



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2*, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)



Actes Proceedings

5. La recherche portant sur l'activité mathématique. La collaboration entre enseignants et chercheurs.

La recherche peut mettre à jour les bases du développement mathématique ainsi que les obstacles qui peuvent surgir. Elle met en lumière l'importance du langage, des représentations, de la gestion de classe ainsi que d'autres variables pertinentes. Différentes formes de collaboration entre chercheurs et enseignants se mettent en place. Comment permettre des formes de collaboration entre chercheurs et enseignants qui seront fructueuses? De leur côté, de plus en plus d'enseignants s'impliquent dans la recherche, notamment par le biais de recherche-actions qui se déroulent dans leurs classes. Quelles sont les caractéristiques de telles recherches menées par les enseignants? Quelle est la place de la théorie dans le développement professionnel des enseignants? En plus de faciliter l'apprentissage des élèves, quelles peuvent être les diverses motivations des enseignants à entreprendre de telles recherches?

5. Research on mathematical activity. Collaboration between teachers and researchers.

Research can uncover the basis of mathematical development. It can reveal the sources of obstacles. It can give light to the importance of language, representations, classroom climate, and many other variables of mathematical education. Different types of collaboration between researchers and teachers are taking place. How can a fruitful collaboration between teachers and researchers be put forward? Teachers are also getting more involved in action-research in their own classrooms. What are the characteristics of teacher research? What is the place of theory in the professional development of teachers? In addition to helping the students learn, what other motivations might teachers have to do research?

**Université de Montréal
26 – 31 Juillet 2009-06-28**



CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009

A professional development program in mathematics for practicing and future teachers

Patricia Baggett
Department of Mathematical Sciences
New Mexico State University
Las Cruces, NM 88003-8001
USA
baggett@nmsu.edu

Andrzej Ehrenfeucht
Computer Science Department
University of Colorado
Boulder, CO 80309-0430
USA
andrzej.ehrenfeucht@colorado.edu

Résumé

Nous décrivons un groupe de sept cours de mathématiques offerts au Mexico State University (Etats-Unis) à des enseignants en formation initiale et à des enseignants en formation continue. Ces cours peuvent être suivis au premier cycle ou aux cycles supérieurs. Leur contenu va de l'arithmétique élémentaire au calcul différentiel. Le matériel didactique pour ces cours est construit autour de tâches dont la réussite requiert des connaissances mathématiques spécifiques. La conception et la construction d'un objet physique est souvent en jeu. Les cours sont enseignés dans un format « laboratoire » et les enseignants en exercice jouent le rôle de mentor auprès des étudiants en formation initiale, leur montrant alors comment utiliser le matériel dans leurs classes. Ces cours sont très populaires auprès des enseignants en exercice. Mais le contenu de ces cours ne couvre pas le contenu du curriculum dont le but principal est de préparer les étudiants à passer des tests standardisés.

1. Introduction and background

A rough plan for our current program was developed between 1989 and 1995, after NCTM published its *Principles and Standards for School Mathematics* (1989), which proposed significant changes in the content and structure of mathematics education. Working directly with school districts, preparing materials for teachers, and giving workshops, we selected from a plethora of conflicting recommendations, those that seemed to work best, and we used them as principles for our current program.

They were:

(1) Teachers need a detailed (now called “deep”) knowledge of the material they teach, and such knowledge cannot be acquired through workshops, but through college courses.

(Garet et al., 2001; Killion, 2002; Ma, 1999; Mathematical Conference Board, 2002; National Advisory Panel, 2008).

(2) Even experienced teachers can rarely transform the content of college courses into usable lesson plans. Such plans should become an essential part of college math courses for teachers (e.g., Burns, 1993).

(3) Tasks given to students in schools, in order to be inclusive and motivating, should be interesting independent of their mathematical content, and should show the usefulness

(utility) of mathematics. (Pratt (2005) uses the terms having both “utility and interest” to characterize a motivating task.) Tasks with a “hands-on” component are good for this purpose in all grades, and not just in elementary grades.

(4) Future teachers need to see how the material that they are learning is taught in schools by experienced teachers, and they need to be tutored by such teachers. This experience cannot be replaced by methods courses offered in college (Ma, 1999; Stevenson & Stiegler, 1994).

Our approach assumes that teachers who have adequate mathematical knowledge, together with a large portfolio of good lesson materials, will have considerable freedom of choice regarding what to teach, and which material to select. The current stress on “standards” set by each state in the United States, and tested every year, significantly narrows the scope of materials that teachers use in their classrooms, and promotes a very different philosophy of teacher education. Is there a rational (as opposed to arbitrary) way of choosing among different educational philosophies?

2. Description of the project

We started our program in fall 1995 as a close collaboration between the New Mexico State University (NMSU) Department of Mathematical Sciences and the Las Cruces (New Mexico) Public Schools (led by Karin Matray, Director of Professional Development for the LCPS). The program was also approved and supported by the NMSU College of Education (Prof. Patrick Scott was responsible for math education in the College of Education). Since that time we have developed a set of seven courses designed for future teachers who take classes in the College of Education, and practicing teachers from Las Cruces and neighboring school districts. All courses may be taken either for graduate credit (by practicing teachers and other graduate students) or for undergraduate credit (by future teachers and other undergraduate students at NMSU).

The selection of courses that are offered reflects the needs of the school district, the mathematical requirements of the College of Education, and the concerns of the Department of Mathematical Sciences about the quality of the math courses that are offered to teachers. During the years 1996-2006 the project was partially supported by a series of small grants from the New Mexico Commission for Higher Education, the Exxon Educational Foundation, NASA (National Aeronautics and Space Administration), the National Science Foundation (twice), and the U. S. Department of Education.

3. A brief description of the courses

We offer two courses oriented toward elementary teachers: Math 111/511 and Math 112/512. The first one focuses on arithmetic and the second on geometry. Each course has already been taught 14 times with an enrollment of 25 – 32 undergraduate students and 5 – 20 graduate students (practicing teachers). Three courses are oriented toward middle school teachers: Algebra with Geometry 1 and 2, Math 313/513 and Math 314/514, and Integrating Technology with Mathematics, Math 301/530. The first one has been taught 11 times, and the second and third have each been taught twice. Two courses are oriented toward high school: Calculus with Hands-on Applications, Math 316/516, and Math and Science with Technology, Math 315/515. The calculus course has been taught four times, and Science with Technology twice. The average enrollment in all these classes has been approximately 20 undergraduate and 5 graduate students.

These courses do not have any “formal” prerequisites. So, for example, some teachers teaching elementary grades have taken the calculus course. All courses are taught in a laboratory format (and not a lecture/ homework format), so most of the work is actually done in class.

Appropriate computer and calculator technology is used in each course. Students learn how to use simple four-operation calculators (TI-108) with early grade material, a scientific calculator (TI-34 II) with more advanced material, and graphing calculators (TI-84) in calculus and in science.

4. A partnership of undergraduates with practicing teachers

Practicing teachers who take the courses (or who have taken them before) act as mentors for future teachers. Undergraduate students regularly visit classrooms of their mentors (this is a course requirement in all seven of the courses described above); they observe, co-teach, or even teach alone under the supervision of their mentoring teachers, often using materials they have studied in the university class. The students are required to write about their observations from these classroom visits, and this integrates their work with their mentors with their work in the college classroom. This is a very popular feature of these courses. Future teachers have an opportunity to work under the supervision of their future colleagues, and most teachers like to have an extra pair of hands in their classrooms.

5. Development and distribution of materials used in the courses

Even very experienced teachers encounter serious difficulties when they try to transform the mathematical knowledge they have acquired in college classes into lesson plans that can be used in schools. So all materials that are presented in the courses we offer are organized into units, which also include rather detailed lesson plans. In the courses oriented toward the early grades, the course materials for one semester usually include 55 to 65 units. In courses for upper grades the number of units is smaller, 45 to 55. So each teacher or future teacher finishes a class with a large portfolio of usable lesson plans. These plans are rather generic and do not contain didactic advice, so each teacher has to make at least some adjustments, which are often significant, to match the material with the level of her/his students and the curricular goals of her/his school and school district. This format for the courses requires that we prepare almost all the material ourselves, one unit at a time. In our experience it has taken us at least two years to prepare material for one course. In preparing the material, collaboration with a school district is essential. We obtain our first feedback when new material is presented in a university class. If teachers see it as promising, they try it in their classrooms and provide us with information that allows us to rewrite and improve the unit that is being tested. (Most units are rewritten once or twice. And some are simply rejected after the first trial.)

For availability of the material see Appendix A.

6. Content of the material

Most units are built around a specific task, and not around one mathematical concept. For example, early elementary children may be given a map showing bugs and dots where they live, with a roundtrip path of straight segments through the dots. The task is to measure the length of

the path in cm and mm, and to draw shortcuts between homes and measure their lengths. Or a task may include the physical construction of an object that satisfies some specific requirements. For example, fifth grade school children may be asked to construct from poster board a cube having a volume of 50 cubic centimeters, and to check the correctness of their construction using a graduated cylinder and rice. Calculus students may be given a golf ball and asked to design a cone with smallest volume that the ball just fits into. So most tasks can be classified as hands-on applications of mathematics, and completing them may require a combination of knowledge and techniques from different domains of mathematics, for example, arithmetic and geometry, or geometry, algebra, and calculus.

Creating physical artifacts as a part of a mathematical task plays a very important role in both college and public school classrooms.

(1) They are highly motivating; they keep students' attention; and their completion is a tangible achievement.

(2) They are remembered well, even after quite long periods of time.

(3) They are engaging for students with very different levels of mathematical abilities and achievement, and they encourage students' collaboration.

(4) The students see by themselves whether they have succeeded or not; they do not need the authority of the teacher to know whether what they did is right or wrong.

But such tasks take a considerable amount of class time, and therefore they do not fit into the frantic pace of the work in classrooms driven by standardized test scores.

Paradoxically, this stress on physical, concrete applications requires that the mathematical concepts be presented in an abstract way. For example, in a typical calculus course, the integral is introduced as “the area between a curve and the x-axis”. Such a “concrete” definition is not acceptable when the integral is used to compute lengths, volumes and probabilities, when none of them is “an area”.

7. Evaluation of the project

As a college program, this course sequence is a success. The courses are popular, and their evaluation by students is uniformly high (average A, on a scale from F to A). We don't have enough data to evaluate its role in the professional development of teachers. We know that teachers who have taken our courses and are still in the school district give them high ranking and continue to use materials that were given to them, often years before. We have also had contact with a few former students who have become teachers, and they are using materials from portfolios they got as undergraduate students in our classes. But this is not enough to claim that this program has had any broader impact on teachers' professional development.

8. Research aspects of the project

Designing large amounts of material and testing it in classrooms involve several research techniques and extensive observations. Most of the conclusions we can derive are specific to the materials we develop and are only used to improve them. But some results can be of some interest to a broader community of people who are involved in mathematical education or the

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

psychology of mathematics. Appendix B provides a few references to the research that we and the teachers involved have presented at professional meetings.

References

- Burns, Marilyn (1993). *About Teaching Mathematics*. Sausalito, CA: Math Solutions.
- Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers*. Washington DC: CBMS.
- Garet, M.S., Porter, A.C., Desimone, L., Birman, B.F., & Yoon, K.S. (2001). What Makes Professional Development Effective? Results from a National Sample of Teachers. *American Educational Research Journal*, Vol. 38, No. 4 (winter).
- Killion, J. (2002). *Assessing impact: Evaluating staff development*. Oxford, OH: National Staff Development Council.
- Ma, Liping (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- National Advisory Panel (2008). *The final report of the National Advisory Panel*. Retrieved April 27, 2009 from <http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>.
- NCTM (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In Graham A. Jones (Ed). *Exploring probability in school*. Springer, pp. 171-190.
- Stevenson, H. & J. Stigler, *The Learning Gap, Why Our Schools Are Failing and What We Can Learn from Japanese and Chinese Education*, Paperback Reprint edition, Touchstone Books, January 1994.
- Stigler, J. & J. Hiebert (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*; Detroit: The Free Press.

Appendix A. Materials

website <http://www.math.nmsu.edu/~breakingaway>

- Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2004). *Breaking away from the math and science book: Creative projects for grades 3-12*. Lanham, MD: Rowman and Littlefield Publishing.
- Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2001). *Breaking away from the algebra and geometry book: Creative projects for grades K-8*. Lanham, MD: Rowman and Littlefield.

Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (1998, 2004). *Breaking away from the math book II: More creative projects for grades K-8*. Lanham, MD: Rowman and Littlefield.

Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (1995, 2004). *Breaking away from the math book: Creative projects for grades K-8*. Lanham, MD: Rowman and Littlefield.

Appendix B. Selected recent conference presentations and publications

- Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2008). Coordinating abstract, physical, and computational aspects of algebra in a single lesson. NCTM Research Pre-session, Salt Lake City, April 10.
- Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2008). A new algorithm for column addition. In DeBock, D., Sondergaard, B., Alfonso, B. and Cheng, C. Proceedings of ICME-II-Topic Study Group 10. Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic, 95-101.

Baggett, P., Ehrenfeucht, A., Jeffery, M., & Robles, L. (2008). An addition algorithm with lower cognitive load. 49th Annual Meeting, Psychonomic Society, Chicago, IL, Nov. 15.

Baggett, P., Ehrenfeucht, A., and Michalik, L. (2007). Fifth graders' learning about probability from experiments they perform. 48th Annual Meeting, Psychonomic Society, Long Beach, CA, Nov. 15-18.

Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2007). A new non-traditional university calculus course for teachers and future teachers. In M. Giannakaki (Ed.), *The Teacher and the Teacher Profession: Current Research and International Issues*. Athens: Athens Institute for Education and Research, pp. 21-30.

Baggett, P. & Ehrenfeucht, A. (2005). *Math and science*. In Marta Anaya and Claus Michelsen (Eds.). Relations between mathematics and other subjects of science or art. Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, pp. 20-25.

Les retours collectifs comme dispositif clé dans le développement de la modélisation chez les élèves : à propos de la résolution de problèmes de dénombrement en secondaire 1

Souleymane Barry

Université du Québec à Chicoutimi

Abstract: The analysis reported here is based in part on data from a doctoral research in which we principally studied resources mobilized by a teacher and researcher who worked together in devising, experimenting and reflecting upon teaching scenarios aimed at introducing grade 7 students to modeling. In this paper we focus on discussions periods by students on their emergent models after solving combinatorial problems. Our analysis highlights conditions conducive to the emergence in the classroom of a community of validation or a culture of modeling, as well as the potential of the approach developed in this research to help raise for students an awareness to issues related to modeling and combinatorics.

Introduction

Plusieurs recherches indiquent qu’avec des problèmes de dénombrement bien choisis il est possible de travailler avec les élèves, dès le primaire, des processus mathématiques fondamentaux tels la preuve, la modélisation, la généralisation (Glaymann & Varga, 1974; Powell, 2003, Sri-raman, 2004). Dans cette étude, nous avons élaboré une telle approche, en collaboration avec un enseignant du secondaire, visant le développement de la modélisation au moyen de problèmes de dénombrement. Cette approche est alternative dans la mesure où elle se démarque d’une concentration sur l’enseignement de modèles combinatoires explicites (tels les arrangements, les combinaisons, etc., avec lesquels les élèves ont beaucoup de difficultés), pour favoriser davantage une prise en compte des modèles spontanés construits par les élèves.

Cette recherche collaborative a fait l’objet d’une analyse des ressources mises à contribution dans la construction des situations et leur réalisation en classe (Barry, 2009). Nous nous centrons plus spécifiquement dans cette communication sur un des moments clé de l’exploitation en classe, central pour le développement d’une culture de modélisation en mathématiques, les retours collectifs sur les solutions des élèves.

1. Cadre théorique

La modélisation est un processus central en mathématiques (Burkhardt, 2006) comportant au moins deux phases importantes inter-reliées : une première phase de formulation au cours de laquelle les élèves analysent, structurent et transforment la situation à l’étude en un modèle, et ce, en fonction de leurs moyens «spontanés», «informels». Ces modèles qui sont des construits simplifiés d’une situation ont, selon le cas, une fonction descriptive, explicative, ou prédictive et, doivent être validés dans une autre phase dite de validation. Au besoin, plusieurs cycles de modélisation sont nécessaires pour permettre aux élèves d’améliorer, de raffiner, éventuellement de généraliser leurs modèles (des dessins, schémas, listes, formules, etc.). Dans notre perspective sur la modélisation, soit la modélisation émergente (Gravemeijer, 2007), l’accent est mis sur l’activité informelle des élèves à qui il faut donner l’opportunité de créer des «modèles sponta-

nés» et par la suite de les revisiter. Aussi, dans notre approche, l'accent est moins sur les solutions des élèves que sur leurs modèles qui au départ peuvent se révéler inappropriés pour résoudre convenablement un problème, mais qui finissent, après plusieurs « retouches », par être appropriés. En ce sens, il s'agit ici d'une autre façon d'envisager la résolution de problèmes, par approximation successive, les élèves n'ayant pas forcément d'un coup à trouver la solution d'un problème.

Afin que les élèves s'engagent dans une activité véritable de modélisation, deux enjeux sont particulièrement cruciaux, soit la production/ la formulation par les élèves de modèles et la validation de ces construits provisoires (leurs modèles informels).

Dans cette communication, nous nous attardons plus spécifiquement sur la validation par les élèves lors des retours collectifs ainsi que les stratégies d'intervention à mettre en place en lien avec ces retours. Nous appuyant sur Cobb, Perlwitz et Underwood (1994) qui parlent de « communauté de validation », nous considérons que les élèves sont des pairs qui se valident les uns les autres, se complètent au besoin. Dans une telle optique, les retours collectifs jouent un rôle important en ce sens qu'ils permettent aux élèves de collaborer ensemble à l'émergence de cette communauté de validation s'appuyant sur ce que Tanner et Jones (1994) désignent par une « culture de modélisation », c'est-à-dire un ensemble de règles de fonctionnement négociées, partagées et facilitant le remue-méninge initial, l'expression de conjectures, le recours libre mais justifié à différentes représentations, la délibération, la validation par les pairs, etc.

2. Repères méthodologiques

Nous avons cherché à documenter, de l'intérieur d'une démarche conjointe d'élaboration de scénarios visant le développement de la modélisation en secondaire 1, les apports respectifs du chercheur et de l'enseignant sur les problèmes de dénombrement choisis, le processus de modélisation par les élèves et l'enseignement/ l'exploitation en classe de ces scénarios. Cette recherche collaborative (Desgagné, 1997) a impliqué le chercheur et un enseignant de mathématique au secondaire qui ont eu à élaborer et expérimenter dans deux classes de secondaire 1 d'une école de la région de Montréal deux scénarios successifs. Pour chacun des scénarios, les élèves avaient dans un premier temps à travailler en binômes sur la résolution de problèmes de dénombrement et échanger avec une équipe de leur choix puis, dans un deuxième temps, à exposer et justifier leurs modèles et solutions lors de plénières, et ainsi de suite. Toutes les séances en classe ont fait l'objet d'enregistrements vidéos. La démarche de recherche a pris la forme de rencontres réflexives d'élaboration des scénarios et de retour sur les scénarios expérimentés (des rencontres de planification, de bilans et des récits d'expérimentation commentés par le chercheur puis par l'enseignant). Tous ces verbatims des rencontres et ces récits commentés ont fait l'objet d'une analyse par théorisation ancrée.

3. Autour de l'analyse des retours collectifs

En partant d'une réflexion commune sur les deux phases du processus de modélisation, nous sommes penchés dès l'entame de cette recherche sur leur scénarisation en classe. C'est ainsi qu'en lien avec la phase de validation, des « plénières » ont été privilégiées pour permettre aux élèves de partager, revisiter, raffiner leurs modèles. Dans ce qui suit nous analysons ces « plénières » ou retours collectifs sous l'angle double du développement du processus de modéli-

sation par les élèves et de l’enseignement visant le développement de la modélisation.

3.1. Analyse sous l’angle du développement de la modélisation par les élèves

Les plénières ont permis de mettre en évidence une diversité de modèles créés par les élèves. Pour cette communication nous avons ciblé quelques modèles spontanés créés par les élèves et qui sont en lien avec le dernier problème du premier scénario qu’ils avaient à résoudre et qui s’énonce ainsi : dans un quadrillage 4×4 on place un pion dans la case de départ à l’extrémité gauche inférieure et on veut se rendre à la case située à l’extrémité droite supérieure. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d’une case vers la droite ou d’une case vers le haut. *Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case finale?* Pour modéliser les différents chemins, les élèves ont inventé différents modèles : des listes (de nombres correspondant aux cases sur le quadrillage numéroté, de déplacements codés sous forme de lettres, par exemple D et H), des représentations sous forme de lignes colorées ou orientées, des arbres de choix non réguliers, etc. Ces modèles spontanés prennent en compte des caractéristiques sous-jacentes aux chemins (une suite de 2 mouvements à gauche ou à droite avec possibilité de répétition). Surtout, ces modèles nous renseignent sur différentes conceptualisations par les élèves des «arrangements avec répétitions». Par ailleurs, les procédures utilisées par les élèves indiquent différentes méthodes de dénombrement de tous les chemins possibles, par exemple trouver une formule de dénombrement, dresser un arbre de choix, énumérer tous les cas possibles, ne considérer que les chemins au-dessus d’une diagonale. Nous pouvons donc, à la lumière de ce qui précède, parler ici de l’émergence d’une problématique combinatoire vue comme conceptualisations par les élèves du modèle combinatoire des arrangements et, tentatives de systématisation du dénombrement de tous les cas possibles.

En outre, avant de clore les dernières plénières, nous avons interpellé les élèves sur la façon dont ils ont fonctionné (voulant dire par là l’approche centrée sur la modélisation). Ils diront qu’ils ont aimé : chercher en équipe (ainsi ils peuvent s’assurer de ce qu’ils énumèrent, essayer différentes stratégies), trouver ou découvrir par eux-mêmes, échanger et valider avec d’autres, découvrir d’autres idées ou façons de faire dont on peut se servir avec d’autres problèmes. Ici, les réponses fournies par les élèves montrent que ces derniers valorisent le fait d’être « créateurs » de modèles, l’importance de la collaboration avec les pairs pour ce qui est de l’exigeante phase de validation. Nous avons là, sans doute, des indices de ce qu’ils retiennent de l’approche visant le développement de la modélisation. Une problématique de modélisation a émergé, avec une certaine prise de conscience par les élèves de quelques étapes du processus de modélisation.

