, 9] as a pedagogical tool; in the past, mathematicians were proving deep theorems using long discourses illustrated by many graphics drawn at times with big ingenuity. Then, the formalization of mathematics has pretended to replace the old mathematics by a new simple, logical, symbolic and unified branch of sciences called by the French Bourbaki group "La Mathématique ". Mathematics became then one very sophisticated discipline enjoyed very much by the experts who unfortunately were unable to communicate it to most students. We have to go back to the past in order not to forget the origins of this science. Now in our world of technologies, it becomes easy to transpose old works and ideas to our students.

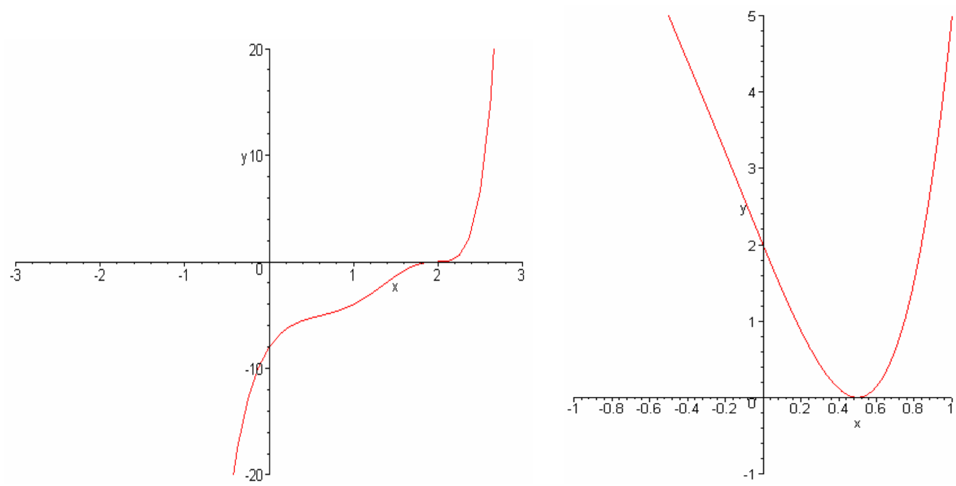
We are going to present a pedagogical scenario, designed for a better understanding and use of the Fundamental Theorem of Algebra. It is based from ideas of Gauss found in his first proof of this theorem in 1799 ([8] Van der Waerden, 1985, pp 95-97). Gauss was using polar coordinates in his proof but we found it easier for our students to change to cartesian coordinates. Our set-up, a tracer of roots which exhibits also their multiplicities, is written using Maple as a CAS.

2. Motivation for the scenario.

We observed that our students in Canada and Mexico show difficulties in grasping the meaning of the Fundamental Theorem of Algebra (FTA): Any polynomial function p(z) of degree n over **C,** the field of complex numbers, can be factorized as

$a_n(\prod_1^k (z-c_i)^{n_i})$ where we have k different values c_i (roots of the polynomial) of multiplicity n_i satisfying to $\sum_1^k n_i = n$, the degree of the polynomial $p(z)$. If the polynomial is with real coefficients, we will have real roots together with pairs of complex conjugate roots.

This theorem is crucial obviously in any university course of Abstract Algebra but also for beginners in cegeps for the first course of Calculus. Students at the secondary level, in both countries, have handled quadratic equations, exercised with algorithms of factorization and learned finally the so-called quadratic formula. The case of double roots brings some difficulties but the trouble-maker is surely the case with no real roots. Moreover students who believe only in the factorization procedure will too easily dismiss irrational solutions. On the other hand, students have few problems to interpret their algebraic work on the graph of the parabola. At their level, very few students pay attention to the implication of the degree 2. Arriving at the cegep or at universities, many students feel uneasy when asked to associate the x-intercepts of graphs of polynomial functions with the roots c_i obtained in the factorization. Moreover they have to be taught that the oddness or evenness of multiplicities will affect the types of x-intercepts, crossing or tangent points. If we ask students to guess an algebraic factorized form for the following graphs of polynomial functions:



they will, guided by their teacher, find out that in the first case the polynomial is of the form: $c(x–2)^n Q(x)$ with n equal to an odd integer and $c \geq 0$; while in the second case it will be of the form $c(x–½)^n Q(x)$ with n equal to an even integer and again $c \geq 0$. Of course it is very hard from those samples of graphs to detect any irreducible factor Q(x) like $(x^2 + 1)^k$ (which will increase the degree to $n + 2k$. Now at the University of Sonora, Mexico, students from Sciences and Engineering, taking a course of Abstract Algebra used to show incomprehension of the FTA. This is why J.L. Soto [7] started to design the tracer of roots with multiplicities. The hope was that students equipped with such a tool will grasp the meaning of the theorem in an inductive way. Before working with the tracer, J. Soto's students learned first about the field of complex numbers and its graphical representation by the Cartesian plane.

3. The tracer: didactic tool to analyze all roots of a polynomial equation.

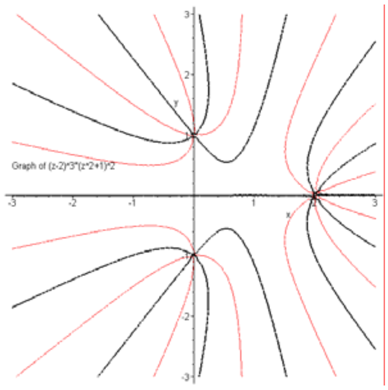
For our pedagogical scenario, we propose alternative graphs in the complex plane plotted by Maple, which will explicit all real and complex roots and as well their multiplicities. For each polynomial with real coefficients $p(x)$, we can replace it by a polynomial with the complex unknown

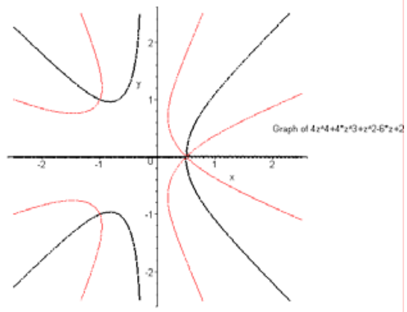
$z = x + iy$

Maple will calculate easily the real part $u(x, y)$ and the imaginary part $v(x,y)$ satisfying to:

$p(z) = p(x+iy) = u(x,y) + iv(x, y)$.

The solutions of the polynomial equation $p(z) = 0$ are then obtained by solving the system of equations $\{u=0,\ v=0\}$. We ask Maple to graph the curves $u(x, y) = 0$ and $v(x, y) = 0$ on the same Cartesian plane; students will be shown that each point (x_0, y_0) of intersection represents a complex solution $z_0 = x_0 + i\,y_0$ and moreover the number of pairs of branches (curves or lines) meeting at that point (x_0, y_0) gives the multiplicity of the root z_0.





Now students could detect that for the first polynomial of odd degree, there are one real root equal to 2 with multiplicity 3, number of branches of curves that meet at the point (2,0) and the pair of complex conjugate roots i and $-i$ of multiplicity 2, number again of branches that meet at that point (0,1) and (0,-1). The first given polynomial function is $(x - 2)^3 (x^2 + 1)^2$. On the other hand the second polynomial of even degree has the real root ½ of multiplicity 2 and a pair of complex conjugate roots $-1 + i$ and $-1 - i$ of multiplicity 1. This polynomial was $4x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$ which factorizes into $(2+2x+x^2)(2x-1)^2$.

J. Soto already tested the tracer for a group of 32 students in Sciences and Engineering, in their first semester, taking the course of Abstract Algebra.

J. Klasa plans to use this pedagogical tracer, next Fall Semester, at the beginning of her class of Calculus I.

4. Didactic sequence organized at the University of Sonora.

The sequence is composed of 8 workshops using the tracer. For the two first, students had to deal with quadratic polynomials and products of those. They were asked first to find algebraically all roots and their associated multiplicities and only then to compare their results with the graphs given by the tracer. With those two activities, students got used to the tracer and could still rely on their previous knowledge acquired in high Schools. The aim of the six other sessions was to construct bases for the learning and understanding of the FTA. The sixth activity referred to a polynomial equation of degree 5 with complex coefficients. Then the two last ones involved students creating their own polynomial equations, finding patterns and wording out the FTA. We intend to give separately, during our presentation, an English version of these eight workshops together with the Maple codes for the tracer.

5. Final Considerations and Conclusions.

This scenario can be edited as a sequence of computer-lab works to hand out to students at the beginning of a course in Abstract Algebra, Functions and Differential Calculus. A set of Maple instructions: the tracer, is provided to students who can adjust them for each particular exercise. The tracer will take the role of a black box in the hands of the students. During the first workshop, students will only review quadratic formulas and will gain understanding of our pedagogical tool and at the same time they will get acquainted with the field of complex numbers; they will start to associate the intersections of the curves implicitly defined to solutions of equations and then will be able to experiment with more sophisticated polynomials and curves. However this didactic scenario is not a proof of the theorem but just an inductive graphical approach to it.

Bibliography

[1] Artigue M., 2002. *Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work,* International Journal of Computers for Mathematical Learning,
Volume 7, pp. 245-274..
[2] Dubinsky E., 2002. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, New ICMI Study Series, Volume 7, Springer, ISBN 978-0-7923-7191-5 (Print) 9780-306-47231-2 (Online)
[3] Klasa J., Oktaç A., Soto J., 2006, *Conics, Quadrics and Change of Bases.* Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics. Istanbul, Turkey: Wiley & Sons.
[4] Molina Zavaleta J.G, Oktaç A, *Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico*, 2002.
[5] Sfard A., 1992. *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function*. In G. Harel G. & E. Dubinsky (Eds), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 59-84) Washington, D.C. Mathematical Association of America.
[6] Soto, J. L. 2003. *Un Estudio sobre las dificultades para la conversión grafico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales,* Tesis de Doctorado, sin publicar, México, Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN
[7] Soto, J.L. 200?, *Graficando Raíces de Polinomios con Maple: Una Aproximación Inductiva al Teorema Fundamental del Algebra*, ¿???
[8] Van der Waerden B.L., 1985*, A History of Algebra, Berlin*: Springer-Verlag.
[9] Wheeler D., 1996), *Backwards and forwards: Reflections on Different Approaches to Algebra*. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds) Approaches to Algebra: Perspective for Research and Teaching(pp. 317-325) Dordrecht: Kluwer.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

E-LEARNING APPROACH IN MATHEMATICS "PRE-COURSES" WITH MOODLE: A PROJECT FOR THE CONTINUITY SCHOOL-UNIVERSITY

P.G. Laiolo[(1)], O. Robutti[(2)], A. Sargenti[(3)], C. Testa[(3)]
[(1)]Istituto Magarotto, Torino
[(2)]Dipartimento di Matematica, Università di Torino
[(3)]SIS Piemonte

Résumé

Depuis quelques années, une attention est portée aux difficultés qu'éprouvent les élèves en mathématiques (Sierpinska, 2006). En fait, la formation mathématique des étudiants ne semble pas satisfaisante lors de leur entrée à l'université. Il semble y avoir des difficultés lors du passage de l'école secondaire à l'université. En Italie, ce problème est important et cause dans certains cas, un faible taux de réussite ainsi que l'abandon des études universitaires (Zan, 1997). Ce problème est vécu dans les classes de sciences et tout particulièrement dans les classes de mathématiques (Albano, Bardelle et Ferrari, 2007). C'est pour cette raison que plusieurs projets ayant pour objectifs de réduire le fosse entre l'école et l'université ont été mis sur pied (Albano, Bardelle & Ferrari, 2007; Di Martino & Maracci, 2007; Robutti et al., 2008), non seulement en Italie mais aussi dans d'autres pays (voir par exemple, Nardi 2008, à propos du défi intéressant pose par le dialogue fructueux entre les chercheurs en mathématiques et en enseignement des mathématiques au niveau universitaire). Ce qui ressort de ces études est l'importance d'accueillir les étudiants à l'université et de travailler avec eux non seulement au niveau cognitif (ce que les mathématiciens font habituellement dans les cours universitaires) mais aussi à un niveau méta-cognitif (ce que les chercheurs en enseignement des mathématiques préconisent à tous les niveaux scolaires). Durant les deux dernières années, nous avons mené un projet visant cette transition entre l'école secondaire et l'université dans le but d'éviter les abandons ou les échecs lors des examens. Le projet consiste en un cours (appelé pré-cours) basé sur le e-learning avant le début des cours universitaires et après la fin de l'école secondaire (la période est mi-septembre). Ce cours est composé à la fois de leçons en classe et de leçons à distance avec la plate-forme Moodle. Les leçons en classe sont composées de contenus théoriques et d'activités organisées davantage autour de compétences que de contenus tandis que la plate-forme rend possibles des activités à distances que les étudiants peuvent faire individuellement ou en coopération.

THE PROJECT

The work presented is a local pilot project funded by the Science Faculty of Turin University, in Italy. This project consists in the development of innovative learning paths (the pre-courses) prepared for first year students. Its aim is filling the gap of knowledge and skills (methodologies, mathematical languages, contents) between high-school and university classes. Throughout the pre-courses we teach the students to face high-school topics in an integrated framework, using competences related to graph sense, symbol sense and number sense, looking at and thinking of a mathematical object according to its multiple representations and its meaning. To manipulate mathematical objects using different representations integrated together seems to be not known by some of the students coming from high school, and it becomes the main approach of the project's activities. This approach should be a habit for all the students during the pre-courses, and it can contribute to build some competences necessary at university level. This approach is based on the construction of mathematical meanings, more than on the use of pure techniques. And it is compatible with the issues of PISA tests, based on the evaluation of mathematics literacy. The use of Information and Communication Technology (ICT) supports this approach at a double level: at mathematical content level and at methodological level, in order to create a community of practice (Wenger, 1998).

In order to obtain continuity in the passage school-university, we choose to have two teachers simultaneously in the class: one of high school and the other of University. Master University students and tutors are also present in the class, to help the teachers in managing activities. The different contributes coming from all the group members (teachers, professors, researchers, tutors) are uploaded on a e-learning platform (Moodle), where the students have access to the materials and we are able to monitor their activities. The project is in its second year of development and hopefully it will be extended to other faculties.

Furthermore this year we decided to videotape the classes, in order to observe students' processes and to improve teaching.

The involvement of many people in the class gives a support not only to teaching, but also to: feedback collection, students in difficulty, exercise correction, organisation of the material on the platform and distance tutoring.

