



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)



Actes Proceedings

4. La promotion des projets et la conception d'activités mathématiques

La qualité des activités offertes aux élèves a un impact important sur la motivation des élèves et des enseignants dans la classe et par le fait même sur les résultats de l'éducation. Des discussions informelles sur les meilleures méthodes de concevoir de telles activités ainsi que du travail exploratoire sur le processus même de conception ont été entreprises. Durant la même période, la communauté de recherche a montré un intérêt croissant pour la conception d'activités et il y a même des signes d'une certaine reconnaissance politique de son importance. Comment améliorer les méthodes de conception et de développement d'activités pertinentes et de qualité? Comment tirer profit des résultats de recherche de domaines tels l'innovation, la pédagogie et les sciences cognitives? Quels sont les critères d'évaluation de telles activités? Comment rendre les gens qui prennent des décisions et la communauté académique plus sensibles à son importance?

4. The promotion of projects and educational design on mathematical activity.

The quality of activities used in schools can make a huge difference to the motivation of pupils, students and teachers in the classroom and on the results of their education. There have been informal discussions on the best way forward, and some exploratory work has been done on the design process itself. Over the same period, there has been growing interest in design within the educational research community: there are even some signs of political recognition of its importance. How to further improve the methods of design and development of high quality pertinent activities? How can one take advantage of the findings of other fields of design, pedagogy and cognitive science? What are the criteria for evaluating such activities? How to raise awareness, particularly among decision makers and in the academic community?

**Université de Montréal
26 – 31 Juillet 2009-06-28**



CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009

Designing and implementing *switch problems* for mathematical discussion, reasoning and level raising

Sonia Abrantes Garcez Palha (S.AbrantesPalha@uva.nl)

Rijkje Dekker (R.Dekker@uva.nl)

Graduate School of Teaching and Learning, University of Amsterdam, Netherlands

Le rehaussement de niveau est un but important en enseignement des mathématiques. La recherche portant sur le changement de niveau a montré l'importance du choix des problèmes mathématiques : réalistes and signifiants pour les élèves; suffisamment complexes pour entraîner diverses approches de résolution; donnant lieu à des actions visibles et des constructions; ces problèmes si abordés à un niveau moins élevé ne peuvent être résolus.

Durant notre présentation, nous discuterons d'exemples de problèmes pour des élèves de 15/16 ans, problèmes qui réunissent ces caractéristiques. Des extraits vidéoscopiques de leçons seront présentés. Nous appelons ces problèmes : *switch problems* ou *problèmes de changement de niveau*. Nous pourrions alors discuter de plusieurs questions : quelles sont les caractéristiques des problèmes présentés qui pourraient en faire des problèmes de changement? Et comment peuvent-ils amener à une hausse de niveau mathématique?

Aims

Most of the current math methods in The Netherlands for secondary education are based on the fact that students should be able to learn autonomously. Teachers are used to this situation: they allow students to consult each other and they give explanations to students if they ask for it. Meanwhile, teachers often feel that students' learning is too little intrusive and that their ability to think mathematically, that is needed for level raising, is not enough developed. The term *level raising* refers to the levels of Van Hiele (1986), who distinguished levels of mathematical understanding. Crucial for student's *level raising* is reflection on one's own mathematical activity and learning process (Freudenthal, 1978). At the international level, the concept of *level raising* is connected to *abstraction in context* (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

In the present study we want to explore interventions that stimulate students to discuss and reason mathematically, aiming at level raising. Processes of mathematical level raising have been modeled by Dekker and Elshout-Mohr (1998), who created a framework to help collaborating students in the process of level raising. This model, the *process model*, distinguishes *key activities* and *regulating activities*. The *key activities* (showing, explaining, justifying and reconstructing one's work) help students to achieve a higher level of mathematical understanding. The *regulating activities* (for example student A criticizes student B's work) regulate the key activities of the other student and keep the interaction going.

One of the issues within this framework is how teachers can support students' mathematical level raising in collaborative learning settings. Research in The Netherlands does not show a clear picture so far. Dekker & Elshout-Mohr (2004) and Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters (2007) investigated what kind of teacher intervention, aimed at helping 16-17 years old students in accomplishing collaborative tasks, is effective. Two kinds of teacher interventions were distinguished and compared: the *process help* where the teacher stimulates the students to perform

the *regulating* and *key activities* for themselves; the *product help* where the teacher focuses on the mathematical content of the tasks and the products of the students.

In the study of Dekker & Elshout-Mohr occurred more level raising in classes where the teacher provided *process help* than in classes where the teacher provided *product help*. The study of Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters did not show significant differences, although the *product help* did not work better than the *process help*.

In the study of Pijls, teachers told that they should like to have given more product help instead of only process help. This fact is also confirmed by the ILO/ELWIER research project of Dekker and Pijls (submitted).

Both studies stressed the importance of using suitable mathematical problems: (i) realistic and meaningful to the students; (ii) complex in order to allow several approaches; (iii) constructive character in a way that student's thinking become visible to others; (iv) aiming at level raising in a way that the problem when approached at lower lever may not be accomplished. (Dekker, 1991).

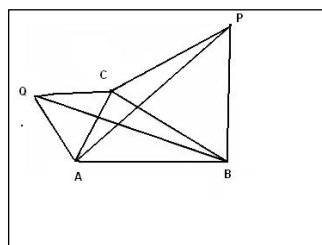
The focus of the present study is to develop and use mathematical problems that fulfill these characteristics: *switch problems*. This type of problems will be used instead of the regular book on crucial moments regarding *level raising*. During these tasks students work in heterogeneous groups of three students and the teacher focuses on the progress of the mathematical discussion in the groups.

The research questions are:

1. Do the developed *switch problems* lead to mathematical discussions, reasoning and level raising?
2. Do the students in classes using *switch problems* reach more level raising than students in classes where the chapters are treated in the regular way?

Switch problems are strongly connected with the pedagogical and mathematical context where they are presented. Thus, the following mathematical problem may be a potential *switch problem* or just an regular problem depending on the context that it is used.

Given triangle ABC and equilateral triangles BCP and ACQ . Proof that $AP=BQ$.



This problem was taken from the school book and it is part of a chapter about proof in Geometry for 15/16 years old students at senior high school. We change a little bit the text of the question in order to underline the activity of ‘proofing’. At the moment that students started to

work on this topic they were not familiar with proof in Geometry. This topic is introduced in the book through familiar contexts as basic geometrical figures, angles and similarity of triangles.

In this research project we developed three worksheets with potential *switch problems* and we tried them out during 4 lessons spread through the chapter. The problems were selected from the book according to the four criteria already mentioned; the worksheets that we used were still in an initial developing stadium and they should be seen as draft versions. The example of switch problem presented above belongs to the first worksheet.

We aimed with these worksheets that students discuss mathematically with each other, experience the need of mathematical proof and, that they recognize and use mathematical arguments while reasoning and discussing. For example, an mathematical argument regarding the presented *switch problem*, can be: “triangles ACP and BCQ are congruent so, in particular $AP=BQ$ ”. On the other side arguments as “I have measured both segments and therefore they are equal” should not be accepted.

The *switch problem* that we present here, although a simple one, is not a standard problem for the students at the beginning of the book chapter. In order to solve this problem a student must:

1. understand the meaning of mathematical proof; use and recognize mathematical arguments and reasoning's
2. get the idea of using congruence of triangles; identify AP and BQ as the respectively side of triangles ACP and BCQ ; justify that $AC=QC$, $CP=CB$ and $\angle ACP=\angle QCB$; justify that triangles ACP and BCQ are congruent.
3. write a mathematical proof using correct arguments, language and notation

In this way we consider it a key problem regarding this chapter. Further, it seems to fulfill the mentioned four criteria:

- it is *realistic* since to prove that length equality of two segments is a meaningful problem within the specific mathematical context of this chapter;
- it is *complex* in the way that this was a non standard problem at the moment it was presented to students and to be able to solve it they should be able to perform the three steps described above, which demands several abilities.
- It has a *constructive* character in the way that students have to produce together a mathematical proof;
- It *aims level raising* in the way that when students start to solve the problem, they probably don't possess enough knowledge to accomplish it. For example, it is new to students to use congruence as middle for geometrical proof; it is also new to recognize mathematical arguments and to produce a mathematical proof.

Methodology

In a beginning stage of the study, the focus is on the first research question and we will follow a design research approach. *Switch problems* will be developed by the researcher and teachers involved. The first step in this stage is to identify crucial moments in the subject matter where level raising should occur and to select and develop *switch problems* that may support this process.

The first learning materials are trailed in October 2008- May 2009 in mathematics lessons with 16/17 year old students at secondary level. The researcher specifically observes and analy-



ses the lessons where the students work with the developed materials to see if these ones lead to mathematical discussions, reasoning and level raising. Through pre- and post testing, it is checked if level raising has taken place.

In the second part of the study it will be examined if in classes with *switch problems* more raising level is reached than in the regular classes and the experiment will be extended to more than one school and class.

Expected results

In the first try-out held in November 2008 students worked on a geometry chapter and at certain moments they worked with worksheets with *switch problems* and the teacher experimented with *process help*. The researcher observed and analysed these lessons and that lead to some interesting results that we would like to present at CIEAEM 61. For example: the first and third worksheet worked good but the second one didn't work at all. Why is that? What are the success or failing characteristics of *switch problems* involved? Another example: the researcher video taped and analysed two groups of students during these lessons: in one group it was found some evidence of level raising and in the other group not. Why is that? The switch problem was the same for both groups so.... What other factors play a role in the use of *switch problems*?

Further, it is expected that the present study will give more scientific insight into the way of teaching mathematics focused on mathematical discussion, reasoning and level raising, especially into the characteristics of the tasks, the composition of the small groups and the role of the teacher.

Practical outcome will be a series of *switch problems* for mathematical level raising and more information about the composition of the small groups and effective teacher interventions that may lead students to a higher level of mathematical understanding and competence in a setting that supports autonomous learning.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

References

- Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen* [Learning mathematics in small heterogeneous groups]. De Lier: Academisch Boeken Centrum.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-65.
- Dekker, R. & M. Pijls (submitted). Students discussing their mathematical ideas: the role of the teacher.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht: Reidel.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 195-222.
- Pijls, M., Dekker, R., & Van Hout-Wolters, B. (2007). Teacher help for conceptual level raising in mathematics. *Learning Environments Research*, 10(3), 223-240.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

L’activité mathématique comme objet d’étude en formation des maîtres

Helena Boubilil, professeure, didactique des mathématiques, Université Laval

Abstract

How can we accurately describe mathematical activity in the classroom of the 21st century? This may take various forms depending on the representation of different actors in the education system: teachers, educational counselors, Ministry of Education, textbook’s authors and researchers in mathematics education. This paper will focus on how we understand mathematical activity from the perspective of the teacher’s educator (formateur des maîtres). What conceptions of learning mathematics must be developed in future teachers? What didactical tools are to be used and enhanced which will permit didactical reflection on the analysis and conceptualization of mathematical activity?

We will outline the different approaches and tools in the design of learning mathematics in primary schools offered through the formation of future teachers, making references to concrete examples from the description of school formation programs and text books in the Quebec schools system. These constitute the teacher’s principal tools. At the same time we will also refer to didactical theories and teaching research in mathematics education as the main source for the analysis of the teaching processes.

Introduction

Depuis plusieurs années, je travaille en formation des maîtres en recherchant les moyens et les outils permettant d’améliorer la préparation mathématique et didactique des futurs enseignants. La question de la diversité des activités mathématiques, des nombreuses approches et des différentes formes que ces activités peuvent prendre selon les objectifs d’enseignement, est une question très importante que nous abordons avec les futurs maîtres dans le cadre de formation didactique à l’enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire.

Cette communication comportera quatre parties dans lesquelles nous présentons les éléments de formation favorisant le développement des compétences professionnelles des futurs maîtres qui participent à la conception et à l’analyse des activités mathématiques:

- savoirs didactiques choisis pour la formation
- difficultés d’apprentissage et objectifs de l’enseignement
- modélisation des apprentissages (en termes de démarches et de processus),
- mise en parallèle des objectifs de l’enseignement avec la description des compétences essentielles visées par le ministère de l’Éducation dans la partie mathématique du programme.

La conclusion prendra appui sur le contenu décrit de ces parties pour présenter les éléments principaux de la conception de l’activité mathématique développée dans le cadre de la formation des futurs maîtres.

Afin de limiter la longueur de la proposition et la durée de la présentation ainsi que pour exposer les liens entre le contenu des différentes parties de notre présentation, nous appuierons nos propos sur des exemples concrets ne portant que sur un domaine des mathématiques, la géométrie, et sur un concept particulier, le triangle. Nous avons choisi ce dernier pour les deux raisons suivantes:

- le taux d'échec aux questions portant sur les concepts du triangle et du quadrilatère ainsi que sur le raisonnement attendu est le plus élevé par rapport aux autres concepts géométriques ;
- les démarches employées dans les activités visant le développement de ces concepts sont semblables, mais le nombre des attributs du concept du triangle est moindre que celui du quadrilatère.

La description des difficultés des élèves, la modélisation des apprentissages et l'analyse des programmes s'appuieront donc sur le même concept géométrique.

Savoirs didactiques de la formation participant à la conception de l'activité mathématique

Le savoir didactique que nous avons choisi pour la formation des futurs maîtres est de nature théorique (venant de recherches didactiques) et pratique (venant de travaux pratiques proposés dans le cadre de la formation).

Les principaux savoirs théoriques que nous visons coïncident avec ce qui suit :

- les éléments de la *Théorie des situations* de Brousseau (1998): *situation, situation-problème, dévolution* de la situation, *situation didactique* et *a-didactique* et *situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation* ;
- les niveaux du développement de la pensée géométrique de van Hiele (1959/1985) : progression des élèves selon trois premiers niveaux (*visuel, descriptif/analytique, relationnel/abstraction*) et continuité des apprentissages (modélisation des apprentissages selon le cycle et liens entre les activités du même cycle et entre les cycles)
- les registres de représentations de Duval (1992, 1995) : développement de différentes représentations de la figure (graphique, discursive, symbolique) et coordination de différents registres de représentation dans une activité géométrique

À travers des situations de formation, nous voulons aussi faire découvrir au futur enseignant différents savoirs de nature plus pratique portant sur l'organisation des apprentissages de la géométrie. Ces savoirs peuvent consister en:

- des démarches géométriques permettant la découverte des connaissances ou leur mise en jeu (observation, représentation, construction, résolution de problèmes) et leurs enjeux (reconnaître, comparer, décrire, dégager, classer, justifier, associer, évoquer, prouver, etc.);
- des outils et des environnements particuliers de l'organisation des apprentissages (modèles physiques, instruments de constructions, logiciels, etc.);
- des phénomènes d'apprentissage (position inhabituelle de la représentation, dessin/concept, prise de mesures pour prouver, etc.);
- des difficultés des élèves (visualisation, langage et raisonnement);
- des critères d'analyse de l'activité mathématique (but, connaissances visées, ordre des étapes, pertinence de représentations graphiques, du vocabulaire, des consignes et des schémas, anticipation des réponses et intervention sur des réponses erronées, etc.).

Les savoirs didactiques visés dans le cadre de formation des futurs maîtres représentent pour nous les éléments nécessaires de l'organisation des apprentissages géométriques. Nous cherchons à favoriser la découverte de ces savoirs dans des activités de formation et leur transfert à la pratique par leur intégration à l'analyse des activités et à la conception des séquences d'enseignement de la géométrie au primaire.

Difficultés en apprentissage et les principaux objectifs de l’enseignement de la géométrie

L’étude de plusieurs recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans les apprentissages de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques (Yakimanskaya, 1971; Fennema et Sherman 1977; 1978; Guay et McDaniel, 1977; Vinner et Hershkowitz, 1980; Gardner, 1983; Burger et Shaughnessy, 1986; Fischbein, 1987; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Hershkowitz, 1989; Bishop, 1989; Clements et Battista, 1992; Vergnaud, 1991; 2001; Berthelot et Salin, 1992; Capponi et Laborde, 1995; Duval, 1995) nous a permis de situer les difficultés des élèves autant sur les plans de la visualisation, du langage et du raisonnement que sur celui l’organisation des concepts géométriques. Souvent, il est assez difficile de distinguer le processus de la perception d’avec l’appréhension conceptuelle des objets dans une activité géométrique. Cependant, à partir des recherches et de notre propre analyse des comportements et des productions des élèves (en apprentissage et en évaluation), nous avons dégagé différents exemples. Ces derniers portent sur les difficultés visuelles et langagières, celles de l’emploi du raisonnement et celles qui exigent la coordination des aptitudes visuelles, langagières et du raisonnement dans des tâches plus conceptuelles ou dans la résolution de problèmes géométriques. Nous étions particulièrement intéressées par les difficultés éprouvées par un grand nombre d’élèves ou par les difficultés considérées comme « typiques » de certaines activités de formation, nous soulevons les questions portant sur divers types de difficultés, sur les phénomènes et les obstacles en apprentissages ainsi que sur la manière de travailler les objets géométriques en classe. Selon van Hiele (1987), dès l’école primaire, on doit offrir aux élèves des occasions de construire leur pensée géométrique et s’ils n’atteignent pas un niveau d’habileté suffisant pour employer le raisonnement, cela est en partie dû au fait qu’on ne leur offre pas de problèmes géométriques appropriés. De même, précise Yakimanskaya (1971), si les enseignants ne fournissent que les informations verbales des propriétés de figures et ne se préoccupent pas de l’organisation des activités pour le développement de l’imagination spatiale des élèves, cet enseignement « formaliste » ne participera pas à la construction des concepts. Dans de telles conditions, l’apprentissage à un niveau supérieur exigera une mémorisation (Clements et Battista, 1992). Les propos de Yakimanskaya sur le rôle des approches riches et variées dans le développement géométrique des élèves ont été soulignés par plusieurs recherches menées dans le domaine de l’enseignement et de l’apprentissage de la géométrie (voir, entre autres, Vinner et Hershkowitz, 1980; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Duval, 1995; Ekimova, 2005)

Dans cette communication, nous présentons quelques exemples de différents types des difficultés rencontrées par les élèves, ensuite le taux de réussite aux questions posées au mini-test d’entrée au début de la formation didactique à l’enseignement de la géométrie. Cette identification des difficultés se révèle intéressante pour les enseignants et pour la formation de futurs maîtres dans la mesure où elle constitue un point de départ à leur analyse, à celle du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution. L’analyse des difficultés en apprentissage de la géométrie nous permet d’attirer l’attention des futurs enseignants sur les objectifs principaux de l’enseignement de la géométrie : le développement progressif et harmonique de la visualisation, du langage géométrique et du raisonnement, ceux-ci participant à la construction des concepts géométriques et à la résolution de problèmes. Puisque l’enseignement de la géométrie consiste en une mise en œuvre d’une multitude de

connaissances pour développer les aptitudes spatiales des élèves, l'enseignant lui-même doit posséder ces aptitudes et avoir connaissance de cet environnement pour pouvoir atteindre ces objectifs.

Modélisation des apprentissages

À partir de l'analyse de recherches portant sur les obstacles ainsi que sur les difficultés des élèves d'apprentissages de la géométrie, nous pouvons conclure que la faible performance faible des élèves peut trouver sa source dans les méthodes inappropriées d'enseignement et peut être attribuée à une expérience géométrique insuffisante. De quoi se compose cette expérience? Elle est constituée d'activités avec du matériel concret (solides de bois, blocs, différentes formes pour construire les solides, boîtes, ficelles, pailles, pâte à modeler, formes géométriques de plastique, carton, papier calque et quadrillé, instruments de construction, etc.) dans le but de représenter, de construire, d'observer, de reconnaître, d'associer, d'évoquer, de comparer des figures géométriques et de les décrire, de dégager leurs propriétés, de justifier, etc.