3.2. Analyse sous l’angle de l’enseignement : quelques conditions favorisant l’émergence d’une communauté de validation, d’une culture de modélisation

Dans une approche comme la nôtre centrée sur la modélisation, les échanges entre élèves sur leurs modèles ont surtout pour finalité d’amener les uns et les autres à améliorer autant que possible leurs modèles et solutions. Il importe donc d’accorder la même importance à tous les modèles, chacun représentant une voie d’accès à la solution qui n’est pas une fin en soi. Cette perspective sur «la solution» montre que la modélisation est une autre façon de voir la résolution de problèmes vue ici comme un processus au terme duquel l’important est moins les solutions que les modèles construits (Lesh & Harel, 2003). Soulignons à cet égard qu’un enjeu au

cœur de la négociation entre enseignant et chercheur est la pertinence ou non de distinguer lors de ces retours entre «bonnes» et «mauvaises» solutions. Nous avons dû convenir de ne pas faire de tri sur cette base, l'intérêt pour nous devant être porté sur les réorganisations des modèles, les liens entre modèles, leur évolution. Le défi pour les élèves est alors de confronter leurs modèles sans s'affronter, par exemple en témoignant d'une capacité à valoriser tout modèle exposé en classe, même quand il est loin de mener à la bonne réponse.

Les considérations qui précèdent et l'analyse de l'animation en classe des retours, surtout au début, met en évidence l'importance des routines d'échanges permettant d'installer et d'entretenir un climat relationnel propice à des échanges sereins et à la collaboration (Leinhardt, 1987). De telles routines, pour reprendre la typologie de Leinhardt (1987), ne portent pas uniquement sur les échanges, mais aussi sur la gestion de classe ainsi que sur l'appui à apporter aux élèves dans des activités visant le développement de la modélisation. Un autre aspect important qui ressort de l'analyse de ces retours est la nécessité d'une dévolution de la validation. En effet, il revient aux élèves de valider entre eux leurs modèles et, à cet égard, un des défis de l'animation est de décliner adéquatement les requêtes de validation que les élèves formulent à répétition au début à l'endroit de l'enseignant avant de se tourner vers la communauté de validation qu'ils forment. Comme nous pouvons le constater, cette attente, que les élèves formulent de requêtes de validation, n'est pas la seule qu'on peut légitimement avoir à leur endroit dans une approche visant le développement de la modélisation. L'analyse de l'évolution des élèves eu égard à ces attentes, entre le premier et le deuxième scénario, nous a révélée l'importance de «routiniser» les attentes liées au développement du processus de modélisation lors des retours (mais également dans les phases de recherche).

4. Conclusion

À la lumière de ce qui précède, les périodes de retours par les élèves sur leurs modèles apparaissent comme un dispositif clé dans le développement de la modélisation. En effet, ils permettent d'installer des routines d'échange et d'appui aux activités de modélisation et, d'amener les élèves à partager une culture de modélisation. Aussi ces retours sont un levier approprié d'aide à l'émergence d'une problématique de dénombrement en ce sens qu'ils permettent d'amorcer une prise de conscience, une réflexion sur cette variété particulière de problèmes que sont les problèmes de dénombrement. En effet, avant de clore les dernières plénières, nous avons aussi interpellé les élèves sur les liens qu'ils voyaient entre les problèmes. Certains élèves y voyaient des «airs de familles» entre les problèmes : des problèmes bâtis autour d'un même modèle comme la «suite de Fibonacci»; des problèmes qui sont d'un certain type (des problèmes autour des possibilités, des problèmes d'énumération, qu'il faut énumérer, puis trouver la logique, la règle ou la régularité par la suite). Ce qui est très important, c'est que plusieurs élèves ont pu percevoir la nécessité d'une systématisation dans le dénombrement avec de tels problèmes. Nous avons donc là des indices indiquant que ces retours constituent, sans doute, une voie prometteuse pour tous ceux qui sont intéressés par une initiation significative au dénombrement, à l'élémentaire et au secondaire.

Références

- Barry, S. (2009). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1*. Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 178- 195.
- Cobb, P., Perlwitz, M., et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 20, 41-62.
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 23 (2), 371-393.
- Glaymann, M. et Varga, T. (1975). *Les probabilités à l'école*. Lyon: CDIRIC
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *ICMI study 14: Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108), Springer.
- Leinhardt, G., Weldman, C., et Hammond, K. M. (1987). Introduction and integration of classroom routines by expert teachers. *Curriculum inquiry*, 17(2), 135-176.
- Lesh, R. et Harel, G. (2003). Problem solving, modeling and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2&3), 157-189.
- Powell, A. B. (2003). "So let's prove it! » *Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task*. Thèse de doctorat inédit, Université de Rutgers, New Jersey.
- Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, unframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 205-222.
- Tanner, H. et Jones, S. (1994). Using peer and self-assessment to develop modelling skills with students aged 11 to 16: a socio-constructive view. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 413-431.

La collaboration enseignants/chercheurs et leur développement professionnel respectifs¹

Lucie DeBlois, Université Laval, Québec

Résumé L’objectif de la recherche visait d’une part, à étudier un processus permettant aux enseignants de vivre le passage de leurs pratiques vers une théorisation de cette dernière, puis de cette théorisation vers de nouvelles pratiques. Réalisée en collaboration avec 3 groupes d’enseignants du secondaire (n=17), 6 séminaires pour chacun des trois groupes ont permis l’étude de 18 tâches différentes. Nos résultats montrent d’une part, 4 formes de retombées pour les enseignants. D’autre part, pour la chercheuse il est devenu possible de documenter les préoccupations des enseignants et d’approfondir les composantes de la méthodologie mises en place.

1. Problématique

Dans le contexte des réformes actuelles, les enseignants sont invités à mettre l’accent sur des interventions suscitant la mise en relation des connaissances des élèves et la nécessité, pour les élèves, de modifier ces connaissances pour répondre aux situations et aux problèmes posées. Les élèves, quant à eux, sont invités à «oser» proposer des solutions qui ne leur ont parfois pas été enseignées explicitement. L’erreur devient alors inévitablement *une des composantes* du processus d’apprentissage. Il importe donc de doter les enseignants d’outils conceptuels qui, au-delà des performances de leurs élèves, permettent de cerner les *processus cognitifs mis en œuvre*. Comment contribuer à leur perfectionnement professionnel?

Bauersfeld (1994) comme Bednarz (2000) rappellent l’importance du contexte de la pratique lorsqu’il s’agit de susciter la restructuration d’un répertoire d’interventions chez des enseignants. Par exemple, les travaux de Giroux et René de Cotret (2004) précisent comment les interactions langagières favorisent notamment la reconnaissance de l’activité mathématique de l’élève, le rejet par l’élève d’une connaissance et l’utilisation de l’erreur par l’enseignant. Le modèle d’interprétation des activités cognitives des élèves a permis d’identifier différentes composantes au moment où les élèves produisent une solution (DeBlois, 2003). Toutefois, ce modèle développé par un groupe d’orthopédagogues et la chercheuse semble moins pertinent aux enseignants auxquels il a été présenté. Le postulat posé en filigrane de cette recherche veut que l’interprétation des difficultés des élèves par l’enseignant joue un rôle fondamental dans le choix de ses interventions. Notre étude pose comme hypothèse qu’un processus pratique-théorie-pratique, dans lequel les enseignants interprètent les difficultés rencontrées par les élèves dans leurs pratiques de la classe, élaborent un modèle explicatif de ces difficultés d’élèves (une théorisation), puis précisent de nouvelles pratiques, aura une influence sur leur développement professionnel. Cette présentation vise à discuter une forme de collaboration entre enseignants et chercheurs, tout en débordant du cadre de la recherche action, et à reconnaître les retombées de cette forme de collaboration.

¹ Cette recherche a été rendue possible grâce à la contribution du conseil de recherche des sciences humaines du Canada.

2. Méthode

Une méthode de recherche collaborative a été privilégiée puisqu’il s’agissait d’étudier *comment* se développent différents processus (Desgagnés, 2007) : étude de la production d’erreurs par leurs élèves, élaboration d’un modèle d’interprétation et d’intervention, expérimentation de ce modèle par les enseignants dans leur classe respective, étude du développement professionnel des enseignants. Inspiré par le cadre théorique multiréférentiel (Hébrard, 1996), des séminaires semi-structurés ont été mis sur pied. La chercheuse a proposée un premier type de séminaire qui invitait à réfléchir sur des productions d’élèves selon trois étapes : 1) un *récit* dans lequel l’émergence de l’erreur était située dans son contexte, 2) *l’analyse* nécessitant la mise en place des cadres théoriques retenus par la chercheuse, les résultats de certaines recherches afin de répondre aux questions des enseignants à propos des erreurs de leurs élèves (sens de l’égalité, etc.) et la prise en compte du cadre de référence des intervenants scolaires (même s’il est implicite), 3) la *synthèse* dans laquelle il s’agissait de dégager les éléments à retenir. À la suite de quatre séminaires, les enseignants ont dégagé un modèle permettant de poser une variété d’hypothèses pour interpréter les erreurs de leurs élèves et une variété d’interventions.

Un deuxième type de séminaire a ensuite été mis en place afin de valider le modèle coconstruit par les enseignants et la chercheuse, séminaire précédé d’expérimentations réalisées en classe. Les questions discutées, à ce moment, concernaient l’influence du modèle coconstruit, la compréhension de la source des erreurs, le type d’interaction suscité par ce modèle, les particularités de l’intervention (rôle joué par l’enseignant et par l’élève, etc.). Chacun des séminaires a été enregistré puis transcrit en verbatim. Ces derniers ont été analysés non seulement en fonction de leurs interprétations à l’égard des erreurs de leurs élèves et des interventions qu’ils prévoient réaliser, mais aussi selon leur genèse : les préoccupations des enseignants, les milieux auxquels ils sont sensibles.

3. Résultats et discussion

3.1 Résultats pour les enseignants

Trois groupes d’enseignants ont pu élaborer un modèle d’interprétation et d’intervention, bien que différent selon les groupes. Le tableau 1 présente la «théorisation» réalisée par un des trois groupes d’enseignants à la suite de séminaires portant sur un problème géométrique (cercle, périmètre vs aire), la réduction d’expressions algébriques, un problème statistique, un problème ayant une structure multiplicative.

Tableau 1 : Modèle d'interprétation et d'intervention coconstruit par le groupe 3

Catégorisation Groupe 3	
Interprétation	Intervention
• Est-ce qu'il y a une régularité dans les erreurs – Fait-elle référence à une règle connue – Fait-elle référence à une forme d'écriture connue – Y a-t-il une erreur liée aux symboles – Est-ce qu'il manque des données pour arriver à une règle connue • Est-elle capable d'identifier et d'utiliser les notions en jeu – Contamination par un nouvel algorithme – Persistance (automatisation) – organisation des connaissances • Langage – Compréhension de la tâche – Vocabulaire (lié à la matière ou à la vie courante, à l'expérience) • Disponibilité à l'apprentissage – Emotions (blocage affectif, déséquilibre affectif) – Motivation (engagement) – Prendre des risques • Méthode de travail – Absence ou présence de stratégies (mémoire...) – Y a-t-il un problème avec les instruments	• Questionner l'élève pour valider nos hypothèses • Retour en grand groupe dans le but de provoquer l'erreur • Susciter un conflit cognitif (par des contre-exemples, par des validations, par une bonne réponse de l'élève ...) • Faire construire un schéma pour organiser les connaissances • Rendre explicite l'implicite • Trouver un fil conducteur qui permet de généraliser et consolider une variété de situations • Associer des élèves en difficultés avec des élèves forts • Donner des outils de supports et de stratégies

Les raisons de certaines catégories ont été négociées autour de déductions expliquant l'origine des erreurs de leurs élèves, créant par la même occasion des relations non seulement entre les interprétations possibles, mais aussi entre les interprétations et les interventions prévues. Cette théorisation a été expérimentée et suivie du deuxième type de séminaire.

Les analyses de ce deuxième séminaire mettent en lumière 4 formes de retombée pour les 3 groupes d'enseignants qui ont participé au processus. D'abord, l'expérimentation du modèle d'interprétation et d'intervention coconstruit semble conduire à trois grands types de changement : l'objet à évaluer, les catégories d'interventions et l'émergence de marges de manœuvre. Ainsi, les interprétations transitent d'un manque d'attention des élèves, vers les procédures utilisées par ces derniers, puis sur le sens des procédures. Certaines catégories d'intervention sont validées (proposer des contre-exemples), d'autres sont transformées (demander à l'élève d'expliquer la solution proposée). Une deuxième forme de retombée semble se développer sous l'influence de la pratique. En effet, la nature des interactions enseignant/élève conduit une enseignante à expliquer comment ses élèves, ayant le sentiment de vivre une expérience commune avec l'enseignant, ont diminué le nombre de comportements inappropriés. Une troisième forme de retombée émerge de l'expérience de la «théorisation» de leurs pratiques. Celle-ci semble conduire à développer une certaine «vigilance» par rapport aux multiples interprétations pour élargir les possibilités d'intervention, attestant d'une prise de conscience par rapport à ce qu'ils appellent « le piège des interprétations » (DeBlois, 2008c; DeBlois et Roditi, 2007). Enfin, sous l'influence de leur intérêt professionnel, une quatrième retombée conduit à développer une projection de leurs actions professionnelles.

3.2 Résultats pour la chercheure

Nos analyses conduisent à mieux cerner l'origine des interprétations des enseignants à l'égard des erreurs de leurs élèves. Ainsi, il a été possible de documenter, entre autres, les pré-occupations développées par les enseignants lorsqu'ils étudient les productions de leurs élèves. À cet effet, nous avons pu observer comment la description de la production de l'élève, où sont

étudiés les signes laissés par l'élève sur sa copie, conduit le plus souvent à identifier, d'abord, l'écart entre les résultats obtenus et les résultats attendus. Cette description permet de présenter le statut scolaire de l'élève en précisant ses résultats habituels qu'inhabituels, ses habitudes de réussite ou sa grande quantité d'échecs. Enfin, le rappel des réactions des élèves, non seulement en mathématiques mais aussi en français, conduit à reconnaître que certains élèves considèrent certaines questions comme des pièges.

De nouvelles préoccupations émergent. C'est ainsi que le fait de s'attarder à la consigne a conduit les enseignants à identifier les caractéristiques de la tâche dont la formulation de la question, les éléments contribuant à l'interprétation par les élèves et les implicites de la tâche. Certaines composantes de l'enseignement offert sont relevées. L'étude du contexte dans lequel a été réalisée la production conduit à des discussions sur les activités proposées en classe, sur l'enseignement offert et sur la précision des demandes de l'enseignant et sur l'évaluation des programmes d'études mathématique.

L'incompréhension des enseignants devient enfin un levier qui rend l'analyse nécessaire. En cherchant ce que l'élève a compris de la situation, les enseignants étudient les caractéristiques de l'erreur et reconnaissent les cas où il y a régularité de l'erreur. Ils identifient les connaissances explicites de l'élève (algèbre, les savoirs des programmes d'études, les stratégies de lecture) et l'absence de connaissances (ne savent plus la formule géométrique). Ils étudient ensuite non seulement l'erreur, mais la production complète, ce qui contribue à reconnaître la réussite pour d'autres questions, puis à s'attarder à la démarche et au processus de l'élève. Enfin, une discussion portant sur le but de l'élève ou celui de l'enseignant met en lumière les rôles que l'élève s'attribue compte tenu des modalités d'enseignement (classe spécialisée vs en classe ordinaire), puis le sentiment d'insécurité de l'élève et les contraintes des enseignants.

C'est donc dans le développement d'une variété de préoccupations qu'il devient possible aux enseignants de développer une nouvelle sensibilité. Ainsi, nous avons pu observer comment des moments d'interactions intenses ont modifié l'interprétation des enseignants pour comprendre le processus de l'élève, ce qui a eu un effet sur les interventions prévues (Perrin-Glorian et al, 2008). Les analyses conduisent donc à identifier des «milieux» auxquels sont sensibles les enseignants au moment d'interpréter les productions des élèves. Elles conduisent de plus à reconnaître comment ces milieux deviennent ensuite des préoccupations qui alimentent les interprétations et les interventions, favorisant le développement de la formation professionnelle.

Du point de vue méthodologique, cette recherche contribue, à apporter des précisions afin de favoriser la «dévolution» des enseignants à l'intérieur d'un projet de ce type. Ainsi, il semble qu'une discussion des productions des élèves «en présence» soit préférable au «souvenir» des productions des élèves. En effet, le souvenir des erreurs des élèves ne permet pas de contextualiser la production en fonction des notions vues au préalable en classe ou de l'histoire de la classe. En outre, les difficultés de la problématisation d'un phénomène surgissent. En effet, l'écart entre les préoccupations des partenaires dans le temps risquent de conduire les enseignants à se centrer sur la relation contenu-tâches alors que la chercheuse est centrée sur les interactions tâches-élève. Cet écart aura inévitablement une influence sur les attentes des partenaires.

4. Conclusion

Située dans le contexte d'un renouveau pédagogique qui conduit à observer davantage d'erreurs chez leurs élèves, les enseignants sentaient la nécessité de briser l'isolement dans lequel ils se sentaient. Le processus dans lequel se sont développés les interactions entre les enseignants et la chercheuse ont permis d'identifier l'importance complémentaire de l'expérience de la théorisation et de l'expérimentation du modèle coconstruit, ce qui a contribué à alimenter leur intérêt et à nouer des interactions différentes avec leurs élèves. La théorie développée, à partir des discussions sur les problèmes de pratiques et des théories présentées a permis non seulement de répondre à une préoccupation (Posner, 1982), mais d'élargir le spectre des préoccupations et de développer leur sensibilité à de nouveaux milieux. Cette recherche conduit à reconnaître l'importance de la compréhension des enjeux de cette recherche par les enseignants pour documenter la question de la place de la théorie dans leur développement professionnel.

Références

- Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, XX(1), 175-198.
- Bednarz, N. (2000). *Formation continue des enseignants en mathématiques: une nécessaire prise en compte du contexte*, in *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, p. Blouin and L. Gattuso, Editors. Modulo: Mont-Royal. p. 61-78.
- DeBlois, L. (2003). Préparer à intervenir auprès des élèves en interprétant leurs productions : une piste... *Éducation et Francophonie*, XXXI (2).
- DeBlois L., Squalli Hassan (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 50 (2). Kluwer Academic Publishers. 212-237. <http://www.kluweronline.com/issn/0013-1954>
- Desgagné, S. (2007). *Le défi de coproduction de «savoir» en recherche collaborative. autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante*, in *La recherche participative. Multiples regards.*, M. Anadon, Editor. Presses de l'université du Québec: Québec. p. 90-121.
- Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. Numéro thématique: Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sous la direction de G. Lemoyne. *Revue des Sciences de l'Éducation* 30 (2), 303-327.
- Hébrard, P. (1996). Est-ce qu'on peut faire ça tout seul ? *Cahiers pédagogiques*, 346, 31.
- Perrin-Glorian M-J., DeBlois, L & Robert A (2008) Studies on individual in-service teachers' professional growth. *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, and Networks.* /Editor, Konrad Krainer. Sense Publishers. 35-63

Designing intercultural instructional tasks for kindergarten classrooms with pre-service teachers

Sonia Kafoussi
University of the Aegean

Résumé

Le but de cette étude est l'investigation de points de vue d'étudiants-instituteurs d'une maternelle par rapport à des activités interculturelles et comment leurs points de vue peuvent être influencés par leur participation à la réalisation des activités interculturelles dans l'école maternelle. Trente étudiants-instituteurs d'une maternelle ont participé à cette recherche. Les résultats de l'étude ont montré que les points de vue des étudiants ont été considérablement influencés.

Introduction

Nowadays it is widely accepted that the basic goal of mathematics education is that of meeting the needs of all students, as mathematics have been considered the catalyst for the active and productive participation of citizens in our technological society (English, 2002; Schoenfeld, 2002). The attainment of this goal could start from kindergarten mathematics education (Clements & Sarama, 2004).

On the other hand, mathematics classroom is “an instructional system of interrelated elements” influenced by diverse factors (Cobb & Jackson, 2008). Some of these factors are related to the fact that contemporary classroom is a multicultural one. Especially, in our country this fact was emerged in 90's. So, the goal that the instructional setting has to be fruitful for all the students, means that it has to provide equal learning opportunities for students of dominant and non-dominant groups.

Many researches have shown that students of non-dominant groups have lower performance in mathematics than the students of dominant groups, although there is some evidence that reform curricula can narrow the performance gap between these groups (Schoenfeld, 2002). A crucial question today is how mathematics education might be organized in order to support all students' engagement in mathematics learning with equity. This question is related, among other things, to the quality of mathematical tasks as well as the quality of teachers' practices to provide social and intellectual support to particular groups of students (Cobb & Jackson, 2008). As a consequence the effort of mathematics teachers for the design and the realization of instructional tasks in mathematics classrooms becomes more complex, as it has to take into account cognitive, social, affective and motivational factors that students from different communities bring to school.

Towards this effort many researchers have emphasized that mathematical tasks could be designed in a way that they support the respect and the acceptance of different cultures of students as something “normal” (Coelho, 1998). Moreover, it has been mentioned that: “Within the democratic classroom children should see themselves in the curriculum and link mathematics to their everyday lives...” (p. 24, Malloy, 2002). Everyday lives of children are not the same. On the other hand, students should have the opportunity to recognize and to discuss mathematical tasks that they are connected with their living culture. This fact could be function as a motive

for participation and furthermore it allows the familiarization of all students with the existence of different cultures.

However, if the goal of mathematical proficiency for all students is to be reached, teachers need a lot of support (Adler et al., 2005). This paper concerns a part of a broader study which aims to make sensitive pre-service kindergartens teachers to organize mathematical tasks for contemporary multicultural classrooms. Our research questions were the following: a) What are the beliefs of pre-service kindergarten teachers about intercultural² tasks? b) How do the engagement of pre-service teachers to the design and realization of intercultural tasks in kindergarten classrooms influence their beliefs?

Method

In this study 30 pre-service kindergarten teachers participated. The study was realized during their training in a course at the University from October 2008– January 2009.

At the first phase, the pre-service teachers completed a questionnaire about their beliefs for intercultural tasks. The questionnaire concluded three open questions, that they concerned with: a) the goals of intercultural tasks in education, b) the elements that they could help them to design intercultural mathematical tasks and c) the construction of a scenario for a mathematics kindergarten classroom where there were children from two different countries.

At the second phase, the pre-service teachers organized in six groups. Each group designed and realized two mathematical tasks in a kindergarten school. The schools that they were selected had a great number of children from different countries. The tasks were related to mathematical topics that children of preschool age could discuss (Clements & Sarama, 2004). All the teaching sessions were tape-recorded.

In order to record the cultural background of the kindergartens' children in each class, a questionnaire was given to the kindergarten's teachers of these classrooms as well as to the parents of the non-dominant groups of children. The former concluded questions about intercultural tasks, the synthesis of his/her class (nationality of the children) and the level of language proficiency for the children of non-dominant groups. The latter concluded questions about parents' beliefs for kindergarten school as well as their values and beliefs about mathematics education. All the lessons of the pre-service teachers in the kindergarten schools were tape-recorded.

At the third phase, the pre-service kindergarten teachers completed the same questionnaire about their beliefs for intercultural tasks.

Results

The pre-service teachers' teachers beliefs about intercultural tasks, at the first phase of this study, are presented below.