THEORETICAL FRAMEWORK

In order to construct meanings of mathematical objects with the integrated use of multiple representations, our research takes into account recent Mathematics Education studies that identify, as important learning requirements, the competences related to the "number sense", the "graph sense" and the "symbol sense". In the Curriculum and Evaluation of Standards for School Mathematics (1989), the National Council of Teachers of Mathematics defines the number sense as "an intuition about numbers that is drawn from all the varied meanings of number. It has five components: 1) having well-understood number meanings, 2) developing multiple relationships among numbers, 3) understanding the relative magnitudes of numbers, 4) developing intuitions about the relative effect of operating on numbers, 5) developing referents for measures of common objects". Sowder (1992) underlined that computational estimation and mental computation are very important in building the number sense, hence all the activities that develop these skills are crucial for students as future citizens. Arcavi (1994) introduces the notion of symbol sense as a "desired goal for mathematics education". According to him, symbol sense is not only based on understanding the power of algebra and knowing as applying rules, but also having the skill of abandoning symbols in favour of other representations, of manipulating and "reading" symbolic expressions and of being aware of the constant need to check symbol meanings in the various contexts. He stresses the fact that students are often able to manipulate symbols, but even if they know when the use of symbols is appropriate, they do not have the ability to associate a meaning to symbols in a range of different contexts. Indeed, symbol sense is not just the capability to manipulate symbols fluently: it "should become a part of ourselves ready to be brought into action at almost the level of a reflex" (Arcavi, 1994, pp 32).

As the previous senses, even the *graph sense* (Robutti, 2003) is related not only to the mere ability of representing points or curves in a graph, or to read coordinates on a graph, but also, more generally, to decipher the variety of information contained in a graph, both at a global level and a local level, to produce graphs representing functions, models, phenomena, to distinguish between discrete and continuous representations, to keep in mind the scale factors. And as the previous sense, also the graph sense cannot be defined, but only described in terms of competences and exemplifications. For example: to transfer onto a graph a model described in natural language, or through number tables, or even in symbols; to evaluate the boundary conditions, according to the problematic situation and the context; to describe the variation of a quantity in relation to another quantity through a qualitative graph; to compare different graphs and to make comparisons in terms of slope and changing of slope, and so on (Robutti, 2006). With this frame, we planned a path of the pre-courses where the competences to construct were those related to the three previous senses, integrated together. And in doing so, we supported visualization of mathematical objects with the use of a software as Geogebra, for the possibility of representing them in various ways, along with that of moving and changing them in a dynamical way.

MOODLE AND COMMUNITIES OF PRACTICE

The materials and activities of pre-courses have been used not only in presence, during the classes, but also at distance, through the use of a platform course on Moodle, an open-source software, thought to share materials (glossary, applets, videos, pdf files) and to organize online activities (homeworks, questionnaires, tests, forum, wiki, and so on). we put the materials on the platform, organized in this way:

1. Exercises: those solved in presence and new ones;
2. theoretical notes: written with a simple language, not too formal;
3. Java applets: interactive mathematical objects on functions, equations, inequalities;
4. Periodic tests and questionnaires to monitor the learning situation.

The activities are hence organized in a blended way.

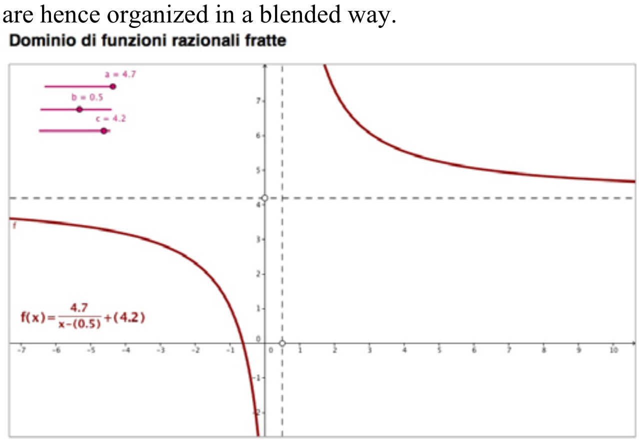


Figure 1. An applet

The use of a platform comes from the idea that learning is a deepening process of participation in a community of practice (Wenger, 1998), and not only an individual action. Working in presence and at distance we contribute to the construction of a learning community of students, giving them the possibility to cooperate and interact not only in the class, but also at distance, through the platform. In this way, learning becomes an ensemble of renewed and continuously evolving relations between people (Lave & Wenger, 1991).

Moodle is not only a database where the teachers store the class materials; it also affords to examine all the students' access data, providing information of their learning needs. Moreover, the possibility to share applets on the platform supports competences related to the integration of symbolic expressions, number tables and graphs, according to the aim of the project. The applet let be possible the observation of the variation of a mathematical object in one register (e.g. graphical), causing the simultaneous variation of the same object into another register (e.g. numerical). This observation helps students to understand the connections among them and to make sense of the mathematical objects and of solving processes.

BRIEF DESCRIPTION OF THE PRE-COURSES

The pre-courses offer three different teaching approaches (they are not mutually exclusive): a short blended cycle of two weeks classes (4 hours per day), before the beginning of the Academic year, a long blended cycle of three months (2 hours per week), during the first year, and a distance course on the Moodle platform.

Before attending the pre-courses, students are tested with a questionnaire (TARM), in order to evaluate their basic skills, without giving them an examination score and without selecting them. The aim of TARM is only to orient students toward pre-courses or not. Students' performances are classified as A (high scores), B (medium scores) and C (low scores). C- and B-students are respectively strongly and mildly encouraged to attend pre-course, while no indication is given to A-students, who, sometimes choose to attend it.

After the short pre-course a self-evaluation test gives students a feedback on their competences and eventually evidences the need to attend the long pre-course and to use the on-line materials.

METHODOLOGY RESEARCH AND PRELIMINARY DATA ANALYSIS

About 100 students are the people who follow the pre-course of two weeks. They are divided into two classes, in order to be better followed by teachers and tutors. Each class follows the same program, based on: numbers, numerical sets, early algebra, pre-calculus, trigonometry and analytic geometry. This program is carried out with a very simple language, not in a formal way, aiming at constructing meanings and seeing mathematical objects in different registers, integrated together. In each class there is a master degree student who videotapes the theoretical activities, based on lectures and brief discussions among the students and the professor. Every morning, after two hours of theoretical lessons with a university teacher and a high school teacher simultaneously present in the class, there are two hours of activities about the topic treated in the first hours. These activities are carried out with the presence of the high school teacher and a young researcher (with the role of tutor), in each class.

The data at our disposal are: videos, feedback questionnaires (filled every day by the students) and tests (at the beginning, in the middle and at the end of the pre-courses). We examined the data with a double aim: a didactical aim, of improving students' careers at university and working in continuity with high school, and a research aim, of observing students' cognitive processes, in their dynamical evolution in presence or at distance, during the pre-courses activities. This evolution depends not only by the effective results of the pre-courses, but also by the history every student has in her/his previous scholastic career. So, students' beliefs about mathematics, competences in calculation and algorithms, use of technologies and self-confidence in approaching the discipline are the results of their previous experiences.

We have at our disposal a profile of the students that gives information on their competences related to the high school attended, and a feedback about our didactic methodology. This data analysis is still in progress.

In the daily feedback questionnaires, the questions were of this kind: did you know the topic of today? Was this topic approached in the same way as that used in the pre-course? If you did not know it, did you have any difficulties? And so on…

The daily feedback gave us information for choosing the activities to give them, for deepening some topics and for having information about our methodology.

We have information of every student, about: high school attended, time used for studying mathematics, success in mathematics in high school, competence in using technologies at high school level, knowledge of mathematics contents at high school level, difficulties in each content, feedback of methodology used in pre-courses and comparison with methodology used in high school, opinion about pre-courses.

The complex and rich information coming from the students' suggests to share results of the project pre-courses with high school teachers, so we began another project (DI.FI.MA.) on mathematics and physics education, in order to give teachers materials and support for longlife learning in a blended approach, based on the use of a platform in Moodle and seminars, aimed at continuity between school and University. In this way, the work carried out with the students who begin a degree course in mathematics can be used to give their teachers a professional development, sharing with them not only materials, but also methodology and results from research in mathematics education.

We will present some significant examples, graphs and videos of the topics discussed.

REFERENCES

Albano, G., Bardelle, C. & Ferrari, P.L. (2007). The impact of e-learning on mathematics education: some experiences at university level, *La Matematica e la sua Didattica*, Anno 21, n.1, 61-66.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal sense-making in Formal Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 14, 24-34.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics', *Educational Studies in Mathematics* 52, 215-241 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Armano T., Console S., Robutti O., Sargenti A., Testa C., (2008). Precorsi di matematica: un progetto in continuità. Incontri con la Matematica N.22, pp.193-196.

Di Martino & Maracci, (2007): 'Il problema del raccordo Scuola Superiore-Università, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 30B n.5.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians*. Springer.

Robutti, O. (2006). Motion, Technology, Gesture in Interpreting Graphs. *The International Journal For Technology In Mathematics Education*. vol. 13 n.3, pp. 117-126.

Sierpinska, A.: 2006, 'Sources of students' frustration in bridging mathematics courses', in Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic, July 16-21, 2006, Vol. 5, pp. 121-128.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice. Learning, Meaning and Identity.* Oxford University Press, Oxford.

Zan, R., (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

IMPACT DE L'UTILISATION D'UN FORUM ÉLECTRONIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉVALUATION DE PREUVES

Manon LeBlanc, Université de Montréal
Sophie René de Cotret, Université de Montréal

One of the goals of learning mathematics is the development of reasoning, because it is essential to understand mathematics. Closely related to reasoning, the notion of proof is also fundamental in the learning of mathematics, because it allows students to establish the validity of mathematical arguments and put a sense on various concepts through logical explanation of their work. However, in spite of the importance placed on the development of the capacity to reason mathematically, several students are confronted with difficulties during the development or the evaluation of proofs. This study examined the impact of the use of a discussion forum on the development of algebraic validation skills as well as on the development of skills linked with the evaluation of the proof process in algebra with 13 and 14 year old students from New-Brunswick and Quebec (Canada). The results show that students prefer pragmatic proofs when they have to develop them but hesitate between pragmatic and intellectual proofs when they have to classify proofs from the most convincing to the least convincing. Furthermore, the value of the counter-example is not the same from one activity to the other: sometimes it allows invalidation, sometimes it doesn't.

Objectif du projet de recherche

Problématique

De nombreux auteurs soutiennent que l'un des buts de l'apprentissage des mathématiques est le développement du raisonnement, car celui-ci est essentiel à la compréhension des mathématiques (Hanna, 2000; Martin et McCrone, 2001; Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005; National Council of Teachers of Mathematics, 2005). Très liée au raisonnement, la notion de preuve est aussi fondamentale à l'apprentissage des mathématiques, car elle permet d'établir la validité d'arguments mathématiques et de conférer un sens à différents concepts à travers l'explication de l'organisation logique du travail effectué (Martin et McCrone, 2001; Miyazaki, 2000). En effet, c'est à travers le développement d'habiletés et de compétences en lien avec l'apprentissage de la preuve que les élèves apprennent à expliquer clairement pourquoi un énoncé est vrai ou encore pourquoi une solution quelconque proposée mène à une réponse correcte (Miyazaki, 2000; National Council of Teachers of Mathematics, 2005). Il est donc fondamental pour les élèves de développer une « attitude de preuve » (Brousseau, 1998), d'apprendre à utiliser les mathématiques comme des outils leur permettant d'accepter ou de rejeter les propositions, les modèles, etc. qui leur sont proposés.

Conséquemment, il n'est pas surprenant de remarquer la place importante qu'occupe le développement de différents types de raisonnements chez les élèves du primaire et du secondaire, et ce, à la fois dans les principes didactiques adoptés par les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick que dans les trois compétences qui se retrouvent au cœur des programmes de formation de l'école québécoise. Toutefois, malgré l'importance accordée au développement de différents types de raisonnements dans les programmes d'études, plusieurs élèves éprouvent des difficultés lorsqu'ils sont appelés à concevoir ou à évaluer des preuves (Balacheff, 1987; Duval, 1991; Healy et Hoyles, 2000; Miyazaki, 2000). En effet, apprendre à justifier et à valider leur travail représente un changement de paradigme pour les élèves. Ils doivent rechercher non plus le résultat, mais bien le caractère de vérité de différents énoncés. Le développement de preuves est donc un processus complexe qui requiert non seulement du temps, mais également des compétences particulières des élèves.

Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons au développement de preuves dans un forum électronique, outil de communication en ligne permettant des interactions entre les élèves et les enseignants. Ce choix repose sur des résultats de recherches qui ont montré que l'utilisation d'un tel outil permet le dépassement de limites rencontrées dans le système scolaire tout en prenant en compte les conditions sociales (Baughman, 1997; Dillenbourg et Schneider, 1995; Vieillard-Baron, 2008), les conditions temporelles (Bodzin, 2001; Curtis et Lawson, 2001; Johnson, 2006) ainsi que les conditions formelles (Baughman, 1997; Downes, 2004) nécessaires à la production et à l'évaluation de preuves.

Objectifs de recherche

Nous cherchons à :

- étudier l'impact de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques, sur le développement d'habiletés de validation algébrique chez des élèves de 13 et 14 ans.
    - identifier les types de preuves qui sont utilisés par les élèves lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation algébrique dans un forum électronique.
- étudier l'impact de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation du processus de preuves en algèbre chez des élèves de 13 et 14 ans.
    - identifier les règles du débat mathématique qui sont respectées par les élèves lorsqu'ils développent une preuve en lien avec un problème algébrique.

MÉTHODOLOGIE

Population

Des enseignants et des élèves francophones (âgés de 13 et 14 ans) du Nouveau-Brunswick et du Québec ont participé à notre projet de recherche. Plus précisément, nous avons travaillé avec quatre classes, soit deux classes situées au Nouveau-Brunswick et deux classes situées au Québec. Une classe du Nouveau-Brunswick et une classe du Québec constituaient le groupe expérimental et les deux autres classes formaient le groupe contrôle.