Le développement des aptitudes visuelles et langagières de l'élève est stimulé par l'expérience tirée d'activités comme la manipulation et l'observation des figures géométriques, la recherche des similitudes et des différences, la reconnaissance du mouvement des figures géométriques dans l'espace, la reconnaissance des solides selon les projections de leurs faces et selon leurs empreintes, la reconnaissance de différentes coupes de ces derniers, la description des figures géométriques et de différents mouvements, etc. Les jeux de parcours, les activités de puzzles, la décomposition et la composition des formes géométriques en formes connues, le remplissage de boîtes avec des billes, entre autres, préparent les élèves à la notion de mesure et au calcul du périmètre, de l'aire et du volume.

En reprenant les démarches géométriques principales (*représentation, observation, construction et résolution de problèmes*), nous allons modéliser les apprentissages des élèves en termes de processus (physiques et mentaux) et de concepts géométriques visés, selon les niveaux de développement de la pensée géométrique. Il serait utile de préciser que cette distinction en types d'activité géométrique n'est pas restrictive et réfère à la première action de l'élève. De plus, soulignons qu'une situation d'observation qui favorise le développement de la visualisation peut faire appel à la description ou à la classification des objets. Dans le même ordre d'idées, une situation de construction peut nécessiter l'observation des figures ou peut viser le développement des compétences de résolution de problèmes. Nous présentons aussi quelques exemples des activités tirées des manuels scolaires pour montrer de quelle façon les différentes collections représentent l'activité géométrique.

Programmes de formation de l'école québécoise (section mathématique)

Le concept de compétence fait appel à l'analyse de l'activité et des processus cognitifs. Il peut se présenter, selon Vergnaud (2001), comme un critère d'analyse des résultats de l'activité (l'élève est plus compétent qu'avant), d'analyse de la forme de l'activité (il utilise une meilleure stratégie : rapide, fiable, économique, etc. que les autres) et d'analyse d'un répertoire de ressources alternatives ou de comportement dans une situation nouvelle. Une compétence ne constitue pas une forme d'algorithme mémorisé, mais un savoir-agir dont sa flexibilité et son adaptation à divers contextes justifient l'importance de la mobilisation et de l'utilisation

efficaces. Il s’agit d’une mobilisation sélective de ressources compte tenu des caractéristiques du contexte (Tardif, 2001).

Les programmes actuels visent à favoriser l’apprentissage à long terme, ce qui impose une continuité de ce processus. Legendre (2000) affirme que le développement des compétences incite l’école à se centrer sur la formation de la pensée, sur les démarches d’apprentissage de l’élève et sur le sens des savoirs en lien avec leur contexte et leurs conditions d’utilisation. Ce contexte de la réforme de l’école québécoise (MEQ, 2002) impose de nombreux changements relatifs à l’organisation des apprentissages, que doivent effectuer les enseignants. Il s’agit surtout de revoir la manière d’enseigner pour développer les compétences et d’évaluer les compétences des élèves.

L’analyse du contenu géométrique des programmes pour l’enseignement primaire expose le fait que cette description ne présente pas toujours une structure cohérente qui tient compte de relations entre les concepts et les processus ainsi que de la progression des apprentissages. Des interventions didactiques dans le cadre de formation initiale ou continue à l’enseignement doivent être menées pour outiller les enseignants étant donné le manque d’indications précises sur ces relations et sur leur incidence dans la progression des apprentissages.

Nous avons aussi mis en parallèles, d’une part, les objectifs de l’enseignement de la géométrie (*visualisation, langage, raisonnement*), ainsi que leur coordination dans la construction des concepts et dans la résolution de problèmes et d’autre part, la description des compétences essentielles visées par le ministère d’Éducation dans la partie mathématique (*résoudre une situation-problème, raisonner à l’aide de concepts et de processus mathématiques et communiquer à l’aide du langage mathématique*). En comparant ces descriptions, nous pouvons remarquer des similitudes au niveau du raisonnement et du langage, mais aussi des différences importantes au niveau de la visualisation et de la résolution de problèmes. Par exemple, la visualisation, élément important dans l’apprentissage géométrique et particulièrement dans le développement du langage, du raisonnement et dans la résolution des problèmes géométriques, n’est pas évoquée par les programmes. La résolution de problèmes géométriques fait appel à la visualisation, au raisonnement, aux concepts et processus géométriques et exige leur coordination. Quant à l’apprentissage par la résolution des situations-problèmes, présentée comme la compétence essentielle « Résoudre une situation-problème » par des programmes ministériels actuels, sa description dans le programme correspond plus à l’approche appliquée pour l’organisation des apprentissages. Dans ce contexte, nous pouvons faire des associations entre la description de ses composantes (décoder les éléments de la situation-problème, modéliser la situation-problème et appliquer différentes stratégies en vue d’élaborer une solution, valider la solution, partager l’information relative à la solution) et les dialectiques d’action, de formulation et de validation proposées par la *Théorie des situations didactiques* de Brousseau (1998). L’idée de l’apprentissage par la résolution des situations-problèmes rejoint l’orientation essentielle de la didactique des mathématiques. Cependant, la description présentée par le programme ignore un élément important de l’approche didactique. En effet, selon la description d’une situation-problème présentée par Brousseau (1991), les situations-problèmes doivent permettre aux élèves de « mettre en œuvre des choix ou des actions » sans que l’enseignant ne précise la méthode ou ne fournisse des informations sur l’existence de situation de référence (selon la description d’une situation-problème). En visant les apprentissages des

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

élèves, les activités devraient se préoccuper de leur développement conceptuel et de la construction des connaissances.

Conclusion

En nous centrant sur l’une des questions posées par ce colloque « Comment peut-on décrire l’activité mathématique dans une classe du 21^e siècle? », nous avons décrit les savoirs didactiques de la formation à l’enseignement de la géométrie participant au développement de la conception et de l’analyse de l’activité mathématique. Cette conception représente une structure qui réunit les objectifs de l’enseignement de la géométrie, les différents types de situations didactiques, la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique, la multiplicité et la coordination des registres de représentation et les différentes démarches géométriques qui permettent d’atteindre les objectifs visés. Elle participe à la compréhension des visées ministérielles et au développement du regard critique et constructif sur les activités présentées dans les manuels scolaires.

Références principales

- Berthelot, R. et M.-H. Salin (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Bordeaux I.
- Bishop, A. J. (1989). Review of visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Burger, W. & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.
- Capponi, B. et C. Laborde. (1995). Modélisation à double sens, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian, *Actes de la VIIIe École didactique d'été*, Saint-Sauves d'Auvergne, France, 265-272
- Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, In D. Grows, (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan Publishing Co., 1992.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne : Peter Lang.
- Ekimova, E. (2005). *Une approche de formation didactique à l'enseignement de la géométrie au primaire*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Montréal.
- Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact, In D.A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, 147-164, New York: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Fennema, E. & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors, *American Educational Research Journal*, 14, 51-71.
- Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*, Dordrecht, The Netherlands : D. Reidel Publishing Company.
- Fuys, D., D. Geddes & Tischler, R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Guay, R.B. & McDaniel, E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, *Journal of research in Mathematics Education*, 8, 211-215.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, 11, 61-76.
- Van Hiele, P.M. (1959/1985). The child's thought and geometry, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 243-252, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vergnaud, G.(2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque de GDM*, Montréal.
- Vinner, S. & R. Hershkowitz. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Yakimanskaya, I. S. (1971). The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 5, 145-168, Chicago: University of Chicago.



Analyse comparative des contextes et de leurs fonctions dans les manuels scolaires québécois de 1968 à 2005 : cas des chapitres introductifs à l’algèbre

Guylaine Cotnoir, Hassane Squalli et Marie-Pier Morin
Université de Sherbrooke
Guylaine.Cotnoir@USherbrooke.ca

Since 1990, the concept of contextualized learning in Mathematics has gradually gained more and more importance in textbooks. From 1960 to today, the four consecutive mathematics programs have given increasing importance to the concept of contextualized learning (Quebec Government, 2001). Several authors note that the context is advantageous for learning in Mathematics. An analysis of scientific literature related to contextualized learning in Mathematics has brought to light its several different roles (Gravemeijer and Doorman, 1999). The textbook is a tool for implementing these program prescriptions, a constant companion for teaching professionals and a important witness to the past (Lebrun, Lenoir and Desjardins, 2004). In this paper, we aim to identify how this contextualization occurs in Quebec textbooks with respect to the teaching of Algebra. To meet our objectives, we selected the official textbooks from 1960 to the present. The conceptual framework takes into account the different dimensions of the roles of contextualisation. Preliminary analysis shows a new role for the use of contextualization.

Notre réflexion porte sur la mise en contexte pour concevoir des activités et des projets pertinents pour les étudiants et les élèves. Cette proposition de communication s’inscrit donc dans le thème 4 sur la promotion des projets et la conception d’activités mathématiques.

Des travaux de recherche, tant théoriques qu’empiriques, soulignent l’importance de la contextualisation dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques (Gravemeijer et Doorman, 1999; Sharp et Adams, 2002). Depuis les années 1970, le recours à la contextualisation est une recommandation de plus en plus forte dans les programmes d’études. C’est notamment, une des orientations principales que l’on retrouve dans le *Programme de formation de l’école québécoise* (2003) actuellement en implantation dans les écoles secondaires du Québec. À cet effet, nous nous sommes questionné à savoir comment, au fil des réformes des ces dernières années, les contextes ont-ils été exploités dans les manuels scolaires, qui sont un outil d’opérationnalisation des préoccupations ministérielles et également un témoin temporel (Lebrun, Lenoir et Desjardins, 2004).

Dans notre recherche nous poursuivons donc les objectifs suivants : 1) Identifier les fonctions des contextes dans les manuels les plus utilisés de 1968 à nos jours; 2) Répertorier les différents types de contextes utilisés dans ces manuels et 3) Dégager l’évolution possible de ces principaux points à l’étude.

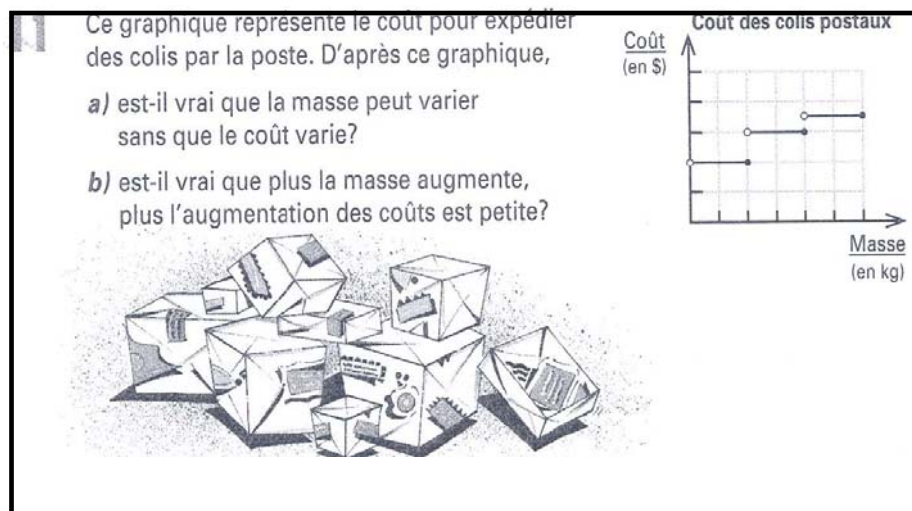
Pour répondre à nos objectifs, étant donné la quantité appréciable de manuels utilisés à travers les différentes époques, ces derniers ont été choisis sur la base de leur popularité auprès des enseignantes et des enseignants. Nous avons ainsi retenu cinq manuels datant de 1968, 1970, 1983, 1994 et 2005. Toute la section du manuel traitant pour la première fois de concepts

algébriques a été sélectionnée et traitée. Le choix de l’algèbre se justifie par la nouveauté pour les élèves, les nombreuses difficultés rencontrées par ces derniers lors du passage de l’arithmétique à l’algèbre (Rojano, 2002) et la forme souvent décontextualisée, très symbolique que prend ce champ des mathématiques (Wheeler, 1996). Dans le chapitre sur l’introduction à l’algèbre, nous recueillons des données à l’aide de notre grille sur chacune des activités proposées à l’élève.

Notre grille de cueillette des données, issue de notre cadre conceptuel, comprend huit rubriques dont les suivantes : « Contexte de l’activité », le « Type de réalité » la « Tâche rattachée », la « Pertinence du contexte pour le raisonnement ». Dans la partie « Contexte de l’activité », notre grille prévoit trois types de contextes : le contexte *réel* (qui existe réellement), *imaginaire* (quand il n’est pas réel) ou *purement mathématique* (en l’absence de contexte avec seulement des éléments mathématiques). Quand le contexte est réel nous qualifions le « Type de la réalité » associé au contexte. Nous avons retenu deux types : *réalité naturelle*, fait référence au monde naturel (la multiplication des abeilles) et *activités humaines* (être membre d’un orchestre). Quant à la « Tâche rattachée » au contexte de la mise en situation, elle peut être *artificielle* pour les tâches qui ne sont pas en lien avec le « Type de réalité » proposé, et le terme *authentique réelle* pour les tâches en lien à faire pour vrai et *authentique fictive* pour les tâches en lien, mais qui sont simulées. Enfin la « Pertinence du contexte pour le raisonnement » de l’élève peut être *essentiel* si le raisonnement ne peut se faire sans le contexte, *pertinent* si le contexte supporte le raisonnement, mais que ce dernier pourrait se faire dans un autre contexte ou *non pertinent* si lors du raisonnement le recours au contexte n’est pas nécessaire pour l’élaboration d’une réponse. <

Afin de rendre plus explicite notre démarche, prenons en exemple le problème suivant tiré de Breton et Fortin (1994).

Tableau 1
 Situation d’apprentissage Carrousel





Le contexte de l'activité présentée est *réel*, puisqu'elle est issue de la vie de tous les jours et qu'un tel type de graphique existe pour calculer le prix de livraison d'un colis. Cette réalité est du domaine de l'*activité humaine*. La tâche demandée aux élèves est de faire une interprétation du graphique relativement aux coûts de livraison de colis. C'est effectivement le genre de questions que peuvent se poser des clients avant de poster un colis. Cette tâche est donc *authentique fictive*, car les élèves ne postent pas un colis réellement. Ensuite, pour donner sa réponse, pour raisonner, l'élève doit se servir du contexte proposé, mais celui-ci pourrait être différent et amener le même type de raisonnement. Nous qualifierons donc le contexte de pertinent pour le raisonnement de l'élève.

Après avoir rappelé quelques éléments de notre problématique et du cadre conceptuel sur les fonctions et les types de contextes, nous présenterons lors de cette communication quelques résultats de notre analyse pour ainsi caractériser cet effort de contextualisation des activités mathématiques d'hier à aujourd'hui. Comment ces résultats peuvent-ils nous éclairer sur la conception d'activités mathématiques qui se voudraient motivantes, enrichissantes, significatives et pertinentes?

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Bibliographie

- Breton, G. et Fortin, D. (1994). *Carrousel mathématique 2; deuxième secondaire*. Québec: Centre éducatif et culturel.
- Gravemeijer, K. et Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.
- Gouvernement du Québec (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Ministère de l'Éducation du Québec.
- Lebrun, J., Lenoir, Y. et Desjardins, J. (2004). Le manuel scolaire "réformé" ou le danger de l'illusion du changement : analyse de l'évolution des critères d'évaluation des manuels scolaires de l'enseignement primaire entre 1979 et 2001. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 30(3), 1-25.
- Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: students' access to significant mathematical ideas. In L. D. English (dir.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p. 143-163). New-Jersey: Laurence Erlbaum Associates.
- Sharp, J. et Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research*, 95 (6), 333-347.
- Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 317-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

La Loi de la Réflexion et les triangles semblables: Euclide à la rescousse!

*Alexandre Ducharme Rivard, Étudiant au doctorat
 CREAS¹, Université de Sherbrooke, Canada*

Summary

The law of reflection and similar triangles: Help from Euclid. In 2006, a new curricular was implemented in Québec’s high schools. The curriculum suggests integrating historical approaches and links with other disciplines to support learning of mathematics. For this communication, we propose to explore connections between optical physics and mathematics through the development of Euclid’s geometrical optics. First, we will describe how Ancient Greeks explained light propagation. Secondly, we will show how Euclid proved the law of reflection using geometry. We will then conclude with guidelines to elaborate a learning situation integrating mathematical and scientific concepts based on the historical approach described above.

Introduction

Ce texte est en lien avec notre projet doctoral sur les pratiques des enseignants en mathématiques intégrant les sciences, plus particulièrement la physique. L’étape préliminaire à l’analyse des pratiques, dans laquelle nous nous situons, consiste à explorer certains liens entre les mathématiques et les sciences à travers leur développement historique. Le Programme de formation de l’école québécoise (PFÉQ) incite les enseignants de mathématiques à intégrer la dimension historique dans leur enseignement (Gouvernement du Québec, 2006, 2007). En autres pour cette raison, nous choisissons la genèse de ces disciplines pour faire ressortir des liens entre les mathématiques et la physique. De ces liens, nous proposons une situation d’apprentissage combinant les concepts de la propagation de la lumière, de la loi de la réflexion et des propriétés des triangles semblables dans un contexte historique.

En plus de la dimension historique, le PFÉQ recommande, pour ne pas dire prescrit, aux enseignants d’utiliser l’interdisciplinarité. Plus spécifiquement, ce programme suggère qu’il existe de forts liens entre les mathématiques, d’une part, et la science et la technologie², d’autre part. Nous faisons l’hypothèse que la prescription institutionnelle d’utilisation de références historiques et d’approches interdisciplinaires soulèvera des défis aux enseignants de mathématiques.

De nos jours, l’utilisation de modèles mathématiques pour représenter les phénomènes physiques n’est pas remise en question. Toutefois, ce ne fut pas toujours le cas (Charbonneau, 1985a, 1985b). L’optique fait exception, celle-ci entretenant avec les mathématiques une relation particulière, au point d’avoir longtemps été considérée comme un champ des mathématiques.

¹ Centre de recherche sur l’apprentissage et l’enseignement des sciences, financé par le CRSNG (Canada).

² La science et la technologie étant regroupées dans la même discipline scolaire (Gouvernement du Québec, 2006, 2007).

L'optique géométrique

Dans cette section, nous proposons de relever sur le plan historique certaines connaissances (propagation de la lumière, présentation d'une preuve) qui seront réinvesties dans la situation d'apprentissage développée pour les besoins du présent texte.

L'un des contextes associé à l'optique est certainement le champ de la vision. Les premières explications de la vision se retrouvent dans les écrits et les traductions des textes de la Grèce antique (Ronchi, 1956). Différentes théories coexistent. Pour les pythagoriciens, les rayons lumineux sortent de l'œil. Tandis que pour les atomistes, ce sont les objets qui envoient des simulacres permettant de les voir.³ Les platoniciens ont utilisé une combinaison des deux théories et Aristote réajusta cette combinaison en expliquant que la lumière est un mouvement entre l'œil et l'objet (Ronchi, 1956). La théorie des pythagoriciens a été celle qui a le plus influencé l'Antiquité grecque.