Many pre-service teachers mentioned that the main goal of these tasks in education is the “smooth incorporation of children of non-dominant groups in society”. In the following table (Table 1), we are presenting how this general statement was interpreted by the teachers.

² In our country we use the term “intercultural” education for the purposes that they are described in this paper. However, other terms have been used in different counties in order to describe the same goals as “antiracist” education (Coelho, 1998) or “democratic” education (Malloy, 2002).

Goals	Number
Respect and acceptance of people of different cultures	17
Knowledge of different cultures	13
Equal opportunities for learning	9
Cooperation among children	9
No relative answer	1

Table 1.

As it is obvious on the above table, the main interpretation of the pre-service teachers' about this goal was the avoidance of racism, by respecting the culture of children from different countries. However, for many of them, this interpretation was not connected with the equal participation of all children during mathematical activities in a classroom. Only nine teachers mentioned that these children have to feel that they can communicate or/and cooperate equally with the other members of the classroom in a familiar environment.

About the elements that they could help the pre-service teachers to design intercultural mathematical tasks, their answers are presented in the table 2.

Elements	Number
Knowledge of children's country	27
Children's mathematical informal knowledge	8
Children's language	3
Material from different cultures	2
Parents' beliefs about mathematics	1
No relative answer	1

Table 2.

The above table shows that the prominent element for the pre-service teachers was the knowledge of the children's country in a class in order to study the different cultures, as many of them mentioned. The issue of language did not mentioned by the majority of them. This is maybe a consequence of the dominant belief that mathematics is a universal language.

The pre-service teachers answers about the construction of a scenario for a mathematics kindergarten classroom with children from two different countries were categorized in four distinct types (Table 3).

Types of Scenarios	Number
Scenarios incorporated cultural elements from both countries	14
Scenarios focused on friendship and cooperation	6
Scenarios for the development of discussion about racism	2
Scenarios for the “other” country	1
No relative answer	7

Table 3.

In the first category the proposed scenarios concerned the following: Construction of sets with customs of the two countries (4), games with coins from these countries (3), a story with two

friends (one from each country) that they visit places, like restaurants etc., in each country (2), shopping concerning products from both countries (1), dances (1), maps (1), materials (1), animals (1) from both countries. The problem with these tasks was that they were focused only on cultural elements from the countries from which the hypothesized kindergarten children came from. This finding shows that in the pre-service teachers' mind an intercultural task is only connected with the specific classroom culture.

In the second category, the scenarios concerned stories in which two puppets or friends from both countries posed mathematical problems (3), games where the children had to be divided in groups from both countries in order to cooperate to solve the problem (2) or a story describing the friendship of “different” geometrical shapes (1). For this group of pre-service teachers the basic message of their task was the promotion of cooperation between the two groups of children.

In the third category, two teachers presented stories that they concluded elements of racism about animals in order to provoke a discussion about racism. Finally, one teacher suggested the reading of a fairy from the “other” country and seven teachers proposed mathematical activities without a scenario or the inverse.

At the second phase, the pre-service teachers designed and realized two mathematical tasks in a kindergarten school. Some examples of these tasks are the following: reading a book with recipes from different countries and comparison of the quantities of the different materials that they used (e.g. How many materials does the first recipe need? Which recipe does it need more sugar?), discussing about the Olympic Games and the flags of different countries (e.g. Which geometrical shapes does every flag have?, classification of the flags according to their shapes), discussing about the solid shapes through different houses and monuments from all the world, discussing about the different arithmetical symbols that the people used during the passage of time.

Due to the limits of the presentation we will briefly discuss the final results of the third phase of this study about the influence that the design and realization of intercultural mathematical tasks had for the pre-service teachers. The pre-service teachers mainly shifted the goals of the tasks to the knowledge of different cultures and the equal opportunities for learning (see table 1 above). Moreover, there was a significant change in their beliefs about the elements that they could help them to design an intercultural activity. Children's mathematical informal knowledge, the issue of language as well as the personal cultural backgrounds of children from other countries (how many years they have been in the country of reception, elements about their family, their interests etc.) were characterized of significant importance for them. Finally, many of them described scenarios that incorporated cultural elements from different countries.

Discussion

The results of this study showed that the engagement of pre-service teachers to the design and realization of intercultural tasks in real kindergarten classrooms influenced their beliefs about the role of these tasks and seemed to make them sensitive of the complexity of the learning and teaching mathematics in contemporary kindergarten schools.

However, the issue of democracy in mathematics education is very complex and needs a lot of further research. Teachers, students and parents have to collaborate in order to attain the major

Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

goal of education, that is educated citizens that they are able to use mathematics in order to analyze and prevent social inequalities.

References

- Adler, J. , Ball, D., Krainer, K. , Lin, F-L. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field : researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381
- Clements, H. D. & Sarama, J. (Eds.) (2004). *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Cobb, P. & Jackson, K.(2008). The consequences of experimentalism in formulating recommendations for policy and practice in Mathematics Education. *Educational Researcher*, 37(9), 573-581.
- Coelho, E. (1998). *Teaching and Learning in multicultural schools*. Multilingual Matters Ltd
- English, L. (2002). Priority themes and issues in international research in Mathematics Education. In L. English (Ed.), *International Research in Mathematics Education* (pp. 3-15). LEA.
- Malloy, C. (2002). Democratic access to mathematics through democratic education: an introduction. In L. English (Ed.), *International Research in Mathematics Education* (pp. 17-25). LEA.
- Schoenfeld, A.H. (2002). Making mathematics work for all children: issues of standards, testing and equity. *Educational Researcher*, 31(1), 13-25.

L’activité mathématique comme une manière d’être dans le monde: considérations éthiques sur les transactions enseignant-élève

Jean-François Maheux et Jennifer S. Thom
University of Victoria

Research on mathematical activity brings attention to the importance of a growing number of its aspect, one of which, this paper wants to argue, is the ethical dimension of teacher-student transactions. In making the argument, I take mathematical activity as a “way of being in the world” consistent with the socio-cultural approach in which student *become* mathematical as then become part of practices that, in turn, become part of them. Drawing on an episode collected in the course of a participatory research involving a teacher and her second grade students, I conduct a transactional analysis on a classroom conversation in geometry, in which took part a researcher, the teacher, and a student. The analysis describes two different ways of being in the world in/trough mathematical activity. In one, a subjective-descriptive perspective is brought forth by the teacher-student transactions, while in the other, we recognize a more directive and abstract practice of mathematical activity. Turning to philosopher’s Emmanuel Levinas understanding of the ethical in terms of the experience of the otherness of the other, I then discuss the how the two approaches give different opportunities for the students to contribute in the mathematical activity, and receive those contributions differently. I conclude with a brief opening to the teacher-researcher collaboration and the special interest for research this particular study highlights.

0. En guise d’introduction

Dans le cours de notre présente recherche sur le rôle du corps dans l’activité mathématique et la dimension corporelle de la connaissance, nous avons travaillé avec différentes enseignantes et leurs élèves de première, deuxième et troisième année autour de la géométrie des solides. Je me concentre ici sur une partie du travail accompli avec une enseignante, Tara, et m’intéresse à ce que l’on peut observer de son travail avec Jennifer, la chercheuse principale à l’origine de ce projet, lors de la réalisation en classe des activités qu’elle ont préparé ensemble.

L’un des aspects les moins explorés associés à la théorie enactiviste de la connaissance (on parle en anglais de *enactivism* et de *embodied knowing*), est sa dimension éthique. Cette dimension est pourtant de première importance, comme Maturana et Varela, pionniers de cette approche du point de vue biologique, le notent à quelque page de la fin de leur ouvrage phare :

Every act in language brings forth a word created with others in the act of coexistence which gives rise to what is human. Thus every human act has an ethical meaning, because it is an act of constitution of the human world. This linkage of human to human is, in the final analysis, the groundwork of all ethics as a reflection of the legitimacy of the presence of the others. (Maturana & Varela, 1998, p. 247)

Ainsi, tout acte, et en particulier tout acte de langage, a une signification éthique en ce qu’il est constitutif du monde humain, du lien d’une personne à l’autre et de la légitimité de sa présence. C’est à partir de ces prémisses que je développe la présente étude, examinant l’activité mathématique comme une manière « d’être dans le monde » au niveau des transactions ensei-

gnant-élève au cœur même de l’activité mathématique de la classe, et en développe une réflexion sur la dimension éthique.

1. Faire des mathématiques et être dans le monde

C’est au philosophe Martin Heidegger (1962) que l’on doit d’abord l’idée de penser la personne comme un “être-dans-le-monde”. Cette idée, puissante, veut nous rappeler deux aspects fondamentaux relatifs à la manière concrète, ordinaire, dont nous n’existons en tant qu’être humains. D’une part, un être-dans-le-monde, observe-t-il, est un être événement, c’est-à-dire quelque chose qui arrive, qui se réalise moment après moment, dans le flot dynamique et ouvert de l’existence. Nous ne « sommes » pas comme on dirait des pierres qu’elle « sont », immuables. Nous nous réalisons. Pour l’exprimer encore autrement : être pour nous est un verbe actif, une chose que nous faisons. D’autre part, cet être-dans-le-monde pour Heidegger est toujours un être en relation. Chacun des moments de notre existence est inscrit dans le monde, nous trouve liés, immergés parmi d’autres et parmi ce que nous reconnaissons comme les objets du monde. Dans ces relations, être dans le monde se concrétise toujours par certaines façons d’être : être attentif, être actif, être contemplatif, être en discussion, et ainsi de suite. Ainsi, connaître telle ou telle chose et agir sur la base de cette connaissance peut être pensé comme une manière rendue tangible d’être dans le monde.

On devine assez bien, suivant cette idée, comment l’activité mathématique, prise dans sa dimension concrète, expérientielle, vécue, peut être conçue comme une manière d’être dans le monde (e.g. Williams, 1993). Vue comme une façon d’agir et de faire sens, l’activité mathématique « prend corps » en celui ou celle qui lui donne vie, une idée bien saisie dans le courant socioculturel de la recherche en enseignement des mathématiques où l’apprentissage est vue comme un processus par lequel l’individu *devient* mathématique (*become mathematical*). Lerman (2001) explique ainsi l’idée selon laquelle l’élève *devient* part (*become part*) de pratiques mathématiques qui elles-mêmes deviennent part de lui ou d’elle. Ce devenir est du domaine de l’être dynamique et relationnel qui agit, fait sens du monde -- et d’une manière bien particulière, que nous reconnaissons mathématique.

Ceci possible parce que de telles pratiques sociales contribuent à la manière dont certaines actions sont concrètement réalisées par et dans des relations entre humains (et avec des objets) auxquelles les élèves participent. L’enseignement des mathématiques vise donc, en ce sens, de faire émerger dans les échanges entre élèves et avec l’enseignant(e) certaines manière d’être dans le monde. Comment cela se passe-t-il concrètement?

2. Mise en œuvre de l’activité mathématique

Tara est une enseignante-conseillère en mathématique pour son école, et Jennifer, une chercheur qui travaillent également avec de futurs enseignants. Tara et Jennifer ont collaborés plusieurs mois à discuter puis à préparer leur séquence d’enseignement de la géométrie. Jennifer a régulièrement assisté Tara en classe afin d’établir une bonne base de confiance avec ces élèves de deuxième année primaire, et avec Tara. La vignette suivante présente une illustration assez juste de leur travail en commun lors du déroulement de l’activité mathématique en classe. Elle va me servir à d’abord à discuter la manière dont une activité, même mise au point en commun, peut prendre des formes radicalement différentes, et ce au plus proche que l’on puisse être en termes de conditions de mise en œuvre : dans la réalisation conjointe. L’épisode prend place au

cours d’une discussion lors cours de laquelle la classe abordait différente manière de décrire des objets mathématiquement³.

- Je: Qu’en est-il des arêtes, de quand nous parlions des arêtes? Est-ce qu’on peut décrire les arêtes comme étant différentes? Est-ce que certains arêtes sont différentes de d’autres? Levez la main si vous pensez que certaines arêtes sont différentes de d’autres arêtes₍₊₎
(+) Quelques élèves lève la main.
- Je: Et qui pense que toutes les arêtes sont identiques? ₍₊₎ D’accord. Qui étaient ceux qui disaient que certains arêtes sont différentes de d’autres? Tobi
(+) De nouveau quelques élèves lèvent la main. On ne voit pas clairement si Tobi est l’un d’eux.
- To: Je ne sais pas
- Je: Comment décris-tu cette arête?₍₊₎
(+) Montre un bloc cubique dont elle touche une arête.
- To: Ah je//
- Je: Je vais te demander de glisser ton doigt dessus.₍₊₎ Comment tu la décrirais?
(+) Lui tend le bloc. Tobi le prend, le regarde et se lève.
- To: Ah... parce que hum, parce qu’il y a des sommets, mais//
- Ta: Ici, plutôt que,₍₊₎ si tu commences ici, place ton doigt sur l’arête, le sommet. Ton doigt. Une arête. Glisse ton doigt sur l’arête. Elle fait* comme quelle sorte d’arête?
(+) Lui prend le bloc, puis sa main et fait glisser son doigt verticalement le long d’une arête.
- To: (2 sec)₍₊₎
(+) Tandis que Tobi regarde le cube qu’elle tient toujours, Tara prend un cylindre et présente les deux objets côte à côte
- Ta: Ok, ici cette fois, montre ton doigt,₍₊₎ elle fait* comment celle-là?
(+) Lui prend à nouveau la main et place son doigt sur l’arête. Tobi le glisse tout autour.
- To: Elle fait* comme ... (3 sec)
- Je: Est-ce que tu sens* la même chose ou tu sens* quelque chose de différent?
- To: Différent
- Je: Qu’est-ce qui est différent à propos de ces arêtes?
- To: Parce que celle-là est ronde, celle-là est carrée
- Ta: Si tu en prends juste une. Ça fait* comment? Sans utiliser le nom d’une forme, n’utilise pas triangle ou cercle ou carré
- To: (2 sec)
- Ta: Quelqu’un peut nous aider? Il dit celle-ci est ronde, qu’est-ce que celle-là va être?

³ Dans la transcription, une double barre oblique (//) marque une interruption. Le nombre en indice (1) indique la position d’une actions décrite à la suite du tour de parole. Les mots suivis d’une étoile (*) correspondent à différentes traductions, en contexte, du verbe anglais « feel » qui se décline de manière très variable. C’est aspect sera d’ailleurs discuté dans l’analyse.

Alison?

- Al: Droite
- Ta: On est d'accord? Celle-ci est droite, celle-là est ronde. Alors Tobi laquelle est droite?
- To: Celle-ci₍₊₎
 (+) Glisse son doigt tout autour des arêtes d'une face du bloc.
- Ta: Ici? Glisse ton doigt sur l'arête bien droite.₍₊₎ Là, tu glisses au milieu de la face. L'arête droite est ici. Maintenant glisse ton doigt sur l'arête ronde
 (+) Elle démontre le geste de glissement vertical puis tends le bloc. Tobi glisse son doigt verticalement, mais au milieu de la face. Elle prends sa main et fait glisser son doigt. Elle met finalement les blocs de côté et Tobi regagne sa place.

Il saute aux yeux qu'au cours de cet épisode, la question initiale posée par Jennifer (« Qu'en est-il des arêtes ... Est-ce que certaines arêtes sont différentes de d'autres? ») subie d'importantes transformations à mesure que la conversation progresse, et particulièrement sous l'influence de Tara. Mais l'on cherche toujours plus ou moins à décrire des objets en s'intéressant aux arêtes, une idée qu'on l'on retrouve par ailleurs clairement indiquée dans le curriculum officiel auquel l'école est soumise.

C'est ainsi que Jennifer introduit la question des arêtes en sondant les élèves, puis donne la parole à Tobi (tour 05). Bien que celui-ci réponde ne pas savoir, Jennifer lui demande de décrire l'arête d'un bloc, en la touchant. Tobi débute une explication (tour 08), mais il est interrompu par Tara qui lui indique une façon différente de procéder. Tobi ne parvient pas à dire de quelle sorte sont les arêtes des blocs qu'on lui présente, mais affirme sentir quelque chose de différent (tour 14). Jennifer lui demande ce qu'il y a de différent à propos des arêtes, et Tobi explique que l'une est ronde et l'autre carrée (tour 16). Tara sollicite alors une manière différente de comparer et, avec l'aide d'un autre élève, distingue arêtes « rondes » et « droites ». Tobi, à nouveau questionné, identifie l'arête droite au cube, mais ne reproduit pas la manière de toucher précédemment indiquée par Tara (tour 25). Celle-ci insiste pour que Tobi touche l'arête comme elle le faisait, puis marque le passage à autre chose en mettant les blocs de côtés.

On sent que les demandes formulées par Tara sont d'une nature différente de ce qui sont proposées par Jennifer, et cela malgré le fait que toutes deux ont préparé ensemble la session en classe, et qu'elles contribuent à réaliser l'une et l'autre, et avec les élèves. Dans ce qui suit, je présente une analyse croisée de ces deux approches en relation avec les manières « d'être dans le monde » par l'activité mathématique auxquelles les transactions que nous observons donnent vie. Je discuterai plus loin la dimension éthique qui s'y rattache.

3. Point de méthode : une analyse transactionnelle

Je me propose ici de présenter une analyse *transactionnelle* de deux pratiques mathématiques se développant cours de la réalisation conjointe de la session en classe. Dans la section précédente, de même que dans le titre de cette étude, j'utilise en effet le terme « transactions » plutôt que de parler, comme on le fait généralement, « d'interaction ». Ce choix méthodologique mérite que l'on s'y arrête un moment.

Le terme *transaction* est important pour éviter l'erreur commune que nous faisons de séparer le sujet et l'objet d'une action, la personne de l'autre personne avec qui elle agit, ou de la situa-

tion dans laquelle est se trouve. L'idée de transaction est examinée en détail par Dewey et Bentley (1949) qui expliquent comment elle s'oppose à la présomption essentialiste de séparabilité d'éléments en relations qui seraient elles-mêmes isolables de leurs constituantes. Dans le cas d'échanges verbaux, par exemple, Roth, Lee et Hwang (2008) utilisent dans le même sens le concept de transactions pour montrer comment deux interlocuteurs en conversation n'agissent pas séparément l'un de l'autre, notant au passage le caractère de dépendance mutuelle des tours de paroles sans lequel nous ne « parlerions » que pour et en nous-même. Parce que lié à et liant ensemble le sujet et son objet (/interlocuteur), l'acte (de parole) est à la fois passif, en ce qu'il est une réponse, et quelque chose d'agentiel, de créateur (de la relation, de l'autre comme interlocuteur, etc.). L'acte est produit des conditions dans lesquelles se trouve l'individu agissant, mais aussi producteur de telles conditions pour les autres et pour lui-même (e.g. Snow, 1992).

Enfin, la notion de transaction est essentielle pour faire place à la dimension historique et culturelle de l'activité au sein de laquelle une action donnée prends place (Dewey et Bentley, 1949). Pour qu'une conversation comme celle présentée dans l'épisode prendre place, il faut tout une histoire et géographie de relations, sans lesquelles l'idée mathématique ne pourrait devenir objet de l'attention pédagogique d'un enseignant et d'un enseigné. S'il devient évident, présenté en ces termes, que l'un ne peut être pris pour exister en dehors de l'autre, enseignant et enseigné ne pourraient non plus agir en tant que tel en dehors de la relation d'enseignement dont l'origine et le développement nourri l'activité. Et réciproquement, il est absurde de vouloir penser l'enseignement comme un événement isolé de la relation concrète (spatiotemporelle, historico-culturelle) de l'enseignant et de l'enseigné qui prennent part.

Une des conséquences majeures d'une telle approche pour ce qui nous intéresse ici se trouve dans la nature située que l'idée de transaction reconnaît à la connaissance. Ainsi, la cognition comme processus de développement sens, ne se trouve pas localisé en un endroit précis (dans la tête de l'individu agissant), mais dans l'action. Lorsque l'action est vue comme transaction, l'individu et sa connaissance du monde, son « monde de la vie » (*lebenswelt*, *lifeworld*) sont inséparable. La connaissance ne s'observe que dans l'action (incluant l'observation de ses propres actes de pensée), elle-même toujours située (Roth, 2007) et en cela prenant par à une manière d'être au monde. Ce caractère situé rattache l'action, la transaction, à la nature sociale, culturel et historique de l'activité à laquelle elle contribue faisant en sorte que toutes comportements (*behaving*), toute connaissances (*knowings*) sont des activité qui ne nous appartiennent par en propre en tant qu'individus, mais sont des processus issues de l'ensemble de notre relation en tant qu'organisme à notre environnement (Dewey et Bentley, 1949).

4. De deux manières d'être dans le monde par/dans l'activité mathématique

Avec ceci en tête, nous pouvons donc relire l'épisode en examinant plus en détail les transactions de Tara et Jennifer avec les élèves. Ceci permettra de mettre en lumière deux manières d'être dans le monde par et dans l'activité mathématique et de mieux comprendre « ce qui se produit » dans cette vignette.

Jennifer engage la conversation en soulevant la question des arêtes, tournant l'attention de la classe sur cette manière particulière, géométrique, d'examiner des objets. Le sujet se propose déjà comme une réponse à la situation, et en même temps fournis aux élèves des ressources grâce auxquelles ils complètent la transaction (tours 01 et 02). Levant ou non la main afin de signa-

ler leur opinion (ou absence d’opinion) sur la question, les élèves contribuent à leur tour. Dès l’abord, on peut noter deux éléments importants dans la manière dont Jennifer ouvre le champ du questionnement mathématique et qui vont continuer de marquer l’activité mathématique qui prend forme avec elle. Jennifer, d’une part, questionne les élèves sur un mode subjectif, personnel. Dans les deux premiers tours de parole, rappelant aux élèves « nous parlions », leur demandant « si vous pensez » et référant à « ceux qui disaient », Jennifer parle au *je*. Il s’agit d’un *je* historique et subjectif qui réfère à l’activité mathématique et à ses résultats comme quelque chose qui n’est pas séparé de l’expérience personnelle et commune.

Le second point d’importance concerne le mode descriptif que l’on retrouve dans les propos de Jennifer. En posant le problème en termes de différence/non différence, puis sondant les élèves à ce propos, elle contribue à créer le besoin de descriptions qui permette d’articuler cette différence/non différence. Explicitement mentionné au tour 01 (« Est-ce qu’on peut décrire... ») et 04 (« Comment décris-tu... »), cette perspective descriptive ouvre la porte à une variété d’approches. Celles-ci peuvent se développer sur le fond thématique, dont l’aspect controversé (généralisé les questions qui rendent possible des opinions distinctes) est rendues publique lorsque les élèves lèvent la main en guise de réponses.