Cueillette des données

La cueillette des données chez les élèves s'est étendue sur une période de quatre mois et s'est faite en plusieurs étapes. Un prétest ainsi qu'un post-test ont été administrés aux élèves du groupe expérimental et du groupe contrôle. La réalisation de quatre activités mathématiques à propos de l'algèbre a eu lieu entre ces deux évaluations. Les problèmes proposés dans chacune de ces activités touchaient la recherche de régularités ainsi que la validation ou l'invalidation de conjectures. Le travail que les élèves ont accompli s'inspirait des travaux d'Arsac *et al*. (1992) et reposait sur trois temps. Ils ont eu à résoudre individuellement des problèmes nécessitant la création de preuves, à valider leur solution et celles des autres et, enfin, à comparer différentes solutions proposées à un même problème de manière à déterminer lesquelles étaient les plus convaincantes. Les échanges du groupe contrôle ont eu lieu en salle de classe alors que les échanges du groupe expérimental ont eu lieu en salle de classe et dans un forum électronique.

De plus, dans le but de mieux comprendre comment les activités ont été vécues en salle de classe, à l'extérieur de la salle de classe et dans le forum électronique, des échanges ont été réalisés avec les enseignants et avec certains élèves. Ces échanges étaient composés de questions générales sur l'intégration des TIC en mathématiques et de questions plus précises sur la preuve, notamment en lien avec les stratégies utilisées pour enseigner les notions qui lui sont relatives. Plusieurs questions ont également touché la réalisation des activités mathématiques en salle de classe ou dans le forum électronique.

Analyse des données

L'analyse du pré-test, du post-test ainsi que des traces sauvegardées dans le forum électronique s'est faite à partir d'un plan de codage définitif, soit une grille d'analyse inspirée de la mise en commun des travaux de Balacheff (1987, 1988), de Miyazaki (2000) et de Mary (1999). L'exploration et la description des phénomènes observés en ligne (productions d'élèves et commentaires) ont été analysées en partie pendant la collecte de données, soit au fur et à mesure que les activités ont été réalisées dans le forum électronique. Cela nous a permis de corriger des défauts systématiques n'ayant pas été perçus au départ (par exemple, des problèmes techniques en lien avec l'utilisation du forum électronique ou des problèmes didactiques en lien avec le choix ou la présentation des activités).

Afin d'assurer la cohérence interne des données, l'analyse des informations recueillies lors des entretiens avec les enseignants et les élèves s'est faite à partir d'un codage multiple. L'unité d'analyse fut une phrase ou un bloc fait de plusieurs phrases dans lequel apparaissait une idée. Les entretiens ont été analysés à partir d'un maître code, ce dernier ayant servi à l'élaboration des questions des entretiens semi-directifs.

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES DE L'ÉTUDE

Bien que plusieurs auteurs se soient penchés sur le développement de preuves dans un travail « collaboratif », nous n'avons trouvé aucune recherche faisant référence aux situations de validation vécues par les élèves en ligne. Toutefois, les résultats obtenus jusqu'à présent semblent corroborer les résultats de certaines recherches touchant le développement de preuves. Ainsi, dans cette section, nous présentons quelques résultats préliminaires obtenus lors de la réalisation de certaines activités de notre expérimentation. Des résultats plus complets seront discutés durant la présentation.

L'étude des erreurs selon une perspective épistémologique nous permet de constater que certaines difficultés sont engendrées par les règles de la logique naturelle, lesquelles font obstacle à la logique formelle (Arsac et Mante, 1996). En effet, les règles de la logique naturelle possèdent souvent un domaine d'efficacité suffisamment grand pour être des obstacles à l'apprentissage de nouvelles connaissances en lien avec la logique formelle. Au nombre de ces règles de la logique naturelle qui posent problème, nous retrouvons, entre autres, l'acceptation d'un énoncé par la population en général même si un ou deux exemples ne répondent pas aux exigences de cet énoncé. Pourtant, il est clairement admis en mathématiques qu'un contre-exemple est suffisant pour invalider une proposition mathématique universelle. Lors des échanges entre les élèves, le contre-exemple n'a pas toujours eu la même valeur. Dans un premier temps, les élèves ont dû identifier le caractère de vérité d'un énoncé mathématique[2]. Le contre-exemple, trouvé par plusieurs élèves, a alors suffi à invalider l'énoncé de départ (et dans certains cas, à convaincre les élèves qui avaient affirmé que l'énoncé était vrai). Or, lors de la réalisation d'une deuxième activité, un énoncé mathématique différent[3] a été présenté aux élèves. Toutefois, au lieu de leur demander d'identifier si cet énoncé était vrai ou faux, nous leur avons présenté les productions de deux élèves fictifs qui ne tiraient pas la même conclusion. L'un présentait plusieurs exemples qui fonctionnaient alors que le deuxième ne présentait qu'un contre-exemple afin d'invalider l'énoncé mathématique. Dans ce cas-ci, le contre-exemple a semblé perdre de sa valeur. En effet, plusieurs élèves se sont limités à valider les calculs présentés par les élèves fictifs et ont omis de considérer le contexte de départ, soit l'énoncé mathématique. Ils ont donc affirmé que les deux élèves avaient raison, étant donné que le travail présenté était « correct ». Ainsi, la valeur mathématique du contre-exemple ne semble pas être complètement saisie par les élèves ayant participé à notre recherche.

Par ailleurs, plusieurs auteurs (Arsac *et al.*, 1992; Healy et Hoyles, 2000) affirment que les élèves ne reconnaissent pas toujours la valeur d'un type de preuve par rapport à un autre et ont tendance à préférer les preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Nous avons observé ce phénomène lorsque les élèves ont eu à développer des preuves. Toutefois, une situation particulière s'est dessinée lorsque les élèves ont eu à classer différents types de preuves. Dans le premier cas, des preuves d'élèves fictifs leur ont été présentées. La majorité

---

2 Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier (Arsac *et al.*, 1992, p. 25)?

3 Quels que soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est toujours supérieur ou égal à chacun des deux nombres (Arsac *et al.*, 1992, p. 132).

des élèves ont alors identifié la preuve par expérience mentale[4] comme étant l'une des plus convaincantes. Dans le deuxième cas, nous avons sélectionné des preuves développées par les élèves des groupes témoin et expérimental (dont certaines ont été observées à plusieurs reprises dans les productions d'élèves). Lors de la classification de ces preuves, les élèves ont paru déchirés entre la preuve empirique et la preuve s'approchant davantage de la démonstration. Il a semblé difficile pour les élèves de se détacher du travail qu'ils avaient préalablement accompli pour évaluer les preuves de façon objective. Bref, il semble que ce qui permet de convaincre n'est pas nécessairement ce qui a la plus grande valeur de généralité. Ainsi, « se convaincre » et « rendre compte de sa conviction » peuvent prendre des formes différentes.

[4] La preuve par expérience mentale est une preuve où l'action est intériorisée. Ce type de preuve présente souvent le même raisonnement qu'on pourrait retrouver dans une démonstration, mais sa présentation finale est moins « formelle ».

Références

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon: Presses universitaires de Lyon.

Arsac, G. et Mante, M. (1996). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 21-43.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* (18), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* Thèse de doctorat inédite, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Baughman, C. (1997). Computer Country. *Bread Loaf Rural Teacher Network Magazine,* 2-3.

Bodzin, A. M. (2001, mars). *Factors That Promote and Inhibit Discourse With Preservice Teachers on a Non-Restrictive, Public Web-Based Forum.* Actes de la 12th International Conference of the Society for Information Technology & Teacher Education International Conference, Orlando, FL.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions.

Curtis, D. D. et Lawson, M. J. (2001). Exploring Collaborative Online Learning. *Journal for Asynchronous Learning Networks, 5*(1), 21-34.

Dillenbourg, P. et Schneider, D. (1995). *Collaborative Learning and the Internet.* Actes de l'International Conference on Computer-Assisted Instruction 95, Université de Genève, Suisse.

Downes, S. (2004). Educational Blogging. *EDUCAUSE Review, 39*(5), 14-26.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23.

Healy, L. et Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Johnson, G. M. (2006). Synchronous and Asynchronous Text-Based CMC in Educational Contexts: A Review of Recent Research. *TechTrends, 50*(4), 46-53.

Martin, T. S. et McCrone, S. S. (2001, 18-21 octobre). *Investigating the Teaching and Learning of Proof: First Year Results.* Actes de la 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Snowbird, Utah.

Mary, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* Thèse de doctorat inédite, Université de Montréal, Montréal.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Consulté le 20 mars 2006, du site Internet http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/secondaire/prformsec1ercycle.htm

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 47-68.

National Council of Teachers of Mathematics. (2005). *More and Better Mathematics for All Students*. Consulté le 11 novembre 2005, du site Internet http://www.nctm.org/

Vieillard-Baron, E. (2008). Un forum pour apprendre et faire des mathématiques ensemble. *Repères - IREM, 73*, 95-100.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

A KINEMATICS APPROACH TO THE FUNCTION CONCEPT WITHIN TECHNOLOGICAL ENVIRONMENTS

Maria Lucia Lo Cicero & Filippo Spagnolo
locicero@math.unipa.it , spagnolo@math.unipa.it
Department of Mathematics, University of Palermo, Italy
G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche)

RÉSUMÉ

Cet article montre les résultats expérimentaux de quelques activités didactiques conduites dans trois classes d'école secondaire supérieurs (16-17 ans) pour introduire le concept de fonction. Ces activités ils sont constitués par pratiques de modélisation des phénomènes cinématiques avec l'utilisation d'un senseur de position. Ils sont aussi constitues par un processus d'institutionnalisation et pratiques de traitements et conversions de représentation des fonctions. Notre analyse montre que les étudiantes ils ont acquis les compétences relatives a la compensions du concept de fonction et à sa application. Ces résultats ils sortent de l'analyse des leçons et du pré-test et post-test.

INTRODUCTION and aim

This research work consists of planning, development and analysis of didactical activities conducted in two classes of Upper Secondary School to introduce the function concept. We chose this area of research because the function concept is of fundamental importance in learning of Mathematics and has been a great focus of attention for the Mathematics education research community over the past decades (Gagatsis et al., 2007). Generally this concept is introduced in the textbooks by its formal definition. For students this approach is difficult and they often do not understand its meaning. Several studies have used different approaches to explore this concept. In this paper, observing that the function concept finds its historical and contextual origins in kinematics, and that the geometrical representation of function preceded the analytical one, we chose a graphing-kinematics approach.

RESEARCH HYPOTHESIS AND RESEARCH QUESTIONS

Research hypothesises:

1. *Position sensor is a learning tool to reading, understanding and interpreting kinematics graphs.* (Thornton & Sokoloff, 1990)
2. *A Mathematical concept can be conceptualized knowing its representations and being able to do treatments and conversions of its representations.* (Duval, 2002)
3. *For the most part, human beings conceptualize abstract concepts in concrete terms, using ideas and modes of reasoning grounded in the sensory-motor system.* (Lakoff & Núñez, 2000)

Research question:

Is it possible to learn the function concept with a kinematics approach using a position sensor?

THEORETICAL FRAME

Position sensor is one of MBL-tools (Microcomputer Based Laboratory), produced in the late 1980's with the central objective of helping students recognize the connections between the physical world and the abstract physics principles (Krusberg 2007). It studies rectilinear motion of bodies moving in front of it. In a fixed time interval it reveals the distance of bodies from it and transmits the measures to a computer that visualizes the data in tabular and Cartesian representations, in real time, using appropriate software (Thornton & Sokoloff, 1990). The efficiency of position sensor compared to traditional methods for helping students to learn basic kinematics concepts has been proved by several researches, such as Thornton & Sokoloff (1990), Redish et al. (1997), Liljedahl (2002), Arzarello & Robutti (2004), etc…

The idea of using position sensor to construct function concept finds a strong theoretical support in the cognitive theories of the *Embodiment of the mind* and of *Metaphorical Thought,* for which «the detailed nature of our bodies, of our brains, and of our daily functioning in the world structures human concepts and reasoning» and «for the most part, human being conceptualize abstract concepts in concrete terms, utilising ideas and models of reasoning founded on a sensor-motor system» (Lakoff & Núñez, 2000). Particularly «the functions on the Cartesian plane are often conceptualized in terms of motion on a route» (Lakoff & Núñez, 2000) and position sensor induces this type of conceptualization. In fact students experience motions with their own body and see graphs constructed under their own eyes, as concrete models of real motions. Even if, for reason of time, during the lessons not all students have the possibility of using directly the sensor, the existence of the *Mirror Neurons* (Rizzolati & Sinigaglia, 2006) in our mind assures that the same mental processes concerning movement are activated.

The position sensor is an artefact with its role of *semiotic mediator* (Vygotskij,:1978). It allows studying all the codified representations of a kinematics function. The study of the representations of kinematics functions had an important role in the modelling processes of real phenomena connected to the function concept. Using position sensor students can do a complete modelling of observed motions and study its representations. All the phases of modelling process, described by Gilbert (1998), are developed. Blum and Niss in 1989 defined five arguments as to why applications and modelling belong in the curriculum, that Lingefjärd (2006) termed as follows: formative, critical, practical, cultural and instrumental. Arzarello & Robutti (2004) already showed that position sensor could be utilized as kinematics approach to the function concept. In this paper we want to analyze deeper the potential of this artefact, in relation to the competences to acquire this concept.

As well, position motion allows transfer from one representation of function to another. According to *Theory of Semiotic Registers* by Duval (2002), one representation cannot fully describe a mathematical construct and each representation has different advantages. Using multiple representations for the same mathematical situation is at the core of mathematical understanding. A mathematical concept can be acquired only if the subject is able to do treatment and conversions of the representations of the concept. The codified representations of the function developed in different historical periods. First tables of functions appeared (2000 B.C.), then geometrical representation (middle of the 14th Century) and later analytical form (17th Century) (Youschkevitch, 1976). Using position sensor the chronological introduction of the representations of function is respected (Piaget & Garcia, 1985).

EXPERIMENTAL WORK AND RESEARCH METHOD

The experimental work consisted of ten hours of laboratory lessons, with use of position sensor and software *Logger Pro.* (We used instruments and *Data Logger* from the Venier Software & Technologies. In the same way we could have used instruments and software from other equally valid companies). Lessons were conducted by the PhD student M. L. Lo Cicero, who was also curricular teacher, in three Italian classes of Upper Secondary School:

1. 2008, 4th class of Classical Liceo (17 years), *class 4thI, Liceo Classico "Scaduto", Bagheria (PA)*
2. 2009, two 3rd classes of Scientific Liceo (16 years), *classes 3rdA & 3rdB, Liceo Scientifico S. Giuseppe Jato (PA)*

According to the specific curricula of the two courses of studies, in that scholastic year pupils would have had to study kinematics concepts, linear and quadratic functions. So the sample was homogeneous and pupils possessed the necessary prerequisites for the proposed activities.