La première mathématisation du phénomène est attribuée à Euclide. Pour Euclide, la lumière sort de l'œil en ligne droite, comme dans la conception pythagoricienne. Deux ouvrages lui sont associés, soit *L'Optique* et *La Catoptrique*⁴. Dans son premier ouvrage, Euclide définit⁵ la vision en utilisant le principe de rayons sortant de l'œil, rectilignes, réfléchibles et réfringibles:

- I. Supposons que les lignes droites qui émanent de l'œil se propagent à divergence des grandes grandeurs.
- II. Et que la figure comprise sous les rayons visuels est un cône ayant son sommet dans l'œil, et sa base aux limites des grandeurs regardées.
- III. Et que les grandeurs sur lesquelles tombent les rayons visuels sont vues; tandis que celles sur lesquelles les rayons visuels ne tombent pas ne sont pas vues.
- IV. Et que les grandeurs vues sous un plus grand angle apparaissent plus grandes; tandis que celles qui sont vues sous un plus petit angle apparaissent plus petites, et que celles qui sont vues sous des angles égaux apparaissent égales.⁶ (Ver Eecke, 1959, p. 1).

La première hypothèse est la seule qui ne sera pas admise par Ptolémée, reconnu aussi pour ces travaux en optique. Pour ce dernier, le rayon ne peut diverger et doit être continu (Ver Eecke, 1959). *L'Optique* d'Euclide renferme 58 propositions. Certaines sont fausses, d'autres présentent des évidences et enfin certaines sont vraies et démontrées géométriquement (Ver Eecke, 1959). Dans la *Catoptrique*, on retrouve la loi de la réflexion de la lumière sur les miroirs plan, concave et convexe. La géométrie sert de support pour expliquer le phénomène (figure 1).

³ On associe les noms d'Épicure (342 – 270 av. J.-C.) et de Démocrite (~460 ~ 360 av. J.-C.) à cette école. Cette théorie est attribuée à Empédocle (~ 490 ~ 430 av. J.-C.) (Ronchi, 1956)

⁴ Partie de l'optique qui étudie la réflexion de la lumière.

⁵ Il s'agit plus de postulats ou d'hypothèses que de définitions.

⁶ *L'Optique* d'Euclide traite aussi de la perspective.

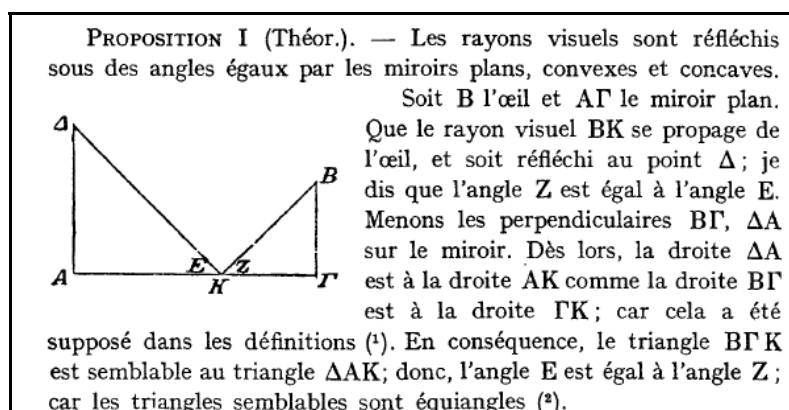


Figure 1 Démonstration de la loi de la réflexion sur un miroir plan (Ver Eecke, 1959, p. 100)

La proposition I débute d'abord par un miroir plan et se poursuit pour un miroir concave et convexe⁷. La loi de la réflexion se base sur la définition trois du livre: «Qu'un miroir étant posé dans un plan, il y a proportion telle que la hauteur de celui qui regarde est à la hauteur établie à angles droits sur le plan comme la droite menée entre le miroir et celui qui regarde est à la droite menée entre le miroir et la hauteur établie à angles droits.» (Ver Eecke, 1959, p. 99). Dans ce cas, la loi de la réflexion s'appuie sur les propriétés des triangles semblables, concepts étudiés au secondaire.

Ces deux ouvrages sont des livres de mathématiques (Ronchi, 1956). Euclide a plusieurs successeurs qui traitent l'optique de façon géométrique: Héron d'Alexandrie; Damianus; Ptolémée, Archimède⁸ (Ver Eecke, 1959; Ronchi, 1956). Que pouvons-nous réinvestir de ces connaissances historiques pour l'enseignement des mathématiques au secondaire?

Exemple de situation pour l'enseignement des mathématiques

Dans une perspective interdisciplinaire où les interactions entre les disciplines sont nécessaires, nous proposons quelques pistes pour une situation intégrant les concepts de triangles semblables et de la propagation de la lumière en s'inspirant de la genèse de l'optique.

Une première étape consiste en une modélisation de la propagation de la lumière. Du côté des sciences, l'une des façons de contourner ce problème serait de faire émerger les conceptions des élèves. On présente d'abord aux élèves les différentes conceptions de la propagation de la lumière chez les philosophes de l'Antiquité (lumière sortant de l'œil; envoyé par l'objet, etc.). Les élèves discutent ensuite de ces théories pour dégager le meilleur modèle de propagation de la lumière. Il est souhaité qu'ils puissent créer le leur en se basant sur les connaissances actuelles dans le domaine. Ce travail peut s'effectuer en collaborant avec l'enseignant de sciences afin qu'ils en débattent en classe, ou mieux encore en faisant une expérimentation. Le

⁷ Nous avons mis seulement la partie portant sur le miroir plan.

⁸ L'ouvrage n'a jamais été retrouvé, mais a été cité plusieurs fois dans les textes historiques (Ronchi, 1956).

but étant de représenter un faisceau lumineux par une demi-droite. Ensuite, les élèves doivent tracer la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir (figure 2). Ceci se fait expérimentalement à l'aide d'un miroir et d'un faisceau lumineux, soit dans la classe de sciences ou de mathématiques⁹.

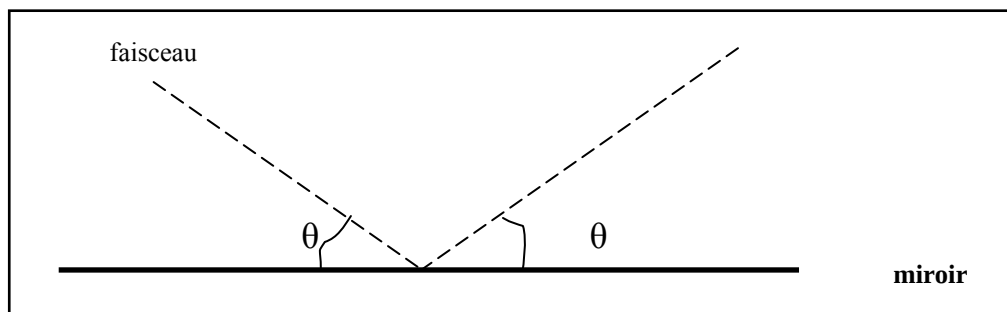


Figure 2 Représentation d'une réflexion sur un miroir plan

Une des questions à poser en mathématiques est quel est le lien entre les deux angles formés θ_1 et θ_2 ? L'enseignant de mathématiques recueille les différentes stratégies¹⁰ des élèves pour ensuite présenter la « démonstration » d'Euclide (cf. fig.1). Les élèves discutent sur le raisonnement utilisé par ce dernier pour montrer que les deux angles sont congrus. Euclide a utilisé les propriétés des triangles semblables pour démontrer la loi de la réflexion : que sont θ_1 et θ_2 congrus. La discussion du texte tournera autour de l'utilisation des cas de similitudes des triangles pour expliquer un phénomène lumineux.

Cette situation peut être adaptée en fonction du niveau scolaire pour lequel elle est réalisée. Par exemple, l'enseignant de mathématiques peut demander une preuve formelle de la similitude des triangles ou utiliser seulement les cas de similitude sans la démonstration. Cette approche rejoint les travaux de Cerquetti-Aberkan et Rogriguez (2002) pour développer les mathématiques en contexte historique ou ceux de Munier et Merle (2003, 2007) qui travaillent le concept d'angle en utilisant des contextes de physique. Merci Euclide de nous avoir démontré géométriquement la loi de la réflexion!

⁹ Cette réflexion peut être retracée sur un papier en partant du phénomène. Les élèves peuvent aussi utiliser différents angles d'incidence.

¹⁰ On peut chercher le lien entre ces angles en les mesurant les angles pour voir que quelque soit les angles d'incidence θ_1 , θ_1 et θ_2 seront congrus.

Références

- Cerquetti-Aberkane F. et Rogriguez A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne: CRDP de l'académie de Créteil.
- Charbonneau, L. (1985a). Mathématiques: langage de la nature (Regards historique I: avant Fibonacci), *Bulletin de l'AMQ*, XXV (1), 5-6.
- Charbonneau, L. (1985b). Mathématiques: langage de la nature (Regard historique II: Renaissance ou d'un univers qualitatif à un monde mathématisé), *Bulletin de l'AMQ*, XXV (4), 5-7 et 39.
- Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation du Québec (2006). *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec (2007). *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Gouvernement du Québec.
- Merle, H. et Munier, V. (2003). Comment conceptualiser la hauteur du Soleil en tant qu'angle au cycle 3? *Aster*, 36, 41-68.
- Munier, V. et Merle, H. (2007). Une approche interdisciplinaire mathématique-physique du concept d'angle à l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (3), 349-388.
- Ronchi, V. (1956) *Histoire de la lumière*, traduit de l'italien par J. Taton. Paris : S.E.V.P.E.N.
- Ver Eecke, P. (1959). *Euclide, L'optique et la catoptrique*. Traduit du grec en français. Paris : Albert Blanchard.

L'utilisation de jeux mathématiques en tant qu'interface culturelle entre la famille et l'école au primaire

Chantal Godmaire

Doctorante en didactique des mathématiques
Université de Montréal

Les difficultés d'apprentissage en mathématique ne s'expliquent pas toujours par la présence d'un trouble d'apprentissage chez l'élève. Parmi les facteurs ayant un impact sur la réussite éducative, nous notons la défavorisation socio-économique et le statut socioculturel des familles. Dans le but de réduire les difficultés d'apprentissage de la mathématique chez les élèves du primaire issus de famille défavorisée ou provenant d'une communauté culturelle, une chercheure et une doctorante en didactique de l'université de Montréal ont mis sur pied, à l'automne 2008, un projet collaboratif dont l'objectif est de développer des activités mathématiques qui serviront de pont entre la culture de la famille et la culture de l'école. Au terme d'une année d'expérimentation, les auteurs du projet dégagent des résultats préliminaires en lien avec l'enseignant, le contexte de la classe et l'élève.

En début de scolarisation, la mathématique constitue, pour certains enfants, un apprentissage difficile. Déjà au terme du premier cycle d'enseignement primaire, des enfants accusent un retard scolaire dans ce domaine d'apprentissage. Dans quelques cas, ce retard se justifie par la présence d'un trouble spécifique d'apprentissage. Cependant, comme le soulignent plusieurs chercheurs (Saint-Laurent, Giasson, Simard, Dionne, Royer, Bitadeau, Boisclair, Champoux, Moisan, Trépanier et Vézina, 1995; Julo, 1995), la majorité des élèves en difficulté d'apprentissage possède des capacités intellectuelles identiques à celles des autres élèves.

Interpellées par cette problématique, deux chercheures ont démarré un projet de recherche qui s'intéresse aux difficultés d'apprentissage de la mathématique chez les élèves issus d'une culture différente de celle de l'école. La culture de l'école est à l'image de la culture dominante de la société. L'école a pour mandat, entre autre, de véhiculer cette culture dominante. Cependant, parmi les membres de la société, des groupes d'individus partagent une culture qui diffère à différents degrés de la culture dominante. Nous entendons par élèves issus d'une culture différente de la culture dominante, les enfants issus de communauté culturelle, mais également ceux issus de milieux défavorisés. Ces groupes d'élèves possèdent une culture qui présente des écarts par rapport à la culture de l'école. L'ethnomathématique s'intéresse à ces différences culturelles. Les travaux de Ginsburg, de Bishop et de Zaslavsky nous ont inspiré pour l'élaboration de ce projet.

Bishop (1988) identifie deux processus qui expliquent la double culture de l'élève: l'enculturation et l'acculturation. L'enculturation est le processus qui consiste à intégrer l'élève à la culture de son milieu de vie. Par ailleurs, l'acculturation consiste à intégrer l'élève issu d'une culture minoritaire à la culture dominante. Face à cette double culture, la situation éducative peut devenir très complexe.

Dans les milieux où des élèves proviennent d'une culture différente de la culture dominante, les professionnels de l'éducation tendent à expliquer les difficultés d'apprentissage par un manque de stimulation en bas âge ou par la présence d'un déficit cognitif. Or, Ginsburg (1997) reconnaît que les difficultés des élèves issus de ces milieux ne s'expliquent ni par un manque de stimulation pendant la petite enfance, ni par une déficience cognitive. Il affirme que les élèves ayant un retard scolaire ne perçoivent pas d'éventuels bénéfices sociaux ou économiques aux apprentissages scolaires car, la culture de la famille étant trop éloignée de la culture de l'école, l'élève ne parvient pas à réinvestir les apprentissages scolaires dans son milieu de vie. Ces apprentissages lui semblent inutiles pour résoudre des problèmes qu'il rencontre au quotidien. Conséquemment, cette absence de communication entre ces deux cultures affecte la motivation scolaire de l'élève. Or, le rôle que joue la motivation scolaire dans la réussite éducative n'est plus à démontrer.

Objectif général du projet

Notre projet a pour objectif de développer des activités mathématiques qui serviront « d'interfaces culturelles » entre la culture de la famille et la culture scolaire afin de réduire les difficultés d'apprentissage de la mathématique.

Pour ce faire, quel domaine d'activités mathématiques privilégier? Bishop (1988) identifie six domaines d'activités mathématiques qui se retrouvent dans diverses cultures: le dénombrement, la localisation, la mesure, le design, le jeu et l'explication. Dans toutes les sociétés, nous retrouvons des activités de dénombrement, c'est-à-dire des activités qui visent à comparer et mettre en ordre des collections, des activités de localisation dont le but est le repérage dans l'espace, les déplacements et la création du symbolisme qui l'accompagne, des activités qui utilisent des outils et des objets pour désigner des grandeurs (mesure), des activités de design où des formes diverses servent à la décoration d'objets (géométrie), des jeux comprenant des règles plus ou moins formelles et, enfin, la recherche d'explication de phénomènes divers, ce que nous appelons la résolution de problèmes.

Parmi ces activités, le jeu nous semble le plus fécond pour plusieurs raisons. D'abord, d'un point de vue mathématique, le jeu constitue une activité inclusive des autres activités décrites par Bishop. Par exemple, les jeux élaborés autour de l'utilisation des nombres nécessitent la mobilisation de connaissances liées au dénombrement. Il en va de même pour les jeux dont la planche de jeu est formée de figures géométriques et dont l'enjeu tient compte de ces figures. Il existe également des jeux qui intègrent la mesure et enfin, comme l'affirment plusieurs auteurs (Criton, 1998; Corbenois, Martel et Bellier, 2003; Bednarz et ses collaborateurs 2002), le jeu permet à l'élève de s'adonner à l'activité première du mathématicien : résoudre des problèmes.

De plus, le jeu s'adresse à un grand nombre d'individus et est formulé dans langage accessible à tous. Son énoncé est surprenant, pose un défi à celui à qui il s'adresse et suscite son engagement et, il amuse, distrait et étonne (Criton, 1998; Grandmont, 1995).

Aussi, Bednarz et ses collaborateurs (2002) ajoutent que le jeu mathématique fait appel à de véritables compétences. Ces auteurs affirment que certains jeux favorisent le

développement de la compétence à communiquer. Pendant le jeu, l'élève est amené à se décentrer de son action en prenant en compte le point de vue de l'autre, il explicite les stratégies utilisées et argumente lorsque ces stratégies sont remises en cause par d'autres joueurs. Ces échanges favorisent l'appropriation du langage mathématique ainsi que la construction de connaissances. De plus, l'analyse ainsi faite d'une situation permet, par la suite, l'anticipation (Corbenois, Martel et Bellier 2003).

Selon Zaslavsky (1997), l'introduction de perspectives multiculturelles dans l'enseignement des mathématiques a des effets positifs pour l'élève. Cette auteur relève que les élèves deviennent plus conscients du rôle que jouent les mathématiques dans toutes les sociétés, ils apprennent à apprécier la contribution de cultures différentes des leurs, ils développent une fierté à propos de leur propre culture, en reliant l'étude des mathématiques avec l'histoire, la langue, les arts et autres sujets, ces diverses disciplines prennent tout leur sens, l'introduction dans le curriculum d'éléments culturels provenant de l'héritage d'élèves issus de la « minorité » aide à développer leur estime de soi et leur intérêt pour les mathématiques (Zaslavsky, C., 1997, page 319). Désirant bénéficier des ces retombées positives, les jeux que nous présenterons proviendront de différentes cultures. L'origine de chaque jeu sera donc présentée aux élèves.

Nous nous sommes également inspirés d'un projet antérieur au nôtre qui a porté sur l'utilisation des jeux en classe (Bednarz, N., Bourdage, N., Charpentier, M., Lartigau, M., Poirier, L., Sauvé, T., Taillon, C. et Tourigny, C., 2002). Bien que ce projet se soit déroulé dans un milieu où la culture de l'école est semblable à la culture de la famille, il a permis l'analyse et la mise à l'essai de différents jeux et l'identification des retombées positives chez les élèves. Voici les principaux effets positifs relevés par les auteurs: le développement chez les élèves de compétences de communication durant le jeu et lors de retours en grand groupe et le développement de compétences reliées à la résolution de problèmes soit la décentration et l'anticipation.

Méthodologie

Notre projet se veut un projet collaboratif impliquant chercheurs, enseignants et parents des élèves. La collaboration entre les différents acteurs va s'actualiser dans une activité réflexive comprenant l'élaboration de situations d'enseignement, l'expérimentation en classe de ces situations et le retour sur l'expérimentation. Cette alternance entre élaboration, expérimentation et réflexion va nous permettre de tenir compte du contexte d'enseignement dans l'élaboration de situations didactiques. Une telle approche s'apparente à la dynamique d'analyse réflexive décrite par Schön (1987).

Nos données seront recueillies à partir d'enregistrement vidéo et audio. À la première année du projet, nous enregistrerons les rencontres avec les enseignants, puis, l'année suivante, nous filmerons l'animation des jeux en classe avec les élèves et les enseignants. De plus, nous conservons des traces écrites d'activités réflexives effectuées lors des rencontres et des adaptations des jeux réalisées par les enseignants. Enfin, les chercheurs tiendront un journal de bord.

Participants



Notre projet rejoint les enfants de tous les niveaux scolaires d'ordre d'enseignement primaire, allant du préscolaire à la sixième année. En tout, participe au projet 14 enseignants du primaire provenant de trois commissions scolaires de l'île de Montréal (la commission scolaire de la Pointe-de-l'Île, la commission scolaire de Montréal et la commission scolaire Marguerite-Bourgeois), cinq conseillers pédagogiques rattachés aux écoles participantes, les parents des élèves concernés, deux chercheuses et deux représentantes du Programme de soutien à l'école montréalaise.