D’un point de vue transactionnel, ces manières d’être (personnel, descriptif) dans l’activité mathématique n’ont pas d’existence en elles-mêmes, mais s’actualisent dans la réponse de l’autre. Ainsi, lorsque Tobi répond, aux tours 03 et 05, ses réponses sont aussi marquées par le « je », suggérant qu’il opère sur le mode subjectif initié par Jennifer. Quand Jennifer, au tour 06, l’interrompt pour lui demander personnellement (« Je vais.. ») comme il (« tu ») décrirait l’arête du bloc qu’elle lui présente, elle met à la disposition de Tobi des ressources participatives qui lui permettent de répondre à la situation telle que Jennifer la développe. L’affirmation, par Tobi, d’une certaine forme d’impuissance à agir dans le domaine de questionnement mathématique présenté par Jennifer (« Je ne sais pas », tour 03) fait place à une observation qui est, bel et bien, personnelle et descriptive. Tobi débute « Ah je ... » (tour 05) puis complète « parce .. qu’il y a des sommets ». Les dimensions personnelles et descriptive du mode de coordination dans l’activité mathématique esquissé par Jennifer prennent corps s’observent ainsi en relation avec les réponses de Tobi, qui elles-mêmes ne peuvent être pensées en dehors l’action (communicative) de Jennifer.

On voit bien ici la nature « trans » de l’action, qui désigne ce qui traverse et ce qui se trouve de l’autre côté, en contraste avec le préfixe « inter » qui exprime la notion de réciprocité, de causalité, et d’espace entre deux éléments (Dewey et Bentley, 1949). L’action ici est visionnaire et relationnelle. Jennifer ne « produit » pas les réponses données par Tobi, et par un effet isolable de leur présence et dépendance. Elle crée et répond à des conditions pour et par l’action. L’action se réalise ainsi « au travers » de Tobi et d’elle, et précisément en tant que manière d’être dans le monde par l’activité mathématique. Les questions de Jennifer ne lui donnent pas non plus un accès direct et privilégié à ce que sait ou pense Tobi, et n’instruisent pas non plus ce dernier de façon transparente. La question crée en quelque sorte l’objet de son observation qui répond en conséquence, mais pas d’une manière déterministe.

Enfin, on voit que l’idée même d’activité (d’enseignement/d’apprentissage) mathématique dans sa dimension socio-historique est indispensable et indissociable des conditions et résultats de cette série de transactions. Jennifer, chercheur et enseignante, questionne Tobi, élève de deuxième année, sur la manière de décrire l’arête d’un cube. Ce type de dialogue *pédagogique*

est particulier en ce qu’il place celui qui sait en position de questionneur, et c’est celui qui ne sais pas qui se trouve en charge de répondre. À première vue absurde, cette situation trouve toute sa justification dans l’idée même d’éducation et sa lente mutation dans la culture occidentale. De l’enseignant du latin *insignire* qui signale et désigne à l’*agogos* du pédagogue qui accompagne et qui conduit, Jennifer et Tobi créent l’un pour l’autre, et l’un avec l’autre, des positions dans l’acte de participation à l’activité mathématique. C’est en tant qu’activité d’enseignement-apprentissage (des mathématiques) que la conversation se réalise de la sorte, qui est aussi une manière particulière d’incarner, dans les transactions, cette activité historico-culturelle.

Poursuivons l’analyse de l’épisode au tour 08, au moment où Tara interrompt l’explication de Tobi, et d’une manière bien différente de celle de Jennifer au tour 06. Tara, dès ce premier énoncé, expose aussi deux aspects significatifs de la manière d’être ou de devenir mathématique à laquelle son approche conduit. Pour commodité (mon intention n’étant pas ici d’établir une grille mais simplement d’organiser le propos) nommons ces deux modes *directionnel* et *abs-trait*:

Ta: Ici, plutôt que₍₊₎ si tu commences ici, place ton doigt sur l’arête, le sommet. Ton doigt. Une arête. Glisse ton doigt sur l’arête. Elle fait* comme quelle sorte d’arête?

(+) Lui prend le bloc, puis sa main et fait glisser son doigt verticalement le long d’une arête.

Alors que Jennifer au tour 06 termine son interruption en ramenant la question à laquelle Tobi avait commencé de répondre (« Comment décris-tu cette arête? » puis « Comment tu la décrirais? »), Tara procède à une réorientation marquée. Tara lui indique une manière précise d’aborder la question (« commences ici ... place ton doigt ... glisse ton doigt ») que l’on retrouve nettement dans la suite de la conversation. Ce qui, avec Jennifer, évoquait une invitation à explorer, voir à débattre (comment décrire une arête, sont-elles toutes identiques?), prend avec Tara une tournure impérative et contrôlée. Pas seulement en parole, mais aussi physiquement (prenant le bloc des mains de Tobi et faisant glisser son doigt, tour 08) Tara crée pour Tobi des conditions de participation dans l’activité mathématique beaucoup plus étroites, et telles que l’élève ne parvient plus à contribuer à l’activité mathématique (tour 09, silence). Tara introduit alors un nouvel élément, le cylindre, que Tobi doit examiner de la même manière, suite à quoi il tente d’articuler une nouvelle réponse, mais tombe court (tour 11, nouveau silence). On réalise alors le contraste avec l’approche de Jennifer, qui prend le prochain tour de parole et réactive le mode descriptif-subjectif. Elle demande « Est-ce que tu sens la même chose ... Qu’est-ce qui est différent » (tour 12 et 14), ce qui permet à Tobi de contribuer à nouveau (« Parce que celle-là est ronde, celle-là est carrée »). Par contre, suit à nouveau un acte de redirection par Tara (« prends juste ... n’utilisera pas ... ») qui dirige la conversation vers ce qui semble une idée bien précise : celle d’une identification, d’une classification des arêtes selon la dichotomie ronde/droite. On remarque en effet comment, faisant une différence sensible avec l’invitation de Jennifer à *décrire*, Tara demande plutôt de « quelle sorte d’arête » il s’agit.

Sont étoilés dans la transcription de l’épisode six occurrences du mot anglais « feel » que j’ai traduit tantôt par le verbe « faire », tantôt par « sentir ». Le terme qui eut été le plus approprié

pour traduire la signification de « feel » tel qu’employé par Tara, Tobi et Jennifer serait pourtant associé au verbe « toucher », mais conjugué d’une manière que l’on ne retrouve pas en français, et qui permet une différence importante entre la perspective personnelle ou subjective (que l’on voit apparaître dans les transactions entre Jennifer et Tobin), et celle abstraite ou objective que nous allons examiner avec Tara. Au tour 08, lorsque l’enseignante demande « *Elle fait comme quelle sorte d’arête* » (*It feels like what kind of edges*), sa formulation laisse entendre que ce qui expérimenté par Tobin, dans le touché du bloc, est l’effet d’une propriété de celui-ci, et non de l’expérience en tant que telle. Pour bien voir la nuance, on peut comparer avec la question de Jennifer en 12, qui formule « Est-ce que *tu sens* la même chose » (*Do you feel the same thing*) qui renvoie clairement au mode subjectif plutôt qu’à quelque chose d’abstrait (du latin ab-, « de », et trahere, « tirer »). On le reconnaît ce mode objectif dans l’ensemble des transactions de Tara avec Tobi, et pas seulement dans sa manière d’interpréter le résultat de l’expérience, mais aussi la conduite de celle-ci. Ainsi, Tara ne parle pas au « je » lorsqu’elle suggère « Ici, plutôt que... » (tour 08), « Si tu en prend juste une » (tour 16) et même quand elle demande « qu’est-ce que va être celle-là » (tour 18) ou « laquelle est droite » (tour 22). Bien sûr, elle s’adresse aux élèves et parle de sa propre voix, mais ses formulations n’ont pas la texture, la signature lisible qui attribue à son auteur l’acte et de sa fin à travers l’autre. Quand Jennifer dit « Je vais te demander de glisser ton doigt », elle reconnaît la requête comme étant sienne, et l’étroite relation de cette demande avec l’expérience qui s’en suit. Au contraire, dire « Si tu en prends juste une » retranche la procédure de son contexte et de sa dimension humaine. En d’autres mots, et l’analyse prend ici un tour tout à fait intéressant, Tara procède ainsi, à travers ses transactions avec Tobi, à une réduction de l’expérience de l’objet et de la conversation elle-même à une série d’interactions plutôt que de transactions.

Avant d’aller plus et de dire quelques mots sur la façon d’être au monde par et dans l’activité mathématique incarnée avec Tara, il est important de bien souligner que malgré l’interprétation qui se dégage de ses propos, la conversation comme événement conserve son caractère transactionnel. C’est toujours le large contexte sociétal, culturel et historique qui supporte et qui prend forme dans les transactions de l’enseignante et de l’enseigné, et dans l’aspect agentiel et « responsif » des gestes et des tours de paroles que les modes directif et abstrait s’actualisent. C’est Tobi qui répond à, et donc complète, la directionnalité initiée et maintenue par Tara, s’offrant à l’instruction (la procédure, l’information) de la parole et du geste, et ce faisant fournissant à celle-ci les ressources transactionnelles qui permettent à l’épisode de suivre le cours qu’on lui voit. C’est Tobi également qui formule « Elle fait comme ... » (tour 11), et Alison qui propose « droite » (tour 19), jouant le jeu d’une expérience abstraite, objective, désincarnée.

Tobi conduit, avec Tara, une activité dans laquelle le sujet et l’objet, la pensée, la procédure, semblent indépendants, et s’affectent de manière causale. Dans le domaine discursif où l’activité mathématique prend place, tout se passe comme si le bloc offrait de lui-même quelque chose à voir, à comprendre, quelque chose de déterminé d’avance (par celui qui sait et qui questionne) et que le « bon » geste rendra explicite. L’action bien menée (commencer ici, toucher comme cela, ne considérer que ceci) conduit à la réaction attendue (« On est d’accord? Celle-ci est droite ») et il n’est pas d’intérêt particulier à explorer d’autres approches, d’autres idées. En 20, Tara procède ainsi tout naturellement à formuler une question dont elle-même affirme la réponse attendue (« Celle-ci est droite, celle-là est ronde. Alors Tobi laquelle est droite? »), et à tôt fait de clore la conversation, une fois son geste reproduit convenablement (tour 22).

C'est toujours une dynamique transactionnelle qui supporte nos observations et permet d'entendre les transactions entre Tara et Tobi comme une façon d'être (et de devenir) mathématiques évoquant cette perspective interactionnelle. Ainsi, suivant Tara et Jennifer, l'analyse transactionnelle révèle deux pratiques de l'activité mathématique, deux manières « d'être au monde » avec et dans l'activité mathématique, qui offrent des occasions bien différentes, pour les élèves, de prendre part à ces pratiques. C'est sur cet aspect, discuté en relation avec la question proprement *éthique*, c'est-à-dire concernant la manière dont l'altérité des élèves est reçue dans l'activité mathématique, que poursuit la prochaine section.

5. L'autre, l'éthique et la mathématiques

Il est évident qu'en tant que chercheur, éducateur ou enseignant, nous contribuons, par la réalisation d'activité mathématiques pour et avec les élèves, à changer leur manières d'être dans le monde. Quelque soit notre allégeance théorique, ou notre refus d'allégeance, la pensée et le geste pédagogiques sont l'un comme l'autre des actes concrets qui nous engagent personnellement, et pour lesquelles nous sommes donc responsables (VanManen, 1991). Réfléchissant à l'origine de notre responsabilité pour nos actions et pour l'autre que nous rencontrons, le philosophe Emmanuel Levinas développe en l'*éthique* une « philosophie première » où cette responsabilité prends racine dans l'accueil de l'autre et de son altérité même (1978).⁴ Comment, en pensée ou en action, faisons-nous l'expérience et faisons-nous place à cette altérité en classe ?

Le champ de la recherche en enseignement des mathématiques a jusqu'ici peu porté attention à la question éthique en tant que telle, bien qu'un nombre croissant de chercheurs en reconnaissent l'importance (e.g. Atweh, 2007; Neyland, 2004; d'Ambrosio, 1998), sinon la primauté (Ernest, 2009 ; Khan, 2009 ; Stemhagen, 2008). Chez plusieurs de ces auteurs, la pensée de Levinas occupent une place de choix, dont les idées de base tournent autour de : la vulnérabilité de l'autre, la valorisation de la différence, l'inconnaissabilité de l'autre, sa reconnaissance comme une personne, et la base relationnelle de la socialité. Sans en faire ici revue, je noterai que ces idées sont, chez ces auteurs, projetées contre les éléments qui structurent l'enseignement des mathématiques, et en particulier la forme et le rôle généralement joués par le curriculum. Cet angle de travail, sans doute typique de la recherche en enseignement des mathématiques, laisse cependant pour compte la dimension concrète, quotidienne, incarnée de la rencontre avec l'autre qui forme pourtant la base de cette éthique. Qu'en est-il du rapport à l'autre à l'échelle transactionnelle où l'activité mathématique se réalise comme un manière d'être au monde dans et par laquelle les élèves deviennent mathématiques ?

Une manière d'aborder la question consiste à examiner les occasions de participer qui s'offrent aux élèves, et la manière dont leurs contributions sont et peuvent être reçues. Kieren, Simmt et Mgembelo (1997) discutent l'idée d'occasionner l'apprendre (*occasioning understanding*) en analysant la manière dont un problème posé par l'enseignant devient pour les élèves déclencheur d'activité mathématique, et illustrent comment, au niveau transactionnel, des occa-

⁴ L'expression « philosophie première » signifie que rien ne précède l'éthique comme expérience d'une responsabilité que nous éprouvons malgré-nous, et à partir de laquelle se développe toute conception du sujet et du rapport au monde.

sions d’apprendre sont créées pour et par les élèves et l’enseignant. En particulier, les auteurs argumentent en faveur d’une vision de la connaissance mathématique comme action de mettre en œuvre, avec d’autres, un monde de signification mathématique à l’intérieur d’une certaine sphère des possibilités (p.628).

Nous avons vu comment les transactions de Tara avec les élèves prennent un tour directif et désincarné. Demandant aux élèves d’approcher la question des arêtes d’une certaine manière (les considérant une à la fois, les touchant suivant ses instructions, cherchant à en déterminer la « sorte » ou le nom), Tara fait appel à des contributions bien précises. Quand l’élève donne une réponse satisfaisante, celle-ci se trouve rapidement confirmée (tour 18 où, aussitôt qu’Alison propose « droite », Tara reprend le terme à l’affirmative). Par contre, l’ensemble de ses transactions avec Tobi le montre bien, il est commun que l’approche de la situation offerte par l’élève conduise à mettre de côté ou à ignorer ce qu’il propose. La conversation prend alors une tournure plus précise (commencer ici, ne pas utiliser un nom de forme, reproduire un geste donné) qui resserre le champ des contributions possibles, parfois au point où l’élève ne peut tout simplement plus participer à l’exploration du problème (tour 11 et 17, lorsque Tobi se fait muet). Parmi les stratégies qui permettent de « sauver la situation »⁵, on observe alors le recours à un autre élève qui « sait » (tour 18), ou à une simplification de la tâche. On utilise une formulation du problème qui contient à la fois la question et la réponse (tour 20) (le fameux effet topaze de la théorie des situations didactiques), ou on le réduit à une procédure mécanique (tour 22) qui le dépouille de la majeure partie de sa dimension conceptuelle. Procédant de la sorte, se détermine progressivement une certaine vision de l’activité mathématique, de ce que signifie *être mathématique* alors qu’émerge de manière concrète la pratique dont les élèves *deviennent* membres et qui *devient* partie d’eux-mêmes. Ce monde de signification mathématique possède sa propre sphère de possibilités, et certain façon d’occasionner l’apprendre.

Avec Jennifer, les transactions dans l’activité mathématique prennent corps sur un mode subjectif et descriptif. Demandant aux élèves ce qu’ils pensent (plutôt que ce qui est), et les invitant à *décrire* leurs observations même lorsque l’un d’eux dit qu’il ne « sais pas », Jennifer invite (et le terme est important) à considérer une question donnée et à l’explorer sous différents aspects. En cas d’impasse, des ressources additionnelles sont fournies (Jennifer donne le bloc à Tobi), la question est reformulée de manière à fixer l’attention (considérer une arête donnée plutôt que le cas général), des expériences passées (tour 1, « nous parlions ») ou sensuelle (faire toucher l’arête) sont sollicitées, et tout cela sans pour autant perdre de vue l’aspect exploratoire de l’activité. Les moyens par lesquels Jennifer maintient son invitation à l’activité mathématique ne sont ici qu’esquissés à la lumière de l’extrait présenté, et beaucoup mieux visibles dans d’autres de nos épisodes, mais l’on voit très bien ici comment l’idée d’une exploration par la description de différences accompagne littéralement tous les énoncés de Jennifer (tours 01, 02, 04, 06, 14). Il est important de souligner que dans une telle perspective, l’activité mathématique ne perd donc pas toute direction, et ce malgré le fait que les contributions des élèves ne sont pas jugées à la pièce. L’épisode discuté ici ne permet pas une illustration convaincante de ceci et l’importance de cet aspect mérite l’introduction d’un autre extrait. Voyons comment Jennifer

⁵ Voir par exemple la notion de *réparation* dans l’analyse de conversations (e.g. Jordan & Henderson, 1995).

reçoit d'un élève (Charles) la proposition d'appeler un objet de la forme d'une boîte de pizza un « cube plat » :

- 01 Ch: Je pense que c'est une prisme rectangulaire parce que ça c'est plus long que ça, mais c'est un cube plat.
02 Je: Alors un prisme rectangulaire peut être un cube plat, un cube qu'on a aplati?
03 Ch: Ouais, ça c'est plus court
04 Je: hum hum. Alors ça en fait un prisme rectangulaire plutôt qu'un cube, parce que si c'était un cube, qu'est qu'il devrait avoir?

On voit dans cet échange que Charles introduit une appellation pour le moins non orthodoxe, et même antinomique, pour l'objet discuté (l'adjectif « plat » contredit les propriétés du « cube »), mais Jennifer ne s'y objecte pas d'emblée. Elle reçoit d'abord la contribution, la reformule (« un cube qu'on a aplati »), et relance la discussion qui portait précisément sur ce point de vocabulaire en relation avec sa dimension conceptuelle (« si c'était un cube ... »). En se coordination avec Jennifer, les élèves en viennent à employer spontanément le modes subjectif-descriptif (« je pense », « plus long », « plus court »). Celui-ci leur permettent de contribuer à l'activité mathématique dont c'est le processus lui-même, par son aspect récursif, qui devient facteur de validation. Jennifer, en effet, ne statue pas sur ce qui « fait d'un cube un cube », mais pose la question et de là s'engage à nouveau avec les élèves à explorer, fournissant des occasions de participations à une activité mathématique qui conserve son caractère créatif de *production de sens*, plutôt que de tourner à la *représentation* (au sens théâtral) d'une *idée mathématique donnée*.

De retour à la question éthique, on peut voir à présent, dans le moment même de la rencontre avec l'autre et du point de vue concret des transactions par lesquelles enseignants, élèves et relation pédagogique sont liés, comment peut se faire l'accueil de l'autre dans l'activité mathématique. L'altérité de l'autre en l'élève prend ici la forme d'une capacité à contribuer à l'activité mathématique et de ses contributions. Elle nous fait découvrir une dimension éthique qui déborde du domaine strictement mathématique de l'activité (c'est la capacité des élèves de contribuer de manière légitime à l'activité sociale qui se trouve en jeux), mais sans y perdent ses racines : il est toujours question de contribuer à l'activité mathématique, d'examiner la question des arêtes, et ainsi de suite.

C'est ainsi que Tara et Jennifer participent toutes deux à la réalisation d'un certain événement social, une session en classe de mathématiques, dans lequel on sent que les élèves sont appelés à prendre la parole, à être « actif » sur la base de leur capacité pour apprendre, et en ce sens reconnus comme personnes, comme des êtres dont la vulnérabilité commande qu'on leur donne l'occasion d'apprendre à être au monde mathématiquement. C'est parce que l'élève est un autre qui a besoin de moi que je m'engage avec lui dans une relation pédagogique, et j'ai moi-même un besoin fondamental de lui comme Autre, comme élève, pour me trouver moi-même comme sujet (enseignant) et vivre avec lui la relation pédagogique.

Résulte de cette observation que c'est à l'intérieur d'une fine couche du domaine discursif d'une pratique de sens mathématique que les transactions de l'enseignant avec l'autre en l'élève prennent un tour plus escarpé. Les manières qu'ont Tobi et Tara d'entrer en transaction avec les

objets qu’ils observent diffèrent à l’échelle du sens mathématique, et c’est là que l’approche de cette dernière rend l’accueil de l’autre et de son altérité plus difficile. La pratique mathématique qui émerge avec Tara demande l’acceptation et le refus des positions présentées par les élèves, condition qui semble nécessaire afin d’arriver à la coordination des perspectives. La différence, ici, apparaît comme un obstacle dans la relation pédagogique. Et, qui plus est, refuser ce qu’affirme l’élève c’est également le refuser *lui* en tant que personne faisant cette affirmation. Il y a bien entendu tout un mode de nuances possibles dans le refus de l’autre, passant de l’insistance bienveillante à l’ignorance, et au rejet brutal, dont le point culminant est celui du meurtre (Levinas, 1985). L’influence, nous dit Ricœur (1990) est la première forme de cette capacité de violence présente en chacun de nous.

La pratique mathématique qui « invite », par contre, offre la possibilité d’un rapport différent à l’autre et à son altérité dans la pratique de sens réalisée avec les élèves. L’altérité, l’expérience vécue par l’autre comme la sienne, est le moteur de l’activité : c’est cela même que l’on contribue de part et d’autre. Les occasions et les façons de participer ne sont pas seulement plus nombreuses et d’une qualité différente, elles puisent en l’autre et en cela non seulement accepte la différence, mais la célèbre. Ce sont l’exercice de décrire mathématiquement, de reformuler l’observation mathématique, d’utiliser et de contraster des idées mathématiques, qui graduellement prennent forme. La coordination des perspectives n’est plus *condition* ou *signal* d’une activité mathématique légitime, c’est un *processus* dynamique de recherche et d’exploration qui s’étend au delà de la conversation tout en passant à travers elle. En ceci, elle peut également rejoindre la dimension historique et culturelle de l’activité mathématique elle-même dans sa dimension profondément humaine (quelque chose que nous, humain, faisons). C’est au niveau transactionnel (d’humain à humain) qu’il est ainsi dans le pouvoir et dans le devoir de faire entendre les perspectives que la mathématique ouvre sur le monde, ses manières particulières de raconter, de prédire, de construire ; et cela sans se présenter à l’autre comme un système fermé (inhumain, a-historique) dont il s’agit de comprendre la « mécanique ».