The research methodology adopted is *Theory of Didactic Situations* by Brousseau (1997), in particular, regarding the structure of the research work and the use of concepts of *devolution from teacher to student, to take responsibility for a learning situation,* and *institutionalization of knowledge constructed by student.* The pupils studied graphs all together, with only one motion sensor. A projector visualizes the graph on the wall. The role of the teacher was to lead students towards the construction and institutionalization of their knowledge. The lessons were conducted in a constructivist way, positing questions to students to promote observations and discussions between pairs and with the teacher, allowing for the active construction of knowledge. Laboratory activity was preceded and followed by the administration of a test, with the aim of evaluating the a priori and a posteriori students' behaviours. For reason of space, in this paper we show only the analysis of the didactical activities. They were videotaped and qualitatively analysed.

The analysis of the lessons was made also referring to *APC space and Semiotic Bundles* by Arzarello (Arzarello & Robutti 2008), whose frame is based on the paradigm of embodiment mind and a semiotic analysis of students activities. The authors make a distinction between *semiotic set* (speech, gesture, inscription) and *codified semiotic system* (spoken and written language). They suggest a *synchronic analysis* and *diachronic analysis* of the semiotic sets activated by the subject, respectively, at a certain moment and in successive moments. They also introduce the term *genetic conversion* to label the transformation from a semiotic set to a codified semiotic system. According to the paradigm of embodiment mind this process constitutes the root of mathematical ideas.

SOME DIDACTICAL CONSIDERATIONS

We analyzed the definition of the function concept, in 1939 offered by Bourbaki (Kleiner, 1989). Actually it used as reference at secondary and college level. So we focused the necessary Mathematical competences to acquire this concept:

C1. Understanding the correspondence between values of independent and dependent variable;

C2. Understanding that ALL values of independent variable are in relation with values of dependent variable;
C3. Understanding that the value of dependent variable corresponding to a value of independent variable is UNIQUE;
C4. Understanding and comparing the correspondence between intervals of independent and dependent variable;
C5. Accomplishing treatments and conversions of function representations (in particular, in this experimentation pupils studied all the representation of a linear and quadratic function);
C6. Modelling realistic phenomena by function representations.

Also, we consider that in kinematics functions the independent variable is the *time,* while the dependent variable is the *space*. We have take in account strength and weakness points of the position sensor, particularly in graphic register. For example, *Logger Pro* draws only discrete function that looks continuous if we use the function “Connect Points”. We chose appropriate activities with sensor to develop the competences above. Such activities are described in the following paragraph.

RESULTS

The didactical activities are divided in six phases. We show some significant protocols about teaching/learning situations. We analyze the passage from a sensorial perception of a real phenomenon to a codified semiotic register. This passage is analyzed pointing out speech [s], gesture [g] and inscription [i].

1. Understanding correspondence between values of independent and dependent variable

In this phase the students make a reflection on the variables studied by the sensor. They observe and calculate space and time of departure and arrival, covered space and spent time.

Class: 3rd A - Leaving motion (5 seconds): A pupil (Gabriele) leaves from the sensor 3 seconds about and stays in front of it 2 seconds about.

Teacher: *What does this graph mean*? [s]

Students: *Acceleration, velocity, space, movement* [s]

Miriana: *Covered meters respect to the seconds*. [s]

Teacher: *Read the names of the axes! The horizontal axis represents the time in seconds; the vertical axis represents the position in metres.* [s]

Ferdinando repeats what the teacher said, miming the axes with the hands. [s][g]

Teacher: *How do we interpret that the line starts from there?* (Showing the first point of the graph) [s][g]

Diego: *Gabriele was not completely still, but he was moving slightly. Then, the first movement leaded the line to the top. Finally he moved with constant velocity.* (He mimed the line of the graph and the movement of Gabriele) [s][g]

Teacher: *Have you other interpretations of the graph?* [s]

Students seem not to be clear of the link between movement and graph, so the teacher let them repeat the experiment.

Diego: *I have to adjust something: the line on the graph starts from that point because Gabriele moved the first step. Then he moved in parallel to time and space, so that made a straight line. After, he was still while the time elapsed.* (He mimed the line of the graph and the axes) [s][g]

Ferdinando: *In order to let start the graph from point zero we need to start the measurement when the body is still yet.*

Miriana: *No! The first point represents the start point.*

Teacher: *Could the graph start from zero?*

Miriana: *No, it couldn't. The minimum distance is 15 cm.* (The teacher had explained that for correct *working* of the sensor, the minimum distance from the tool is 15 cm)

Some students affirm that they have not still understood the interpretation of the graph. Teacher lets them make one experiment more: an approaching motion to the sensor. But before she asks to make a prediction of the graph and how will be the line when the body is still. Most of the class gives a prediction, supported by gestures, and it results correct. During the approaching to the sensor, the student stops three times. So students visualize the new graph and get the correspondence between the condition of still body and the flat line.

Diego: *I expected that the graph would have drawn a line from the upper right corner to the lower left one.*

Filippo: *He starts far four meters and the time goes on.*

Ferdinando: *The graph is always drawn from left to right.*

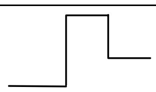
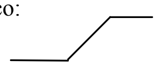
Some students still have difficulty to recognize the starting and the ending points. Some of them recognize the ending positions only because it is indicated in a box on the lower left of the screen. The teacher shows the connections between the table of the measurements and the graph.

A diachronic analysis of this lesson shows that the understanding of the correspondence between values of independent and dependent variable is improving with the progressive use of the sensor.

2. Understanding that ALL values of independent variable are related ***to values of dependent variable.***

Class: 3rd A – A pupil (Diego) stays for a short time in front of the sensor, then leaves from the sensor direction, walks along a parallel direction and finally stays again in front of the sensor (5 sec.).

The teacher asks to make a prediction of the graph on the blackboard, to have another semiotic set of communication. More significant predictions are:

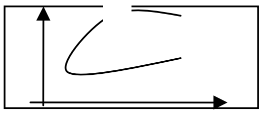
Diego: 	Francesco: 	Ferdinando:
Diego: *The first and third flat line represent the body in*	Francesco: *Both of flat lines represent the body. In the middle*	Ferdinando: *We get this prediction if the body comes back in*

movement. *The second flat line represents the desk in front of the sensor.*	*there is something.*	*the same point.*
Some students agree with Diego prediction	Filippo: *In the intermediary stretch the body doesn't walk, so that is impossible!*	Francesco: *In the intermediary stretch the time keeps going and a line has to be there!*

Diego makes the experiment, checks that his prediction was correct and commented on the graph to the classmates, comparing it with his own movement. The teacher points out that the lines which Diego had predicted as verticals, actually they are a little oblique and are due to "Connect Points". This leads to the next phase. Francesco understands that to every values of the time variable correspond values of the position variable, but its prediction isn't completely correct. Ferdinando and Francesco's predictions are due to wrong interpretations of the dependent variable. In their opinions, dependent variable represents "position of the body in movement" instead of "position of the closest body in front of the sensor". So, the teacher had to clarify the meaning of the dependent variable as "position of the closest body in front of the sensor". Therefore in theory it would be impossible to have some blank part on the graph. Actually, for limits of the tool, we could have it if we direct the sensor toward very far bodies, with larger distance than the dimensions of the classroom. So, if we use the sensor with classroom's distances we will have always function graphs.

3. Understanding that the value of dependent variable corresponding to a value of independent variable is UNIQUE

Class: 3rd B. The teacher draws a graph on the Cartesian plane of the Logger Pro by function "Draw Prediction". It isn't a function graph.



Teacher: Is it possible to obtain this graph by motion of a body?

Domenico: No! The same second is repeated twice!

Domenica: You can't get two positions at the same second.

These correct observations have a physics justification and lead to understanding the function concept.

4. *Understanding and comparing the correspondence between intervals of independent and dependent variable*

In this phase students consolidate the first phase. Also they read maximum and minimum distance reached with respect to sensor. They note that the slope of every piece of curve depended on the corresponding velocity of the student. They study the relationship between spatial intervals and temporal intervals of pieces of a curve and make comparisons of them. As well students calculated the mean velocities and compared them with the slopes of the pieces of the curve and with the velocity-time graphs.

Class: 4th I. Three times leaving and approach motion of a pupil (Diego) with respect to the sensor

(15 seconds)

Teacher: *In which piece of curve is there the major velocity?*

Diego: *In the last one! I'm saying it because I have just accelerated.* [s]. Diego is referring to his sensorial experience (embodiment)

Diego: *Here* (pointing the graph with a gesture to indicate an interval) *the spent time is shorter.* [s] [g]

Maria: *The last one is more inclined.* (She simulated the slope of the curve with her hand) [s] [g]

Diego and Maria point their attention towards different aspects of the same phenomenon: the time interval and the inclination of the curve, respectively.

5. Accomplishing treatments and conversions of the representations of linear and quadratic function.

In this phase pupils study all the codified semiotic systems of rectilinear uniform motions and uniformly accelerated motions of a train on tracks. The analytical representation is obtained fitting data. Students are involved in activity of treatments and conversions of this type of function, using various tools: Excel, Derive, paper and pen. Beside in this phase they studied modeling problems of realistic situations. Students also study the physics interpretation of the coefficients of these functions.

6. Institutionalization of the function concept and modelling realistic phenomena by function representations.

In this phase teacher gives the formal definition of function, offered by Bourbaki. In a first step she links it to the examples studied in kinematics. Pupils study functions in Mathematics and real life contests.

CONCLUSIONS

Our research corroborates works about the use of MBL-tools, according to which the use of position sensor allows students to read, understand and interpret kinematics graphs. This tool enables studying the steps of modelling process of rectilinear motions. Modelling activities constitute the bridge between the real phenomena and Mathematical representations. According to the theory of Embodiment the students construct their knowledge observing real phenomena and connecting them with their representations. Our mind conceptualizes a function as a point that is moving on the plane and the use of motion sensor induces this kind of conceptualization. A diachronic analysis of performed lessons shows that the understanding of the correspondence between values of independent and dependent variable is improving with the progressive use of the sensor. Also the other competences to acquire this concept are developed. But it is necessary to give a formal definition of function and to study passages between function representations in different contexts. Our research work confirms that it is possible to learn the function concept with a kinematics approach using a position sensor.

REFERENCES

Arzarello F., Robutti O., (2004) *Approaching functions thought motion experiments,* Educational Studies in Mathematics, vol 57-3

Arzarello, F., & Robutti, O., (2008). Framing the embodiment mind approach within a multimodal paradigm. In L. English. *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp 720-749). New York: Routledge.

Brousseau G., (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Editorial Kluwer Academic Publishers.

Duval, R., (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. 1(2), 1-16.

Gagatsis, A., Eliaj, I., Eracleous, A., Panaoura, A., (2007). *Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations.* International Journal of Science and Mathematics Education. Vol 5, N. 3, pp. 533-556

Gilbert J.K., Boulter C. and Rutherford M. (1998), *Models in explanations: part 1, horses for courses?*. International Journal of Science Education, 20, 83-97.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. College Mathematics Journal 20, 282-300.

Krusberg Z. A. C., (2007) *Emerging Technologies in Physics Education*, J Sci Educ Technol, 16:401–411

Lakoff G., Núñez R.E., (2000). *Where Mathematics comes from.* Basic Books

Lingefjärd T., (2006), *Faces of mathematical modelling*. ZDM, Vol. 38(2), 96-112.

Piaget, J., & Garcia, R., *Psicogenesi e storia delle scienze*, Garzanti, 1985

Rizzolati, G., Sinigaglia, C., (2006). *So quel che fai.* Raffaello Cortina Editore. Milano

Spagnolo F., (1998) *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria,* La Nuova Italia, Firenze.

Thornton R. K., Sokoloff D. R., (1990) *Learning motion concepts using real-time microcomputer-based laboratory tools,* American J. of Physics, Vol. 58, 858-867

Vygotskij L. S.:1978, *Mind in Society*., Harvard University Press.

Youschkevitch, A.P., (1976). The Function concept up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*. 16, 37-85.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Deux générations d'instruments pour l'enseignement de la géométrie : une rencontre souhaitable et réussie !

Marie-Pier Morin et Annie Corriveau (Université de Sherbrooke)

Abstract

In our research, we have developed expertise in the elaboration and experimentation of teaching scenarios using dynamic geometry software both for schoolchildren attending the 3rd cycle of the primary school (11-12 years old) and for pre-service teachers. In our teaching of geometry, we try to integrate new technologies and old technologies to help learners developing a better understanding of mathematical objects. From this point of view, we have been interested to Assude (2007), who developed a way to evaluate the degree of integration of *Cabri-géomètre* in the teaching of geometry. Then, we have elaborated and experimented a teaching approach based on the conditions needed for an optimal use of *Cabri-géomètre* in class. Using concrete examples, we will present the teaching approach that has been investigated with schoolchildren.

Introduction

Il est de plus en plus reconnu que l'enseignement des mathématiques, et plus précisément celui de la géométrie, devrait faire plus de place aux technologies de l'information et de la communication (TIC) (Kahane, 2002). Pour Kahane, l'utilisation des outils informatiques tels que les logiciels de géométrie dynamique (LGD) peut favoriser le processus d'abstraction et aider l'élève dans ses apprentissages en géométrie puisqu'ils ouvrent un champ de possibilités qu'il est impossible d'obtenir dans le cadre d'un travail effectué uniquement sur papier. Toutefois, l'intégration d'un LGD pour l'enseignement de la géométrie requiert un changement important de l'approche d'enseignement qui doit être mieux adaptée aux curriculums d'études actuels (Assude et Gélis, 2002; Laborde, 2001). En effet, si l'on veut apprécier toutes les potentialités de ce type de logiciel, il est important de revoir les tâches proposées à l'apprenant. Assude et Gélis (2002) parlent alors de la dialectique ancien-nouveau. Il s'agit de ne pas reprendre les tâches dans leur intégralité, mais plutôt de les transformer et de les adapter à la nouvelle situation d'enseignement et d'apprentissage.