Le Programme de soutien de l'école montréalaise est un organisme créé par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). Il a pour mandat de soutenir les écoles montréalaises oeuvrant dans des milieux défavorisés et pluriethniques. Le contexte de l'immigration et de la défavorisation spécifique à Montréal amène les écoles situées dans les quartiers où une forte concentration de la population provient de communautés culturelles ou est au prise avec des problèmes liées à la défavorisation à adopter des pratiques d'enseignement qui tiennent compte de la réalité de ces milieux. Pour les accompagner dans ce mandat, le MELS a mis sur pied une instance de soutien et de développement de pratiques adaptées.

Au terme d'une première année d'expérimentation et de trois rencontres avec les enseignants, nous sommes à même de dégager des résultats préliminaires en lien avec l'enseignant, le contexte de la classe et l'élève.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Bibliographie

- BEDNARZ, N., BOURDAGE, N., CHARPENTIER, M., LARTIGAU, M., POIRIER, L., SAUVÉ, T., TAILLON, C. et TOURIGNY, C. (2002). *Banque de jeux pour l'apprentissage des mathématiques au primaire*. Mont-Royal : Modulo. 102 p.
- BROUGÈRE, G. (2005). *Jouer/apprendre*. Economica, Anthropos. Paris. 176 p.
- CHARNAY, R. et MANTE, M. (2008). *Mathématiques : tome 1*. Paris : Hatier Concours. 400 p.
- CORBENOIS, M., MARTEL, M. ET BELLIER, G. (2003). *Jeux de société et apprentissages numériques*. Maternelle. Borduas pédagogie. Liège. 208 p.
- CRITON, M. (1998). *Les jeux mathématiques*. Collection Que sais-je? Paris : Presses universitaires de France. 128 p.
- DOUADY, Régine (1986). « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherche en didactique des maths*, vol. 7, no. 2, 1986.
- GAMO, S., (2007). *La résolution de problèmes, cycle 2*. Bordas. Liège. 143 p.
- GRANDMONT, N. (1995). *Le jeu pédagogique*. Les éditions Logiques, Montréal, 167 p.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC, (2006). *Programme de formation de l'école québécoise*.
- REY, B. (2000). *Peut-on enseigner des compétences?* Conférence d'ouverture présentée au colloque de l'Association des cadres scolaires du Québec, tenue à Québec le 29 novembre 2000, 12 p.

CONCEPTION, MISE À L’ESSAI ET VALIDATION D’UNE FAMILLE DE SITUATIONS RELATIVE AU DÉVELOPPEMENT ET À L’ÉVALUATION DE LA COMPÉTENCE À COMMUNIQUER EN MATHÉMATIQUES DESTINÉE À DES ÉLÈVES DU PREMIER CYCLE DU SECONDAIRE

Philippe Labrosse

Doctorant en didactique des mathématiques

Université de Montréal – Québec – Canada

Conseiller pédagogique

Commission scolaire Marguerite-Bourgeoys – Québec – Canada

Within the framework of a research project currently underway, I am interested in the development and evaluation of the competency *Communicates using mathematical language* (Ministère de l’Éducation, du Loisir et du Sport, 2003). The research, which is still underway, proposes the development and field testing of situations allowing Cycle One high school Mathematics teachers to judge the progress of their students in the above competency. To this effect, I am hoping to document the concept of situational families to allow such a judgement.

Le Québec, à l’instar de plusieurs autres pays, provinces ou États, est entré dans une période de renouveau pédagogique orienté vers une approche par compétences. Ainsi, en mathématiques, des compétences disciplinaires sont développées et évaluées, pour chacun des niveaux au primaire comme au secondaire. Ces compétences, au nombre de trois, sont libellées de la façon suivante : *résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l’aide du langage mathématiques*.

Dans le cadre d’une recherche présentement en cours, nous nous intéressons, plus particulièrement au développement et à l’évaluation de la compétence à communiquer en mathématiques. Notre recherche s’inscrit dans une optique de développement et de mise à l’essai de situations permettant aux enseignants de mathématiques du secondaire de juger de la progression de leurs élèves dans le développement de compétences.

1.1 Pourquoi s’intéresser à la communication en mathématiques ?

Nous constatons que la compétence de communication est sous-exploitée dans les pratiques pédagogiques et évaluatives des enseignants. Bien que cette compétence entre en jeu dans l’exercice des deux autres compétences, elle ne peut se restreindre aux seules fins d’illustrer un raisonnement ou de présenter la solution d’une situation-problème. Elle est en effet souvent réduite à l’utilisation correcte des symboles et à l’application des règles syntaxiques en mathématiques. De surcroît, la communication mathématique, sous forme d’écrits, intervient principalement à la fin de l’activité mathématique de l’élève ayant pour effet de négliger la prise de conscience (Rauscher, 2006).

La communication est aussi partie intégrante de l’activité mathématique. Dans les milieux scolaires, celle-ci passe principalement par l’écrit et, dans une moindre mesure, par l’oral. Comme le précise Rauscher (2006, p. 2), « Vygotski (1997) a été l’un des premiers à attirer l’attention sur les différences cognitives entre l’activité d’expression orale qu’il n’hésitait

pas à qualifier d'automatique et l'activité d'expression écrite qui exige une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit [...] ».

Dans un tel contexte, « le langage ne remplit pas seulement une fonction de communication, mais aussi une fonction de construction et de maîtrise de la pensée » (Robotti, 2008, p. 185). Comme le rappelle aussi Bednarz (1996), les mathématiques sont une activité à fort caractère social et sont régies par un contrat didactique (Brousseau, 1998) unissant différents acteurs (l'enseignant et ses élèves et même les élèves entre eux), ayant chacun des attentes et des interprétations différentes par rapport à l'enseignement.

Ainsi, dans notre recherche nous concevrons et expérimenterons avec des enseignants des situations permettant justement aux élèves de développer leur compétence à communiquer. Mais comment peut-on rendre compte, de manière juste, efficace et viable de la progression et du niveau de développement des compétences des élèves et à partir de quelles situations ?

1.2 Les concepts de situations et de familles de situations

Le nouveau programme de formation en mathématiques au secondaire (MÉLS, 2003) met en évidence l'importance de la démarche de l'élève qui constitue l'objet central de l'évaluation et pose la question des moyens d'évaluation susceptibles d'en rendre compte. Les décisions pédagogiques et didactiques de l'enseignant apparaissent en ce sens centrales et doivent être prises en fonction non seulement du jugement qu'elles permettront de porter sur la démarche de l'élève et sa progression, mais aussi de la façon dont elles risquent d'influencer le développement des compétences.

« Que ce soit pour l'apprentissage des compétences ou pour leur évaluation, il convient donc de situer l'élève dans un environnement complexe et de l'amener à mobiliser ses différents acquis pour résoudre une situation complexe » (Gerard, 2007, p.1). Les situations d'apprentissage sont donc au cœur du développement et de l'évaluation des compétences. Mais comment identifier des situations suffisamment complexes et significatives ? Pour fonder un jugement valide sur le développement d'une compétence, l'enseignant doit aussi « recourir à plusieurs situations qui appartiennent à une même catégorie » (Roegiers, 2000, p.120). La notion de catégorie de situations reste toutefois relative et vague. Notre recherche tente justement à circonscrire ce concept pour la compétence à communiquer.

Dans le cadre de notre thèse, nous délimiterons cette parenté. Ainsi, l'ensemble des situations proposées devra :

- solliciter, à différents moments, divers aspects ou fonctions de la communication à travers l'activité mathématique;
- permettre à l'enseignant de porter un jugement sur la progression de l'élève dans le développement de sa compétence à communiquer tout en proposant un enchaînement de savoirs mathématiques, d'une situation à l'autre, et ce, en avançant dans plusieurs domaines mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie,...).

Afin d'illustrer comment ces différentes caractéristiques pourraient être prises en compte dans nos situations, nous avons élaboré un exemple potentiel d'une situation faisant partie de notre famille (voir Figure 1). Ce dernier place l'élève dans la peau d'un enseignant qui doit juger de productions d'élèves. Dans un premier temps, l'élève correcteur doit interpréter les encadrements de miroirs en proposant une solution. Par le fait même, il développe plusieurs critères que nous jugeons essentiels liés à la compétence à communiquer et à l'activité

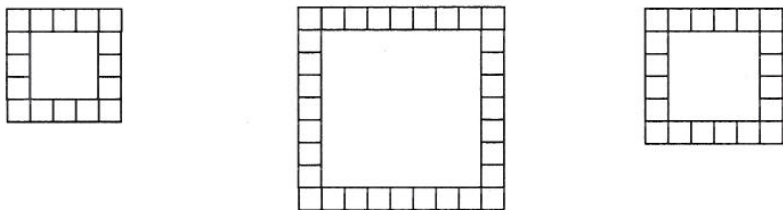
mathématique: l'utilisation d'un raisonnement mathématique; le savoir décoder différentes formes de représentation (ici trois dessins dans un premier temps); la validation de sa solution, etc. Ainsi, avant d'être « enseignant » (élève-correcteur), l'élève est avant tout « résolveur ». De ce fait, nous croyons que la situation plonge l'élève dans une résolution qui encourage le langage intérieur.

FIGURE 1 – UN EXEMPLE DE SITUATION

Bonne nouvelle ! On t'offre la chance de jouer à l'enseignant ! Amélie et Maxime, deux de tes élèves, viennent de te remettre leur solution au problème suivant¹¹.

Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (la surface blanche sur les dessins) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.

Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux autour du miroir de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.



a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?

b) Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?

Ta tâche comme enseignant :

- 1- Tu dois tout d'abord répondre toi-même à la question, puis faire ton corrigé.
- 2- Ensuite, corrige les productions d'Amélie et de Maxime en inscrivant des commentaires.
- 3- Comment pourrais-tu expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ?
- 4- Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.

L'élève doit ensuite « corriger » et commenter des productions qui arrivent à la bonne solution, mais de manière différente. L'exemple de la solution de Maxime est présenté à la figure 2. Les solutions sont incomplètes et imprécises forçant ainsi l'élève correcteur à analyser

¹¹ Problème tiré d'une activité réalisée au Groupe Didactique de la CI-IREM, Marseille, 2006.

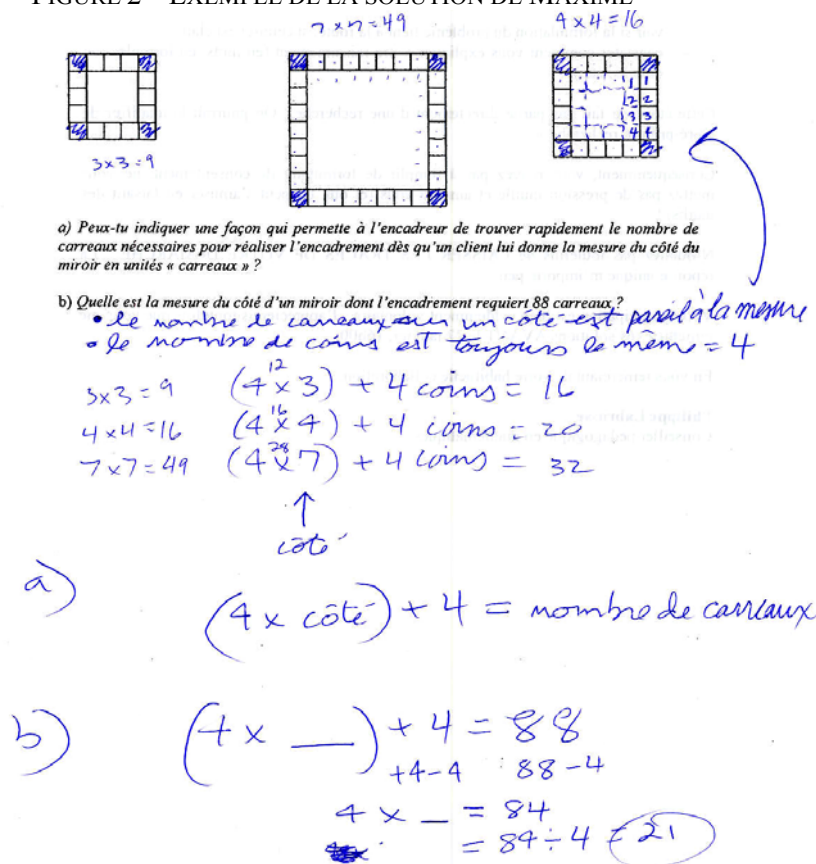
le langage mathématique utilisé, la démarche proposée, d’autres registres (les formules, les calculs et le texte des élèves) et à apporter des corrections le cas échéant.

Cette situation se situe principalement dans le domaine algébrique amenant une mobilisation des savoirs mathématiques visés par le programme de formation du 1^{er} cycle du secondaire (MÉLS, 2003, p.253): la construction, la reconnaissance et l’évaluation numérique d’une expression algébrique; la recherche d’expressions équivalentes; la résolution d’équations du premier degré à une inconnue et la découverte d’une régularité. L’enseignant qui exploite cette situation en classe n’aura donc pas l’impression de « bifurquer » de son programme et pourra repérer l’évolution de certains savoirs mathématiques.

En plaçant l’élève dans la peau d’un correcteur, nous croyons proposer un défi à l’élève, du moins, l’enthousiasme démontré par la plupart des élèves lors d’activités semblables montre un intérêt certain. Le but de la situation nous paraît également bien ciblé : il faut corriger et commenter des productions d’élèves.

Finalement, en posant un regard sur des productions d’élèves, nous espérons que l’élève-correcteur sera à même de poser un regard critique sur ses propres productions tout en améliorant, sur le plan de la communication écrite, les productions d’autres élèves.

FIGURE 2 – EXEMPLE DE LA SOLUTION DE MAXIME



2. Notre question de recherche

Étant donné que dans le contexte d'une approche par compétences, il n'est pas évident de concevoir des situations qui favorisent le développement de compétences; ni d'évaluer les compétences ainsi développées (nécessité d'un ensemble de situations qui permettra à l'enseignant de faire un bilan des apprentissages et du développement des compétences des élèves); que la communication nous apparaît être une composante essentielle de l'activité mathématique nécessaire aux autres composantes (et aussi aux autres compétences mathématiques); que la compétence se développe dans l'action par rapport à un ensemble de situations, nous posons la question suivante :

Quel ensemble de situations nous permettrait efficacement de développer et d'évaluer la compétence à communiquer en mathématiques ?

Notre recherche a deux objectifs. Dans un premier temps, elle vise à voir comment le concept de « famille de situations » pour développer la compétence à communiquer en mathématiques peut s'actualiser selon les domaines mathématiques ciblés (arithmétique, algèbre, ...), les savoirs en jeu et par les situations exploitées. À cet effet, elle tente de répondre à la question suivante :

Quelles sont les habiletés de communication qui apparaissent spécifiques à un domaine mathématique ou transversales d'un domaine à l'autre ?

Dans un deuxième temps, la recherche tente d'outiller les enseignants du premier cycle du secondaire par rapport au développement et à l'évaluation de la compétence disciplinaire *Communiquer à l'aide du langage mathématique* en leur proposant une famille de situations. Dans ce sens, nous souhaitons documenter le concept de famille de situations de communication en identifiant les caractéristiques essentielles d'une telle famille. Nous souhaitons donc répondre à la question suivante :

Quelles sont les caractéristiques essentielles d'une famille de situations de communication permettant aux enseignants de juger de la progression de la compétence à communiquer ?

Les résultats issus de la mise à l'essai de la famille que nous développerons nous permettront de préciser de telles caractéristiques. Rappelons que notre recherche en est à ses premiers développements. Nous en sommes présentement, avec des enseignants de notre commission scolaire, à développer des situations de communication pouvant faire partie d'une famille et ce, à partir des caractéristiques essentielles que nous avons ciblées à la lumière de la littérature. Une communication dans le cadre de la CIEAEM nous permettrait donc, d'une part, de présenter les caractéristiques que nous jugeons essentielles pour concevoir nos situations et d'en débattre. D'autre part, cette présentation nous permettrait aussi de discuter des liens qui doivent unir les diverses situations d'une famille et de les préciser.

Notre recherche tente de répondre à un besoin des enseignants, soit celui d'avoir des situations concrètes, précises, liées entre elles, permettant le développement de la compétence de communication en mathématiques, tout en amenant une progression du temps didactique (avancement et repérage dans l'évolution des concepts et processus mathématiques au premier cycle du secondaire) (Mercier, 2001). Nous voulons aussi, dans le cadre de notre thèse, documenter le développement de ces situations, notamment en précisant les éléments sur la base desquels elles sont construites, et rendre compte de leur pertinence et de leur efficacité dans le cadre d'un enseignement réel.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Nous croyons que notre présentation pourrait s’inscrire dans le sous-thème de ***L’activité mathématique dans la classe du 21^e siècle***. Bien que nous n’ayons pas encore de données empiriques à présenter, nous souhaitons, par notre participation au congrès de la CIEAEM contribuer aux discussions et enrichir, voire préciser, notre question et nos objectifs de recherche.



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Références bibliographiques

- Bednarz, N. 1996. *Language activity, conceptualization and problem solving: the role played by verbalization in the development of mathematical thought in young children*. In: Mathematics for Tomorrow's Young Children. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. pp.228 à 247.
- Brousseau, G. 1998. *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)* Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. Éditions La pensée sauvage. Grenoble. 395 p.
- Crahay, M. 2006. *Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation*. Revue française de pédagogie. No. 154. pp. 97-110.
- Gerard, F-M. 2007. *La complexité d'une évaluation des compétences à travers des situations complexes : nécessités théoriques et exigences du terrain*. Actes du Colloque international *Logique de compétences et développement curriculaire : débats, perspectives et alternatives pour les systèmes éducatifs*. Montréal. Observatoire des Réformes en éducation (ORÉ). 26 et 27 avril 2007.
- Margolinas, C., A. Mercier et S. René de Cotret. 2006. *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire*. Journées Mathématiques de l'INRP. 14-15 juin 2006. Lyon. 14 p
- Mercier, A. 2001. *Le temps didactique. Brèves de concours*. Site de la Recherche de l'IUFM d'Aix-Marseille [en ligne] <http://recherche.aix-mrs.iufm.fr/publ/voc/n1/>
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, 2003. *Programmes d'études secondaires en mathématiques*.
- Rausher, J-C. 2006. *Écriture réflexive et activité mathématique : le cas de la résolution de problèmes de proportions*. Annales de didactique et de sciences cognitives. Vol. 2. IREM de Strastbourg. pp. 75-102.
- Robotti, E. 2008. *Les rôles du langage dans la recherche d'une démonstration en géométrie plane*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 28. N°2. pp. 183-208.
- Roegiers, X. 2000. *Une pédagogie de l'intégration. Compétence et intégration des acquis dans l'enseignement*. Éditions De Boeck Université. Bruxelles. 304 p.
- Scallon, G., 2004. *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. ERPI : l'école en mouvement. Saint-Laurent. 342 p.
- Vygotski, L. *Pensée et Langage*. Éditions La Dispute. 1997.