6. Ouverture

Beaucoup pourrait être dit afin d’explicitier les liens (et les tensions) entre ce que je développe dans la section précédente et d’autres travaux examinant la question éthique/responsabilité pour l’autre vis-à-vis de l’éducation en général (e.g. Todd, 2003; Campbell, 2003 ; VanManen, 1991), ou de l’enseignement des mathématiques en particulier. Par exemple, on pourrait refaire avec Atweh (2007) le chemin vers l’idée de justice sociale et de *response-habilité* (*responsability* comme habileté à répondre aux besoins de l’autre), celui qui mène vers l’enseignement des maths comme paradigme du besoin d’organiser le projet éducatif autour d’idéaux plutôt que de procédures qui conduisent à l’érosion du sentiment de responsabilité éthique (Neyland, 2004), ou poursuivre avec l’idée de performance mathématique au sens et au moyen de l’esthétique de manière à renouveler et rend politique la rencontre avec l’autre et avec soi-même (Khan, 2009). Mais je préfère ouvrir ici une dernière pensée, retournant à la vignette, pour réfléchir un moment sur la recherche elle-même.

La recherche portant sur l’activité mathématique met en lumière l’importance d’un nombre croissant d’aspects qui y sont reliés. L’exploration de sa dimension éthique, telle qu’elle se révèle ici par l’analyse transactionnelle, ajoute à cette complexité dont nous prenons de mieux en mieux conscience, et à l’intérieur de laquelle nous commençons tout juste à penser l’activité

mathématique. Ainsi, dans cette étude, ce n'est pas simplement par simplification et par réduction que j'ai procédé, mais par l'évocation (et l'expansion) d'un peu de la richesse cachée dans à peine plus d'une minute de conversation qui, autrement, pourrait sembler relativement banale. Un autre aspect important de cette analyse en regard de la recherche est la place qu'elle fait à la pratique, et à la possibilité d'examiner et de mieux comprendre ce qui est jeu dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en tirant parti et en faisant la promotion de la collaboration entre chercheurs et enseignants.

Nous avons ici Tara et Jennifer, une enseignante et une chercheur, qui travaillent *ensemble* à la réalisation d'une activité en classe. Nous les voyons agir avec les élèves, mais aussi, par le biais de l'activité, l'une avec l'autre et cela même si elles ne s'adressent pas directement la parole. Tara et Jennifer s'exposent l'une à l'autre, attentives au déroulement l'activité, et capable d'y prendre une part active à tout moment (Tara au tour 08, Jennifer au tour 12). Je dirais même qu'elles travaillent non seulement l'une avec l'autre, mais aussi l'une *contre* l'autre. Ce « contre » est d'abord celui de la proximité, du contact étroit, dans laquelle l'autre prend littéralement visage, chair et vie. Une proximité à très forte résonance éthique. « Contre » ensuite non tant au sens d'opposition, mais comme lorsque l'on *s'appuie contre* quelque chose. Tara et Jennifer se répondent à travers l'activité d'enseignement par les pratiques que leurs transactions contribuent à mettre en œuvre. Et l'on retrouve ici exactement ce dont il était question plus haut à propos de l'activité mathématique dans laquelle les élèves participent et se développent sans qu'il soit besoin d'en adresser la « validité ». Jennifer, qui travaille auprès des futurs enseignants, ne manque de chose à dire à propos de la manière de penser l'enseignement des mathématiques, comme elle ne manque pas d'idée sur la façon de décrire ou de différencier les arêtes d'un solide. Mais elle choisie ici de s'engager avec Tara dans l'activité elle-même et d'une manière qui reconnaît en Tara l'altérité d'un Autre. En tant que part intégrale du processus de recherche collaborative, cette altérité n'est pas seulement acceptée, mais bien évidemment célébrée en elle-même. C'est en ce que Tara offre de particulier que la recherche se fait collaborative, et par la proximité que l'une à l'autre se donnent, que des occasions d'apprendre sont créées. En retour, c'est aussi comme fruit de cette collaboration que la présente étude peut développer l'analyse transactionnelle croisée, et sa poussée dans l'éthique, des deux manières d'être au monde par et dans l'activité mathématique que l'on y voit émerger.

References

- Atweh, B. (2007). Pedagogy for socially response-able mathematics education. *Proceedings of AARE Conference*, www.aare.edu.au/07pap/atw07600.pdf
- Campbell, E. (2003). *The ethical teacher*. Buckingham: Open University Press.
- d'Ambrosio, U. (1998). Mathematics and peace: Our responsibilities. *ZDM*, 30(3), 67-73.
- Davis, R. B., Maher, C. A., & Noddings, N. (1990). Suggestions for the improvement of mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, Vol. 4, pp. 187-210.
- Dewey, J., & Bentley, A. (1949). *Knowing and the known*. American Institute for Economic Research. <http://www.aier.org/aier/otherpublications/KnowingKnown/KnowingKnownFullText.pdf>
- Ernest, P. (2009). What is First Philosophy in Mathematics Education? Plenary session at PME 33 Conference.
- Jordan, B. and Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundations and practice. *The Journal of the Learning Sciences*, 4(1), 39-103.
- Heidegger, M. (1962). *Being and Time*. Harper & Row: New York.
- Khan, S. (2009). Performing oneself differently: A mathemaesthethician's responsibility. *Educational Insights*, 13(1).
- Kieren, T., Simmt, E., & Mgembelo, J. (1997). Occasioning understanding: Understanding occasioning. *Proceeding of the PMENA*, 2, 627-633.
- Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 87-113.
- Levinas, E. (1978). *Autrement qu'être*. La Haye: M. Nijhoffé
- Levinas, E. (1985). *Ethique et infini*. Pittsburgh: Duquesne University Press.
- Maturana, H., & Varela, F. (1998). *The tree of knowledge* (Revised ed.). London: Shambhala
- Neyland, J. (2004). Toward a postmodern ethics of mathematics education. In M. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern*. Greenwich, Ct: Information Age Publishing.
- Ricoeur, P. (1990). *Soi-même comme un autre*. Paris: Seuil.
- Roth, W.M. (2007). Situating situated cognition. In J. Kincheloe & R. Horn (Eds.), *The Praeger handbook of education and psychology* (pp. 717-728). Westport, CT: Praeger.
- Roth, W.-M., Lee, Y. J., & Hwang, S.-W. (2008). Culturing conceptions: From first principles. *Cultural Studies of Science Education*, 3, 231-261.
- Snow, R. (1992). Aptitude theory. *Educational Psychologist*, 27(1), 5-32.
- Stemhagen, K. (2008). Doin' the math: On meaningful mathematics-ethics connections. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(1), 59-66
- Todd, S. (2003). Learning from the other: Levinas, psychoanalysis and ethical possibilities in education. Albany: SUNY Press.
- VanManen, M. (1991). *The tact of teaching*. Althouse Press.
- Williams, S.R. (1993). Mathematics and being in the world: Toward an interpretive Framework. *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 2-7.

Patterns in mental computation: a didactical experience

Teresa Pimentel

School of Education of the Polytechnic of Viana do Castelo – Portugal

Isabel Vale

School of Education of the Polytechnic of Viana do Castelo – Portugal

Résumé

Dans cette présentation nous rapporterons une expérience didactique dans le cadre d'un programme de formation continue en mathématiques des professeurs des écoles, relevant le développement du sens du nombre et des stratégies de calcul mental fondés sur la découverte de padrons dans le système numérique. Nous présenterons des épisodes dans une classe de première année (5-6 ans) et le chemin choisi par la professeur pour améliorer ces compétences.

Mots-clés: padrons, sens du nombre, calcul mental, pensée algébrique, formation continue.

BACKGROUND

Our presentation refers to an exploratory study about teaching strategies that may foster elementary mathematics students' number sense and mental computation based on the discovery of number patterns. Our interest in this theme is justified by our personal involvement in two projects: (a) a mathematics teacher professional development programme. This programme was established in Portugal in 2005, in all the country, by proposal of the Ministry of Education and implemented in each region by universities or schools of education, and aims ultimately for a better mathematics learning of 1st to 4th grade students (ME, 2005); and (b) a project named *Mathematics and Patterns in elementary school: students and teachers perspectives and curricular experiences* that aims to study the value of a curricular approach centred in the study of patterns in the development of mathematics knowledge of elementary students (K-9) and in teachers professional development. In the early years of elementary school, mathematics is traditionally viewed as mechanical computation fluency. In our work with teachers we focus on the development of understanding, patterning, problem solving and communicating. As computation fluency must be mostly mental, students must develop the competence for seeing patterns, recognizing the numerical structure, deal with properties of numbers and operations and generalize them.

FROM ARITHMETIC TO ALGEBRAIC THINKING

Traditionally, the study of algebra was always kept away of primary teaching. It's common sense to think that arithmetic is easy and algebra is more difficult and must come afterwards, only in middle school. Therefore, in last years it has been recommended that curricula must introduce algebra and algebraic thinking since early years (NCTM, 1989, 2000; ME, 2001; ME-DGIDC, 2007).

Algebraic thinking in elementary grades may be defined as “extending beyond arithmetic and computational fluency to attend to the deeper underlying structure of mathematics” (Cai & Moyer, 2008, p.170). The development of algebraic thinking in the earlier grades requires the development of particular ways of thinking that result from analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting (Kieran, 2004). If students and teachers spend much time in the first

six years simultaneously developing arithmetic and algebraic thinking, arithmetic and algebra would come to be viewed as connected. Therefore the study of algebra in upper grades would be a natural extension of the mathematics of elementary school curriculum.

Arithmetic and algebra have been traditionally separated in the mathematics curriculum. The alternative view is that arithmetic is a part of algebra in which particular numbers and measures are treated as instances of more general examples (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007). In fact, arithmetic ideas, concepts and techniques have a potentially algebraic character in the sense that they can be generalized.

Another related concept is number sense. Acquiring number sense involves a general comprehension of number and operations and its use to make mathematical judgements and to develop useful strategies to deal with numbers and operations (McIntosh, Reys & Reys, 1992). This way, number sense is supported by the identification of number patterns and is basic to the emergence of algebraic thinking while fostering generalization of those patterns. This vision is consistent with the idea of algebra as generalized arithmetic (Kaput & Blanton, 2001). One of the strategies claimed by these authors for algebrafying the arithmetic curriculum is seeing algebra as generalizing and formalizing patterns, by (a) generalizing arithmetic operations, their properties and, in some cases, reasoning about the more general relationships and their forms (e.g. commutativity, inverse relationships, etc.); and (b) building generalizations about particular number properties or relationships (e.g. a sum of odds is even).

Usiskin (1999) argues that it is productive and wise to do some algebra in grades K-4, and, even if teachers may not realize it, they are teaching algebra and students are learning algebra. To show his thesis, this author defines algebra as a language with five major aspects: unknowns; formulas; generalized patterns; placeholders; and relationships. We focus here the third point for it is more important to this study. Multiplying a number by 19, for instance, can be done multiplying it by 20 and then subtract the number. This is a special case of distributive property whose algebraic description is $19n = 20n - n$. This description bears a visual resemblance to arithmetic. For instance, to buy 19 notebooks at 4 euro each, we can do it using mental arithmetic doing $19 \times 4 = 20 \times 4 - 4$. Other example is that adding a number to itself is the same as two times the number.

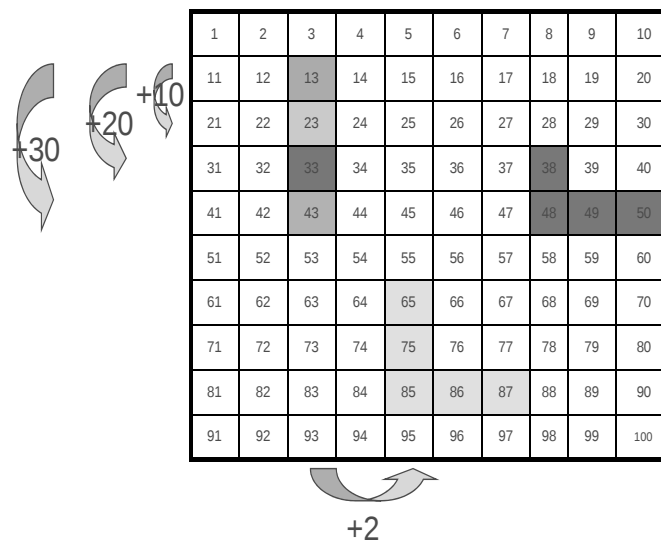
A DIDACTICAL EXPERIENCE

We argue that it is possible to work a generalized arithmetic since very early, but teachers must be aware of the importance of these aspects for making them explicit and giving them value in their work with students. We saw many second, third and even fourth graders that, to compute $16 + 10$, counted one by one in their fingers.

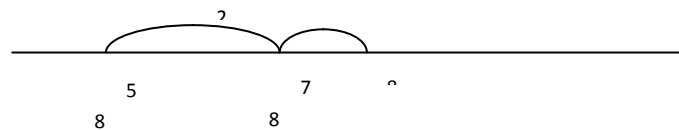
This way, we made a didactical proposal in the teacher training sessions that consists of seeking patterns in a 100 chart, but starting by the very beginning.

The teachers attending those sessions are supposed to act as they will do later with their children. They must begin by analyzing the table during some minutes and seek and communicate their own prior discoveries. Then, profiting of the suggestions made, the teacher must call the attention of the students to the act of adding one, two, three, and seeing the movement in the cells of the table that corresponds to those additions. The opposite movement is identified with subtraction. Then they can discover the pattern, both visual and numeric, of adding 10. Instead of counting by ones, they must “go down” directly in the same column to the next row. A simi-

lar movement allows to add 20. It is also important the inverse movement to subtract 10, 20, etc. Other visited strategies involve adding and subtracting 11 and 9.



Later the work evolved to more sophisticated pattern discovery and generalization, but here we want to focus in the beginning, in the most elementary ones. Actually, we argue that there are many good resources to support work with numbers and operations, e.g. the empty number line, but it is difficult to use the number line to support, for instance, the computation $58+27$,



if the students have no idea about the sum $58+20$ in a mental way. So, teachers must begin with those sort of mental computations and the 100 chart is clearly a good resource to work with in this context.

We also argue that it is necessary to practice those routines. So we suggest to spend ten minutes in the beginning of each mathematics class with this work.

The data was collected in some of those teachers classrooms through observation, reflection about the lessons with the teachers, videotaping of lessons and documents.

SOME RESULTS

We will show some episodes collected in the videotaped lessons that may illuminate the work of a teacher with her first graders (5-6 years old) and show students performance in seeking patterns for mental calculation.

In one of the lessons the teacher did with her students some mental exercises before passing to the main task. Those exercises were intentionally repetitive, for instance: $6+2$; $16+2$; $26+2$; $36+2$; $46+2$. $4+3$; $14+3$; $24+3$; $34+3$. $5+4$; $15+4$; $25+4$; $35+4$. And then, with the support of the 100 chart, she worked out the sums: $12+10$; $15+10$; $18+10$; $24+10$; $37+10$; $42+10$...

The teacher sought in both cases that the children could recognize the patterns to sum two, three, four, and finally ten. Mainly in this last case she focused the type of possible movements. They could either go by steps one by one jumping ten times or directly move to the next down cell of the chart. She also profited to relate to the inverse operation:

T Let us sum 10 to 26. Look, look! 26, 27... Look! ... 10 jumps.

S1 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

T Where did we go to?

S2 Down.

T ... down. We stopped in the next down step. And now we'll see: 38 plus 10? It's up to you, S1.

S3 48.

T 48. And 48 minus 10, S2?

S4 38.

T How did you get it?

S3 I turned back.

The teacher went on some more cases, getting students acquainted with this process of summing ten and also the inverse process of subtracting ten.

The main task was a problem of a man that had 50 coins of 1 euro and wanted to keep them in his two pockets. The children, working in pairs, registered many trials; most of them were decomposition in tens: $40+10$; $30+20$; in fives: $25+25$; $45+5$; $35+15$; or in a number very near from 50: $49+1$; $47+3$. But a student picked a number that he knew it was less than 50, it was 17. And he didn't know how it took to 50. The teacher then used the chart to model the situation: he could go in the "lift" from 17 to 47 and then by steps:

T Well, I have to count from 17...

S1 Till 50.

T [showing in the chart] We must count these numbers, since 17 till 50.

S2 I know.

T Look! Then I have two ways: I can go by steps, one by one, counting all units. Or we can go by lift, isn't it? 17, if I go down one floor to here [27], how many units did I walk? 17...

S3 10.

T 10. And... [Pointing to 37]

S4 20.

T 20, and... [Pointing to 47.]

S4 30.

T 30.
S5 31, 32, 33.

After this exploration, a little girl quickly said: I’ve already done three more hypothesis with this trick the teacher had just shown.

Near the end of the year, in June, the teacher decided that time had arrived to check students performance in mental calculation. When we arrived, each child had a “computer” on the table, that was a plasticized 20x15 cm² 100 chart, that they could use to answer the questions we would want to make them with numbers up to 100. Without knowing very well till when to go and intending not to trouble them, we began by 3+10. A disdainful “uf!” was heard to translate the easiness of the question. We went on to more complex questions, one to each student, following their places. We could check that very, very few students didn’t answer at first, and when we asked for an explanation they did it perfectly, using sometimes the image created with their teacher that they could go by steps one by one, or by lift jumping a floor - 10 steps - at once, or two floors (10+10), etc.

We [Turning to S1] 27 plus 11?
S1 38.
We Good! How did you do that, explain us.
S1 Well, I was in 27, I went down a floor... and walked a unit to that number, 38.

There were even several children that said they didn’t need the “computer” for the best computer was in their head, and kept the chart away:

We [Turning to S2] You. This is difficult!
T He kept away his computer.
We Oh, I see!
We Well, tell me: 29 plus 20?
S2 29 plus 20, 49.
We Very well. How did you do?
S2 I did 29 plus 10 that is 39, plus another 10 is 49.

CONCLUDING REMARKS

The teacher commented in the interviews that every child is very enthusiastic with this work, likes mathematics very much, and even when she wants to change to another subject they ask her more of those problems. She claimed however that these skills are not freely obtained. They result from a hard, daily work with the following features: (a) focusing on the discovery of number patterns and generalization; (b) verbalizing and applying those discoveries; and (c) the valuation of this work by the teacher, that stimulates students to foster their own performance.

It is also important to notice that the 100 chart is a transitory resource that the teacher intends and hopes should be progressively abandoned as far as students discover patterns that allow them to internalize a diversity of mental computation strategies, as some did right then.



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

As we can see, very young students of 5-6 years old enthusiastically involved in this work and had a great development in their mental computation ability. The discovery and generalization of numerical patterns, besides providing students with mental computation strategies that can be a powerful tool to calculate, seeks and finds the number structure and the relations and properties of numbers and operations, therefore fostering students algebraic thinking even in early grades. This way, we believe that we are making elementary mathematics deeper and more consistent.



REFERENCES

- Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies. In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp.169-180). Reston: NCTM.
- Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Task Structure. *Proceedings of the ICMI-Algebra Conference*. Melbourne, Australia, Dec.2001. Retrieved October, 1, 2008 from <http://www.scps.k12.fl.us/scctm/TextFiles/Educational%20Articles/Algebrafying%20elementary%20mathematicsPart%20I.pdf>
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?. *Mathematics Educator*, Vol.8, No.1, 139-151.
- McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics* 12, 3. FLM Publishing Association, White Rock, British Columbia, Canada.
- Ministério da Educação (ME) - DGIDC (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. Retrieved January 7, 2008, from www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgicd.min-edu.pt/
- Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.
- Ministério da Educação (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do primeiro ciclo do ensino básico*. Retrieved February 27, 2007, from www.drel.min-edu.pt/upload/docs/programa_formacao_nov_2005.pdf.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Schliemann, A., Carraher, D. & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic. From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Usiskin, Z. (1999). Doing Algebra in Grades K-4. In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 – Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston: NCTM.

Placer les enseignants en activité mathématique : Promouvoir la création de sens et le développement d’une culture mathématique

Jérôme Proulx et Nadine Bednarz, *Université du Québec à Montréal*

Abstract: This paper offers preliminary results from a two-year research project of in-service mathematics teacher education, in which teachers were engaged in a mathematical activity or what Bauersfeld (1994) calls a practice of mathematizing, for them to further develop and enrich their understanding of the concepts they teach in their everyday classroom practices. Using session’s excerpts with elementary teachers, the analysis reports on the mathematical practices developed by the teachers in regard to validation and conjecturing, as well as the difficulties teachers experienced in their engagement with the task proposed. This in return illustrates how the subsequent sessions can be thought of in relation to these teachers, and not concerning a generic group of teachers, whereas sessions become customized and adapted to these teachers.

L’insertion des élèves dans une activité mathématique où ils ont à construire et produire des mathématiques, ainsi que le travail sur le sens et le raisonnement, sont souvent vus comme deux des principaux chevaux de bataille du renouvellement de l’enseignement des mathématiques en classe. Ceci dit, la mise en place de telles pratiques dans la salle de classe exige beaucoup des enseignants qui eux, plus souvent qu’autrement, ont rarement été « éduqués » dans une telle perspective (Russell, 2000). La complexité de telles pratiques pour les enseignants et, tel que mis en évidence par les recherches, le fait que la formation mathématique offerte aux enseignants réponde peu à ces besoins, nous ont amenés à vouloir mettre de l’avant une formation sous une autre perspective.

Contexte théorique : La mise en place d’une culture de mathématisation

Une critique formulée en lien avec les expériences mathématiques vécues par les enseignants en formation concerne l’activité mathématique à l’intérieur de laquelle ils sont plongés. Tel que l’explique Bauersfeld (1994), les façons de faire développées dans la plupart des cours de mathématiques qu’ils suivent renvoient davantage à une exposition à un corpus de savoirs préétabli qu’à une participation à un *processus de mathématisation*, une activité mathématique, qui puisse inspirer des pratiques mathématiques riches en classe. Pour Bauersfeld, les enseignants ont besoin d’être immergés dans une pratique à l’intérieur de laquelle les mathématiques sont produites et sont vivantes, plutôt que d’être introduits à un corps de connaissances fixé où les mathématiques sont des absolus épistémologiques. Cette orientation nécessite toutefois un changement de perspective, comme l’explique Burton (2004), des mathématiques statiques aux mathématiques vivantes, ou pour reprendre les propos de Claude Janvier d’une : « mathématique qui se fait et non d’une mathématique toute faite ». Dans l’établissement d’une telle culture, où les concepts mathématiques sont explorés et approfondis, les enseignants sont encouragés à générer des idées, des questions, des problèmes, à rendre explicites et à partager leurs compréhensions, à négocier les sens construits, à partager et explorer des avenues différentes pour comprendre des problèmes, des concepts, des notations et symbolisations, etc. (voir Seeger, Voigt et Waschescio, 1998). C’est ce type de culture que nous

Avec quelles formes parmi celles-ci (hexagones, losanges, carrés, octogones, triangles, dodéca-gones, trapèzes, rectangles, pentagone) est-il possible de faire un pavage? Donc, avec quelles formes, et uniquement la même forme sans qu’aucun espace n’apparaisse entre elles, peut-on couvrir, par exemple, cette feuille de papier 8 1/2 x 11 ?

voulons faire vivre aux enseignants, et dont nous cherchons à documenter l’émergence et l’évolution au sein d’un projet de formation continue.