Dans le cadre de notre travail, nous sommes appelées à élaborer des situations d'enseignement-apprentissage intégrant Cabri-géomètre. Nous tentons ainsi d'intégrer le plus harmonieusement possible les nouvelles technologies aux technologies plus anciennes pour amener les apprenants à développer une meilleure compréhension. Dans cette optique, nous nous sommes intéressées aux travaux d'Assude (2007), qui a élaboré un cadre permettant d'évaluer le degré d'intégration du logiciel Cabri-géomètre en classe.

Degré d'intégration de Cabri-géomètre en classe

Assude (2007) a déterminé des modes d'intégration de Cabri qui correspondent aux façons dont est réalisée l'intégration et qui traduisent l'état ou l'action de cette intégration dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage. Quatre dimensions permettent de définir ces modes d'intégration : les modes d'emploi, les modes d'action, les modes de relation et les modes d'étude. Parmi ces dimensions, les modes d'action, qui réfèrent à l'organisation mathématique du travail de l'élève, renvoient précisément au travail présenté aux élèves et au rapport entre le travail effectué sans l'ordinateur (praxéologies papier-crayon) et le travail fait à l'ordinateur (praxéologies Cabri). Étant donnée la nature de notre travail, nous avons porté notre attention sur cette dimension, soit les modes d'action.

Les modes d'action sont au nombre de trois et sont déterminés par différentes techniques (techniques TIC, techniques papier/crayon, rapport entre techniques TIC et papier/crayon, rapport entre techniques et technologies) et différentes tâches (tâches TIC, tâches papier/crayon, rapport entre tâches TIC et papier/crayon) : le mode d'action *indépendant*, le mode d'action *dépendant* et le mode d'*entrelacement*. De façon concrète, lorsque les activités à l'ordinateur n'ont aucun lien avec les activités de classe, nous sommes en présence du mode d'action *indépendant*. Ainsi, les tâches à l'ordinateur diffèrent complètement des tâches papier-crayon. Lorsque les tâches à l'ordinateur sont les mêmes que les tâches papier-crayon, mais qu'elles sont faites sans tenir compte des potentialités de Cabri-géomètre, il s'agit du mode d'action *dépendant*. Enfin, lorsque les tâches sont les mêmes dans les deux environnements et qu'il y a une utilisation maximale des potentialités de l'outil, par exemple l'utilisation du *drag mode* pour valider ou invalider la construction des figures, nous pouvons parler du mode *entrelacement*.

Pour Assude (2007), ce dernier mode d'action est le plus adapté pour une utilisation maximale de Cabri-géomètre en classe. C'est la raison pour laquelle nous avons bâti et expérimenté une séquence d'enseignement qui tient compte des spécificités de ce mode. Par cette intervention, nous voulions voir comment des élèves, qui n'ont jamais travaillé à l'aide d'un LGD, sont en mesure de passer d'un support papier-crayon à un support informatique, et vice-versa. Pour ce faire, nous avons travaillé avec dix élèves de 5^{e} année (10-11 ans). Les élèves travaillaient en équipes de deux sur des ordinateurs portables dans un local spécialement aménagé pour eux. Ils avaient donc l'espace nécessaire pour utiliser à la fois le support papier-crayon et l'ordinateur.

Séquence d'enseignement

Pour commencer, étant donné que les élèves ne connaissaient pas Cabri-géomètre, nous avons fait deux périodes de prise en main (*initiation instrumentale* au sens d'Assude). Durant ces périodes, à partir de différentes tâches, les élèves ont été amenés à utiliser divers outils tels le point, le segment, la droite et le cercle. Pour que les élèves saisissent bien comment utiliser ces outils, ils devaient suivre des étapes de construction prédéfinies, lesquelles avaient entre autres comme but de leur faire prendre conscience que les constructions ne sont pas des dessins. Effectivement, une construction conserve ses propriétés géométriques lors de sa manipulation avec un LGD, car elle a été réalisée à partir d'objets géométriques élémentaires choisis avec soin. Un dessin quant à lui repose sur des éléments perceptifs qui ne résistent pas au déplacement dans le logiciel.

Après l'initiation instrumentale, nous avons proposé une séquence d'enseignement-apprentissage de trois leçons, l'*Académie des géomètres*, séquence élaborée par Lyons et Lyons (2004). Par la réalisation de constructions géométriques faites uniquement à partir d'un compas et d'une règle non graduée, cette situation a permis aux élèves de refaire les découvertes des géomètres de l’Antiquité. Par exemple, ils devaient découvrir comment faire un angle droit, un triangle équilatéral ou encore comment diviser un segment en quatre parties égales.

Par la suite, toujours avec les mêmes instruments, ils devaient réaliser des constructions plus complexes, dont un disque brisé, une étoile et une rose des vents (figures 1, 2 et 3). Trois niveaux de complexité étaient présentés aux élèves et, au total, une quinzaine de constructions étaient proposées.

Quand les élèves ont montré qu’ils comprenaient bien comment utiliser la règle non graduée et le compas pour réaliser leurs constructions, nous leur avons permis d’utiliser l’ordinateur. À ce moment, ils ont découvert l’intérêt de travailler avec Cabri-géomètre. En effet, si les figures n’étaient pas plus faciles à réaliser, parce que tout le travail conceptuel derrière les constructions restait le même, elles étaient plus rapides à faire parce que les manipulations étaient réalisées à l’ordinateur. Ainsi, une erreur de construction était plus facilement corrigée. De plus, l’ordinateur amenait une plus-value au support papier-crayon en permettant aux élèves (et à l’enseignant !) de vérifier la validité des constructions à l’aide du *drag mode*. En effet, une figure dont la construction tient compte des propriétés géométriques résiste aux déplacements, contrairement aux figures dont l’élaboration se rapproche du dessin. Cet avantage non négligeable par rapport au papier-crayon permet, selon nous, une plus grande compréhension et une meilleure généralisation des propriétés travaillées. Il faut toutefois mentionner que, même si les élèves ont découvert un nouvel environnement de travail avec l’ordinateur, ils n’ont pas délaissé le support papier pour autant. Ils avaient besoin de ce rapport, notamment pour faire des croquis avant d’élaborer leurs figures.

Suite à cette séquence, nous avons exploré la réflexion et la rotation avec les élèves à l’aide de constructions qu’ils devaient réaliser à l’ordinateur. De même, parallèlement au travail à l’écran, afin d’éviter que les élèves ne se perdent dans des constructions non réfléchies, ils devaient écrire leurs démarches de construction sur une feuille. Le but que nous poursuivions était double. D’une part, nous souhaitions soutenir le travail des élèves en les amenant à prendre conscience de leurs démarches. D’autre part, faire noter les démarches de construction était pour nous une façon de travailler au développement de la compétence disciplinaire qui consiste à *Communiquer à l’aide du langage mathématique* du Programme de formation de l’école québécoise (Gouvernement du Québec, 2001).

Évaluation du dispositif

Pour l’enseignant de la classe, le travail avec Cabri-géomètre n’a eu que des avantages. Le plus grand a certainement été au niveau du vocabulaire mathématique qui s’est grandement amélioré. À l’ordinateur, les élèves doivent utiliser le langage mathématique avec plus de rigueur. Par exemple, lorsqu’ils effectuent une rotation, ils doivent préciser autour de quel centre et selon quel angle faire la rotation. Ou encore, lorsqu’ils construisent une figure, ils doivent reconnaître le nom des éléments choisis et ce qu’ils signifient, par exemple la distinction entre un segment et une droite. Ainsi, les élèves sont appelés à utiliser un vocabulaire qu’ils n’utilisent pas nécessairement lorsqu’ils travaillent sur papier.

La nature des tâches demandées a aussi eu des répercussions positives sur la compréhension des élèves. Pour un élève, nous pensons que la compréhension dégagée de la construction d'un triangle équilatéral à l'aide uniquement d'un compas et d'une règle non graduée (support papier-crayon) ou encore de cercles et de segments (ordinateur) est de loin meilleure à la compréhension dégagée de la construction de ce même triangle avec ses outils habituels, soit une règle graduée et un rapporteur d'angles. Pour illustrer ce propos, prenons l'exemple d'un problème donné par l'enseignant de la classe quelques semaines après l'expérimentation. Les élèves devaient trouver le centre d'un cercle pour ensuite le séparer en trois secteurs de 120° chacun. Les élèves qui n'ont pas fait la séquence d'enseignement décrite plus haut ont tous plié le cercle pour en trouver le centre, tandis que les élèves avec qui nous avons travaillé ont plutôt inscrit le cercle dans un carré, trouvé les diagonales de ce carré pour ensuite trouver le centre. Cette façon de procéder montre une compréhension plus approfondie des propriétés géométriques du cercle et du carré puisque la résolution du problème s'est précisément appuyée sur ces propriétés.

C'est ce qui nous fait dire que la géométrie que nous faisons habituellement avec les élèves est davantage un travail de caractérisation, de classification et de structuration qu'un travail conceptuel de construction qui est, selon nous, à la base. Cette constatation rejoint les propos de Perrin-Glorian (2003) selon qui l'enseignement de la géométrie au primaire se fait souvent par démonstrations d'objets géométriques que les élèves doivent reconnaître, l'apprentissage de vocabulaire ou l'utilisation technique des instruments de géométrie. Notre dispositif a plutôt permis aux élèves de participer à la construction des figures, ce qui, selon Battista (2002), leur permet de développer une bonne compréhension mathématique.

Conclusion

À partir des explications d'Assude (2007), nous avons tenté de reproduire un cadre qui tient compte du travail dans les deux environnements, de façon à ce qu'ils enrichissent mutuellement la compréhension des élèves. Ce faisant, nous pensons avoir réussi à rejoindre les caractéristiques d'un mode d'action dit *d'entrelacement*. À la lumière de cette expérience, il devient clair pour nous que les nouvelles technologies et les technologies plus anciennes peuvent non seulement coexister, mais doivent coexister afin de favoriser le développement d'une meilleure compréhension. Les deux environnements sont pour nous indissociables afin de donner la possibilité aux élèves de faire des allers-retours d'un support à l'autre.

Qui plus est, au-delà des apprentissages escomptés, nous pensons que cette alternative est importante pour les élèves puisque, malgré leur intérêt pour le travail à l'ordinateur, ils ressentaient quand même le besoin d'utiliser le support papier. Peut-être que si nous avions travaillé sur une plus longue période, nous aurions pu voir les élèves mettre ce support de côté pour ne travailler qu'avec Cabri-géomètre. Toutefois, nous pensons vivement que cette voie n'est pas souhaitable. Quoi qu'il en soit, cette question reste pour l'instant sans réponse pour nous et mérite ainsi d'être considérée dans une prochaine exploration.

Références

Assude, T. (2007). Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire. *In* R. Floris et F. Conne (dir.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement. Intégrer des artefacts complexes, en faire des instruments au service de l'enseignement et de l'apprentissage*. Bruxelles : De Boeck.

Assude, T. et Gélis, J.M. (2002). Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 259-287.

Battista, M.T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 333-339.

Dye, B. (2001). The impact of dynamic geometry software on learning. *Teaching Mathematics and its Applications, 20*(4), 157-169.

Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation primaire et préscolaire.* Québec: Ministère de l'Éducation.

Healy, L. et Hoyles, C. (2001). Software tools geometrical problem solving : potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 235-256.

Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Paris : CNDP/Odile Jacob.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3)*,* 283-317.

Lyons, M. et Lyons, R. (2004). *Défi mathématique. Cahier d'apprentissage. 3^e cycle, 2.* Montréal : Chenelière Éducation.

Perrin-Glorian, M-J.. (2003). Studying geometric figures at primary school from surfaces to points. *In* M.A. Mariotti (dir.), *Actes de la 3e conference de l'European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1-10). Pisa: CERME.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Activité mathématique induite chez les élèves : l'appropriation des attentes explicitées par l'enseignant

Izabella Oliveira, Université Laval

Abstract: This study is part of a global research project analysing the teaching of proportionality at the secondary school level and how students develop proportional reasoning. A series of systematic in-class observations were done with a class of 8th graders (13-14 years old) during an entire teaching sequence on the introduction of proportionality. We concluded with teacher interviews and a written questionnaire on proportional and non-proportional problem solving which was administered to the students both before and after the teaching sequence. We specifically examined the distributed class notes on proportionality and the subsequent mathematical problem-solving response by the students. Data analysis enabled us to identify the significant influence of the teacher's practices on the reasoning activity of their students who integrated their teacher's expectations, whether explicit or implicit. The students' consideration and appropriation of the teaching sequence and the expectations are key factors that consequently impact their problem-solving operations.

1. Introduction

Dans le programme d'études de mathématiques du secondaire au Québec, le développement du concept de proportion occupe une place importante. Les apprentissages liés à ce concept sont soulignés comme ayant un rôle essentiel dans le développement d'autres concepts en mathématiques et dans d'autres disciplines (MEQ, 2003; Sokona, 1989; Nunes et al, 1993). Le concept de proportion occupe donc une place déterminante qui aidera les élèves dans la construction de concepts mathématiques en lien avec les autres disciplines. Plusieurs domaines ont d'ailleurs recours au concept de proportionnalité. Notons, entre autres, l'univers social, les arts, les sciences (MEQ, 2003).

Par ailleurs, l'acquisition du concept de proportion chez les élèves a été étudiée par plusieurs chercheurs. Des situations d'enseignement de la proportionnalité ont été développées, sur la base d'analyses didactiques préalables, par Brousseau (1981) avec des élèves au primaire, par Gnass (2000) avec des élèves en difficulté d'apprentissage au secondaire et par Vergnaud (1983) et Rouchier (1991) au secondaire. Les études réalisées en classe à leur propos montrent le potentiel de ces situations pour l'apprentissage de la proportionnalité. Nous avons aussi répertorié quelques études portant sur l'analyse de pratiques d'enseignement de la proportionnalité (Hersant, 2001; 2004). Ces études montrent les liens entre la façon d'interagir de l'enseignant, notamment sous les aspects de dévolution et d'institutionnalisation des savoirs en classe et de la progression des connaissances chez les élèves. Néanmoins, aucune étude n'a été faite sur l'activité mathématique induite chez les élèves par la pratique enseignante. Une telle étude nous est apparue centrale dans le contexte québécois, où l'accent est mis dans le programme de mathématiques sur le développement du raisonnement proportionnel chez les élèves (MEQ, 1994) et sur le développement de la compétence à résoudre des problèmes (MEQ, 2003).