**Importance d’une démarche d’acculturation institutionnelle du
chercheur dans la conception et la gestion de situations
d’enseignement des nombres rationnels auprès d’élèves de 1^{ère}
secondaire présentant des difficultés d’apprentissage**

Geneviève Lessard et Gisèle Lemoyne, Université de Montréal

Abstract : As underlined by several researchers, mathematics is a practice characterized by the fundamental activity of problem solving. Allowing first year secondary school students with learning difficulties to engage themselves in the relevant activities of problem solving, as well as dealing with the difficulties of rational numbers, constitutes a considerable challenge (Kieren, 1995; Rouche, 1998). Antibì and Brousseau’s (2000) concept of « dé-transposition/re-transposition didactique » appears to be a successful process in the development of a student’s understanding of mathematics, rebuilding memory (Brousseau and Centeno, 1998). To improve the pupil’s relationships with problematic objects and practices, the didactical situations must rely on an existing memory but offer a new perspective. It is necessary to respect the ecological niche to transform these relationships and habitus (Bourdieu and Passeron, 1970); this is why we adopted a collaborative approach (Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier and Lebuis, 2000) which supports the ecological inscription of didactic situations in which the researcher is positioned as “an ecocitoyen [which] must better understand how to locate and insert its local action into a global system (Rosnay, 1994, traduction libre).”

The objectives of this research are: 1) to construct, experiment and evaluate different situations engaging students with learning difficulties to solve problems in order to build - or even rebuild - appropriate relationships to rational numbers; 2) to show how taking the institution into consideration can orientate and enrich the situations. In this communication, we will present situations and relevant episodes to illustrate the effects of the evolution of the acculturation process and the coordination of teacher’s and researcher’s expertise on the transformation of mathematical practices, and rational number relationships. We will show, for instance, how the situations and didactical interactions have allowed students to engage different meaning of the rational numbers in multiplicative problem solving.

Résumé :

Faire des mathématiques, comme le soulignent plusieurs chercheurs, est une pratique qui est caractérisée par une activité essentielle, à savoir la résolution de problèmes. Permettre à des élèves de 1^{ère} secondaire présentant des difficultés d’apprentissage d’investir de telles situations qui, de surcroît, traitent des nombres rationnels constitue un défi de taille (Kieren, 1995; Rouche, 1998). Le concept de « dé-transposition/re-transposition didactique » proposé par Antibì et Brousseau (2000) semble être une avenue tout à fait désignée pour repenser l’enseignement auprès de ces élèves, afin de reconstruire une mémoire porteuse d’espoirs (Brousseau et Centeno, 1998). Ces situations doivent prendre appui sur une mémoire existante, tout en revisitant des objets anciens, mais dans des paysages nouveaux, de façon à modifier leur rapport à certains objets et à certaines pratiques problématiques. Le respect de la niche écologique est indéniable à toutes transformations de ces rapports et habitus (Bourdieu et

Passeron, 1970); c’est pourquoi nous avons privilégié la recherche collaborative (Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier et Lebuis, 2000) qui favorise l’inscription écologique de situations didactiques dans laquelle le chercheur est positionné en tant qu’ « *écocitoyen [qui] doit mieux comprendre comment situer et insérer son action locale dans un système global* (Rosnay, 1994) ».

Notre recherche vise à : 1) concevoir, mettre à l’essai et évaluer des situations engageant les élèves en difficultés dans des pratiques de résolution de problèmes qui leur permettent de construire, voire de reconstruire des rapports plus adéquats aux nombres rationnels; 2) montrer comment la prise en compte du fonctionnement de l’institution permet d’orienter et d’enrichir les situations. Dans ce texte, nous présentons quelques situations d’enseignement et épisodes marquants permettant d’apprécier les effets de l’évolution du processus d’acculturation et de la conjugaison des expertises respectives de l’enseignante¹² et des chercheuses sur la transformation des pratiques et des rapports des élèves aux nombres rationnels.

Démarche de recherche

Les situations consacrées à la représentation de nombres rationnels et à la résolution de problèmes multiplicatifs impliquant de tels nombres sont consécutives à une première phase d’insertion des chercheuses dans la classe, insertion qui s’est étalée sur une période de trois semaines. Cette insertion a permis aux chercheuses de construire une mémoire didactique de cette institution et de prendre part progressivement aux activités proposées par l’enseignante. Il importe de mentionner qu’à la suite des situations, l’enseignante nous consacre un temps précieux à des échanges nous permettant de mieux comprendre les conduites « atypiques » de certains élèves; elle nous fait part de ses réactions face aux propositions que nous avons spontanément émises et nous présente enfin les situations qu’elle a l’intention de soumettre aux élèves et nous invite à les commenter. Puisque la plupart des activités de l’enseignante provenaient du manuel *Perspective*, une analyse des situations présentées dans ce manuel nous a été fort utile pour effectuer un maillage entre ces situations et celles que nous avons proposées.

Notre démarche de recherche s’inscrit dans une approche qualitative, approche privilégiée dans les recherches en didactique des mathématiques consacrées à l’analyse des conduites et des interactions lors du déroulement de situations d’enseignement. Les données de notre recherche seront constituées par les traces des solutions et réponses des élèves, par les enregistrements des échanges entre les élèves, l’enseignante et les chercheuses, pendant la réalisation des activités et lors du retour collectif sur les conduites des élèves. Il va de soi que nous ne pouvons rendre compte de l’ensemble des conduites et des interactions; nous avons donc choisi de mettre en évidence certaines conduites et interactions qui reflètent un engagement inattendu des élèves.

¹² Les auteurs désirent témoigner toute leur connaissance à l’enseignante qui a participé à ce projet et qui nous a permis de transformer nos rapports à l’enseignement des nombres rationnels et à l’enseignement des mathématiques.

Analyse des conduites et des interactions didactiques lors de la réalisation d'activités sur la représentation de nombres rationnels et la résolution de problèmes impliquant ces nombres

La séquence d'activités faisant suite à la première phase émerge d'une première véritable co-construction impliquant l'enseignante, la chercheuse et l'étudiante-chercheuse. Nous examinerons les conduites des élèves et les interactions didactiques lors de la réalisation d'activités portant sur : 1) la représentation de nombres rationnels; 2) la résolution de problèmes multiplicatifs comportant des nombres rationnels.

En gardant à l'esprit l'orientation écologique de notre projet de thèse et l'objet unificateur de celui-ci, tout en nous appuyant sur l'historicité de la classe (activités, objets traités, conduites, difficultés des élèves, interactions, planifications), il nous est apparu opportun de proposer à l'enseignante l'activité suivante, activité permettant de construire et de « rassembler » différentes représentations des nombres rationnels :

Représentation de nombres rationnels: différentes façons de parler des nombres : a) $\frac{2}{5}$; b) 0,3

Les représentations du nombre $\frac{2}{5}$ permettent de « modeler » les représentations du nombre 0,3 que les élèves doivent trouver. Ainsi, après chacune des représentations du nombre $\frac{2}{5}$, les élèves sont invités à produire une représentation similaire du nombre 0,3.

$\frac{2}{5}$: à tour de rôle, nous présentons des façons différentes de parler de $\frac{2}{5}$, par exemple : 1) mon nombre est inférieur à 1; il est assez près d'une demie; 2) mon nombre correspond à une fraction décimale qui peut être représentée par $\frac{4}{10}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{400}{1000}$...; 3) mon nombre correspond à l'addition suivante : $\frac{2}{10}$ et $\frac{8}{40}$; 4) mon nombre peut être représenté par plusieurs nombres à virgule, dont : 0,4 ; 0,40; ...; 5) mon nombre peut aussi être représenté par la division du nombre 40 par ?; 6) mon nombre correspond au résultat de la multiplication suivante : $\frac{25}{125} \times 2$ ou $2 \times \frac{25}{125}$; 7) mon nombre, s'il est associé à une mesure donnée en cm, peut correspondre à la longueur d'une fourmi .

L'enseignante suggère de remplacer la fraction $\frac{2}{5}$ par $\frac{1}{2}$, afin d'accroître l'engagement des élèves. Nous avons accepté la proposition de l'enseignante, car il nous serait toujours possible d'intervenir à partir de leurs propositions et ainsi, de leur permettre d'aller au-delà de ce qu'ils connaissaient déjà. Il fallait également considérer qu'il s'agissait de notre première proposition et que l'adhésion des différents acteurs (élèves et enseignante) à notre projet était primordiale. Enfin, tout au long du projet, nous tenions à offrir à l'enseignante un espace décisif non négligeable, car le processus d'intégration écologique de situations didactiques engage forcément la responsabilité des divers acteurs devant occuper des positions symétriques.

L'élaboration de la situation sur la résolution d'un problème multiplicatif est née d'un échange informel sur le sens de la multiplication de décimaux au cours duquel nous avons appris que l'enseignement habituellement dispensé concerne « la technique usuelle », afin que les élèves retiennent facilement comment procéder et « l'estimation du produit » pour favoriser leur compréhension. L'étudiante-chercheuse et la chercheuse ont alors construit une situation-

problème permettant de valoriser l'accès au sens des actions intervenant dans « la technique usuelle » de multiplication :

Un marchand place des petits gâteaux dans des boîtes; cinq boîtes contiennent 17,5 gâteaux. Ce nombre qui apparaît un peu bizarre est dû au fait qu'un des employés a la bonne habitude, à chaque fois qu'il met des gâteaux dans des boîtes, de manger une partie d'un des gâteaux. Comme le dit le marchand, les clients ne sont pas tenus d'acheter un nombre entier de boîtes ou de gâteaux.

Partie 1 : Pouvez-vous compléter ce tableau? »

Partie 2 : a) Et si le nombre de gâteaux dans chacune des boîtes était de 1,75 ? b) de 175 ?
 Complète les tableaux suivants :

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	17,5
$\frac{1}{2}$	
150	
15	
7,5	
25	
0,5	
500	
45/5	

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	1,75
$\frac{1}{2}$	
150	
15	
7,5	
25	
0,5	
500	
45/5	

Nombre de boîtes	Nombre de gâteaux
5	175
$\frac{1}{2}$	
150	
15	
7,5	
25	
0,5	
500	
45/5	

L'enseignante accepta notre proposition avec enthousiasme tout en proposant de fournir, dès l'entrée dans l'activité 2, la valeur unitaire et de travailler, par la suite, la multiplication comme elle l'enseignait. Nous avons donc procédé à la modification de la première valeur en donnant le nombre de biscuits pour un contenant au lieu de cinq. Quoique cette modification minimisait l'importance de porter une attention particulière aux relations entre les nombres (afin d'utiliser la stratégie la moins coûteuse possible (par exemple : pour passer du coût de 5 boîtes à celui de 150 boîtes, il suffit de multiplier par 30 le coût déterminé pour 5 boîtes)), elle détenait l'avantage de mettre l'accent sur le sens. En effet, comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, il est fort à parier que dans de telles conditions les élèves auraient eu, machinalement, recours « au produit croisé ». Nous avons donc convenu de présenter cette situation avec les adaptations de l'enseignante et d'effectuer par la suite les multiplications de nombres décimaux prévues initialement par l'enseignante.

Évolution des rapports des élèves aux nombres rationnels et aux mathématiques.

Il semble que chacun des acteurs (élèves, enseignante, chercheuses) ait bénéficié de retombées positives des activités précédentes. Par exemple, l'évolution des démarches au cours de la tâche de « Représentation de nombres rationnels » témoigne de la liberté, du plaisir auquel se sont livrés les élèves. Sans exposer l'ensemble des démarches et raisonnements des élèves,

nous présenterons quelques démarches « inattendues », démarches reflétant la coordination de différents registres sémiotiques ($3/5$, ●●●○○, 3 dixièmes) et l’exploitation de diverses connaissances (compositions additives et multiplicatives, relations entre numérateurs et dénominateurs, etc.). La production ci-dessous, étayée par les propos de l’élève, témoigne des connaissances qu’il détient sur l’étendue des représentations des nombres rationnels, des compositions additives pour représenter un nombre et des équivalences d’écritures.

$$\frac{100\% - \overset{90}{0,100} - \overset{80}{0,10} - \overset{70}{10\%} - \overset{60}{10\%}}{2}$$

La conduite d’une autre élève, lors de la résolution de la situation-problème, mérite aussi d’être exposée. Cette élève a montré une compréhension juste des relations entre les données et a effectuée des transformations fort pertinentes, voire novatrices, des représentations des données. Ainsi, pour déterminer le nombre de gâteaux correspondant à 150 boîtes, contrairement aux élèves qui ont effectué la multiplication de 150 par 17,5 et faisant fi des propositions de l’étudiante-chercheuse qui avait inscrit sur sa feuille (une flèche allant de 1 à 150 et de 17,5 à la valeur inconnue et sur laquelle repose l’inscription de la relation $\times 150$), elle a privilégié la multiplication de 175 par 15. Elle a donc effectué une transformation des nombres 17,5 et 150 en n’affectant pas le produit attendu et en permettant d’effectuer une procédure connue, soit la multiplication de nombres entiers. Mentionnons également l’économie de la démarche de ROBERT lors de la recherche du nombre de gâteaux pour neuf ($45/5$) boîtes; celui-ci s’est servi conjointement des résultats qu’il avait obtenus pour dix boîtes et pour une boîte et a effectué la soustraction suivante : $(175 - 17,5 = 157,5)$. L’attention qu’il a portée aux données n’est pas courante; elle témoigne d’une prise en compte des relations entre les nombres $45/5$ et 10 et d’une exploitation de la distributivité de la multiplication sur la soustraction dans la mise en place d’un procédé de calcul fort pertinent.

Conclusion

Les effets du processus d’acculturation¹³ se ressentent dans l’édification d’une complicité non négligeable avec l’enseignante, qui se manifeste, notamment, par l’accroissement de l’espace de travail octroyé et par le souci de conjuguer nos différentes expertises dans l’élaboration d’activités mathématiques exigeant un engagement cognitif de plus en plus important. Ces situations nous ont également permises d’assister à des conduites inattendues d’élèves qui ont l’habitude de se réfugier dans l’application d’algorithmes. Être témoin de tels raisonnements constitue un levier à l’intégration harmonieuse de situations complexes en classe et témoigne de la pertinence de l’approche privilégiée dans ce projet. Au terme de cette communication, les propos de François Conne (2005, communication libre) revêtent un sens important : « Avec les élèves en difficulté, ce qui est le plus passionnant, c’est d’apprendre à se laisser surprendre ».

¹³ Entre autres des échanges entre l’enseignante et les chercheurs sur la préparation, les adaptations, la réalisation et l’évaluation des situations d’apprentissage.



Références principales

- ANTIBI, A et BROUSSEAU, G. (2000). La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(1), 7-40.
- BOURDIEU P. et PASSERON, J.-C. (1970). La reproduction, éléments pour un système d'enseignement. Paris : Éditions de minuit.
- BROUSSEAU, G. et CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 11(2.3), 167-210.
- DESGAGNÉ, S., BEDNARZ, N., COUTURE, C., POIRIER, L. et LEBUIS, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.
- DE ROSNAY, J. (1994). Éducation, écologie et approche systémique, Actes du Congrès de l'AGIEM, Larochele, publications électroniques.
- KIEREN, T.E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J.T. Sowder & B.P. Schappelle (eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*. Albany : State University of New York Press, 31-65.
- ROUCHE, N. (1998). Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? Paris : Ellipses.

A STUDY OF UNIVERSITY STUDENTS' PERFORMANCE WITH PROOF

Angelina Alvarado Monroy, *Universidad Juárez del Estado de Durango, Mexico*

María Teresa González Astudillo, *Universidad de Salamanca, Spain*

Résumé

Dans cette étude nous présentons une partie de l'investigation réalisée avec trois groupes des élèves de Mathématiques Appliquées de l'Université de Juárez, état de Durango, Mexique. On analyse la compréhension que démontrent les étudiants des mathématiques grâce à la résolution de divers exercices. On a utilisé des grilles systémiques, comme le modèle de Toulmin pour établir les niveaux de difficultés des étudiants et les divers processus utilisés par eux-mêmes au cours de leur démonstration. Les résultats ont été utilisés postérieurement comme guide pour l'organisation de l'enseignement de la démonstration.

Introduction

During recent years mathematical proof has assumed a decreasingly role in high school, so when students begin their university studies they have great difficulty in the recognition, understanding and construction of proofs.

Among these difficulties, some have to do with a misused of language and logic (Watson, 1966), the differences between ordinary language and mathematical language (Epp, 2003) and the interpretation of logical expressions when they are handled in a purely mathematical context that lead students to establish arguments that are false such as "the converse error". Dorrer et al (2000) established that the absence of prior knowledge in logic and elementary set theory contributes to the confusion between the hypothesis and the conclusion of an implication.

According to Dreyfus (1999) students have very difficulty to draw out an explanation or an argument because when they access at the university they have a lack of conceptual domain needed to make decisions about what elements are relevant in a mathematical argument and, also, they have had very few opportunities to learn the characteristics of a mathematical reasoning. While students attempting to write formal proofs, do not necessarily understand that content of relevant definitions or how to use these definitions in proof-writing and moreover that even apparently trivial proofs are often major challenges for them, since that not only have difficulties for producing proofs, but to recognize them too (Moore, 1994).

The examples and counterexamples also play an important role during the development of proofs: for some researchers the use of inductive reasoning can help students to build a sequence of statements that allows them to generate further a formal proof or a generalization; these examples are used beyond its own particularity (Watson & Mason, 2005). But many times, students need to check the proofs with an example because they did not convince themselves only with the proof (Fishbein, 1982 and Healy & Hoyles, 2000). This discrepancy between empirical verification and deductive reasoning is an obstacle to understand the meaning of the proof (Mariotti, 1998). In practice, these two processes are often confused because teachers use examples when doing a proof and so, students perceive that these 'examples' are playing a fundamental role, but it is forbidden to use them when they must prove a proposition.

To Thompson (1996) and Goetting (1995), the most difficult proofs are proof by contradiction and the proof by contraposition, because they tend to handle false claims and cause confusion. In general, the absence of *strategic knowledge*: knowledge of proof techniques), knowledge of which theorems are important and when they are useful, and knowledge of when, and when not to use strategies based on symbol manipulation rather than deeper knowledge make the construction of proofs a complex cognitive activity (Weber, 2001).

This research seeks to understand the university students learning process of mathematical proof, as well as the difficulties they have in order to develop a proposal to improve learning.

Study description

This study was made with three groups of students of different ages for the Degree in Applied Mathematics at the Juarez University of Durango State (Mexico). From the 34 students who participated, 14 were enrolled in the first semester (group A, 19 years average), 4 were studying the third semester (group B, 20 years average) and 6 were in the fifth semester (group C, 21 years average). The subjects these students were studying were Symbolic Logic (group A), Linear Algebra (B) and Modern Algebra (C). For reasons of space we only present the results for group A.

The study was fulfilled in four phases. Firstly, we used a questionnaire which was part of the qualifying examination of the whole group of students, and from these only six questions were analyzed. Three of them were related to the contents developed in classroom and the other two were completely new. In all of them, several statements were posed and students must select the valid argument and justified his choice. The last question included items like:

- ❖ *What would you say to a student who will join this subject to describe what is logic?*
- ❖ *And about the importance and usefulness of logic?*

For the second and third phases (two months later) four students were selected based on their responses to the first questionnaire and a case study was made. Some questions of the first questionnaire were used varying the sort of task, instead of being multiple choice items and seeking to justify their answers, they must decide the truth or falsity of a statement including a justification and/or a proof. In the second phase, the students wrote their answers with enough time for that. In the third, an interview was made so as they can explain and justify their previous answers, often they were confronted with inconsistencies in their arguments. In that way we find out the mistakes that prevailed and we have approached the way they organized their justification.

In the fourth phase we explored general issues relating to their beliefs about the mathematical proof and their attitudes when facing them.