Une formation-recherche

Le projet consiste à offrir une formation continue en mathématiques dans laquelle, en regard des contenus mathématiques qu’ils enseignent, les enseignants sont plongés dans une activité mathématique favorisant le développement d’une culture de mathématisation. Notre intention est d’étudier cette démarche de formation et comprendre ce qu’elle apporte aux enseignants, en documentant et caractérisant le type de pratiques mathématiques développées à travers la formation.

Méthodologie

Deux cohortes d’enseignants participent au projet sur une durée de 2 ans (nous en sommes à la 1^{re} année) : un groupe de 10 enseignantes du primaire (3-6^{ème} année) et un de 6 enseignants du secondaire (7-12^{ème} année). Chacun des groupes fonctionne de façon indépendante. La formation est composée de séances de groupe d’une journée, une fois par mois durant l’année scolaire. Ces séances sont filmées et un journal de bord des chercheurs/formateurs est tenu. Chacune des séances est centrée sur un contenu mathématique choisi avec les enseignants et pertinent à leur niveau d’enseignement (par exemple, au secondaire, algèbre, fractions, géométrie analytique; au primaire, fractions, mesure, opérations). Pour travailler la dimension culture/pratique mathématique, les activités sont construites dans le but de promouvoir les aspects cités plus haut (validation, argumentation, négociation de sens, utilisation du symbolisme, résolution de problèmes).

Notre rôle dans ce projet est double, alors que nous sommes à la fois les formateurs et les chercheurs. Cette démarche s’aligne sur les approches novatrices de recherches combinant à la fois les aspects de recherche et de formation (Anadón, 2007), ce qui nous offre, tel que l’explique Adler (1993), un accès privilégié, de l’intérieur de la démarche, aux événements d’apprentissage et contribue ainsi à enrichir les possibilités d’analyse. L’analyse dont nous rendons compte ici se situe au début du projet, avec le groupe d’enseignantes de l’élémentaire. Elle permet de mettre en évidence l’émergence de pratiques mathématiques, sous l’angle plus spécifique de la validation, à travers les solutions mises de l’avant par les enseignantes lors d’une activité sur la géométrie.

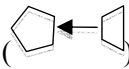
Analyse partielle d’une séance : la mise en place de pratiques de validation mathématique

L’exemple choisi permet de mettre en évidence les difficultés rencontrées par les enseignantes à entrer dans un processus de validation, montrant en retour toute la complexité pour les formateurs de travailler au développement de (nouvelles) pratiques mathématiques. L’activité est la suivante :

Moment 1 : Réalisation des pavages fonctionnels et complétion des pavages non-fonctionnels

Après que les enseignantes se soient engagées dans l'activité avec le matériel, hexagone, triangle, carré, losanges et trapèzes ont été dits possibles, alors qu'octogone, dodécagone et pentagone ont été dits non-possibles. La question posée, après être revenus avec elles sur les polygones qui fonctionnaient ou non, a été de savoir s'il existait une façon, pour ceux ne fonctionnant pas, de couvrir les « trous » laissés dans le pavage. Pour l'octogone, le carré a rapidement été proposé, mais sans réelles explications à l'appui : *c'est dans l'action en réalisant le pavage*

que les enseignantes ont vu que ceci fonctionnait : ). Pour le pentagone, le trapèze a été proposé, mais ceci a soulevé des doutes. La solution proposée consistait à placer un trapèze sur

chaque côté du pentagone (), mais elles ont vite réalisé que des trous () étaient présents « entre les trapèzes ». Et, si les trapèzes utilisés étaient placés pour que les trous soient éliminés, ceci donnait le contour d'un hexagone en son centre, donc l'insertion du pentagone laissait encore de l'espace autour de lui. Cette question fut alors mise de côté, sans offrir de véritable solution. Le dodécagone, quant à lui, avait été jumelé au triangle équilatéral pour arriver à compléter le pavage.

À cette étape, le travail en est donc surtout un d'exploration empirique : on regarde si le pavage fonctionne ou non *dans l'action*, avec le matériel proposé, sans vraiment chercher spontanément à aller plus loin. Implicitement, l'argument à l'appui invoqué est du type « ça marche parce que je peux le faire » et il porte sur des cas particuliers : sur ce qui couvre les trous pour « cet » octogone ou « ce » pentagone, alors qu'on s'appuie sur les pièces actuellement disponibles – et non des pièces « potentielles » ou « imaginées » – ce que montre notamment l'analyse du pavage du pentagone que les enseignantes laissent sans réponse, puisque les pièces actuellement disponibles sur la table devant elles ne semblent pas fonctionner pour compléter les trous du pavage.

Moment 2 : Pourquoi est-ce que ceci fonctionne? Une relance des formateurs

Les enseignantes ont ensuite eu à expliquer « pourquoi » le pavage fonctionne avec certaines formes et pas d'autres. La première réponse a été que *le carré avait des angles droits* et, pour les autres formes fonctionnant, que *chacune se plaçait au bout de l'autre*. Pour les cas où on ne pouvait réussir un pavage, les enseignantes ont expliqué que *les formes se pilaient* « sur les

pieds » lorsqu'on collait leurs côtés . Ici encore, *les arguments amenés par les enseignantes sont d'ordre empirique* (sauf pour le carré, mais on est plus sur un constat ici).

À ce moment toutefois, une entrée différente dans l'activité apparaît : une conjecture est amenée par Michèle, qui cherche une explication possible. Elle explique que pour les formes avec lesquelles on ne peut faire de pavage, le prolongement de leurs côtés se croisent

(), alors que lorsque le pavage est possible les côtés ne se croisent pas (). En discutant avec le groupe, Michèle a été amenée à voir que cette conjecture était fautive : elle ne travaillait pas avec les mêmes côtés dans les deux cas, et dans le cas de l'hexagone pour lequel le pavage est possible le prolongement de ces côtés « semi-adjacents » se croisaient aussi



(). Cette conjecture a donc été mise de côté. *On note toutefois la recherche et la formulation préliminaire de conjecture dans le but d'offrir une explication générale au pavage possible ou non, se détachant du cas spécifique, ainsi que la mise à l'épreuve par l'enseignante et le groupe de cette conjecture.*

Poursuivant sur la question de départ (« pourquoi ça fonctionne ou non »), l'équipe de Nathalie et de Bernadette s'est mis à parler d'angles en lien avec l'écartement entre les formes (expliquant que dans certains cas « il reste un trou » et que dans d'autres cas « ça empiète »). Ceci a amené à souligner ce qui se passe autour d'un même point [quatre carrés formant un pavage ont



été dessinés montrant la valeur du tour complet de 360° , ce qui a aussi été montré pour les

pavages non fonctionnels, comme l'octogone  pour qui l'ajout d'une pièce complète le pa-



vage et donne 360° ()]. Cette idée de 360° a amené des fouilles supplémentaires, entre autres chez Geneviève qui se disait que si en plaçant les angles intérieurs d'un polygone côte à côte on arrive à 360° , alors il est possible de faire un pavage sans trous. Prenant la formule $360/\text{nombre de côtés}$, elle trouva que l'octogone devait fonctionner en théorie (ou du moins selon cette théorie)⁶, car $360^\circ/8=45^\circ$. Il serait donc possible de coller 8 angles de 45° pour obtenir 360° . On assiste ici à un autre exemple d'explication par une enseignante pour appuyer les pavages possibles ou non. Même si les deux conjectures proposées à cette étape sont erronées, il est intéressant de voir que les enseignantes s'engagent dans un processus d'explication qui s'éloigne de l'argumentation empirique et des cas particuliers. *On assiste ainsi à l'émergence d'une pratique mathématique nouvelle, à travers la formulation de conjectures, et leur mise à l'épreuve par le groupe.*

Moment 3 : Pavages avec des quadrilatères divers

Dans le prolongement de ce qui précède, l'activité suivante a été proposée aux enseignantes : si avec 360° on réussit toujours à faire un pavage, peut-on faire un pavage avec n'importe quel quadrilatère? Des quadrilatères quelconques sont alors distribués aux enseignantes (aucune équipe n'ayant la même forme, un quadrilatère concave étant même introduit dans le lot).

Certaines enseignantes ont trouvé rapidement un « motif » qui semblait marcher, en assemblant leur quadrilatère de manière à offrir un dessin sans trous. C'est ici aussi le dessin qui dicte si un pavage est possible avec les formes quelconques, ce qui est assez clair dans le type d'argument invoqué oralement (« je pense que ça marche ») ou dans l'action (elles font comme si certains côtés étaient identiques et les juxtaposent pour faire le dessin; elles font comme si un des angles était de 90° et s'en servent ainsi). *On assiste ainsi dans cette nouvelle activité à un retour vers une argumentation empirique, prenant appui sur les formes spécifiques et leur apparence.* L'idée de 360° (apparue précédemment) comme condition de succès semble avoir été mise de côté, les enseignantes repartant à zéro avec ces nouveaux pavages sans s'occuper des discussions préalables sur les angles. Il devint alors évident que les enseignantes n'avaient pas nécessairement saisi précédemment que tous les angles (du polygone) étaient utilisés autour

⁶ Nous reviendrons sur cette formule par la suite dans la séance.

d'un même point pour donner 360° , mais voyaient plutôt qu'un certain nombre d'angles placés côte à côte donnait 360° , ce qui est un raisonnement sous-jacent très différent. L'idée de placer les 4 angles différents du quadrilatère quelconque autour d'un même point pour former 360° n'est donc pas venue d'emblée aux enseignantes. Par ailleurs une difficulté significative rencontrée chez presque toutes les équipes est venue du fait que pour chacun des quadrilatères proposés, il n'y avait pas de paires de côtés identiques. Ceci a amené la plupart des enseignantes à affirmer qu'avec ces quadrilatères, qui n'ont pas au moins une paire de côtés identiques, elles ne peuvent pas réussir à faire un pavage.

Discussion

Cette analyse montre bien toute la complexité de placer les enseignants en situation de construire/ produire des mathématiques. Se situant au démarrage du projet de formation, cette séance fait en effet ressortir les difficultés que suscitent les activités proposées à cette fin : l'attachement significatif des enseignantes envers une géométrie empirique, centrée sur les formes et l'apparence, et la difficulté de se détacher des cas particuliers, des formes physiquement présentes devant elles sur la table. Cette prégnance de l'empirique présente au *Moment 1* le sera de nouveau au *Moment 3*, confirmant combien il est difficile et complexe pour ces enseignantes de se détacher de l'empirique et des cas particuliers. Cela soulève un enjeu majeur pour la formation, dans le passage d'une géométrie empirique à une géométrie déductive (Salin, 2003). De plus, cette séance met en évidence une centration sur les côtés des figures (visible lorsque les enseignantes travaillent avec les quadrilatères quelconques) montrant que le concept d'angle n'apparaît pas de manière spontanée comme une des clés d'entrée dans la validation. Hors, la reconnaissance du rôle de l'angle est importante, le pavage avec un quadrilatère quelconque nécessitant une double prise en compte des contraintes « côté » et « angle ». Et, les angles se situant autour d'un même point (pour faire 360°) doivent de plus être vus comme chacun des angles du polygone.

L'analyse nous renseigne, d'autre part, sur l'émergence de nouvelles pratiques mathématiques, alors que des tentatives de conjectures générales ont été mises de l'avant et mises à l'épreuve. Le passage par l'énoncé de conjectures semble ici un élément intéressant à retenir dans le développement de ce que Cobb et al. (1994) appellent une communauté de validation, car ici l'énoncé proposé couvre plusieurs cas, est exprimé de façon générale pour tous les polygones concernés, et peut donner lieu à une mise à l'épreuve et à une argumentation au sein du groupe.

Ces analyses informent enfin sur la réorganisation possible des interventions subséquentes des formateurs. On parle ici de bien plus que construire et proposer des activités génériques aux enseignantes, mais bien, compte tenu des observations faites, de penser à des activités adaptées permettant un développement robuste de pratiques géométriques de validation. Il ressort, entre autres, l'importance d'initier ceci, avec ces enseignantes, en travaillant, en plus du détachement de la figure, à la notion d'angle. C'est notre immersion dans ces pratiques mathématiques en tant que formateurs-chercheurs qui nous permet et permettra de mieux comprendre les complexités en jeu, les conditions d'émergence de nouvelles pratiques mathématiques et de travailler à la construction d'activités prenant en compte celles-ci.

Références

- Adler, S. A. (1993). Teacher education: Research as reflective practice. *Teaching and Teacher Education*, 9(2), 159-167.
- Anadón, M. (Eds.). (2007). *La recherche participative*. Québec: Presses de l'Université du Québec.
- Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 20(1), 175-198.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P., Perlwitz, M., et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 41-61.
- Russell, S. J. (2000). Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Children Mathematics*, 7(3), 154-158.
- Salin, M. H. (2003). Comprendre les difficultés des élèves à passer de la géométrie de l'école primaire à la géométrie du collège. Actes du colloque EMF2003, Tozeur, Tunisie. CD-ROM.
- Seeger, F., Voigt, J. et Waschescio, U. (Eds.) (1998). *The Culture of the mathematics classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Une expérience de recherche collaborative entre enseignante et chercheure autour du développement du contrôle chez les élèves au secondaire

Mireille Saboya, Nadine Bednarz et Fernando Hitt
 Université du Québec à Montréal, Québec, Canada

In front of a mathematical solution, students need to be able to verify their results, judge of the coherence, validity and rigor of that solution and engage reflectively in a solving process using their judgment. These actions illustrate students' control over their mathematical activity. Nevertheless, studies in mathematics education/*didactique des mathématiques* show that students do not demonstrate much « control » over their mathematical activity, in relation to various types of content and tasks. Mathematics teachers, as practitioners, also share this preoccupation concerning students' enacted « control » in mathematics. In this study, I have developed some activities, with a mathematics teacher, that aim at bringing forth issues of control in students solving processes. The outcomes of this co-construction are shared in this paper.

Devant une production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent un contrôle de l'élève sur l'activité mathématique. Néanmoins, notre expérience en enseignement auprès d'élèves au secondaire et de futurs enseignants au primaire et au secondaire nous ont permis de constater qu'à différents niveaux, les élèves « contrôlent » peu leur activité mathématique, et ce, en lien avec différents types de contenus et de tâches à produire. Cette préoccupation sur le contrôle qu'exercent les élèves en mathématiques est partagée à la fois par des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et par la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants de mathématiques.

1. Le contrôle sur l'activité mathématique : quelques données issues de la recherche et de constats des enseignants en exercice

En psychologie cognitive, Richard (1998) fait état d'une absence de vérification chez les élèves, en résolution de problèmes, de la solution trouvée. L'auteur a constaté que certains élèves ne s'aperçoivent pas quand leur solution les conduit à une incompatibilité avec d'autres données. Face à la non vérification du résultat, au non retour sur la réponse de la part de leurs élèves devant une tâche mathématique, les enseignants se sentent démunis et découragés, se questionnant sur la façon de procéder pour arriver à développer un tel contrôle chez ces derniers. Quelques études (Coppé, 1993) viennent appuyer ces observations, en rapportant le constat fait par une majorité d'enseignants sur le peu de vérification des résultats par leurs élèves. Coppé (1993) rapporte à ce propos le discours des enseignants : « les élèves ne vérifient pas », « ils font n'importe quoi », « ils écrivent des choses aberrantes » (p.28).

Une analyse plus fine du concept de contrôle à travers différentes sources en sociologie, en mathématiques, en éducation mathématique, en psychologie et en didactique nous a amené à considérer différentes dimensions du contrôle.

2. Le concept de contrôle

Ces études sur l’activité de contrôle nous ont permis de définir un cadre de référence qui a servi d’appui à l’élaboration de situations d’enseignement susceptibles de favoriser une activité de contrôle chez les élèves. Ces situations ont été expérimentées dans une classe du secondaire au cours de l’année 2006. Six composantes du concept de contrôle ont été distinguées qui sont explicitées dans le tableau ci-dessous :

Anticipation (Margolinas, 1989; Balacheff, 1987) La situation proposée doit permettre de pouvoir poser a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître.	Vérification, validation (Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Richard, 1998; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985). La situation proposée doit permettre d’engager des vérifications successives, périodiques tout au long de la tâche. Le résultat obtenu peut mener vers un retour sur la tâche, sur la méthode, ou sur les calculs.	Engagement réfléchi (Perkins et Simmons, 1988; Schmidt, 1994) La situation fait intervenir le sens, la compréhension des concepts en jeu de manière à permettre un engagement réfléchi. Elle requiert également une prise de distance par rapport à la tâche, un temps d’arrêt, de réflexion.
Discernement, choix éclairé (Schoenfeld, 1985; Balacheff, 1987; Kargiotakis, 1996) La situation permet plusieurs engagements possibles. C’est l’idée d’un choix éclairé entre diverses stratégies possibles, pour discerner celle qui est la plus efficace, celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d’erreurs.	Idée de métaconnaissance (Artigue, 1993; Lenfant, 2002) La situation sollicite l’utilisation de connaissances de type méta, nommées métaconnaissances, liées à la prise de décision sur l’utilisation des connaissances les plus appropriées en lien avec la tâche.	Perception des erreurs, sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction (Balacheff, 1987; Piaget, 1974) La situation provoque un déséquilibre, une contradiction, des résultats aberrants, qui n’ont pas de sens... de manière à provoquer une prise de conscience. Elle invite aussi à dépasser la contradiction.

Nos objectifs généraux tournent ainsi autour du développement d’une activité de contrôle chez les élèves sous les différentes dimensions relevées, à travers l’élaboration de situations d’enseignement construites entre les enseignants et les chercheurs susceptibles de développer une telle activité chez les élèves. L’atteinte de ces objectifs nous amène vers l’approche méthodologique de la recherche collaborative.

3. La recherche collaborative

Notre questionnement, sur la construction de situations mettant à contribution les connaissances didactiques du domaine et les savoirs de l’enseignant, nous renvoie à une médiation entre deux communautés, une communauté de recherche et une communauté de pratique, en vue de construire un savoir nouveau. La recherche collaborative n’exige pas que les praticiens se prêtent à des tâches liées à la réalisation de la recherche, au sens formel du terme ; ce qu’elle exige, c’est

leur participation de co-constructeurs, c'est-à-dire leur engagement à explorer un aspect de leur pratique et à apporter leur compréhension en contexte du phénomène exploré. La recherche collaborative mise ainsi sur les compétences respectives du chercheur et du praticien par rapport au savoir exercé à co-construire (Desgagné, 2001; Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001).

Dans notre présentation, nous allons rapporter notre travail de collaboration avec une enseignante du secondaire. Celle-ci était préoccupée par le peu de contrôle exercé par ses élèves en termes de vérification de la démarche, du résultat, ses observations provenant de son expérience riche de cinq années de métier. L'expérimentation a eu lieu en secondaire 3, niveau où elle était impliquée au moment de notre co-opération. Les verbatims des rencontres avec l'enseignante nous ont permis de cerner sur quelle base s'est fait le choix des tâches élaborées au cours de la planification, comment elles se sont modifiées au cours du processus de collaboration entre chercheuse et enseignante et quelles sont les raisons qui guident cette modification.

4. Quelques résultats

Nous présentons dans le tableau ci-dessous une des tâches initiales telle qu'elle a été proposée par la chercheuse à base de discussion.

Tâche initiale
Les Robots (Confrey, 1994) Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. <i>Combien de robots y trouve-t-elle?</i> Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?

Une analyse préalable dont le cadre de référence est la notion de contrôle a guidé le choix de ce problème par la chercheuse :

- Un énoncé long qui force une interprétation du problème, à extraire des données quantitatives et voir la relation entre les données. Il s'agit ici d'un contrôle sur le processus de résolution de problèmes, plus particulièrement au niveau de la construction de la représentation de la situation.
- Situation qui force une *anticipation de l'ordre de grandeur de la réponse* par l'énoncé même (elle court, alarmée jusqu'à l'usine).

Cette situation a été retenue par l'enseignante, elle a toutefois changé la question, écrite dans l'énoncé dans une autre police, par la question suivante : « *Pourquoi panique-t-elle?* », cette question n'amenant pas à calculer mais plutôt à réfléchir. Une analyse de la situation par

l’enseignante l’amène de plus à expliciter un principe qu’elle nomme « faire clash » (que « ça frappe ») qui favorise un possible développement du contrôle chez les élèves.

Enseignante : Fait que là tu en as, donc une manière de faire ton contrôle c’est ça. C’est qu’ils arrivent à une réponse mais ils se disent « oui mais là c’est pas à ça que je m’attendais. » Tu sais, il faut qu’ils aient un gros... il faut qu’ils aient une bonne idée de l’ordre de grandeur de la réponse et que quand ils voient la réponse ça les frappe. Je ne sais pas le principe de ça mais c’est « clash », ça clash avec tes attentes, tu as une certaine attente puis là tu arrives et tu te dis « hein je ne pensais pas à ça, ça ne se peut pas. » Bon, ça c’est une réaction ça. (28 février 2006, 400-408)

Il s’agit ainsi de forcer une réaction par l’élève, un retour sur la réponse. C’est l’idée de forcer un conflit quand les élèves voient la réponse ça doit les frapper, ça doit les questionner. Nous pouvons noter que l’enseignante montre une sensibilité à la recherche, ce qui la fait rentrer spontanément dans l’analyse du problème en termes de la chercheuse (elle parle explicitement de contrôle). Elle cherche à faire la jonction, un rapprochement entre sa didactique praticienne et notre cadre de référence sur le contrôle. Ce passage entre la théorie et la pratique est spontané, l’enseignante se place dans le cadre de la chercheuse et lui donne un sens dans sa pratique. En faisant cela, elle va mettre en évidence les dimensions du contrôle sollicitées par le problème et elle nous donne accès à ce qu’elle fait dans sa pratique.