2. Objectifs de la recherche

Analyser d'une part la façon dont les élèves s'approprient les attentes explicitées par l'enseignant dans les notes de cours données aux élèves et d'autre part l'impact de cette appropriation sur l'activité mathématique des élèves (activité mathématique induite).

3. Méthodologie

Notre étude s'insère dans une recherche plus globale, portant sur l'analyse des pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec le développement du raisonnement proportionnel chez les élèves (Oliveira, 2008). Une classe de secondaire 2 comprenant 34 élèves (13-14 ans) et son enseignant (que nous nommerons Maurice) ont été suivis pendant une séquence d'enseignement portant sur l'introduction de la proportionnalité, donnant lieu à une observation systématique des séances en classe. Cette observation a été complétée par des entrevues avec l'enseignant et par l'administration individuelle d'un test écrit, en amont et en aval de la séquence d'enseignement, portant sur la résolution de différents types de problèmes proportionnels et non proportionnels.

À dessein de rencontrer les objectifs de recherche précités, nous analyserons, d'une part, les notes de cours données aux élèves, par l'enseignant, sur la proportionnalité. D'autre part, les productions écrites des élèves lors de la résolution des problèmes (test écrit), par les élèves.

● **Notes de cours de l'enseignant :** pour appuyer l'analyse de notes de cours distribuée aux élèves, nous avons tenu compte de ce qui a été annoncé par Maurice lors de l'entrevue sur sa planification. Nous avons alors pris en considération des commentaires qui faisaient référence aux notes de cours (manière de les construire, de les utiliser en classe, objectifs explicités par l'enseignant, etc.). Cette prise en compte du discours de Maurice sur ses notes de cours nous a permis de comprendre le statut qu'il lui attribue et de fournir des éléments de réponse aux questions suivantes : quelles sont les procédures de résolution de problème que l'enseignant essaie de mettre en place chez les élèves? Quels sont les éléments auxquels il semble tenir pour préparer les notes de cours?

Eliminato:

● **Test écrit des élèves :** nous analyserons les réponses formulées par les élèves en lien avec 8 problèmes : 2 problèmes non-proportionnels, 2 problèmes de proportion inverse et 4 de proportion directe. Les élèves ont répondu aux mêmes problèmes avant et après enseignement. Le choix des problèmes proposés aux élèves a été fait à partir d'une analyse didactique de variables susceptibles d'influencer les stratégies de résolution privilégiées. L'analyse de la résolution de ces problèmes par les élèves a été faite selon trois angles. D'abord, en termes de réussite et procédure privilégiée. Ensuite, en termes d'activité mathématique susceptible d'être induite. À partir de l'analyse des notes de cours de Maurice, nous avons tenté d'identifier si les procédures de résolution privilégiées dans les notes de cours se retrouvaient dans les productions des élèves (activité mathématique induite). Enfin, quelles différences retrouvons-nous dans les procédures privilégies par les élèves avant et après enseignement et dans quel sens se rapprochent-elles de celles privilégiées par Maurice dans ces notes de cours?

4. Cadre de référence sous-jacent à l'analyse

Pour identifier l'activité mathématique induite chez les élèves dans la résolution de problèmes de proportion, le concept de proportionnalité particulièrement sous l'angle, du raisonnement proportionnel et de ce qu'il recouvre, a été central. Nous avons ainsi plus spécifiquement eu recours, dans l'analyse de notes de cours, à une codification en termes des notations utilisées et de procédures mises en évidence par l'enseignant (Oliveira, 2007, 2000; René de Cotret, 1991; Vergnaud, 1991; Noelting, 1978, Karplus, et al 1974). Ce cadre de référence a aussi été utilisé lors de l'analyse des productions des élèves. Nous avons eu recours, alors, à une codification en termes de procédures et d'erreurs mises en évidence par les études citées précédemment. Les procédures identifiées sont les suivantes : procédure additive (appropriée ou erronée), recours à l'unité, recours à un facteur de proportionnalité (procédure scalaire), ce facteur de proportionnalité pouvant être interne (entre grandeurs de même nature) ou externe (entre grandeurs de nature différente), procédure linéaire (combinaison de procédure additive et scalaire), recours à une grandeur intermédiaire et produit croisé.

5. L'analyse de notes de cours

Les notes de cours ont été données aux élèves à la séance précédant le début de la séquence sur la proportionnalité. Elles sont organisées en deux parties. La première partie introduit le contenu mathématique de la séquence et la deuxième porte sur les exercices et les problèmes devant être faits par les élèves au fur et à mesure de l'avancée des séances. Pendant l'entrevue sur la planification, Maurice a parlé de ses notes de cours, en précisant que parce qu'il les distribue dès le début de la séquence, il ne revient pas sur tout le contenu, mais uniquement sur quelques exemples. Pendant l'entrevue, Maurice fait aussi référence à ses notes de cours en parlant des problèmes qu'il propose aux élèves. Il explique que c'est lui qui construit les notes de cours en choisissant un peu partout des problèmes, parce qu'il veut s'assurer qu'il y ait, entre autres, des problèmes qui présentent des structures mathématiques différentes.

Ceci dit, on voit que Maurice a le souci de présenter aux élèves différents types de problèmes qui correspondent aux différentes parties des notes de cours (rapports et taux, proportions et situation de proportionnalité) et la préparation de ces notes semble occuper une place importante pour lui. Lorsqu'on a analysé dans l'entrevue la manière dont Maurice a structuré la progression de sa séquence, on a pu observer que les étapes sont organisées en fonction du contenu mathématique de la façon suivante : Rapports et taux, proportions et reconnaissance de situations proportionnelles ou non-proportionnelles. Compte tenu du rôle que semblent jouer pour lui ces notes de cours, il nous est apparu important d'en faire une analyse afin, d'une part, de dégager, la façon dont se concrétisent, dans ce matériel donné aux élèves, la progression annoncée en entrevue et, d'autre part, de caractériser l'activité mathématique susceptible d'être induite chez les élèves en lien avec l'apprentissage de la proportionnalité : Quelles sont les procédures de résolution que l'enseignant essaie de mettre en place chez les élèves?

5.1. Analyse des notes de cours : les différentes parties

L'analyse de la **1ère** partie (rapports et taux), nous a permis de dégager qu'une certaine réflexion didactique de la part de Maurice émerge à travers la verbalisation qu'il fait des notations, à travers le sens qu'il donne au rapport et les mises en garde faites, par lesquelles nous voyons que l'enseignant est conscient de certaines erreurs que peuvent faire les élèves. Par ailleurs, ce souci de prévenir l'erreur et de structurer les démarches montre, sans doute, qu'il souhaite que les élèves réussissent et qu'ils sachent comment aborder la résolution du problème. Cette démarche de l'enseignant nous conduit, toutefois, à nous interroger sur cette façon d'anticiper les erreurs des élèves. L'extrait des notes de cours ci-dessous nous permet de voir la manière dont Maurice attire l'attention des élèves sur certaines difficultés :

Un RAPPORT est une comparaison entre 2 quantités de **même nature**.

➢ NOTATION : 2:5 ou $\frac{2}{5}$ se lit 2 POUR 5 (et non 2 cinquièmes)

Exemple 1 : 2 filles POUR 3 garçons → 2:3.
Attention : Il y a 5 enfants en tout !

Pour ce qui est de l'activité mathématique qui est ici susceptible d'être induite chez l'élève, l'accent est mis surtout sur des « manières » de résoudre le problème à travers la structuration de la démarche (méthodes à employer) et l'écriture des unités (notation). La présentation des calculs qui devront être faits est différente pour comparer des rapports ou pour comparer des taux. Cela est suivi de deux méthodes où, encore une fois, l'accent est mis sur l'écriture des unités dans les problèmes portant sur la comparaison des taux. Exemple : « *Pour* ***calculer*** *le taux unitaire, on* ***divise les 2 nombres*** *à la calculatrice et on écrit* ***les unités séparées par un trait de division*** » (Extrait des notes de cours).

L'analyse de la **2ième** partie, nous permet par ailleurs de faire quelques constats. D'abord, au sujet du format que prend la présentation des notes de cours. La structure « définition-exemples-notation » revient fréquemment. Nous remarquons aussi une certaine insistance mise sur la notation (manière d'écrire les unités). Cela vient confirmer ce que l'enseignant avait annoncé lors de l'entrevue, où nous avions noté que la notation, l'écriture des unités et le lien entre rapport et taux, étaient importants pour lui. Dans les consignes données aux élèves, l'écriture de la proportion prend aussi une place importante, place qui était auparavant attribuée à l'écriture des unités (notation). Comme l'objectif dans la 1ère partie était de distinguer les rapports et les taux, l'enseignant définissait rapport et taux à partir de leur relation avec les unités dans chacun des cas (unités de même nature ou de nature différente). Il était nécessaire que les unités soient écrites. Or, l'objectif est différent ici. Il concerne la proportion. Dans le cas des proportions, l'attention est plutôt mise sur l'écriture de la proportion et sur la recherche du terme manquant. Dans ce cas, l'écriture des unités est moins importante. A ce stade, nous retrouvons plutôt l'indication d'utilisation d'une technique et un principe sous-jacent qui justifie cette dernière et qui réside dans l'idée d'efficacité, dans la contrainte de temps : « Ça fait plus type formule un peu (*se référant au produit croisé*), mais on a quand même une bonne stratégie qu'on peut utiliser […] sinon ce serait trop long…je l'ai fait déjà et c'était trop long. ». La présentation de ces techniques est suivie d'exemples (qui sont décontextualisés) où l'on peut apercevoir un passage à une certaine généralisation. Comme dans l'exemple ci-dessous :

Parmi les 3 termes connus, il y en a 2 qui sont connus dans une diagonale. On **multiplie les 2 termes connus en diagonale** puis **on divise par le 3e terme connu**. On utilise la lettre **n** pour indiquer le 4e terme inconnu.

Exemple 1 : $\left.\frac{18}{\boxed{30}} = \frac{\boxed{n}}{40}\right\}$ n = 18 x 40 ÷ 30 = 24

Un autre point porte sur le statut d'outil que prennent les proportions : « Ensuite les problèmes avec les proportions parce que là ils sont obligés d'écrire pour chaque problème » (Entrevue, lignes 42 à 43).

Pour ce qui est de l'activité mathématique susceptible d'être induite chez les élèves, certains risques découlent de la démarche favorisée par Maurice, à savoir une manière privilégiée de résoudre des problèmes de proportion et une certaine écriture (notation).

L'analyse de la **3ième** partie des notes de cours (reconnaissances de situations proportionnelles), permet de comprendre que Maurice insiste sur les moyens (les techniques) que les élèves peuvent utiliser pour vérifier la proportionnalité d'une situation. On voit qu'il rend explicite pour les élèves la nécessité de faire des calculs pour vérifier si la situation est de nature proportionnelle. « *Pour vérifier si on a une* ***situation de proportionnalité****, on calcule* ***tous les rapports ou taux*** *qui doivent être* ***équivalents*** *pour que la situation soit proportionnelle* » (Extrait des notes de cours).

Les techniques présentées par l'enseignant sont en un sens attachées à une certaine conception de la proportionnalité où l'on trouve soit un coefficient de proportionnalité dans une table de valeur, soit une droite qui passe par l'origine dans les graphiques, soit enfin des situations où les réponses ne sont pas considérées comme étant possibles (sont considérées « absurdes »).

5.2. Bilan global de l'analyse de notes de cours

Pour la **1ère** partie (rapport et taux), nous avons pu observer d'abord qu'elle sert à introduire le concept de proportionnalité, et aussi que les rapports et taux ont un statut d'outil pour la résolution des proportions et des problèmes avec des proportions (ainsi qu'il était annoncé dans l'entrevue). À partir de ces constats, les mises en garde et l'explicitation des attentes se justifient par le fait que Maurice veut éviter que les élèves fassent des erreurs par la suite dans la partie sur les proportions.

Dans la **2ième** partie (les proportions), l'enseignant présente les techniques qui devront être utilisées pour calculer un terme manquant et résoudre des problèmes. Les connaissances travaillées auparavant dans les rapports et taux sont réinvesties dans l'application des techniques présentées. Donc, comme les mises en garde et les attentes ont été déjà explicitées auparavant, ici, il n'est plus nécessaire, pour l'enseignant, qu'elles soient répétées.

À la **3ième** partie, (situations de proportionnalité), Maurice paraît avoir encore un objectif différent de celui qu'il avait pour les proportions. Ici, il utilise les connaissances travaillées auparavant (rapports et taux, proportions) pour vérifier si une situation est proportionnelle ou pas. Il avait annoncé dans l'entrevue que ceci était l'objectif principal de sa séance sur les proportions : « C'est qu'à la fin ils soient capables de dire si ma situation est proportionnelle. C'est une situation proportionnelle ou pas. Si elle n'est pas, je ne pourrai pas calculer de la même façon […]. Qu'ils soient capables de reconnaître si une situation est proportionnelle par rapport à une table de valeurs et un graphique versus d'autres types de variation du genre partiel. » (Entrevue, lignes 340 à 345).