Analysis and results

The answers to the first five questions of the questionnaire used in the first phase were classified into two categories: "Nor answer or incorrect answer" and "correct answer" responses were analyzed using systemic networks and we have identified the following options:

Nor answer or is incorrect answer	Correct Answer
Ia) No answer and/or the answer is only underlined	Ca) Correct answer without justification
Ib) Use of concepts and/or results incorrectly or incompletely	Cb) Use of concepts and/or results incorrectly and an erroneous syntactic and/or semantics interpretation
Ic) Justifies with a fallacy The implication is equivalent to the converse. The implication is not equivalent to contrapositive. In either case, using particular examples or generic ones. As in 1) but without specific data $p \rightarrow q$ and $\neg p \rightarrow \neg q$ are equal	Cc) The implication and its converse are different. Implication equivalent with the contrapositive based on particular case or generic one Cd) The implication and its converse are different. Implication equivalent with the contrapositive based on incomplete explanation related to the task but with some weakness
Id) Syntactic or semantic erroneous interpretation of the task.	Ce) Proof with inaccuracies in language Cf) Formal proof.

Among the students' answers we have identified a certain number of difficulties such as: fallacies that arise from false symmetries, indistinct management of the implication and its converse or of $p \rightarrow q$ and $\neg p \rightarrow \neg q$, the belief that a single example is sufficient to prove or disprove a statement. There were also problems with the imprecise use of language or with the interpretation of the tables of truth to establish logical equivalence between statements, even when they can make them easily but they still rely on particular examples.

For the last question the students' answers were organized according to issues that made reference to logic or to the important role of proving for the mathematical activity.

In the second and third phase, in order to analyze and document the students' progress we have used Toulmin's scheme (1958), which considers different components in a proof such as: data, conclusion, warrant, backing, modal qualifier and rebuttal. The changes made to the questions and the need to persuade us with their arguments during the interviews compelled the student to provide more comprehensive explanations and this gave us elements to analyze their proof schemes, difficulties and conflicts with their proof-writing attempts, their use of prior knowledge, or the influence of particular and generic examples in their thinking processes acting as a filter in making decisions. Besides the confusion between hypothesis and conclusion, and the use of various fallacies observed in the first phase, we also note that students are not accustomed to handling definitions and this leads them to difficulties in producing proofs.

Finally, in the fourth phase, we found a pragmatic acceptance of knowledge of proof for its usefulness for other subjects, his view of mathematics subject as if it was "finished", his approach to proof as it would be something linear and that the resources available for them came only for their lecture notes. In general, students prefer to follow a teacher's proof to read it and read it more than do it.

Conclusion

The results of this exploratory study will be the basis for a teaching engineering design that allows the transition to the formal mathematical thinking. The proof should be seen as another topic so students must learn to use language appropriately, to use different definitions and proof techniques correctly, and to discuss the role of the hypothesis and conclusion in a logic



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

implication. Empirical proof schemes should be the starting point for refine and move the students' proof schemes into deductive ones. This will lead the students to the need of proof in the mathematical activity.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

References

- Dorier, J-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* **38**, 85–109.
- Edwards, B. & Ward, M. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis) use of Mathematical Definitions. *American Mathematical Monthly* **111**, 411–424.
- Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly* **110**, 890–899.
- Fischbein, E. (1982). 'Intuition and proof', *For the Learning of Mathematics* 3(2), 9–24.
- Goetting, M. (1995). *The College Students' Understanding of Mathematical Proof*. Doctoral dissertation. University of Maryland.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. **31** (4), 396–428.
- Mariotti, M. A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html>
- Moore, R. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics* 27(3), 249–266.
- Thompson, D. (1996). Learning and teaching indirect proofs. *Mathematics Teacher* **89**, 474–482.
- Toulmin S. (1958). *The use of arguments*. Cambridge: University Press.
- Wason, P. (1966). Reasoning. En B.M. Foss (ed.) *New Horizons in Psychology I*, Penguin: Harmondsworth.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 48(1), 101–119.

Entre la recherche et la pratique : regard sur le processus de conception d’une séquence d’enseignement basée sur l’activité mathématique au premier cycle du secondaire

Valériane Passaro (étudiante au doctorat en éducation- Université de Montréal)

Abstract

The preoccupation of a teacher about the difficulties encountered by high school students during the learning of the function concept has brought us to explore the subject. Numerous studies have pointed out problems related to the coordination of representation registers. The conversion activity, to the coordination source, is nevertheless widely underestimated in traditional teaching. That’s why we have constructed a teaching sequence, in which the conversion activity is one of the principal preoccupations. As we chose to consider theoretical and practical ideas in the conception of this sequence, we have taken into account either results of research studies and the Quebec high school program orientations. Thus, the characteristics of this sequence, and furthermore the work on conversions, are the consideration of spontaneous representations, the placement in student action, as well as a qualitative approach of the situation to help the understanding of the covariational phenomenon. The results show, among others, that spontaneous representations of the students are varied, original and exploitable, but that their degree of abstraction is far from the conventional representation.

Nos expériences en enseignement des mathématiques au deuxième cycle du secondaire nous ont amenés à constater que les élèves éprouvent plusieurs difficultés avec le concept de fonction. C’est pourquoi nous nous sommes intéressés à ce sujet dans notre recherche de maîtrise (voir Passaro, 2007). La consultation de la littérature (Monk, 1992 ; Janvier, 1993 ; Beichner, 1994 ; Carlson, 1998) a mis en évidence une problématique liée à la coordination des registres de représentation et c’est pourquoi nous avons choisi de situer la recherche dans le cadre de la théorie des représentations de Duval (1988, 1993). En effet, il apparaît pour nous incontournable de considérer l’importance des conversions entre les différents registres de représentation sémiotiques lors de l’enseignement des fonctions. Cette activité de conversion, ainsi que les difficultés qu’elle engendre, sont pourtant largement sous-estimées dans l’enseignement traditionnel.

Aussi avons-nous décidé de concevoir une séquence d’enseignement dans laquelle les conversions entre registres de représentation sont une des principales préoccupations. Nous présentons ici le processus de conception de cette séquence qui de concilier théorie et pratique.

Le rôle des représentations dans l’apprentissage et l’enseignement

Plusieurs chercheurs ont mis de l’avant le rôle des représentations dans l’apprentissage et ses implications pour l’enseignement.

En 1984, Dufour-Janvier, Bednarz et Bélanger abordent la problématique entourant l’utilisation des représentations conventionnelles par les élèves. Ils constatent, par exemple, que les élèves ne sont pas capables de choisir la représentation appropriée à la résolution d’un problème donné et qu’ils n’envisagent pas que plusieurs modes de représentation puissent permettre de résoudre le même problème. Ils indiquent aussi que les représentations spontanées

des élèves sont très différentes des représentations officielles imposées et ils considèrent que l'enseignement ne peut négliger ce décalage. En outre, ils ciblent le rôle du langage qui apparaît comme un élément clé du processus de construction d'une représentation. Suite à ces observations, Hitt et Passaro (2007) proposent d'explorer l'évolution des représentations spontanées des élèves vers les représentations conventionnelles.

Duval (1988, 1993) indique que la conceptualisation n'est possible que lorsqu'il y a coordination des différents registres de représentation sémiotiques permettant l'appréhension du concept. La coordination est constituée, entre autres, d'un ensemble de conversions entre registres de représentation. Nous avons ainsi déterminé que, pour qu'il y ait conversion, il doit d'abord exister deux registres identifiés, celui de départ et celui d'arrivée, puis il faut pouvoir faire le parallèle entre les éléments signifiants homologues de ces deux registres. Il est à noter que pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre trois activités cognitives fondamentales : la formation d'une représentation identifiable, la transformation de la représentation dans le registre même où elle a été formée et la conversion de la représentation dans un autre registre que celui d'où elle provient.

Plusieurs difficultés relatives aux conversions entre registres de représentation dans l'apprentissage plus spécifique du concept de fonction ont été relevées par certains chercheurs. Il ressort particulièrement que l'interprétation de graphiques dans un contexte donné est problématique surtout lorsque celle-ci porte sur la covariation entre deux grandeurs (Monk, 1992 ; Carlson, 1998). Cette notion de covariation est intimement liée à l'approche qualitative de la fonction, décrite par René De Cotret (1985), qui s'avère jouer un rôle important dans le développement de ce concept.

Orientations et objectifs du programme de formation de l'école québécoise

Afin de construire une séquence d'enseignement adaptée aux orientations actuelles du Ministère de l'éducation, du loisir et du sport (2003), nous avons, d'une part, cherché à quel moment le concept de fonction est abordé à l'école secondaire, et d'autre part, considéré quelques éléments du contexte pédagogique.

D'abord, au premier cycle du secondaire, il est indiqué que l'élève doit représenter globalement une situation par un graphique. Par contre, le concept de fonction n'est pas explicitement introduit à ce niveau. Au deuxième cycle du secondaire, la préoccupation pour les conversions entre registres de représentation est davantage présente et le concept fonction est explicitement abordé. Ainsi, les premières conversions effectuées par les élèves, en lien avec le concept de fonction, sont celles sollicitées lors du passage d'une situation à un graphique au premier cycle du secondaire. Dès lors, nous avons déterminé que les registres de représentation sémiotiques mis en jeu sont les registres « verbal », « figural » et « graphique ». Il est à noter qu'à ce niveau, c'est la première fois que les élèves travaillent sur des situations dans lesquelles deux grandeurs sont mises en relation et qu'ils représentent graphiquement ce type de situation.

Ensuite, dans les éléments du contexte pédagogique, l'importance des conversions entre registres de représentation est omniprésente, ce qui confirme la pertinence du cadre théorique choisi.

Finalement, les modalités pédagogiques sont clairement axées sur la mise en action des élèves à divers niveaux : réflexion, manipulation, découverte, argumentation etc. Il est stipulé

que les élèves doivent être placés en situation d'apprentissage de manière à développer, entre autres, leur compétence de résolution d'une *situation-problème*.

Apport de la recherche dans l'interprétation du contexte pédagogique

D'abord, la notion de *situation-problème* n'est que vaguement explicitée dans le programme de formation. Afin d'apporter des précisions, nous avons considéré quatre caractéristiques établies par Douady (1986) que nous pouvons résumer ainsi :

1. s'engager dans la résolution constitue un défi raisonnable pour l'élève ;
2. à un certain moment dans le processus de résolution, l'élève se retrouve dans une impasse et l'acquisition de nouvelles connaissances s'avère nécessaire ;
3. la communication est primordiale dans toute démarche de résolution de problèmes ;
4. la connaissance à acquérir doit être l'outil le mieux adapté à la résolution du problème.

Cette dernière idée d'acquisition d'une nouvelle connaissance nous amène à nous positionner sur le processus d'apprentissage puisque cela influence notre conception de l'enseignement et par le fait même l'orientation de la séquence construite. Notre conception rejoint plus particulièrement une perspective constructiviste telle que décrite par Legendre (2003). La principale implication de cette perspective pour l'enseignement que nous prenons en compte est la considération des connaissances antérieures des élèves pour la construction des nouvelles connaissances (Proulx, 2006). Nous considérons que les représentations spontanées des élèves sont construites à partir de ces connaissances antérieures.

Présentation de la séquence

En combinant l'ensemble des informations recueillies, nous avons élaboré le canevas d'une séquence d'enseignement s'adressant aux élèves de deuxième année du premier cycle (13-14 ans) dont voici les trois premières activités.

Situation :

« Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une piste fermée qui lui permet donc de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. En suivant cette piste, il ne repasse jamais au même endroit de la forêt. Il ne fait qu'un seul tour de piste. Un poste de secours est situé à l'intérieur de la région délimitée par la piste. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste. »

Activité	Principale(s) conversion(s) de registres impliquée(s)	Consignes données aux élèves
1	verbal à figural	Trace une piste et place le poste de secours à l'endroit de ton choix en respectant l'énoncé.
2	verbal et figural à verbal	Afin de se sentir en sécurité, le randonneur s'intéresse à la distance « à vol d'oiseau » le séparant du poste de secours selon la distance qu'il a parcourue sur la piste. Décris ce qui se passe avec ces deux grandeurs tout au long du trajet du randonneur (n'oublie pas qu'il ne fait qu'un seul tour de piste).

3	verbal à figural ou graphique	Lorsqu'on a donné la description de la classe au randonneur, celui-ci l'a trouvée intéressante, mais longue à lire et à comprendre. Il nous demande donc de trouver un moyen visuel permettant de montrer rapidement comment varie la distance au poste de secours lorsque la distance parcourue varie. Propose une représentation visuelle organisée qui réponde au mieux à toutes ces exigences.
---	-------------------------------	--

Résultats et conclusions

Nous avons expérimenté cette séquence dans trois groupes d'élèves provenant de deux écoles secondaires différentes. Notre analyse a, d'une part, fait ressortir les caractéristiques des représentations des élèves et d'autre part, nous a informés sur les difficultés à envisager lors du passage à la représentation officielle. Voici quelques résultats :

- Le déroulement effectif de la séquence d'enseignement, ainsi que les résultats ont été fortement influencés par les interventions de l'enseignant.
- Le degré de participation et de motivation des élèves s'est maintenu à un niveau assez élevé tout au long de l'expérimentation. Les élèves ont presque tous produit des représentations visuelles et plusieurs ont fait preuve d'une créativité intéressante.
- Le niveau d'abstraction des représentations visuelles produites est peu élevé et proportionnel à la force académique des élèves. Cette constatation nous informe de la difficulté prévisible du passage à la représentation officielle qui nécessite un certain niveau d'abstraction.
- La construction de la représentation officielle à partir des représentations des élèves s'est avérée plus facile qu'anticipée, mais comme prévu les caractéristiques n'étaient pas toutes présentes. Par exemple, les élèves n'ont pas ressenti le besoin d'utiliser un axe vertical.

En conclusion, la conciliation entre théorie et pratique s'est avérée possible dans la mesure où les orientations du programme de formation de l'école québécoise semblent en harmonie avec la recherche. Néanmoins, nous sommes conscients que la réalité de la pratique est constituée de bien plus que ce qui est écrit dans le programme, c'est pourquoi nous avons travaillé en collaboration avec des enseignants de manière à améliorer cette séquence et ce avant l'expérimentation.

Bibliographie

- Beichner R. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of physics*, 62. pp. 750-762
- Carlson M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education, volume 7*. American Mathematical Society.
- Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 7, no.2.
- Dufour-Janvier B., Bednarz N., Bélanger M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Edited by Claude Janvier. UQAM. Laurence Erlbaum Associates publishers.
- Duval R. (1988). Graphiques et équations : l’articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1. IREM de Strasbourg.
- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5. IREM de Strasbourg.
- Hitt F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6. IREM de STRASBOURG.
- Hitt F., et Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l’Étude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-59)*. Dobogókő, Hongrie, juillet, 2007, pp. 117-123.
- Janvier C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. *Les représentations graphiques dans l’enseignement et la formation*. Les sciences de l’éducation. C.E.R.S.E Université de Caen.
- Legendre M-F. (2004). Approches constructivistes et nouvelles orientations curriculaires. *Constructiviste, choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld*. (pp. 51-91). Presses de l’Université du Québec.
- Ministère de l’Éducation, du Loisir et du Sport. (2003). *Programme de formation de l’école québécoise, Enseignement secondaire 1^{er} cycle, Domaine de la mathématique*. (pp. 223-264). Gouvernement du Québec.
- Monk S. (1992). The concept of function aspects of epistemology and pedagogy. In Ed Dubinsky, Guershon Harel (Eds.), *MAA notes and reports series*. pp. 175-194.
- Passaro V. (2007). « Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d’élèves du premier cycle du secondaire ». Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.
- René De Cotret S. (1985). « Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique ». Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Le développement de situations d'apprentissage basées sur l'histoire de la numération dans le cadre d'un module de recherche du programme primaire international

Julie Poirier, candidate au Ph.D. en didactique, Université de Montréal

This research arising from the practical context of the researcher, we first introduce the two programs which we are working with: the Quebec education program (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001) and the IB Primary Years Programme (PYP) (International Baccalaureate, 2007). Once reached this context, we present a planning tool - the Planner - required by the PYP for the design of its “units of inquiry”. We propose mathematical activities based on the historical evolution of numeration and evaluation's criteria for each activity.

Introduction

L'activité mathématique étant au cœur de l'enseignement des mathématiques, elle peut être à la fois un moyen pour motiver les élèves, pour faire comprendre certains concepts mathématiques et parfois, faire des liens avec d'autres matières scolaires; voilà la prémisse de ce 61^e congrès de la CIEAEM (première annonce). Une revue de la littérature nous a permis de constater que l'histoire des mathématiques rejoint ces mêmes visées. En effet, la plupart des études portant sur l'histoire des mathématiques réalisées auprès d'élèves font état d'une motivation accrue, d'un intérêt marqué, d'enthousiasme et même de passion de ces derniers (Bartolini Bussi, 2000; Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002; Swetz, 2001). Aussi, certains auteurs affirment que l'histoire des mathématiques permet d'approfondir les connaissances des élèves et contribue à construire des habiletés et des concepts mathématiques (Barbin, 1996, 2000; Fauvel, 1995). Enfin, tout comme l'activité mathématique, l'histoire permet de voir et de faire des liens avec d'autres disciplines (Barbin, 1997; Grugnetti & Rogers, 2000).

Le contexte de la recherche

Cette étude s'inscrit dans la foulée d'une refonte du programme de formation de l'école québécoise amorcée en 2001 et arrivée au troisième cycle en 2003. Aussi, nous enseignons dans une école internationale primaire accréditée par l'Organisation du Baccalauréat International (OBI) et devons donc composer avec deux programmes, deux cadres.

Le nouveau programme de formation de l'école québécoise (MELS)

La première nouveauté de ce programme est l'enseignement par **compétences**, notamment celle intitulée *résoudre une situation-problème mathématique*. En effet, cette compétence est la première et elle permet de développer les deux autres, soit *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* et *communiquer à l'aide du langage mathématique*. Autre nouveauté, le programme de mathématiques prévoit une section « **repères culturels** » dans laquelle on retrouve les notions historiques et de culture générale à aborder avec les élèves. Cela se traduit par la nécessité d'aborder les origines et la création des nombres, l'évolution dans l'écriture des nombres, l'étude de différents systèmes de numération (par exemple les systèmes arabe, romain, babylonien et maya) avec leurs caractéristiques, leurs avantages et leurs inconvénients. Le

programme suggère de voir les opérations par le biais des processus personnels ou conventionnels de calculs en mettant en lumière l'évolution, les limites, les avantages et les inconvénients de chacun. Toujours au niveau des opérations, on préconise d'aborder l'évolution des outils de calcul (bâtonnets, traits, boulier, abaque, calculatrice, logiciels) avec leurs limites, avantages et inconvénients. Notons qu'on retrouve aussi une section sur les **savoirs essentiels** à enseigner où l'arithmétique occupe une place importante.

Le programme primaire international (PP) et sa clientèle

Bien que ce programme ne soit pas élitiste, certaines commissions scolaires du Québec choisissent d'offrir ce programme aux élèves en facilité d'apprentissage. C'est le cas à l'école où nous enseignons. Comme les élèves sont sélectionnés, la plupart sont particulièrement doués, sans toutefois être surdoués. Dans *Le dictionnaire actuel de l'éducation*, Legendre décrit de la façon suivante les caractéristiques des enfants doués : « [...] élèves possédant une bonne capacité à résoudre des problèmes, appréciant leur résolution, menant habituellement leurs travaux à terme et ayant une bonne capacité de concentration » (Legendre, 2005, p. 439). Ajoutons que Daniel (2000) soutient que l'histoire des mathématiques est particulièrement appropriée pour les enfants doués puisqu'elle permet de découvrir plusieurs solutions à un problème, d'explorer plusieurs méthodes (qui ne sont pas celles de l'enseignant) et de percevoir différents points de vue. Elle affirme également que l'histoire des mathématiques offre des défis et stimule ces enfants qui en ont besoin. C'est à travers l'outil de planification du PP –le plan de travail– (en annexe) que nous décrirons les grandes lignes de ce programme.