Références

- Artigue, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique, *Cahier DIDIREM*, numéro spécial 1, IREM, Paris VII, Paris.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Bednarz, N., Poirier L., Desgagné S. et Couture, C. (2001). Conception de séquences d’enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Mercier, G. Lemoyne et A. Rouchier (Dir.), *Le génie didactique. Usages et mésusages des théories d’enseignement* (p.43-266). De Boeck Université.
- Confrey, J. (1994). « Voix et perspective » : à l’écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes. *Revue des sciences de l’éducation*, Vol. XX (1), 115-133.
- Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche. Dans M. Anadon et M. L’Hostie (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (p.51-76). Les Presses de l’Université Laval.
- Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat inédite, Université de Lyon.
- Kargiotakis, G. (1996). *Contribution à l’étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris VII.
- Lenfant, A. (2002). *De la position d’étudiant à la position d’enseignant : l’évolution du rapport à l’algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7.
- Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d’analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- Perkins, D.N., et Simmons R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, 58, 3, 303-326.
- Piaget, J et Bullinger, A. (1974). Transitivité et additivité des différences infraliminaires. In *Recherches sur la contradiction*, vol 1 : les différentes formes de la contradiction, p.15-31. Sous la dir. de J. Piaget. Presses Universitaires de France, Paris.
- Richard, J. F. (1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Université de Paris VII.
- Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Problems of Transition from a Former to a New Professor in a Preservice Elementary Mathematics Teacher Education Course

*Former des enseignants du primaire à enseigner les mathématiques :
problèmes de transition entre un ancien et un nouveau professeur*

Annie Savard¹, Anna Sierpinska², Helena P. Osana³, Georgeana Bobos⁴, Diana A. Royea⁵,
Grant Hartwick^{6 7}

Résumé

Cette communication présente une partie d'un vaste projet de recherche qui vise à étudier et comparer différents aspects des cours offerts en didactique des mathématiques lors de la formation initiale des enseignants du primaire. Nous nous intéressons plus particulièrement à la manière dont les étudiants et les professeurs comprennent les objectifs des cours ainsi qu'à la manière dont certaines tâches offertes dans le cadre de ces cours sont censées atteindre ces objectifs. Nous avons observé des classes et effectué des entrevues auprès d'étudiants et de professeurs, notamment auprès d'un professeur nouvellement engagé dans une université anglophone et d'un professeur retraité de cette même université. Nous présentons ici les difficultés rencontrées par ce nouveau professeur en insertion dans une communauté de pratique de la formation des maîtres du primaire et dont les nouvelles pratiques sont issues de celles d'un professeur retraité.

Introduction

In this paper, we describe part of a larger project that aims to study and compare various aspects of elementary mathematics methods (EMM) courses in different teacher training programs in Canada. We are currently looking at such courses in three Anglophone and three Francophone universities. The project was triggered by our concern about the rather well documented mismatch between the ideal visions of teaching and learning mathematics often espoused in teacher training programs and the actual practices of beginning teachers – graduates of these programs (e.g., Frykholm, 1999). Our hypothesis was that some understanding of this phenomenon could be gleaned from looking at the relations between the EMM instructors' intentions in giving certain tasks to student teachers and these students' interpretations of these tasks. We thus engaged in collecting different forms of data in a number of EMM courses. At the time of writing this paper, we have visited classes in three Anglophone (AU1, AU2, AU3) and two Francophone universities (FU1, FU3). We have observed classes and interviewed students and instructors. We were interested in knowing how students and instructors understood the goals of the courses and how the particular tasks offered in the courses were designed to help achieve these goals.

Not surprisingly, our initial model of instructor-student perceptions proved to be too simple. At AU2, we encountered a situation of transition: a well established sequence of two EMM courses, with a history of over 30 years, developed and taught without interruption by the same instructor, was being handed over (as a result of the instructor's retirement) to a newly hired,

⁷ Authors 1 and 6 are affiliated with McGill University in Montreal; authors 2-5 are affiliated with Concordia University in Montreal.

young mathematics education professor. We will refer to the retiring professor as RP and to the newly hired professor as NP. The administration at AU2, as well as RP himself, regarded his practice as successful, and NP was quite willing to take it over.

Thus, we were confronted not only with the possible contradictions and other relations in the interpretations of tasks between one instructor and her students, but also with a system where the instructor was interpreting her own tasks as well as another instructor's tasks and students' reaction to them. In effect, students were interpreting tasks designed by two instructors.

It is within this context that our interviews with the students and both RP and NP revealed that the course was not running as smoothly with NP as it had with RP, and there was much frustration felt by both the students and the instructor. This paper presents our initial hypotheses about the sources of the frustration.

We begin with a general description of the structure of one of the two EMM courses at AU2. Next, we present our methodology of research and theoretical framework used in this portion of the larger project. This is followed by a presentation of some of our preliminary results. The paper ends with a few conclusions and more general agendas for future research.

Description of the First EMM Course at AU2

The name of the course is “Elementary School Mathematics”. It is the first of two 13-week courses devoted to mathematics and its teaching in the elementary teacher training program at AU2. The course focuses on mathematics taught in elementary school more than on its teaching; teaching issues are more in focus in the second course. The objectives of the course, as stated in the course syllabus, are to provide future teachers with “some of the background knowledge of mathematics necessary to teach it to children in the elementary school”, to give them a chance to realize what they know and understand in elementary mathematics and what requires improvement, and to help them acquire a sense of what mathematics is appropriate for children of a given age and given stage of cognitive development.

The course outline does not contain a list of elementary school mathematical topics to be studied or discussed in the course. It focuses on the organization of the course, describing the forms of classroom contact between instructors and the students, the resources, and the base of assessment.

The mathematical topics addressed in the course can be gleaned from the textbook used in the course (G.L. Musser & W.F. Burger, *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*, New York: Macmillan; first published in 1988 and then re-edited several times) and the lab manual. The topics covered in the lab sessions were, in order of appearance in the manual: problem-solving strategies, numeration systems, number theory, functions, fractions, probability, geometry: lines, angles and polygons, and measurement. The topics covered in the textbook, but not appearing in the labs were, in terms of the titles of chapters: Whole numbers, operations and properties; Whole-number computation, mental, electronic and written; Decimals, ratio and proportion, and percent; Integers: operations on integers and order; Rational numbers and real numbers, with an introduction to algebra; Statistics; Geometry using triangle congruence and similarity; Geometry using coordinates; Geometry using transformations.

Approximately 150 students enroll in the course each year. The course is taught by one professor, helped by three teaching assistants. The total classroom contact is about 31 hours in a period of 13 weeks. During the semester, there are 8 plenary lectures, during which the lecturer

and the students occasionally communicate via electronic survey devices called “clickers”. The lectures are *not* designed to cover the problems of the lab sessions in a corresponding week, but there is normally some relationship in the mathematical content of lectures and labs. The students are divided into lab sections of about 30 students. When RP taught the course, there was a 110-minute lab each week for each group. RP was present in the lab for each section, assisted by two lab assistants. In the second year of her teaching, NP reduced the number of lab sessions to 7 and offered 6 “workshops”, staffed by teaching assistants, where students could come and obtain help in understanding and solving the textbook and lab mathematical tasks.

In the labs, students work in small groups on problems provided on “worksheets” in the lab manual. Some of the problems are mere “fill in the blank” exercises; some are more challenging word problems; many are related to representing mathematical ideas with all kinds of manipulatives (e.g., base-10 blocks for numeration systems; pattern blocks for geometry; for probability, dice, cards, marbles, boxes of smarties and so forth; many different measuring devices for the lab on measurement). Lab sessions take place in a large room, furnished with tables, chairs, desks for the teacher and the assistants, blackboards, computers, closets full of teaching aids, and collections of textbooks, journals, and curricular documents. Interviewed about the tasks he designed for the labs, RP said,

The labs were very much focused on building concepts around ideas of the curriculum. I used a three-pronged approach. First, dealing with mathematics as a subject, what’s mathematics and what do you know about it, what can you learn about it. Second, the child as a learner, how does the child learn mathematics, how does the child acquire numeracy, and what kind of ideas a child that comes to school already has. And then also the idea of the teacher as a facilitator, the teacher as a person that can help the child, guide the children towards increasing their numeracy. And the teachers also having to learn a little bit of mathematics so that they can help children understand this. I put together a bunch of objectives around this idea, and then I devised a set of lab activities that try to get at some of these things.... They were activities that in some ways could have been taken out there and adapted and put in 4th grade classroom. They weren’t grade 4 activities, ‘cause you don’t teach 4th graders, you teach 20-years-olds, so treat them like adults, treat them with the respect they deserve. But the activities could still... you know, having, say, a geometry activity where they make a skeleton model with miniature marshmallows and toothpicks and you make models of tetrahedron, models of cubes, and so on. And lots of kids said, ‘when I did student teaching, it really worked well, kids loved eating the marshmallows,’ ‘cause that’s the byproduct, the fun... (Interview with RP, April 2008).

The resources for the course comprise, beside the textbook (i.e. Musser & Burger), a mathematics dictionary (*Math on Call*), the lab manual, the Ministerial Elementary School program, the NCTM Standards, and a WebCT site for the course. On the WebCT site, students can communicate with the teacher and other students, and the teacher can post assignment solutions, short video-lectures, and information about various events related to the course (e.g., dates of tests, grades).

When conducted by RP, assessment in the course included lab assignments (there was an assignment to be done individually by students at the end of each lab session), a mid-term test, and a final examination. The latter two forms of assessment were, and still are, electronically graded. The questions are mostly multiple-choice. NP kept these forms of assessment but added two new assignments, with an important weight. One was a history project, counting for 11%. NP wanted the students to familiarize themselves with the epistemological and historical construction of mathematics. The other new assignment was worth 15% of the grade. This assignment consisted of students volunteering in a community centre serving children from an ethnically diverse and low-income neighborhood with many learning difficulties. Students were required to visit the centre a couple of times, help children with their mathematics homework, and then write a report.

Methodology and Theoretical Framework

Our dominant methodological approach for the larger project is that of grounded theory (Strauss & Corbin, 1998). At each site, we are collecting a variety of different types of data, including video- and audio-taped observational data of EMM classes and lab sessions, with the focus of observation at times on the instructor and at other times, on the students; focus-group and individual interviews with instructors, teaching assistants, and students; the collection of course materials, including handouts and Powerpoint presentations; and student work, ranging from informal notes and products from small-group work to formal assignments and tests. We look at objective aspects of the data, such as types of tasks, modes of communication, and themes and expressions that appear frequently in a participant’s discourse. We then interpret these observations collectively, to build a theoretical model of a given EMM course with the capacity to explain a problem or to compare the course with other EMM courses. Because our research team consists of several scholars with varied experiences and backgrounds, the differences in our individual interpretations of the data allows for repeated cross-verification of the emerging models.

In the part of the study that is the object of this paper, we are looking at problems of “insertion” of a novice into a practice of teacher education and those of transition of practice when one of the key participants changes. Our conceptualization of these problems is framed using Wenger’s theory of communities of practice (Wenger, 1998; 2005).

From this perspective, the professional insertion of NP took place within a community of practice, understood as a group of people related through *mutual engagement* in a *joint enterprise* whose meaning is negotiated among the participants, and who use a *shared repertoire* of actions, artifacts, tools, concepts, discourses, styles, and stories (Wenger, 1998: 73). Becoming a member of a community of practice involves learning – “learning in practice” – which includes processes of “discovering how to engage”; “aligning [one’s] engagement with [the joint enterprise]...; struggling to define the enterprise and reconciling conflicting interpretations of what the enterprise is all about,” and adjusting one’s repertoire of actions and discourses to the community’s repertoire by “renegotiating the meaning of various elements; producing and adopting tools, artifacts, representations; recording and recalling events; inventing new terms and redefining or abandoning old ones; telling and retelling stories; creating and breaking routines.” (Wenger, 1998: 95). All these processes contribute to the construction of one’s identity as a member of a community of practice. Because these are processes of learning, for Wenger,

“membership in a community of practice translates into an identity as a form of *competence*.... In practice, we know who we are by what is familiar, understandable, usable, negotiable; we know who we are not by what is foreign, opaque, unwieldy, unproductive” (Wenger, 1998: 153).

This association of construction of identity with understanding and knowledge relates it closely to the negotiation of meaning of various practices inherent in the community. Indeed, according to Wenger (1998),

... practice is ultimately produced by its members through the negotiation of meaning. The negotiation of meaning is an open process, with the constant potential for including new elements. It is also a recovery process, with the constant potential for continuing, rediscovering, or reproducing the old in the new. The result is that, as an emergent structure, practice is at once highly perturbable and highly resilient (Wenger, 1998: 96).

Actions undertaken within the community of practice must make sense to its members. Their meaning is negotiated during *participation* in the practice (Wenger, 1998: 55), while *reification* (ibid, 58) is a process and a product that gives a material form to the participation.

With the term reification I mean to cover a wide range of processes that include making, designing, representing, naming, encoding, and describing, as well as perceiving, interpreting, using, reusing, decoding and recasting. Reification occupies much of our collective energy: from entries in a journal to historical records,... from lesson plans to the compilation of textbooks.... In all these cases, aspects of human experience and practice are congealed into fixed forms and given the status of object (Wenger, 1998: 59).

As an example, a university professor will negotiate the meaning of the action of teaching a particular course while *participating* in actually teaching it; his or her participation will be *reified*, in particular, in the form of a syllabus for the course, an examination, and a grading scheme. The participation is both personal and social. It is social because the activity itself is institutionalized – all professors must engage in it – and also because the meaning of this activity will be negotiated with those who have taught the course before and with the reifications of their activity (past syllabuses, past final examinations). It is personal, because the professor will personalize the meanings of his or her participation and the forms of their reification.

The dual processes of participation and reification are sources of both stability (continuity) and change (discontinuity) in communities of practice. They are sources of stability, because the conditions of participation are such that “it is not easy to become a radically new person in the same community of practice” (Wenger, 1998: 89), and reification products “tend to perpetuate the repertoires of practices” (ibid.) beyond the good reasons and contexts for which they had been invented. They are also sources of change, however, because time and technological developments inevitably bring “generational” turnovers of participants and instruments or modes of reification (ibid, 90-91).

The simultaneous investment of practice in participation and reification can be a source of both continuity and discontinuity. In fact, since both participation and

reification are inherently limited in scope, they inevitably create discontinuities in the evolution of practices. Participants move on to new positions, change direction, find new opportunities, become uninterested, start new lives.... Similarly, new artifacts, ideas, terms, concepts, images and tools are produced and adopted as old ones are used up, made obsolete, or discarded (Wenger, 1998: 90).

Wenger’s communities of practice perspective helped us to become aware of the formidable challenges that NP had to face in the first years of her work at AU2. We speak about them in the next section.

Results

In this section, we first present the sources of NP’s difficulties in becoming a member of the community of practice associated with the enterprise of preparing elementary school teachers. In the second part, we describe ways in which NP started to overcome these obstacles, asserting her own identity within the community of practice.

Obstacles faced by NP in her insertion into a new community of practice

NP first sought to maintain continuity in the EMM practice and tried to understand rather than challenge the shared meanings, and adjust to the existing reifications rather than propose her own. It appeared difficult to do otherwise, given the material robustness of the reifications developed by RP (the lab facilities, the lab manual, and the organization of the course) on the one hand, and NP’s lack of experience teaching at university, on the other. Moreover, RP’s conviction – supported by other members of the community of practice – that the course is effective, suggested that this practice is, basically, *the* model to follow and maintain.

It soon became apparent, however, that there were certain obstacles to the implementation of this plan, particularly NP’s initial difficulties with the language of instruction at AU2, and the differences between NP’s and RP’s conceptions of effective and appropriate engagement with EMM students.

The language obstacle – an unshared element of the repertoire

Becoming a member of a community of practice is difficult even if the newcomer shares a mother tongue with other participants, or possesses a good mastery of a common language of communication, which is a fundamental part of the “shared repertoire” and a pre-condition for any negotiation of meaning. This was not the case of NP, whose mother tongue was different from the language of communication at AU2 and whose mastery of this language was quite rudimentary at the beginning.

NP compensated for her lack of fluency in the language of instruction by spending more time and effort on preparing texts to be read in the lectures. The language issue was, however, a serious barrier in running the labs. To understand why it was a barrier, we first explain the organization of the work in the labs and the type of tasks given to students. In the labs, students worked at all times in small groups at separate tables. There was no time allotted for presentation of the results obtained in the small groups or for teacher-led whole class discussions. The students would work on “activities” described in the lab manual, which they owned, and, in some cases, students prepared for the activities beforehand, working on the tasks at home and

reading the relevant theory and examples in the textbook. Each lab ended with a brief assignment, containing problems to be solved individually by the students and that were not known to the students beforehand. Once a student finished the lab worksheet and the assignment, he or she could leave the room. Since students presented various levels of mathematical proficiency, they would complete their work at different times. Planning a whole class discussion at the end of the lab period would require some students to “waste their time” waiting for others to finish. Discussing the solutions to some of the more complicated lab problems in the lectures would have been difficult for both logistical and pedagogical reasons; the enormous task of reading all 150 student solutions and organizing them into sensible categories for discussion in a 50-minute lecture would have been prohibitive for the instructor.

The way RP compensated for the lack of whole class discussions of the work conducted in small groups was to circulate among the tables in the lab, challenging students’ solutions, often with a witty remark or a joke to make students feel relaxed and comfortable rather than threatened, posing additional questions based on their responses, and making links between students’ solutions and the mathematical concepts at stake. This was extremely difficult for NP to emulate, largely because of her difficulties in spontaneously using the language of instruction and the slowness caused by having to translate, in her mind, mathematical terms and other expressions. She also had other reasons for not doing this; we spell out these reasons when we describe NP’s second obstacle, that of different conceptions of the joint enterprise between herself and the students, which is described in the next section in this paper. Therefore, in NP’s labs, students resented – as they told us in the interviews – being left to their own devices in re-learning the elementary school mathematics from a more advanced and more systematized point of view.

The “activities” in the lab worksheets were not designed and sequenced in a way that would create a didactic, “action situation” learning conditions for the students in the sense of Brousseau (Brousseau, 1997). An incorrect solution or a mathematically primitive solution would pass unnoticed because no further action depended on it: no spontaneous feedback was inscribed in the design of the activities. Most, if not all activities, were straightforwardly “didactic”, in the sense of requiring teacher intervention for attaining their educational goal. Many were very simple exercises. Only some problems could be classified as “problematic tasks”, defined by Hiebert et al. (1997) as problems that required effort to solve.

As an example of a problem that was not just a simple exercise, let us look at the third task of the first “activity” in the Lab 1 (devoted to “Numeration Systems”). This first “activity” was titled “Modular arithmetic” and, after two very simple questions (e.g. “what time will it be 5 hours before 2 pm”), there was the following task:

[Task A3] A shift worker works five days of day shift (7:00 am to 3:00 pm), has two days off, then works 5 days of afternoon shift (3:00 pm to 11:00 pm), has two days off, and then works five days of graveyard shift (11:00 pm to 7:00 am). After two days off, she starts the whole cycle again. On September 10, she begins 5 days of afternoon shift. What shift will she be working October 31?

There were differences, between groups, in responses to Task A3. In one of the groups, the answer was, “she will not be working that day”; in another, the response was – “graveyard shift.” There were also huge differences in solution methods: from writing out all calendar days from September 10 to October 31 and marking the shifts and days off for each day, to using

arithmetic modulo 21 (the length of the full working cycle) and looking only at the shifts in the last ten days. Groups that solved the problem in the more sophisticated ways were not given the chance to become aware of the possible less sophisticated solutions that would inevitably appear in their future practice as teachers later on. Students in groups where only the most primitive methods were used were emerging from the lab unprepared for understanding solutions of their more mathematically able future students and even less prepared for guiding the less able students towards more sophisticated approaches.

Assuming a more advanced and systematized mathematical knowledge in the teacher, in the context of didactic (rather than a-didactic) situations, teacher-student interactions afford the teacher with an opportunity to further students’ mathematical knowledge by “formatting” (Sierpinska, 1997) students’ argumentation in ways that can establish some mathematical and socio-mathematical norms of problem solution, presentation and evaluation of correctness. If students interact only among themselves, and argumentation is not informed by sufficient mathematical culture, mathematical validity or truth could easily become a matter of opinion or authority. This perception of the situation left some of the interviewed students with a feeling that they were not developing the competence to teach mathematics with understanding.

The obstacle of different conceptions of mutual engagement and of the joint enterprise

The kind of mutual engagement NP entertained with future teachers in her previous practice as an elementary school teacher was confined to interacting with student teachers who were completing their practica in her classrooms. The nature of NP’s interactions with these future teachers was very different from that of RP with the EMM students. It was difficult for NP to transplant her previous form of engagement into the new community of practice. As a school-teacher, NP often acted as mentor for student teachers and treated them as future colleagues. This rapport with student teachers was possible because, in the situation of a practicum, student teachers and NP were all engaged in the common practice of teaching. In the EMM course, however, NP and the future teachers were not engaged in the same practice. In their perceptions, they were not even mutually accountable to each other for the success of the same “enterprise.”

Most students enrolled in the EMM course have not yet had their practicum experiences. They tend to take the position of students whose aim is mainly to pass the course and obtain a good grade rather than to acquire competencies necessary for effective teaching of mathematics in elementary school. For RP, this position was quite natural and therefore he engaged with the EMM students accordingly.

In our interviews with him, RP often called the EMM students “kids.” His rapport with them was more like a *coach* of an amateur sports team of youngsters, which, at least implicitly, appeared to serve as a metaphor for his role in the classroom (Tobin, 1990). Without using the term, he appeared to expect the students to become *makeshift teachers* (Martinet et al., 2001: 19), much like himself. His tasks were designed to motivate students to recall and re-learn elementary mathematics as other adults might and to inspire them to use similar activities in their own classes later on. The tasks were sometimes challenging; only a teacher confident with mathematics would dare use them in his or her classroom. Confidence, however, was what RP found most lacking in his students. Some of them were clearly “math phobic” and “hurt” by their teachers in their former experiences with mathematics. They had too often heard, “what’s wrong with you, don’t you understand that?” Thus, his goal in the EMM course became to en-

dow student teachers with “math power” (RP’s words). In the labs, while the tasks could be challenging, the climate of working on them was not threatening, but relaxed, the incentive to participate being in the “fun” of intellectual challenge and the familiar, everyday, and applied contexts of the tasks. For the same purpose, in the lectures, he acted more as a popularizer of mathematics than academic lecturer. He was trying “to make each lecture into some kind of presentation,” using various media and technology. In fact, he believed that mathematics is not the most serious subject for a generalist elementary school teacher. For him, the serious issues were, among others, “deforestation, teenage pregnancy, sexually transmitted diseases, [or the] loss of aboriginal languages.”

The differences between RP’s and NP’s discourses about their engagement with the students and the nature of the EMM enterprise were striking. The words “professional” and “institution” dominated NP’s discourse; RP never used them. For NP, the EMM course was, primarily, an element of a program of *professional certification*. As such, it should conform to certain criteria, *legally* established at the governmental level. A certified teacher must possess the twelve “professional competencies,” defined by the Québec Ministry of Education (Martinet et al., 2001). These competencies are aligned with the new school program, formulated in terms of student competencies (Québec Education Program, Government of Québec, 2001). For NP, a professional teacher must be prepared to teach according to the new program. She fully endorsed the model of “professional teacher” promoted in the above-mentioned ministerial document: an *autonomous* and *responsible* individual (Martinet et al., 2001: 24) who will rely on his or her own critical and creative thinking in implementing a curriculum and making use of teaching materials, and actively seek to improve his or her knowledge of mathematics. In NP’s view, the opposite of a professional teacher would be a “technician” who only follows a textbook and corrects students’ solutions by comparing them with the solution manual. She expected professional autonomy and responsibility already in the student teachers. She expected them to be responsible in fulfilling their duties as students (e.g., coming on time, being active in lectures and labs, handing in assignments) and autonomous in improving their knowledge of mathematics, without relying too heavily on the instructor for help.