6. Activité mathématique induite chez les élèves

L'analyse des tests écrits passés aux élèves, nous a permis d'observer d'une manière générale que le trait le plus marquant de l'activité mathématique induite chez les élèves par la pratique d'enseignement de Maurice, notamment à travers ce qui a été explicité dans les notes de cours, porte sur des procédures privilégiées et sur un type d'écriture de la proportion, à savoir celle des unités. La notation prend la forme d'une proportion et la procédure privilégiée renvoie au produit croisé ou à une comparaison de rapports, lors de la résolution des problèmes, en fonction de leur structure. Par moment, cette activité induite (proportion et utilisation d'une propriété des proportions) conduit à une augmentation du taux de réussite des élèves, dans les problèmes directement proportionnels et, notamment, dans la réduction de l'erreur additive. À d'autres moments, cependant, elle provoque une perte du sens attribuée à la variation, notamment dans les problèmes inversement proportionnels, dans la mesure où les élèves appliquent mécaniquement cette procédure, et dans les situations non-proportionnelles. Nous avons vu aussi que les élèves font preuve d'une certaine pensée qualitative avant enseignement dans la résolution des problèmes, pensée qui s'exprime en mots (et donc de manière discursive) et par laquelle ils donnaient un sens à la variation dans des problèmes de proportion. Nous observons qu'après enseignement l'expression de cette pensée qualitative est beaucoup moins présente chez les élèves. Dès lors, leur démarche s'exprime davantage à travers une solution numérique, comme dans l'exemple suivant :

<table>
<tr><td colspan="2">4 machines prennent 300 jours pour fabriquer toutes les briques qui vont être utilisées dans la construction d'une maison. En combien de jours 8 machines identiques fabriqueront la même quantité de briques?</td></tr>
<tr><td>Maison - avant enseignement (élève 10)
300 ÷ 2 = 150 → je me suis dit que 4 machines est la moitié de 8 donc j'ai divisé 300 par 2.</td><td>Maison - après enseignement (élève 10)
$\frac{4}{300} = \frac{8}{n} \rightarrow 300 \times 8 : 4 = 600$ jours</td></tr>
</table>

7. En guise de conclusion

Nous sommes ainsi en mesure de souligner à quel point la pratique de l'enseignant possède une influence primordiale sur l'activité mathématique des élèves. Les élèves intègrent les attentes qui sont explicitement ou implicitement formulées et mises de l'avant par l'enseignant. Cette prise en compte et cette appropriation chez les élèves du discours et des attentes de l'enseignant est déterminante dans leur activité. Elle entraîne des conséquences sur leur manière d'envisager les problèmes, de s'engager dans leur résolution et sur la façon dont ils vont rendre compte de leurs raisonnements et les expliciter.

Références

BEDNARZ, N. & PERRIN-GLORIAN, M-J. (2004). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. Dans : *Actes de Espace Mathématique Francophone*. Tozeur (Tunisie).

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. (2.3), 37-127 : La Pensée Sauvage.

GNASS, I. (2000). *Étude du raisonnement proportionnel chez les élèves en troubles de comportement et d'apprentissage de deuxième secondaire*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Montréal.

HERSANT, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de doctorat inédit, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris.

HERSANT, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement des mathématiques : le cours dialogué. *Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences des Mathématiques et des Technologies*, 4, 2, 243-261.

KARPLUS, E. F., KARPLUS, R., & WOLLMANN, W. (1974). The influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*, 6, 476-482.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1994), *Programme d'étude de mathématiques du secondaire,* Gouvernement du Québec : Les publications du Québec.

Ministère du Loisir et de l'Éducation du Québec. (2003), *Programme d'études du secondaire.* Document de travail aux fins de validation. Gouvernement du Québec.

NOELTING, G. (1978). *La construction de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent et les mécanismes d'équilibration*. Numéro spécial de L'APAME, École de Psychologie, Université Laval, Québec.

NUNES, T., SCHLIEMANN, A. D., & CARRAHER, D (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.

OLIVEIRA, I. & BEDNARZ, N. (2007). Pratique d'enseignement et activité mathématique des élèves en contexte de résolution de problèmes : une étude portant sur la proportionnalité. Dans : Actes du 59e CIEAEM – Commission internationale pour l'étude et amélioration de l'enseignement des mathématiques, Dobogókő, Hongrie.

OLIVEIRA, I. (2008). *Exploration de pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec l'activité mathématique induite chez les élèves dans des problèmes de proportion*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal, Montréal.

OLIVEIRA, I. A. F. G. (2000). *Um estudo sobre a proporcionalidade : a resolução de problemas de proporção simple no ensino fundamental*. Mémoire de maîtrise inédit. Universidade Federal de Pernambuco, Recife - Brasil.

RENÉ DE COTRET, S. (1991). *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans.* Thèse de doctorat inédit, Université Joseph Fourier : Grenoble.

SOKONA, S-B. (1989). Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. *Petit X*, 19, 5-27.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. Dans : *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Orlando : Academic Press.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad : problemas de la enseñanza de las matemáticas*. México : Trillas.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

L'étude des relations de co-variation comme un précédant à l'étude du concept de fonction

Rosa Elvira Páez Murillo. rosa.paez@uacm.edu.mx
Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM)

Abstract

In this article results are shown of the pre-experimentation carried out in the research project about the teaching of calculus in the Autonomous University of Mexico City. This study is being carried out with university students of engineering of the course of differential calculation. We are interested in observing their difficulties of learning and the construction of the concept of covariation and components of the concept of function (variables, parameters, domain and range, algebraic and graphical representation). For this purpose we have designed a group of activities, which depart from situations in context and in which there is requested that the students use different representations (first the verbal language, then algebraic representation, and finally the graph).

Introduction

Notre projet de recherche sur l'enseignement du calcul[5] a été axé originellement sur l'étude des relations de co-variation et sur les comstituants du concept de fonction (variables, paramètres, domaine, rang, représentation algébrique et graphique) avec des étudiants universitaires d'ingénierie.

Nous sommes intéressés à l'étude des conceptions[6] que les étudiants du premier semestre présentent, quand ils apprennent les concepts de variable et fonction. Nous sommes également intéressés à identifier le niveau de difficulté qui se présente quand ils analysent des situations en contexte, des processus de conversion entre différents registres de représentation (verbales, algébriques, numériques et graphiques)

Pour accomplir les objectifs de la recherche nous avons organisé un groupe de sept activités[7], qui commencent à partir de situations en contexte et dans lesquelles on demande aux étudiants l'utilisation de différentes représentations (en commençant par le langage verbal, puis on leur demande la représentation algébrique et la graphique).

---

[5]Le projet de recherche a reçu l'appui économique de la Fondation Sofia Kovaleskaia et de la Société Mathématique Mexicaine. Le prix Kovaleskaia, décerné à des chercheuses, a été attribué le 15 octobre 2007 à la directrice de ce projet.

[6] Duroux (1983) explique ce terme comme un savoir local qui se produit quand certaines situations sont privilégiées au détriment d'autres, dans l'acquisition de la connaissance. Par conséquent une conception est opérante sur une partie de ce que Vergnaud désigne comme le champ conceptuel et par la suite présente nécessairement des insuffisances.

[7] Les premières cinq activités ont été préparées dans un projet de recherche que le Dr. Fernando Hitt dirige à l'université de Québec à Montréal (Hitt, F., González-Martin, A. et Morasse, C. (2008)). Les deux activités suivantes ont été conçues, dans le cadre du projet national mexicain sur l'enseignement de l'analyse, avec le Dr. François Pluvinage du Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ce projet est encadré à partir d'une perspective de construction de concepts fondés sur la théorie des représentations sémiotiques (Duval, 1993, 1995 et 2006; Hitt, 2003 et 2006). En particulier nous considérons comme importantes les productions sémiotiques des étudiants dans le processus de construction des concepts de variable et de fonction.

Carlson, M. (2002) affirme que pour développer le concept de fonction il est nécessaire de développer premièrement l'idée de covariation et que l'expérience avec la nature physique du phénomène a des qualités qui provoquent le développement des structures internes chez l'étudiant, permettant ainsi qu'il puisse établir des connexions entre des différentes représentations du modèle physique. Ceci est mentionné aussi par Nemirovsky, R. et Rubin, A (1991), Noble, T et Nemirovsky, R (1995).

L'axe de cet exposé sera de présenter une analyse descriptive et comparative des résultats des activités « poulies » à la suite des première et deuxième applications. Nous montrerons les difficultés d'apprentissage rencontrées au début par les étudiants en relation avec les concepts primaires mentionnés auparavant. Nous sommes intéressés à étudier les résultats des pré-expériences d'un point de vue qualitatif plutôt que quantitatif, puisque l'intérêt principal lors de cette étape est d'analyser les comportements des étudiants sur la base de leurs conceptions.

Méthodologie

Dans la première partie de la recherche on a fait l'expérience avec quarante étudiants d'un cours de calcul différentiel du programme des ingénieries (Páez, R. Alfaro, F. et Torres, C., 2008). Dans cette première partie on a utilisé trois appliquettes avec leurs feuilles de travail correspondantes. Selon les résultats obtenus, on a réalisé des modifications, et on a réduit finalement à deux appliquettes. Les activités réorganisées ont été appliquées à un groupe de quinze étudiants d'ingénierie du cours de calcul différentiel.

Les activités mentionnés correspondent au cas d'une poulie fixe. Dans la première activité de poulies on présente le modèle qu'on utilise pour monter un seau. Dans ce cas, l'étudiant peut modifier le rayon et la hauteur de la poulie (voir figure numéro 1). On travaille deux situations, une générale, quand on a une certaine longueur de corde en contact avec la poulie et dans un cas limite, quand on prend un rayon très petit et que la longueur de corde en contact avec la poulie est considérée nulle.

Dans la deuxième appliquette, la même situation de la poulie se place dans un système de référence de coordonnées cartésiennes (voir figure deux).

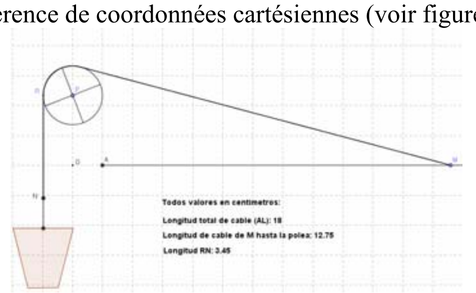


Figure 1. Appliquette de l'activité un

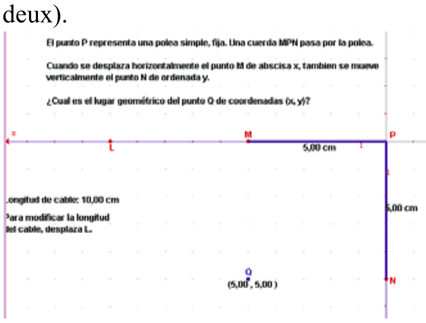


Figure 2. Appliquette de l'activité deux

Pour chaque appliquette on a conçu une feuille de travail, où l'on donnait les indications correspondantes pour utiliser les simulations, et où l'on posait des questions dont l'intention principale était que les étudiants identifient les relations de co-variation en situation de contexte. Les applications de la première et de la deuxième activité ont duré 90 minutes chacune. Le développement des activités a été réalisé d'une façon individuelle et sans la collaboration des chercheurs.

Analyse des données

Identification du domaine et du rang

Dans l'activité no. 2, après une question sur la relation entre les longueurs PM et PN et la longueur totale du câble, en utilisant premièrement un langage naturel puis en leur demandant spécifiquement la relation algébrique, on demandait aux étudiants : *Quelles peuvent être les valeurs de la longueur PM ? Et quelles peuvent être les valeurs de la longueur PN ?*

Ces questions nous ont permis d'identifier les difficultés que les étudiants ont à propos de l'identification du domaine et du rang d'une relation fonctionnelle. Les résultats obtenus nous montrent que six étudiants sont capables d'identifier le domaine et le rang de la relation fonctionnelle ; deux d'entre eux le font en utilisant la représentation spontanée «*de 10cm jusqu'à 0 cm*». A la différence de la première partie de la pré-expérience où les étudiants avaient utilisé la notation d'intervalle, aucun de ces étudiants n'exprime l'intervalle en notation mathématique, ils utilisent seulement le langage verbal. Cette distinction peut être due au fait que dans la première partie on étiquetait la longueur PM comme x et la longueur PN comme y, et la question spécifique était:

La corde ayant une longueur déterminée, est-ce que **x** *peut prendre n'importe quelle valeur positive ? Sinon, quelles sont ses valeurs possibles ? La corde ayant une longueur déterminée, est-ce que* **y** *peut prendre n'importe quelle valeur positive ? Sinon, quelles sont ses valeurs possibles?*

Suite à la suggestion de transformer l'appliquette précédente en éliminant les étiquettes x et y et le signe négatif qui montrait la valeur de y (Páez, R. Alfaro, F. et Torres, C., 2008), on a fait se déplacer le point M vers la gauche. Ceci a provoqué que cinq étudiants ont attribué des valeurs négatives à la longueur PM, même si l'appliquette montre seulement des valeurs positives. Il n'y a pas eu de réflexion sur cette réponse dans le contexte, c'est-à-dire sur ce que des longueurs négatives pourraient signifier.

Identification de variables et paramètres.

Une autre question a été la suivante: *Dans le phénomène étudié nous te proposons d'introduire les mots: variable dépendante, variable indépendante, paramètre. De tous les éléments présentés dans la page d'Internet, choisis ceux qui te semblent les plus convenables pour chaque cas.*

*Quelle serait la variable dépendante?*______________________________
*Quelle serait la variable indépendante?*______________________________
Quel serait le paramètre? ______________________________

Comme nous l'avons mentionné auparavant, dans l'appliquette ainsi que dans les feuilles de travail, on a éliminé les étiquettes x et y. Donc les étudiants n'introduisent pas dans leurs réponses la dite notation. Par contre ils utilisent les éléments qui sont mentionnés là, comme M, P, N. Par exemple, pour identifier les variables dépendante et indépendante, ils utilisent PN et PM respectivement. Et ils l'appliquent au plan cartésien en nommant PM l'axe des abscisses et PN l'axe des ordonnés.

L'identification du paramètre a été la question la plus difficile. Deux étudiants seulement identifient le paramètre. Peut-être y a-t-il une méconnaissance d'une certaine terminologie ou de l'identification de ces éléments dans ce contexte.

Carlson, M (2002) fait référence à la complexité de coordonner et de comprendre l'évolution d'une variable en relation à l'autre, où intervient la difficulté à identifier les différents éléments présents dans l'appliquette, ce qu'illustre par exemple la confusion entre le point extrême M de la corde et la longueur du segment de corde entre la poulie et le point M.

Conversion entre représentations.

Comme on l'a déjà mentionné, dans la question un et deux on a demandé la relation qui existe entre les longueurs PM et PN et la longueur totale du câble, en utilisant premièrement un langage naturel puis en demandant spécifiquement la relation algébrique. Ensuite, dans la question numéro cinq on a demandé d'*élaborer un graphique de la relation entre les longueurs PM et PN et la longueur totale du câble.* Même si onze étudiants trouvent correctement la relation algébrique entre PM et PN et la longueur totale du câble seuls six étudiants peuvent transférer cette relation algébrique en une représentation graphique. Généralement ils ont fait un graphique du mouvement de P, c'est à dire un graphique de la ligne $y = -x - 10$.