La conception d'activités dans le cadre d'un module de recherche du PP

Il est très rare qu'un module de recherche (projet) porte sur les mathématiques. En effet, aucun thème n'aborde directement la discipline des mathématiques, mais nous croyons que l'histoire de la numération est tout indiquée puisqu'elle permet d'aborder les repères culturels du programme du MÉLS, de créer un module de recherche, que l'histoire des mathématiques est tout indiquée pour nos élèves doués et que malgré la facilité d'apprentissage de nos élèves, des difficultés peuvent subsister dans l'apprentissage de la numération (Bednarz & Janvier, 1984). Ce canevas comporte quatre pages : deux concernent la planification de la recherche et deux, une réflexion sur la recherche (qui se fait après l'expérimentation). L'espace nous manquant, nous ne présenterons que les deux premières pages en annexe.

La section 1 comprend d'abord le **thème transdisciplinaire** du module de recherche (un des six thèmes à aborder à chaque année). La richesse de ces thèmes tient au fait qu'ils touchent à de nombreuses disciplines –telles que les sciences humaines, les arts, les sciences-. Un de ces thèmes nous intéresse plus particulièrement, celui qui s'intitule : *Où nous nous situons dans l'espace et le temps* et doit notamment porter sur : « Une recherche sur notre position dans l'espace et le temps, sur notre vécu personnel; sur nos domiciles et nos voyages; sur les découvertes, les explorations et les migrations des êtres humains; (...) » (OBI, p. 14). Ensuite, on vient écrire l'idée maîtresse qui « doit être formulée en une phrase concise qui permet une compréhension durable » (OBI, p. 40). Dès le début du processus, on doit aussi prévoir la tâche d'évaluation sommative qui permettra de déterminer la compréhension qu'ont les élèves de l'idée maîtresse.

La deuxième section concerne les **concepts** clés que nous prévoyons toucher dans ce module de recherche. Les concepts font référence à une question conceptuelle clé qui peut être adaptée à toutes les matières et fort utiles pour mener une enquête. On retrouve donc : la forme, la fonction, la causalité, le changement, la relation, la perspective, la responsabilité et la réflexion. Ensuite, on vient définir les pistes de recherche, c'est-à-dire les sous-thèmes à aborder qui vont permettre de comprendre l'idée maîtresse. Puis, on vient poser les questions de l'enseignante qui découlent des concepts et qui touchent habituellement aux pistes de recherche. C'est à cette étape aussi que l'on vient prévoir le déclencheur du module de recherche.

Dans la section 3, on vient planifier la façon dont nous allons vérifier les connaissances préalables des élèves. Dans le jargon de l'international, c'est le S (*ce que je sais*) du SVA (V étant *ce que je veux savoir* et le A étant *ce que j'ai appris*). On doit aussi prévoir la façon dont nous allons vérifier les **savoir-faire** antérieurs des élèves (dans le PP, ils sont divisés en cinq grandes catégories : savoir-faire sociaux; savoir rechercher; savoir penser; savoir communiquer et savoir se maîtriser). Les sections 3 et 4 doivent se bâtir en même temps puisque dans la section 4, on vient décrire les activités d'apprentissage qui vont permettre de répondre aux questions de l'enseignante, aux questions des élèves (également très importantes dans le PP) et de comprendre l'idée maîtresse. En parallèle, on utilise la section 3 pour planifier l'évaluation formative de chacune des activités de la section 4. Nous devons clairement y indiquer nos attentes. Finalement, à la section 4, nous tentons de prévoir quelles activités vont permettre de développer quels savoir-faire, quels éléments du **profil de l'apprenant** (parmi ceux-ci : investigateur, informé et instruit, penseur, communicateur, intègre, ouvert d'esprit, altruiste, audacieux, équilibré et réfléchi) et quels **savoir-être** (parmi les suivants : l'émerveillement, l'engagement, la confiance en soi, la coopération, la créativité, la curiosité, l'empathie, l'enthousiasme, l'indépendance, l'intégrité, le respect et la tolérance) et comment elles les développeront. Finalement, on doit inscrire, à la section 5, les ressources humaines, documentaires, informatiques et autres dont nous aurons besoin pendant le module de recherche. On doit également prévoir si l'environnement de la classe doit être modifié pour faciliter la recherche.

Les trois temps de la séquence d'enseignement/apprentissage

Bien que les activités soient très brièvement décrites dans le plan de travail, notons que l'on retrouve des **activités de mise en contexte** qui permettent d'entrer en douceur dans le sujet et de faire surgir les connaissances antérieures des élèves. Elles permettent également de susciter le questionnement et de réaliser un survol du sujet. Ici, nous avons un déclencheur : compter sur son corps comme un Papou, une carte d'exploration, un survol historique dans un manuel, les questions des élèves et de l'enseignante.

Ensuite, viennent les **activités d'apprentissage** qui sont au cœur de cette séquence. Dans ce module de recherche, les six équipes de la classe découvrent un système de numération différent des autres (sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois et maya) et présentent ensuite à la classe les symboles et le fonctionnement de leur système. Ensuite, ils émettent leurs hypothèses quant à la façon dont « leur » peuple effectuait les quatre opérations à l'aide des instruments de calcul (planche à calculer mésopotamienne, abaque de poche romain et boulier chinois), vérifient leurs hypothèses dans un document vulgarisé, effectuent ces quatre opérations et présentent leurs trouvailles au reste de la classe. Tout comme nos deux programmes, ces activités sont d'inspiration socioconstructiviste puisqu'elles placent l'élève devant un conflit



cognitif et le mettent dans un état de déséquilibre. Pour retrouver l'équilibre, l'élève devra réorganiser ses connaissances, interagir avec ses pairs, faire des essais et des erreurs et finalement, découvrir d'autres façons de représenter les nombres et d'effectuer les opérations qui ne sont pas les siennes.

Enfin, le module de recherche se termine par des **activités d'intégration** qui, elles, visent à réorganiser et à mettre des mots sur les nouveaux apprentissages et à comparer des stratégies et des méthodes. On trouve notamment les présentations des élèves, la carte du monde et la ligne du temps et la discussion sur l'évolution des mathématiques décrite à l'étape 1 du plan de travail.

Conclusion

Bien que le plan de travail soit conçu pour planifier les modules de recherche dans le cadre du programme primaire international, nous sommes à même de constater qu'il se prête bien à la planification d'activités mathématiques. Il reprend les principes du constructivisme avec l'activation des connaissances antérieures, le questionnement des élèves et des activités qui permettent aux élèves de construire eux-mêmes leurs connaissances en découvrant différents systèmes de numération et leurs opérations pour éventuellement, avoir une meilleure compréhension de notre système de numération actuel et de son évolution.

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Références

- Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica, Historical research and integration with teaching* (pp. 17-26). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, 37(1), 20-25.
- Barbin, E. (2000). Que faut-il enseigner, pour qui, pourquoi: des réponses dans l'histoire des mathématiques. *Repères-IREM*(38), 43-51.
- Bartolini Bussi, M. (2000). Ancient instruments in the modern classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 343-350). Dordrecht: Kluwer Academic
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1984). La numération, les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*(33), 7-31.
- Cerquetti-Aberkane, F., & Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques*. Champigny-sur-Marne: CRDP de l'académie de Créteil.
- Fauvel, J. (1995). Revisiting the history of logarithms. In F. J. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 39-48). Washington: The Mathematical Association of America.
- Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 39-62). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Legendre, R. (Ed.) (2005) Dictionnaire actuel de l'éducation. Montréal: Guérin.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, M. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Retrieved from.
- Organisation du Baccalauréat International, O.-I. (2007). *Programme primaire, pour faire une réalité du Programme primaire, cadre pédagogique pour l'éducation internationale dans l'enseignement primaire*. Cardiff: Organisation du Baccalauréat International (OBI).
- Swetz, F. J. (Ed.) (2001) Encyclopedia of mathematics education. New York: Routledge Falmer.

Planification de la recherche 1. Quel est notre objectif ? Effectuer une recherche sur : • Thème transdisciplinaire Où nous nous situons dans l'espace et le temps • Idée maîtresse Plusieurs peuples ont contribué à l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps. Tâche(s) d'évaluation sommative : De quelles façons pouvons-nous évaluer la compréhension de l'idée maîtresse par les élèves ? Quelles preuves (y compris les actions initiées par les élèves) rechercherons-nous ? Discussion sur l'évolution des mathématiques À la toute fin du module de recherche et afin de structurer leur pensée, les élèves doivent d'abord réfléchir individuellement sur certaines questions synthèses: En quoi le peuple que vous avez présenté à la classe a contribué à l'évolution des mathématiques ? Comment la numération a-t-elle évolué jusqu'à notre système actuel? Pourquoi a-t-elle évolué? Si une machine à voyager dans le temps permettait à un scribe égyptien de venir à notre époque et de découvrir notre système de numération, que dirait-il à ses semblables pour les convaincre d'adopter ce nouveau système? Ils devront ensuite discuter en équipe de ces mêmes questions afin d'être en mesure de nommer des manifestations de l'évolution de la pensée mathématique à travers le temps. Co-évaluation Durant cette discussion, des élèves de 6e année joueront le rôle d'observateurs et noteront à l'aide d'une grille d'observation critee les manifestations soulevées durant la discussion. À la fin de la discussion, chaque élève s'auto-évaluera sur ces mêmes énoncés. © Organisation du Baccalauréat International 2007	Classe/niveau : 5^e année Groupe d'âge : 10-11 ans Établissement : Wilfrid-Pelletier Code de l'établissement : 904551 Titre : D'où viennent les chiffres ? Enseignant(s) : Julie Poirier Date : février-mars Durée proposée : 50 heures réparties sur 6 semaines Plan de travail du PP  2. Que voulons-nous apprendre ? Quels sont les concepts clés (forme, fonction, causalité, changement, relation, perspective, responsabilité, réflexion) sur lesquels nous mettrons l'accent durant la recherche ? Fonction, changement, relation. Quelles pistes de recherche définiront le champ de cette recherche centrée sur l'idée maîtresse ? 1) La représentation des nombres et le fonctionnement des systèmes de numération dans différentes civilisations 2) Les quatre opérations dans ces systèmes 3) Les facteurs et les besoins ayant conduit à la création et à l'évolution de la numération 4) L'évolution des systèmes jusqu'à notre système actuel Quelles questions/provocations de l'enseignant seront le moteur de ces recherches ? Questions de l'enseignant 1) Quelles sont les ressemblances et les différences entre les différents systèmes à l'étude et le système actuel ? 2) Comment les premiers systèmes de numération et leurs opérations mathématiques fonctionnaient-ils ? 3) Quels sont les facteurs et les besoins humains qui ont conduit à la création et l'évolution de la numération ? 4) Comment la numération a évolué jusqu'à notre système actuel ? Activité déclencheur : Découverte de la façon de compter primitive des Papous (sur les parties de leur corps), expérimentation et discussion sur cette façon de faire.
---	--

Planification de la recherche

3. Comment vérifierons-nous ce que nous avons appris ?

Cette colonne doit être utilisée conjointement avec « Comment apprendrons-nous le mieux ? ».

De quelles façons pouvons-nous évaluer les connaissances et savoir-faire antérieurs des élèves ? Quelles preuves rechercherons-nous ?

- Lors de l'activité 1 (carte d'exploration), je m'attends à ce que les élèves nomment quelques façons de représenter les nombres (dessins, traits, chiffres arabes, chinois, etc.) et quelques instruments de calcul (cailloux, boulier, calculatrice, etc.). Cette activité me permettra aussi de vérifier la capacité des élèves à savoir penser (acquisition de connaissances, compréhension, application, analyse, synthèse) en appréciant leurs capacités à former des catégories, mettre ensemble ce qui va ensemble, faire des liens entre les concepts et les catégories, etc.
 - L'activité 2 (survol historique) me permet, avant de poursuivre les apprentissages, de m'assurer que les élèves ont une certaine base commune (comme c'est un domaine relativement nouveau pour eux).
- De quelles façons pouvons-nous évaluer l'apprentissage des élèves dans le contexte des pistes de recherche ?
- Quelles preuves rechercherons-nous ?
- Pendant les activités d'équipe 3 et 4, observer que les savoir-faire sociaux (accepter ses responsabilités, respecter les autres, coopérer) se développent. Je m'attends à ce que les équipes fonctionnent bien puisqu'elles ont été formées à la suite d'un sociogramme.
 - Après les activités 3 et 4, une fiche synthèse permet de vérifier la compréhension (savoir penser) qu'ont les élèves des systèmes de numération et des opérations.
 - Pendant les présentations des activités 3 et 4, les élèves devront démontrer leur capacité à savoir communiquer (parler, présenter) et à savoir penser (compréhension, analyse et synthèse).

4. Comment apprendrons-nous le mieux ?

Quelles activités d'apprentissage ont été suggérées par l'enseignant et/ou les élèves afin d'encourager ces derniers à se lancer dans la recherche et à répondre aux questions d'orientation ?

- 1) Carte d'exploration :** Remplir collectivement une carte d'exploration sur les connaissances des élèves sur l'histoire de la numération. Avec d'autres couleurs, reprendre cette activité à la mi-projet et à la fin du projet pour voir l'évolution des connaissances.
 - 2) Survol historique :** Explorer les pages 80 à 83 de la collection Défi de l'année qui permettent un survol historique de plusieurs millénaires en quelques minutes et discussion.
 - 3) Fonctionnement des systèmes de numération :** Chaque équipe reçoit une fiche différente avec un système de numération présenté, mais non expliqué (systèmes sumérien, égyptien, babylonien, romain, chinois, maya). En équipe, les élèves doivent comprendre le fonctionnement du système et doivent compléter la fiche en représentant les nombres ou dessins manquants. Ils présentent ensuite leur système et mettent les élèves de la classe au défi de compléter leur tableau. À chaque présentation, on fait ressortir les ressemblances et les différences entre les systèmes et notre système actuel.
 - 4) Les 4 opérations à la manière de nos prédécesseurs :** À l'aide des instruments de calcul utilisés à l'époque, les élèves émettent des hypothèses quant à la façon d'effectuer les 4 opérations à la manière de nos prédécesseurs. Ils vérifient ensuite leurs hypothèses en consultant un feuillet explicatif et doivent tenter de faire les quatre opérations à la manière de « leur » peuple. Ensuite, les élèves expliquent à la classe comment on faisait ces opérations. En groupe, on remarque les ressemblances et différences entre les différentes façons de procéder et la nôtre.
 - 5) Ligne du temps et carte :** Placer les différents systèmes travaillés sur une ligne du temps et les situer sur la carte du monde. Faire ressortir l'évolution dans les systèmes de numération (manipulation à systèmes additifs à systèmes positionnels, etc.)
- Quelles seront les occasions de développer les savoir-faire transdisciplinaires et les qualités décrites dans le profil de l'apprenant ?
- | Savoir-faire | Savoir-être | Profil |
|---|--|--|
| savoir penser (act. 3-4)
savoir communiquer (act. 3-4) | émervaillement (act. 2-3-4)
engagement (act. 3-4)
coopération (act. 3-4) | informés et instruits (act. 2 à 5)
penseurs (act. 3-4)
communicateurs (act. 3-4) |

5. Quelles ressources devons-nous rassembler ?

Quels personnes, lieux, matériel audiovisuel, littérature pertinente, musique, art, logiciels et autres seront disponibles ?

Sites Internet :
www.clevislauzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa
www.defimath.ca/mathadore/vol2num44.html
 (aussi, numéros 59, 62, 65 et 68)

Les maths c'est magique ! ERPI
 Défi mathématique 6ème année (Lyons, Robert et Michel)
 Les quatre opérations expliquées aux élèves : documents vulgarisés inspirés d'Ifrah, (Poirier)

Comment l'environnement de la classe, l'environnement local et/ou la communauté seront-ils utilisés pour faciliter cette recherche ?
 Les équipes de base de la classe auront été formées suite à un sociogramme et en s'assurant qu'un moins un élève en grande facilité d'apprentissage en math. se trouve dans chaque équipe. Les livres de la bibliothèque seront consultés à tout moment.

Analyzing modelling as a process: A teaching experiment

Manel Sol, (Vilatzara School); Joaquim Gimenez, Nuria Rosich (Barcelona University)

RÉSUMÉ

Après avoir observé les résultats de PISA, on reconnaît que des activités de modélisation ne se développent pas normalement. Dans une expérience d'enseignement réalisée, on analyse l'apprentissage des étudiants immigrants de 12-13 ans lorsqu'ils(elles) travaillent avec des projets mathématiques. En particulier les processus de modélisation sont analysés. Dans ses rapports de travail, nous identifions 16 actions dans les cycles de modélisation utilisés par les étudiants. Des bénéfices des tâches se reconnaissent comme activité de formation pour la recherche.

1. Aims and presentation.

Many observations about the importance of modelling for Mathematics Education were considered in ZDM 2006 issues on modelling and applications, no. 2 and 3 Vol. (38), but a few of them presented results about junior high school students (12-14 year-old) that many mathematics teachers consider they cannot develop modelling strategies. It is also known the low results of contextualized items in PISA tests in many Latin-American countries. We also recognize that primary schools in Morocco and Latin-American countries didn't identify modelling as a subject for teaching or as a competence to be developed. It is logical to formulate the question: can an influence of such weak background when they arrive at Secondary Schools, even in another country? Such a question has been part of a wide project aim in which we analyze the mathematical competences and participation of immigrant students in Spanish Junior-high schools in terms of equity framework. Nevertheless, the main aim of this paper is to show one of the pilot studies upon the analysis of modelling competences, using Realistic Mathematics Projects (Giménez & Sol 2005, and Sol 2009). The main activity in this projects is based on redesigning some Abrantes (2004) ideas. Our research is inscribed in the educational perspective (Borromeo and Ferri 2007) and aims to contribute to the discussion upon some models of modelling and associated behaviours.

2. Theoretical framework

Mathematical modelling is not always considered in mathematics classrooms as a mathematical process (involving a set of maturity actions) that we can build by means of instructive perspectives. It usually begins with a situation in the real world, sometimes in the relatively controlled conditions of a laboratory and sometimes in the less understood environment of meadows and forests, offices and factories, and everyday life, but the attempts were normally analyzed in university students (Kaiser, G. i Maaß, K., 2007). The main issue, from a classroom education perspective, is that many studies have focussed upon a priori ideas of experts doing modelling. Therefore, we don't know if the regular cycles of modelling (Borromeo 2006) are really used by the students or not when they start doing activities like mathematical projects, and which specifically appear when we observe their written productions.

After empirical observations during the last 10 years, we identify Realistic mathematics Projects (RMP) as a mathematical authentic (Ponte 2004) and rich activity, a long term action, related to the students' environment so that they can be aware of critical citizenship, open, inte-

grated, and aiming complexity. It's considered more than a “superproblem”. RMP start in the school, and continue at home, with tutorial dialogic intervention in which students are considered as autonomous and creative protagonists who take decisions in any part of the activity. Mathematical objects, structure and tools are adequate to students' background. In such an activity, we assume equity as a framework to analyze mathematical actions involved in modelling competences by weak students.