Un exemple de ceci est évident dans la réponse d'un des étudiants : Même s'il identifie d'une façon satisfaisante la relation fonctionnelle, le domaine et le rang (voir Figure trois), il ne transfère pas la dite relation algébrique dans sa représentation graphique (voir Figure quatre). Et cela, même si, en accord avec les valeurs qu'il montre sur le graphique, il considère comme positives des valeurs qu'il situe sur les parties négatives des axes cartésiens. Autrement dit, il ne respecte pas l'usage d'utiliser les côtés droit et supérieur des axes pour représenter des valeurs positives.

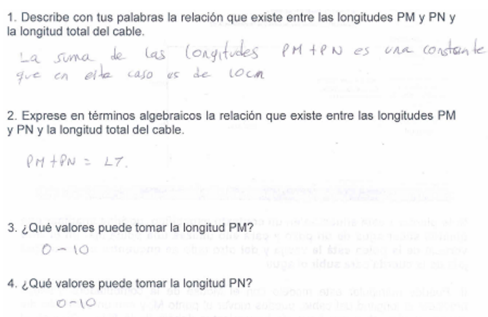
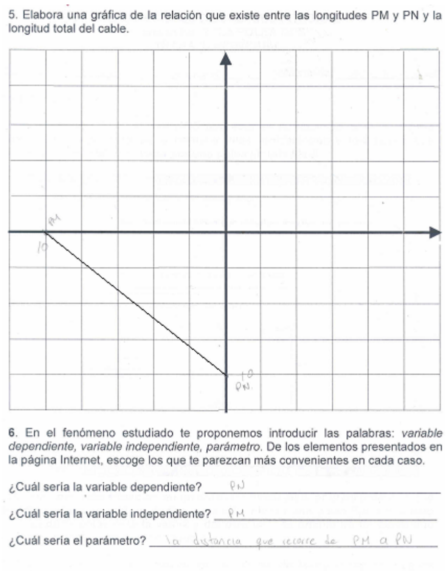

1. Describe con tus palabras la relación que existe entre las longitudes PM y PN y la longitud total del cable.
La suma de las longitudes PM+PN es una constante que en este caso es de 10cm
2. Exprese en términos algebraicos la relación que existe entre las longitudes PM y PN y la longitud total del cable.
PM+PN = LT.
3. ¿Qué valores puede tomar la longitud PM?
0 – 10
4. ¿Qué valores puede tomar la longitud PN?
0-10

Figure 3


5. Elabora una gráfica de la relación que existe entre las longitudes PM y PN y la longitud total del cable.

6. En el fenómeno estudiado te proponemos introducir las palabras: *variable dependiente, variable independiente, parámetro.* De los elementos presentados en la página Internet, escoge los que te parezcan más convenientes en cada caso.
¿Cuál sería la variable dependiente? PN
¿Cuál sería la variable independiente? PM
¿Cuál sería el parámetro? la distancia que recorre de PM a PN

Figure 4

En relation avec cette difficulté, Carlson (2002) signale que les étudiants peuvent coordonner des images de deux variables qui changent sous une certaine relation, mais apparemment ils ne peuvent pas appliquer leur raisonnement dans le contexte d'un graphique ou d'une formule.

Réflexions

De l'application des activités dans les deux étapes pré-expérimentales nous pouvons relever la mauvaise association d'objets contenus dans l'appliquette avec les connaissances que les étudiants possèdent déjà. En outre, il peut avoir une confusion entre les différents éléments qui apparaissent dans la simulation, comme l'identification des variables avec des objets physiques (point extrême, point d'appui de la corde, etc).

Les étudiants n'établissent pas les connexions entre les différents types de représentations du concept de fonction, ceci est évident lorsqu'ils donnent des réponses contradictoires en référence aux représentations graphiques, algébriques et verbales.

Il apparaît des différences entre les représentations institutionnelles, c'est à dire celles généralement utilisés par le professeur, les livres ou les simulations (Hitt, 2003), et celles que l'étudiant utilise pour communiquer ses connaissances. Ainsi en est-il de la notation mathématique que l'étudiant utilise pour exprimer les intervalles du domaine et du rang, du langage verbal utilisé pour exprimer l'intervalle mentionné, ou de la double interprétation qu'il donne du même objet utilisé dans la simulation (tel est le cas des points M et N qui représentent pour lui à la fois un point et une longueur).

Bibliographie

Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In Hitt F., (Editor), Representations and mathematics visualization. pp. 63-77.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: Difficultés majeures pour une notion mineure. Petit X, No. 3, pp. 43-67.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine, Peter Lang, Berne.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de sciences cognitives, Vol. 8, pp. 975-999, IREM de STRASBOURG.

Hitt F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 253-268.

Hitt, F., González-Martín, A. S. & Morasse, C. (2008). Visualisation and students'functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude to the concept of function. Group 12, ICME-11, Monterrey (México).

Nemirovsky, R. y Rubin, A. (1991). It makes sense if you think about how the graphs work in reality in F. Furunghetti (ed.) Proceedings of the 15th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 57-64.

Noble, T. y Nemirovsky R. (1995). Graphs that go backwards in L. Meir and D. Carraher (eds.) Proceedings of the 19th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 256-263

Páez, R., Alfaro, F. y Torres, C. (2008). Estudiando funciones en contexto a través de simulaciones con estudiantes de ingeniería (La simulation dans l'étude de fonctions pour des étudiants en ingénierie). Annales de didactique et de sciences cognitives. pp. 113 – 132.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Communication : une calculatrice dans la classe de 3-4P : un défi didactique pour les enseignants ?

Dr. Chantal Tièche Christinat & Luc-Olivier Bunzli, HEP-Vaud, Lausanne, Suisse

Cadre théorique de l'étude :

La propagation d'utilisation publique de la calculatrice et son évolution technique suit un mouvement assez semblable à celle de l'informatique. Toutefois son intérêt pédagogique ne se manifeste pas de la même manière. La calculatrice est en effet introduite de façon relativement discrète, en particulier dans les degrés primaires de l'enseignement obligatoire.

Les travaux récents en didactique française abordent l'introduction d'une instrumentation en classe selon trois dimensions :

- Les effets de la transposition didactique de l'utilisation des outils de calcul au niveau du savoir enseigné
- Les usages réels et possibles de l'outil dans l'enseignement primaire et secondaire
- Les scénarios de transmission et de modification des pratiques au niveau de la formation des enseignants.

Les premiers travaux menés par Artigue (1997) portant sur l'introduction d'instrumentation en classe montrent que les phénomènes de transposition des savoirs affectent très fortement la tâche donnée. Guin et Trouche (2002), Birebent (2007), ainsi que les différents auteurs qui ont participé à l'écriture du livre de Floris & Conne (2007) portent leur attention sur les transformations des pratiques et les relations entre types de tâches, techniques et technologies. Quelques auteurs, dont Charnay (2004), Lemoyne & al. (2005) et Caron (2007) ont proposé des activités originales mettant en scène la calculette afin de susciter chez les élèves une réflexion sur les nombres et les opérations. Dans un autre approche, les travaux d'Assude (2007) et de Favre & Tièche Christinat, (2007) soulignent une modification de la nature du contrat didactique. Ces travaux pointent deux attitudes du professeur face à l'outil : soit l'enseignant subordonne l'emploi de la calculatrice à la tâche, soit il l'utilise sans avoir l'intention de développer un usage stabilisé.

Par ailleurs il semble également important d'interroger les pratiques usuelles dans la classe. Or, ni les travaux d'ERMEL et de Charnay (1993-1994, 1997), ni les divers articles et réflexions dont la revue Math-Ecole, en particulier Jaquet & Pochon (2005) s'est faite à plusieurs reprises porte-parole, et encore moins les encouragements inscrits dans les commentaires didactiques accompagnant les moyens actuels d'enseignement romand des mathématiques paraissent suffisants pour amorcer une pratique large et reconnue d'un enseignement fondé en partie sur l'utilisation d'une calculette. Les résistances rencontrées pourraient relever du statut d'auxiliaire de résolution (Bruillard, 1993), mais aussi selon toute vraisemblance d'une absence de tâches qui permettent une exploitation plus extensive de la calculette.

Objectif de l'étude

Suite au symposium du REF, mais également face au constat que le manuel d'enseignement des mathématiques de l'école primaire de Suisse Romande ne contenait que peu de tâches incitant les enseignants à utiliser la calculette en classe, nous avons poursuivi notre réflexion afin de pouvoir cerner certains facteurs didactiques qui pourraient être à l'origine du désintérêt de l'enseignant voire même du bannissement de cet outil.

La recherche que nous présentons concerne prioritairement la gestion d'activités mathématiques instrumentées et les éventuelles modifications des pratiques que l'introduction de la calculatrice est susceptible de produire en classe. À cet effet, nous nous sommes tout d'abord attachés à créer des tâches mathématiques instrumentées par des calculatrices adaptées à ce niveau d'enseignement[8], tâches que nous avons expérimentées avant de les soumettre à des enseignants du primaire, afin qu'ils puissent à leur tour les mettre en œuvre dans leur classe. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés aux discours que ces enseignants pouvaient produire a priori et a posteriori à l'égard de ces tâches, en considérant plus particulièrement ce qu'ils pensaient du rôle tenu par la calculatrice en situation d'enseignement. L'étude de ces discours nous a permis d'obtenir des informations sur la praticabilité de ces tâches instrumentées dans l'enseignement primaire, et également d'identifier les éléments qui favorisent ou entravent leur gestion par l'enseignant. Cette récolte d'informations nous apparaît en effet très utile (pour ne pas dire indispensable) dans la perspective de pouvoir ultérieurement diffuser sous une forme appropriée des tâches instrumentées à l'ensemble des enseignants du primaire. Elle devrait également contribuer à nous fournir de précieux repères en vue de la mise sur pied d'un séminaire consacré à l'utilisation de la calculatrice en classe, dans le cadre de la formation initiale des enseignants primaires.

Les tâches

Les quatre tâches créées incluant la calculatrice sont adaptées au programme de 3ème et 4ème année primaire[9]. Nous avons veillé à ce que, pour chaque tâche, la calculatrice joue un rôle spécifique. Par ailleurs, nous avons fait en sorte que deux des quatre tâches impliquent un usage incontournable de la calculatrice, c'est-à-dire qu'il soit impossible de s'en passer pour les réaliser ; alors que pour les deux autres, l'utilisation de la calculatrice peut être plus simplement considérée comme un auxiliaire de résolution, certes utile, mais non indispensable à leur résolution. Ces activités ont été menées par vingt enseignants qui ont expérimenté chacun une seule tâche instrumentée dans sa classe. Les activités ont été précédées d'un entretien préalable et suivies d'un entretien rétrospectif. Ces propos enregistrés servent de données à nos analyses.

---

[8] Nous nous proposons de présenter ces tâches en détail dans le cadre du Forum d'idées de ce congrès
[9] La 3ème année dans le canton de Vaud correspond au CE2 en France et la 4ème au CM1.

Analyse

Nous avons procédé à une analyse en abîme en trois niveaux : dans un premier temps, nous avons repéré dans les traces discursives des entretiens préalables et les entretiens rétrospectifs, tous les passages où l'enseignant mentionne la calculette ou la calculette rétroprojetable. Dans un deuxième temps, ces passages retenus ont été analysés sous un angle pédagogique et didactique. Ainsi les trois pôles du triangle pédagogique (élèves, enseignant, savoir), le contexte institutionnel et les caractéristiques de la situation didactique ont été repérés. Dans une troisième analyse, nous avons décliné de façon encore un peu plus précise les catégories retenues en les articulant aux effets provoqués par l'usage de la calculette. De la sorte nous avons dégagé diverses dimensions pour chaque catégorie.

Dans cette communication, nous allons nous pencher sur quatre catégories de niveau 2, à savoir les traces mnésiques, la gestion du contrat didactique et pédagogique, la dévolution et les procédures de résolution. Plus spécifiquement, les dimensions des catégories étudiées seront explicitées et leur organisation interne sera décrite. Ceci permettra une articulation entre les effets retenus par les enseignants, et le rapport de chaque tâche à la calculette. Nous pourrons ainsi mettre en évidence un effet tâche, mais également une modification des pratiques de dévolution et de gestion du contrat didactique.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Education Studies in Mathematics*, 33, 2.

Assude, T. (2007). Modes d'intégration de Cabri dans les classes du primaire. IN: R. Floris & F. Conne (Eds) (2007). *Pratiques mathématiques instrumentées dans les institutions didactiques: enseignement, recherche, formation*. Bruxelles: De Boeck.

Birebent, A. (2007) Le calcul numérique à l'épreuve de l'intégration de la calculatrice: le problème didactique de l'approximation décimale et de son analyse à l'aide du concept de contrat institutionnel. IN: R. Floris & F. Conne (Eds) *Pratiques mathématiques instrumentées dans les institutions didactiques: enseignement, recherche, formation*. Bruxelles: De Boeck.

Bruillard, E. (1993). Quelques obstacles à l'usage des calculettes à l'école : une analyse. *Grand N,* 53, 67-78.

Caron, F. (2007). Au coeur de "la calculatrice défectueuse" : un virus qu'on souhaiterait contagieux !. Petit x, 73, 71-82.

Charnay, R. (1993-1994). Un exemple d'utilisation de calculatrice au CE1. *Grand N,* 54, 27-30.

Charnay, R. (1997). *Pourquoi des mathématiques à l'école?* Paris: ESF.

Charnay, R. (2004). Des calculatrices à l'école primaire. Oui ? Non ? Pourquoi ? Comment ? *Grand N*, 74, 67-75.

Favre, J.-M. & Tièche Christinat, C. (2007). La calculette: un outil médiateur de la relation ternaire dans l'enseignement spécialisé. IN: R. Floris & F. Conne (Eds) *Pratiques mathématiques instrumentées dans les institutions didactiques: enseignement, recherche, formation*. Bruxelles: De Boeck.

Floris, R. & Conne, F. (Eds) (2007). *Pratiques mathématiques instrumentées dans les institutions didactiques: enseignement, recherche, formation*. Bruxelles: De Boeck.

Guin, D. & Trouche, L. (Eds.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Jaquet, F. & Pochon, L.-O. (2005). La calculatrice dans les écoles de Suisse Romande. *Math-Ecole*, 216, 46-57.

Lemoyne, G.; Giroux, J.; René de Cotret, S. & Brouillet, F. (2005). Environnement informatique pour l'enseignement du calcul réfléchi: un travail orienté par la théorie des situations didactiques. IN: M.H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (Eds.) *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 279-296.