3. Methodolgy

We carry out a teaching experiment with a group of thirty 12-14 year-old students in which we select a subset of seven weak intercultural subgroup (GE). A set of other subgroups from the same academic level (GC2) and more experienced 16 year-old students (GC4) were also analyzed to contrast their competences by observing their reports. Oral presentation was also analyzed and interviews during the project were also contrasted. During all the period, the analysis was constructed by the teacher and two experimented researchers as a TR- training process. So in many moments a group of colleagues also contrasted the observations and interpretation of data.

In the RMP the students work in pairs or in groups of three. The students select a social aspect from the environment. Students propose questions (with the help of the teacher) and finally pose a main question related to the real contextualized problem. They search for a plan to solve the problem for a month approximately. At the end, they do a written report and communicate the main results and explanations to the whole class. In our study we analyze a set of competences by means of identifiers. It was proposed (Sol 2009) to show its score by descriptors, not explained here in detail.

4. About the Results.

A set of competences and subcompetences were analyzed. Just some examples can be drawn in this paper. As for the methods used in solving the problems, we conclude that some differences appear in the groups. Among GE we observe a large set of different strategies for solving mathematical problems involved. And we see real differences in relation to the so called “control expert groups” GC2 and GC4.

Students	M3 Identify relevant objects and relations related to the aim	M4 Select variables and parameters and constants in the situation	M6 Identify elements from known models applied to the situation	M8 Explicit the dependence among mathematical variables
GE	40%	80%	20%	80%
GC2	100%	100%	75%	75%
GC4	100%	100%	75%	100%

GE group shows a lot of difficulties with subcompetences 3 and 6, in which the students act upon the concrete example, without giving explanations about the model as a result of a generalized process. Let us see the case of Mohamed who explains that to calculate the percentage of food an animal eats related to its weight, “multiply what it eats each day by 100 and divide it by its kg”. We cannot ensure that it is a general rule, but it is one characteristic that differenti-

ates GE from the rest of the whole classe. It is also idiosyncratic the case of Fatima in which many mathematical objects have been used assuming that the figures are enough to explain what she is doing. She said “We calculate the distance of a car, also the space, and we divided out of the distance, thus we know the number of cars. All is possible to see in the plan”. We have also observed the difficulties in doing generalization processes in their explanations: Irene (when she analyzes proportions in cakes from different cultures) she describes her computation without generalizing. Observing the projects in the experimental group just one case reveals to be confident and competent in doing reasoned hypothetical sentences about the problem conditions. In fact, she says “We invented the measures so that eight people can sit at each table and have a space of 55 cm for each one (Alicia, project 3, line 15-16)”

As for communication competences, GE group has difficulties in explaining mathematical objects associated to the modeling process. Control group in the same class reveals better explanations, but it does not reveal better competence in general. They show difficulties similar to the other groups’ when recognizing arguments associated to the used registers so that they show clearly the structure of the realized process. All the students, not only immigrants show difficulties to assign right meanings associated to the moments in the process of modelling they were observing. Let us see the difficulties in argumentation (table below gives an assignement 0, 1 or 2 to each student in each category).

Intercultural weak Students group	Mohamed	Fatima	Irene	Alicia	Georgina
Describes important parts of modelling process, using precise arguments extending particularisation	1	0	1	0	1
Uses inferential arguments and comparisons to justify the elements during the process	1	0	1	0	1
Explains the main ideas about the process using communicative structured tools	0	0	0	0	0
Expresses argumentations that help visualize the steps of the process, and distinguish the separated elements	0	0	0	0	0
Exposes arguments giving enough evidences about the key elements of the modelling process	0	0	0	0	0

As it can seen from the picture, in such a competence we see that inside the group the first three immigrant students have results similar to those of non-immigrant students, but they have less global results than the others.

5. Final remarks.

We remark that individual modelling routes and other non-linear behaviors are observed after analyzing projects done by the students. More differences are observed in GE group. After reflecting on the teaching research experiment, we found that in order to increase expertise in mathematical modelling it was fruitful for each group to determine their own modelling routes and outcomes, but also the role of facing the problem from the beginning. By doing so, they were able to identify their big difficulties in such a prior approach. Usually teachers present the

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

situation to be modeled and in this case this first steps difficulties are hidden. and claims for the need of “personal autonomy” that it’s difficult for many weak students, even supported by another colleagues. After the experiment the Teacher as Teacher Researcher apprenticeship can be more confident that knowledge base and experience can be improved by repeated graded exposure to models and modelling. Where mathematical modelling occurs as an activity as we described here, it’s possible to find that every student can reveal a certain level of acquisition of mathematical knowledge and reflects it to the modeling process. That is the role of RMP to increase students autonomy and confidence about their difficulties, and the need for enlarging discussion about their written reports and oral communication. The global analysis (not completely described here) gave some similarities to Borromeo and Ferri results. Nevertheless. We propose a new empirical scheme of the mathematical modeling process, linking realistic approaches to a cognitive perspective (Sriraman, B. Kaiser, G. Blomhoj, M. 2006). With this new scheme we could see clear differences from expert models and novice ones in the case of weak students. We think there is a need for more research to give tools to assess this kind of projects in the classrooms. Our research also shows the need for efforts on establishing the boundaries for real problems and which variables would be more useful to include in any developed model. It also shows how weak students have more difficulties in such steps in the modeling cycle. (Zulkardi, 2008).

References.

- Abrantes, P. (2004). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles *Educational Studies in Mathematics*. Vol 47, 2 / July 2001 145-173
- Borromeo Ferri, R. (2007) Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (eds) *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, Horwood Publishing, 260-270.
- Crouch, R. i Haines, C. (2007). Exemplar Models: expert-Novice Student Behaviours. A C. Haines, P. Galbraith, W. Blum i S. Khan (eds.) *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing. 90-100.
- Giménez, J. i Sol, M. (2005) Student's difficulties when starting with mathematical projects. *A Mathematics Education: Paths and crossroads. International meeting in honour of Paulo Abrantes*. (pp 217-229) Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Kaiser, G. i Maass, K. (2007) Modelling in lower secondary mathematics classroom - problems and opportunities. A W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. Henn i M. Niss *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. (pp 99-108) Springer
- Ponte, J.P. (2004) Problemas e investigaciones en la actividad matematica de los alumnos. In J. Gimenez, L. Santos, J.P.Ponte (Coords.) *La actividad matemática en el aula*. Homenaje a Paulo Abrantes. (pp 25-34) Barcelona: Graó Editorial. Biblioteca de UNO 204.
- Sol, M (2009) *Anàlisi de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys a una aula heterogènia*. Unpublished PhD Thesis. Universitat de Barcelona.
- Sriraman, B. Kaiser, G. Blomhoj, M. (2006). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 212-213.
- Zulkardi, A (2008). *How to Design Maths Lessons based on the Realistic Approach?* Available: <http://www.geocities.com/ratuilma/rme.html?200826> [Consultation: 26/05/08]

This research is granted in part by the project EDU2008 supported by CICYT. “ Spanish Ministry of Education 2008-2010 coordinated by N Rosich.

L'intégration des sciences dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : qu'en est-il en pratique ?

Hassane Squalli, Alexandre Ducharme-Rivard

Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, mathématiques et technologie
(CREAS), Université de Sherbrooke, Canada.

1. Introduction

Au Québec, le nouveau programme de mathématiques, sciences et technologies au premier cycle du secondaire (Gouvernement du Québec, 2004) est un programme intégré, plutôt que cloisonné en matières indépendantes. Pour favoriser cette intégration, les nouveaux programmes de l'école québécoise au primaire (Gouvernement du Québec, 2001) et au secondaire (Gouvernement du Québec, 2004) font de l'interdisciplinarité une de leurs orientations prioritaires. En outre, au secondaire les mathématiques, les sciences et technologies font partie du même domaine d'apprentissage:

«Les deux disciplines, chacune à leur façon, permettent (...) d'appréhender, d'apprécier, de décrire, de conjecturer, d'investiguer, de raisonner, d'expliquer, de résoudre, de concevoir, de transformer et d'anticiper. Elles ont des préoccupations communes, par exemple :

- adopter un point de vue mathématique, scientifique ou technologique au regard de différentes situations ou de différents phénomènes;
- enrichir sa culture mathématique, scientifique et technologique;
- saisir les répercussions de ce domaine sur l'individu, la société et l'environnement.»
(*Ibid*, p. 227).

Le recours à des approches interdisciplinaires dans l'enseignement entre mathématiques et sciences et technologies est une injonction institutionnelle forte au Québec. Elle pose cependant un grand défi pour les enseignants, tout particulièrement ceux des mathématiques, qui peuvent n'avoir reçu aucune formation en sciences durant leur formation initiale.

Par ailleurs, l'interdisciplinarité au secondaire implique non seulement des interactions entre des savoirs disciplinaires différents, mais aussi une collaboration entre les spécialistes de ces disciplines lors de la planification et lors de l'enseignement et de l'évaluation des apprentissages.

Les enseignants de mathématiques et de sciences sont donc fortement invités à collaborer dans la planification, la réalisation et l'évaluation de situations d'apprentissage interdisciplinaires.

Dans une recherche récente sur les pratiques déclarées de l'interdisciplinarité chez des enseignants du secondaires, Hasni et ses collaborateurs (Hasni et al., soumis) mettent évidence que dans le groupe des enseignants qui ont participé à leur recherche (N= 89), pour une grande majorité des enseignants de mathématiques, les situations interdisciplinaires entre mathématiques et sciences ne sont pas les plus représentatives de leur pratique interdisciplinaire. Si ces données confirment une tendance générale, nous sommes alors loin de la concrétisation d'une des priorités de la réforme actuelle, à savoir le recours à des pratiques interdisciplinaires entre mathématiques et sciences.

2. Le concept de l'interdisciplinarité

Pour clarifier la notion d'interdisciplinarité, nous utilisons le cadre conceptuel développé dans les travaux (Hasni, 2001; Hasni et Lenoir, 2001; Lenoir, 1991; Lenoir et Sauvé, 1998a, 1998b). L'interdisciplinarité à l' cole consiste en «la mise en relation de deux ou plusieurs disciplines scolaires [...] et qui conduit à l'établissement de liens de complémentarité ou de coopération, d'interpénétration ou d'actions réciproques entre elles sous divers aspects (finalités, objets d'études, concepts et notions, démarches d'apprentissage, habilités techniques, etc.), en vue de favoriser l'intégration des processus d'apprentissage et des savoirs chez les élèves» (Lenoir et Sauvé, 1998a, p. 12).

En se basant sur une analyse critique des écrits scientifiques qui traitent de la mise en œuvre de l'interdisciplinarité, Hasni et Samson (  paraître) soulignent les points suivants qui doivent guider la planification de situations interdisciplinaires :

- L'interdisciplinarité ne consiste pas à nier le recours aux disciplines;
- L'interdisciplinarité ne peut s'improviser lors de l'action pédagogique en classe; elle nécessite, au préalable, une analyse curriculaire afin de déterminer les points de complémentarité et de convergence entre les différentes matières, puis une collaboration entre les spécialistes disciplinaires lors de la planification et lors de l'enseignement et de l'évaluation des apprentissages;
- L'interdisciplinarité doit se baser sur des relations égalitaires entre les disciplines;
- Les activités interdisciplinaires doivent poursuivre l'apprentissage des contenus et le développement des compétences visées par les programmes pour chacune des disciplines impliquées;
- L'interdisciplinarité n'est pas l'approche thématique, où le thème ne constitue qu'un déclencheur et un prétexte pour poursuivre des enseignements disciplinaires cloisonnés

3. Contexte de l'étude

Dans le cadre des recherches que nous menons actuellement au Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences (CREAS), nous collaborons depuis 3 années avec des enseignants de sciences et technologies et mathématiques (STM) du premier cycle du secondaire, dans le cadre d'un dispositif de recherche-développement-accompagnement. Nous poursuivons essentiellement deux principaux objectifs :

- Décrire la manière avec laquelle les enseignants abordent l'enseignement des STM avec leurs élèves;
- Soutenir les enseignants dans le recours à des approches et des ressources favorisant un meilleur apprentissage des STM par les élèves.

Au cours de l'année 2007-2008, le dispositif de recherche-accompagnement-formation a porté sur l'enseignement interdisciplinaire en mathématiques, sciences et technologie. Il s'est déroulé en trois temps. Dans un premier temps, en collaboration avec des conseillers pédagogiques, nous avons organisé 3 journées continues d'études auxquelles ont participé 28 enseignants et conseillers pédagogiques. Durant ces journées, l'équipe de recherche a apporté des éclairages théoriques sur la notion d'interdisciplinarité et a accompagné des enseignants de mathématiques et des enseignants de sciences et technologie réunis dans de petits groupes pour

la planification de situations d'apprentissages interdisciplinaire en STM. Dans un deuxième temps, les enseignants ont expérimenté les situations planifiées dans leurs classes. Ces leçons sont filmées et font partie des données de recherche. Elles servent aussi, dans une troisième phase, de base de discussion lors des rencontres de retour réflexif sur ces expérimentations.

4. Objectifs

Dans cette communication, nous proposons, dans un premier temps, de décrire la genèse d'une situation d'apprentissage interdisciplinaire élaborée par une équipe formée de deux enseignantes de mathématiques et de deux enseignantes de sciences et technologie lors de ces journées d'étude. Par la suite, dans un deuxième temps, nous présenterons quelques résultats de l'analyse des leçons filmées chez les enseignantes de mathématiques de ce groupe.

Pour analyser l'enregistrement vidéo du travail collaboratif, nous l'avons découpé en épisodes, un épisode étant délimité par un sujet de discussion. Les données expérimentales sont formées par les narrations sélectives de ces épisodes. L'analyse du discours des enseignantes est alors faite selon des indicateurs particuliers : préoccupations de chacun des acteurs ; négociation des savoirs (concepts, habiletés, compétences, etc.) en sciences et technologies et mathématiques, négociation du déroulement de la situation; discours sur les documents de travail permet d'évaluer le potentiel interdisciplinaire des situations discutées (non retenues et retenues) et de le confronter aux choix faits par le groupe

Pour l'analyse des leçons, nous utilisons une méthodologie adaptée de celle de la double approche (Robert et Rogalski, 2002 ; Roditi, 2005) cadre théorique reconnue en didactique des mathématiques pour l'étude des pratiques des enseignants. Cette analyse porte essentiellement de l'activité de l'enseignant en classe et tient compte de l'activité des élèves provoquée par les tâches mathématiques proposée par l'enseignant.

5. Quelques résultats de recherche d'analyse du travail collaboratif d'une situation interdisciplinaire entre mathématiques et sciences

Le groupe des quatre enseignantes a discuté deux situations d'apprentissage (en astronomie) avant de retenir une troisième (combustion d'une chandelle). Par manque d'espace, nous allons décrire brièvement la première situation non retenue et présenter quelques éléments d'analyse qui s'attardent sur quelques moments significatifs de ces discussions. Les trois situations seront présentées avec plus de détails lors de la communication.

Le déroulement général de la discussion entre les enseignants autour de la situation Construction d'un planétaire

La première situation discutée est celle de la construction d'un planétaire.

Un planétaire est une maquette représentant le système Soleil-Terre-Lune ainsi que leurs mouvements respectifs. C'est un projet initialement en technologies proposé dans des séances de formation continue des enseignants de sciences et technologies de la commission scolaire des Hauts Cantons.

La situation est proposée par Solange¹⁴. À la demande de Mathilde¹⁵, elle explique en quoi elle consiste. Mathilde demande s’il ne serait pas intéressant de demander aux élèves de construire une maquette à l’échelle afin d’intégrer les mathématiques et les sciences. Mathilde y voit un potentiel pour le travail sur les proportions et les figures semblables.

Solange répond que c’est impossible si les élèves devaient respecter les proportions de distance Soleil-Terre-Lune et les diamètres des astres. En effet, pour pouvoir représenter ce système dans un espace plan de taille raisonnable il est indispensable d’utiliser une double échelle : une pour les distances et une pour les diamètres des astres.

Solange avance que cette situation permet d’étudier le phénomène de changement de saisons, et que la notion d’angle y est importante.

Mathilde demande s’il y a des angles alternes internes, alternes externes, complémentaires ou autres notions au curriculum de première secondaire. Solange répond non. Mathilde précise que s’il ne s’agit que de mesurer des angles, ce n’est pas suffisant. C’était au curriculum du primaire.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats de l’analyse des discussions dans ce groupe d’enseignantes.

- Tout au long des échanges, les idées initiatrices proviennent exclusivement des enseignantes de sciences. À aucun moment les mathématiques n’étaient le point de départ de la discussion pour l’élaboration d’une situation d’apprentissage interdisciplinaire.
- Plusieurs moments de blocage ont eu lieu lors des échanges, comme l’illustre l’extrait des échanges présentés auparavant.
- Face à ce travail collaboratif, les enseignantes de sciences-technologies et celles de mathématiques occupent des positions asymétriques. En effet les premières ont certaines connaissances des mathématiques enseignées au secondaire, mais elles restent au niveau de l’application de modèles mathématiques (les mathématiques sont souvent exploitées pour le calcul et la représentation des données expérimentales). Les enseignantes de mathématiques, quant à elles, se trouvaient souvent dans la position de chercher à comprendre les phénomènes scientifiques pour greffer des contenus mathématiques du programme de secondaire. Elles étaient amenées à réfléchir au niveau de la construction des modèles mathématiques.
- Les situations exploitées sont potentiellement riches en interactions entre mathématiques et sciences. Cependant, le groupe n’a pas pu exploiter entièrement ces possibilités, pour les raisons que nous venons d’expliquer.

Cette étude exploratoire soulève toute la difficulté qu’ont des enseignants de mathématiques et de sciences et technologie à élaborer conjointement des situations d’apprentissages interdisciplinaires. Aussi, elle met à jour le problème de la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques et de sciences pour les préparer ou les accompagner à recourir dans leur enseignement à une approche interdisciplinaire entre mathématiques et sciences-technologies. Une des voies qui nous semble à explorer en formation initiale et continue est la modélisation mathématique comme occasion d’un travail interdisciplinaire et comme sujet de collaboration entre enseignants de sciences et technologie et enseignants de mathématiques.

¹⁴ Enseignante de sciences

¹⁵ Enseignante de mathématiques

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Principales références

- Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire*. Québec : Ministères de l'éducation.
- Gouvernement du Québec (2004). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 1^{er} cycle*. Québec : Ministères de l'éducation.
- Hasni, A.; Lenoir, Y.; Larose, F.; Samson, G.; Bousadra, F. et C Satiro dos Santos; C. (2008). Enseignement des sciences et technologies et interdisciplinarité: point de vue d'enseignants du secondaire québécois sur leurs pratiques. In: Hasni, A., Lenoir, Y. et Lebeaume, J. (dir.) (2008). *La formation à l'enseignement des sciences et des technologies au secondaire dans le contexte des réformes par compétences*. Sainte-Foy: Presses de l'Université du Québec (PUQ).
- Lenoir, Y et Sauvé, L. (1998). L'interdisciplinarité et la Formation à l'enseignement primaire et secondaire: quelle interdisciplinarité pour quelle formation? Introduction du numéro thématique: Interdisciplinarité et formation à l'enseignement primaire et secondaire. *Revue des sciences de l'éducation*, XXIV (1), 3-29.
- Robert A., et Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol 2/4, pp 505-528.
- Roditi, É. (2005), *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*, 196 p., Paris : L'Harmattan.