Students were frustrated with these expectations, especially in the context of the RP-designed tasks. They wanted to be treated as students, not as professionals, because the RP tasks addressed them as students, sometimes even as elementary school “kids” engaged in challenging, but fun, mathematical problems. They indicated that they needed more help in re-learning elementary school mathematics; they did not see how they could achieve this objective on their own.

Overcoming the obstacles and NP’s identity construction within the new community of practice

To restore the meaning of her teaching in the EMM course, NP decided to introduce an assignment that would transform her engagement with the students into a rapport between teachers. This assignment was, for her, a reification of her participation and a distinct mark of her independent identity as a member of the community of practice at the university.

This decision was based on her previous experience of mentoring student teachers and her awareness of the gap between theory-based teacher training at the university and the problems of actual practice of teaching at school. Now, as a member of the university community, the aim

of the EMM enterprise became, for her, to reconcile these two poles. Knowledge of research on the problems of changes of students' epistemological positions in pre-service teacher training (DeBlois & Squalli, 2002) led her to propose to construct the reconciliation between theory and practice based on an iteration of engagements in one and the other: understanding theory through practice and engaging in theory-guided action in practice.

For, NP, the epistemological position of too many EMM students was that of students wanting to pass a course. Yet, the aim of the EMM enterprise was to produce teachers. For NP, it became obvious that the lab tasks were not conducive to the desired transformation of this epistemological position. NP's solution to this problem was to create, within the EMM course, a task – counting for credit as a special assignment – that would force students to engage in thinking about mathematics from a teacher's epistemological position.

The task consisted in volunteering 3 hours twice during the semester as a math tutor in a community centre serving children from a LSE milieu, helping the children in their homework and then writing a report about this experience. The grades for this assignment were awarded based on participation in the voluntary service and the quality of students' reflection in the reports.

When the assignment was first proposed, it was received by the majority of students as a huge and unacceptable discontinuity with the previous practice in the EMM course. Some students even filed a petition to the vice-Dean contesting the legitimacy of this radically new element of their assessment. The vice-Dean, however, did not consider this new assignment as a violation of the rules of the institution. Therefore, reluctantly, students started going to the centre and engaged in tutoring. As NP expected, this experience changed their attitudes. From an unwanted and tedious assignment, tutoring became, for most, an enriching and valuable experience. This change surprised the students and they expressed their surprise in writing or talking to NP. They reported on the influence the tutoring experience had on their attitude towards NP's lectures and the lab tasks. One student recounted how ashamed she became when, in tutoring, she had to use her calculator to find 6 times 8 because she did not remember her multiplication tables. Yet, she said she laughed when, in a lecture, NP was advocating the need for a teacher to master multiplication tables well and generally have sufficient computational skills not to be embarrassed by having to use a calculator in front of the students in class. She said that now she understood the instructor's point only too well. It is this kind of resonance that NP was seeking to provoke in the EMM students. Unlike the regular lab tasks, the tutoring assignment had the features of an a-didactic “action situation,” bringing about feedback that created a need for learning. In the interviews, one of the students said, “I see now that there are lots of math I have to revise for myself.” Yet, she was one of the students who expressed a great deal of frustration by not receiving what in her mind was enough guidance from NP in re-learning the elementary school mathematics from a more mature perspective.

The radically new assignment was certainly one of the most visible elements – a reification causing an important discontinuity in the practice – of NP's identity construction in the new community of practice. Other elements of the process – progress in NP's fluent use of the language of instruction, increased familiarity with institutional rules and norms at AU2, growing professional experience as a mathematics educator and researcher – did not cause discontinuities in themselves. They did, however, embolden NP to introduce certain more subtle changes in the content and organization of the EMM course, more in tune with her own vision of the goals of

the whole enterprise and her conception of participants’ mutual engagement within the community of practice.

Discussion and Conclusions

In this paper, we described some of the difficulties experienced by a newly hired professor in taking over the practice of elementary mathematics teacher education from a retiring professor. One of our research objectives was to understand and explain the professor’s experiences as she struggled to overcome these difficulties. The challenges she faced were quite serious. The new professor had never worked at a university before; she had been an elementary school teacher for several years prior to her academic appointment at AU2. Thus, she had to reconceptualize her professional identity in training adult students whom, in her previous professional incarnation, she would have treated as future colleagues. The language of instruction – a mother tongue for the retiring professor – was the new professor’s second language and was not the language in which she thought when speaking. The fact that the retiring professor had been the builder of the EMM course almost from scratch and thus, in a sense, “owned” it, made it difficult for the new professor to develop a sense of professional autonomy in the course. It was only in the task she invented herself – volunteering as a math tutor in a community centre – that she really felt “herself.” As she discussed with student teachers their experiences in the centre, she had the feeling that she and the students were finally in accord. They communicated as teachers, or, more precisely, as an older colleague with a new adept. The tutoring task was well aligned with this rapport between herself and the students. In the context of the tasks designed by the retiring professor, she could not obtain the attitude she expected in her students: as future colleagues of her former self.

In studying the EMM course at AU2, two research questions emerged: Why did tasks that worked so well with one instructor not seem to make much sense for students when taken over by another instructor?, and Why is it so difficult to reproduce a teaching practice? These questions bring forth issues that are more general in mathematics education: (a) the value of studying tasks in teacher education outside of the social, cultural, and institutional context of the courses in which they are assigned to student teachers; and (b) the problem of reproducibility of didactic situations. These issues are not new in mathematics education, but up until now have only been studied in a different context, namely that of teaching mathematics to schoolchildren. As research on mathematics teacher education grows and becomes more disciplined (see Even & Ball, 2009), these issues are transferred to the context of teacher education.

Many authors have underscored the key role that tasks play in teacher education (Arbaugh & Brown, 2005; Zaslavsky, 2009; and all papers in *Journal of Mathematics Teacher Education* 10(4-6), 2007). Such tasks, however, have been often studied out of the context of their use and interpretation. Our preliminary results are suggesting that the interpretation, and hence ultimate effectiveness, of EMM tasks depend on the larger context in which they are assigned.

As regards the second issue, already well studied in the context of teaching mathematics to school-children (e.g., Arsac et al., 1992), our research has brought to the fore the limitations of reflecting on one’s own practice as mathematics teacher educators, and communicating personal practices and experiences, which is the case of most literature in the area of teacher education (Clift et al, 2005; Cochran-Smith et al., 2005). Our data have demonstrated that the practices of one instructor, no matter how successful, are not easily transferable to that of another. These



Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009
“*Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*”, *Supplemento n. 2, 2009*.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

practices appear to depend on the values, goals, the so-called “secondary culture”⁸ of the instructors, and the way they conceptualize their professional identity.

⁸ For the concept of secondary culture, see Dumont (1968), p. 41; cited in Martinet, Raymond, & Gauthier (2001), p. 31-32.



References

- Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2005). Analyzing mathematical tasks: A catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(6), 449-453.
- Arsac, G., Balacheff, N., & Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(1), 5-29.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Clift, R. T., & Brady, P. (2005). Research on methods courses and field experiences. In M. Cochran-Smith & K. M. Zeichner (Eds.), *Studying teacher education. The report of the AERA panel on research and teacher education* (pp. 309-424). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cochran-Smith, M., & Zeichner, K. M. (2005). *Studying teacher education: The report of the AERA panel on research and teacher education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- DeBlois, L., & Squalli, H. (2002). Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres du primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 50(2), 212-237.
- Dumont, F. (1968). *Le lieu de l'homme. La culture comme distance et mémoire*. Montréal, Canada: HMH.
- Even, R., & Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI study*. New York: Springer.
- Frykholm, J. (1999). The impact of reform: Challenges for mathematics teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(1), 79-105.
- Gouvernement du Québec. (2001). *The Québec education program: Approved version*. Quebec, QC: Author.
- Hiebert, J., Carpenter, T. R., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University of Cambridge.
- Martinet, M. A., Raymond, D., & Gauthier, C. (2001). *Teacher training. Orientations. Professional competencies*. Québec, Canada: Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Sierpiska, A. (1997). Formats of interaction and model readers. *For the Learning of Mathematics* 17(2), 3-12.
- Strauss, A. C., & Corbin, J. (1998). *Grounded theory in practice*. London: Sage.
- Tobin, K. (1990). *Metaphors and images in teaching*. Perth, WA: Key Center for School Science and Mathematics, Curtin University of Technology.
- Wenger, E. (1999). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wenger, E. (2005). *La théorie des communautés de pratiques. Apprentissage, sens et identité*. Québec, Canada: Les Presses de l'Université Laval.
- Zaslavsky, O. (2009). Mathematics educator's knowledge and development. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study* (pp. 105-111). New York: Springer.

PROBLEM POSING IN TEACHER TRAINING AND AS A RESEARCH OBJECT IN DIDACTICS: TWO COMPLEMENTARY PERSPECTIVES

Marie Tichá

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic

Résumé. En réfléchissant sur la formation des enseignants, nous nous concentrons à chercher comment améliorer leurs compétences professionnelles et surtout didactiques. C’est-à-dire nous nous intéressons à la connaissance du contenu mathématique de la matière enseignée et en même temps à la capacité de traiter ce contenu du point de vue didactique et d’exploiter ces connaissances et capacités dans le processus même de l’enseignement. Nous constatons que le développement des capacités de formuler les problèmes, les énoncés (problem posing) joue un rôle très positif. Nous comprenons la capacité de formuler les énoncés de problèmes comme l’objectif et en même temps comme le moyen de la formation de futurs enseignants ainsi que des enseignants actifs. Plusieurs d’entre eux sont motivés par cette formulation des énoncés ; ce processus les invite à améliorer leurs propres connaissances. Pour les chercheurs, la formulation des énoncés de problèmes représente le moyen diagnostique important.

Le texte est basé sur les énoncés de problèmes formulés par les futurs enseignants.

INTRODUCTION

Growth of the need to acquire mathematical literacy puts great demands on the teacher’s professionalism. The Schulman’s idea that if teaching should become a profession, it is necessary to aim at creating a *knowledge base for teaching* which encapsulates, in particular, *subject-matter content knowledge, pedagogical content knowledge, and curriculum knowledge* (Shulman, 1986) is generally accepted. The authors who further develop Shulman’s ideas emphasize *knowledge of mathematics content* and refer to the need to master an “*amalgam*” of *subject matter knowledge and knowledge of pedagogy*. In other words “... mathematical experiences and pedagogical experiences cannot be two distinct forms of knowledge in teacher education” (Potari et al., 2007, p.1963).

The exploration of ways leading to improvement of professional competences (both in pre-service and in-service teacher training) has been in the center of our attention for a long time. Namely we focus on the development of subject didactic competence. What is meant by subject didactic competence is the knowledge of mathematics, the possibilities of its didactic treatment and the ability to apply this knowledge in teaching (Tichá, Hošpesová, 2005, 2006).

THE AIM AND MAIN IDEA OF THE STUDY

In the previous period of our work on exploration of ways to enhancement of teachers’ professionalism we have been focusing on the potential of a qualified pedagogical joint reflection and we have shown that it is one of the possible ways (Tichá, Hošpesová, 2007). In our ongoing research, we focused on how implementation of problem posing (as another beneficial way) contributes to development of mathematical literacy and subject didactic competence of primary school teachers.

Already Freudenthal and Polya emphasize the significance of activities aiming at problem posing as a part of mathematics training. The same need is referred to by many others (Crespo, 2003; Cristou et al., 2005; English, 1997; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; etc.). There is an agreement among many that problem posing should be viewed not only as a goal but also as a means of instruction; we stress also its role as a diagnostic tool (Tichá, 2003).

PROBLEM POSING PERFORMANCE

The topic of the assigned tasks

One of the most difficult concepts in mathematics education at primary school level (for pupils and pre-service students but often also for in-service teachers) is the concept of fractions. That is why we pay so much attention to this topic in teacher training.

The types of the assigned tasks

We define problem posing as (a) creation of new problems or (b) re-formulation of a given problem, e.g. by modifying the input conditions, by generalization, on the basis of the question “What if (not)?”, etc.

Teacher students were gradually assigned the following types of tasks asking them to pose later generally three problems

- (a) whose solution requires a given (simple) calculation ($1/4 + 2/3$, $1/4 \times 2/3$, ...),
- (b) containing specific information (Peter spent $1/2$ h writing homework and $1/4$ h studying),
- (c) whose solution leads to a given result (e.g. the result will be $8/15$).

The procedure

The investigation is carried out in several steps: posing problems (corresponding to a given calculation, picture, story, “real” or “mathematical situation”, ...); solving the posed problems; individual reflection on the posed problems; joint reflection on the posed problems or a chosen set of the posed problems; evaluation of the activity “problem posing”.

SAMPLES OF ACTUAL FINDINGS

Several examples

Let us present here several examples of tasks assigned to students and our observations.

Task 1:

Pose such three word-problems for whose solution it is sufficient to calculate $1/4 \times 2/3$.

The following triplet of problems posed by one of the students was chosen and analyzed

1. *There was $2/3$ of the cake on the table. David ate $1/4$ of the $2/3$ of the cake. How much cake was there left?*
2. *There was $2/3$ kg of oranges on the table. Veronika ate $1/4$ kg. How many oranges remained (kg)?*
3. *The glass was full to $2/3$. Gabriel drank $1/4$. What part of the glass remained full?*

Task 2:

Situation: Hanka spent $1/2$ hour writing her homework and $1/4$ hour learning new words. Pose three word-problems.

Most problems posed by the students were of similar character as the following three questions: *How much time did Hanka spend doing school work? How many more minutes did Hanka spend writing her homework than learning new words? If she spent every day in this way, how much time altogether would she spend doing school work within one week?*

Rarely did we come across questions such as: *How much more time did she spend writing her homework? In what ratio did she divide time between school work if she spent 1/2 hour writing her homework and 1/4 hour learning new words?*

This clearly signals the students' difficulty as far as representation and interpretation of fractions is concerned.

Task 3:

Pose three (five) word-problems whose solution will be the fraction 8/15.

The character of majority of the posed problems can be illustrated by the following problem: *Mum cut out the cake into 15 pieces. Peter ate 2/15 of the cake, Annie ate 1/15 of the cake and Dad ate 4/15 of the cake. How many pieces from the total remained?*

The subsequent interview proved that the author of the problem understands a “fifteenth” as a synonym for “part” (new unit). The whole is divided into 15 parts which in her point of view necessarily do not have to be the same.

As one can observe in problems in *Task 1*, various mistakes, deficiencies or even misconceptions come to surface when posing problems. All these can also be observed in the submitted solutions of the posed problems.

The analysis of the posed problems revealed that students lack the ability to use various interpretations and representations (Behr et al., 1983; Janvier, 1987). It turned out that they are too much “rooted” in the world of natural numbers. And similarly they are “imprisoned” in the “world of addition”.

Sometimes the students unaware pose an “open” question offering space for different points of view. And even if alerted to this fact, they are not able to react adequately.

If the students were asked to pose more than one problem, we could observe their stereotypical nature. Students often set their problems either only into discreet space (sets consisting of isolated elements) or only into continuous space. We could also observe a monotony of the motives.

Our original belief that problem posing supplemented with (joint) reflection is the path to development and enhancement of subject didactical competence was confirmed.

What do the students think of problem posing?

We were also interested in how students themselves perceive “problem posing”. We asked them the following questions: Was “problem posing” of benefit for you? What benefit? What is more important in your training for the teaching profession: “problem solving” or “problem posing”?

- *I found out that to pose a problem needs a much bigger effort than I expected. Previously I had believed that it wasn't that demanding – to make up a problem.*

- *I learnt that formulating problems is very important. It's enough to use a wrong word order and the problem can be understood in a completely different way.*
- *While posing problems I realized the troubles that children may have when solving the problem – comprehension, drawings, ...*
- *I'm sure that problem posing is more important. I learn to formulate problems by combining, transforming, trying out, substituting. I tell myself what to be careful about, what pupils can find difficult and so on.*

In the discussion the students indicated that it was easy to formulate a great number of problems of the same type but it was difficult to formulate a sequence of problems (cascade) of a growing difficulty, or a problem for whose solution it was necessary to connect various pieces of knowledge, or problems in which the role of the fraction alternates.

Looking for the benefits of problem posing in teacher training

The list of intentions born in mind when assigning the tasks to pose problems grew richer and longer. It confirmed that problem posing supports the development of creation of mental models, modeling of phenomena with mathematical tools, etc. It was verified that problems posed by the students inform us about the level of their understanding and therefore can be used as diagnostic tool, tool for finding obstacles in understanding, misconceptions, tool of (re)education. In addition, we regard problem posing as a challenge for students to educate themselves further, i.e. as motivation. The motivational aspect lies in the fact that in the frame of problem posing students become aware of their weaknesses, which in most cases fosters the need of change, of deepening their knowledge and therefore development of professional competences.

We still face the problem – how to influence teachers to start thinking about the potential and benefit of problem posing in mathematics education, in development of mathematical literacy, how to persuade them that problem posing means brings improvement to mathematics education.

Open questions

There are still a number of open questions to be answered, e.g. How rich knowledge base (general as well as mathematical) is needed for proficiency in problem posing? How can the benefit that problem posing brings to its authors and the shift in their content knowledge be detected and measured? What help can be offered when incorporating problem posing?

REFERENCES

- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, M. Landau (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York : Academic Press, 91-125.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems : exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 243-270.
- Christou, C., Mousolides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Shiraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37, 3, 149-158.
- English, L.D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: the notion of function as an example. In C. Janvier (ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale : LEA, 67-71.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating : Where do good problems come from? In A.H. Schoenfeld (ed.) *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale : LEA, 123-147.
- Potari, D., Zacharides, T., Christou, C., Kyriazis, G. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative. In D. Pitta-Pantazi, G. Philippou (eds.) *Proceedings CERME 5*. Nicosia : University of Cyprus, 1955-1964.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand : Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 2, 4-14.
- Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14, 1, 19-28.
- Tichá, M. (2003). Following the path of discovering fractions. In J. Novotná (ed.) *Proceedings of SEMT '03*. Praha : UK PedF, 17-27.
- Tichá, M. & Hošpesová, A. (2005). Collective reflection-a way of improving teachers' competence. In *CIEAEM 57 Proceedings—Oral presentations in Working Groups*. GRIM Palermo (Italy), 93-97.
- Tichá, M. & Hošpesová, A. (2006). Qualified Pedagogical Reflection as a Way to Improve Mathematics Education. *Journal for Mathematics Teachers Education. Special Issue: Inter-Relating Theory and Practice in Mathematics Teacher Education*. Springer, 9, 2, 129-156.
- Tichá, M. & Hošpesová, A. (2007). Reflection - one of the ways of teacher professionalization. In J. Szendrei (ed.) *Proceedings CIEAEM 59; Dobodókő - Budapest, Hungary*. Varga Tamás Foundation, 241-245.

Acknowledgement. This research was partially supported by the GACR 406/08/0710 and by the Academy of Sciences of the Czech Republic, research plan AV0Z10190503.

How teachers gain insight into dynamic geometry

Jiří Vaníček

University of South Bohemia in České Budějovice

La recherche portens sur l'utilisation d'environnement géométrie dynamique en formation des maîtres montre combien il est important que les enseignant perçoivent la géométrie dynamique comme une discipline qui introduit des manières de travailler autres que « papier – crayon » et qui fait intervenir des concepts et des raisonnements en résolution de problèmes différents. Le but de cette étude est de développer des tâches pertinentes pour les enseignants afin d'amener ces derniers à mieux comprendre la géométrie dynamique. Les enseignants éprouvent non seulement des difficultés dans son application mais dans la compréhension même de la géométrie dynamique. Ils manquent d'imagination, éprouvent de la difficulté à visualiser et ne peuvent pas toujours passer d'un niveau graphico-spatial à un niveau plus abstrait. Plusieurs d'entre eux demeurent à un niveau statique, utilisant par exemple les logiciels pour dessiner rapidement et avec exactitude sans toutefois tirer profit du dynamisme.

Overview

Teachers' preparation is essential for any successful school reforming, such as introducing technologies into school mathematics. “It is teacher who will make the difference between success and failure, and it is teacher education that must serve as a major conduit that connects teachers with new technologies” [Wilson, 2008, p. 415].

Comprehensive experience from Czech in-service teachers training focused on computers in mathematics education reflects that:

- there is a quite high correlation between success in work with mathematical software in the course and universal computer skills (some teachers aren't able to click correctly, to use the *Step back* button, to copy, they mark objects on the screen inaccurately, they are impatient and unsure);
- when we consider how teachers acknowledge computer as a suitable tool for teaching mathematics or understanding differences of geometrical drawing on the computer, we find out the generation problem described in the paragraph above is not perceptible.
- teachers react negatively, in particular when the software doesn't apply terminology or some specifics teachers are used to apply (e. g. description of objects by subscripts, more than one point on the same place, point-shaped commas, right angle mark)

We assume the previous paragraph points out the reason of difficulty of Dynamic Geometry Environment (DGE, e. g. Cabri) training courses for teachers in comparison to other types of mathematical software; however, the attractiveness of demonstrational figures is high. In contrast to other cognitive technologies, DGE differ in presence of a different type of geometry teachers are familiar with and necessity to learn principles of the new dynamic geometry. It is particularly difficult as (according to Wilson, 2008) teachers need to learn how to differentiate between powerful instructional uses of technology and more mundane uses (p. 417).

Niess (2006) says: to be prepared to teach mathematics, then teachers need an in-depth understanding of mathematics (the content), teaching and learning (the pedagogy), and technology (p. 196). Teachers enrolled in DGE course expect (or respect) the core of the course will be of pedagogical and technological nature but sometimes are stunned they have to change their understanding of mathematics, of mathematical content and concepts.

Research objectives

Teachers who start using interactive geometry software soon start using the dynamics and they are getting to dynamic geometry itself. Dynamic geometry can be comprehended as such part of geometry in which the movement of an object leads to a solution of a task or to an essential insight into a problem. From this point of view, dynamic geometry is a content-oriented part, a discipline which brings different working style from the paper and pencil geometry and uses different concepts and ways of thinking for problem solving (e.g. trajectory, velocity of the point, uniform motion are concepts taken over from physics).

When using dynamics in DGE it seems geometry has changed as it show new features teachers are not used to. Often it is necessary to redefine common concepts, e.g. a point is not a place within space but an object. In consequence, identical points are not the same, a point lying on the line is not the same relation as a line going through a point, or according to Jones (2003), there are three types of points in dynamic geometry described by dependence: free, fixed, and on an object (p. 250).

Vopěnka (1989, p. 21, 24) says that man perceives geometric objects step by step. He acknowledges and identifies them as emerging from emptiness. Contrarily, a computer can recognize only objects defined by the user. In a figure of two pairs of parallel lines, a man is able to see a parallelogram, too; however, a computer is not. The teacher has to learn to understand how a computer apprehends the geometry.

Questions arising from the context are: What tasks and figures are suitable to be introduced to teachers in order to get the dynamic geometry more easily? Where the difference between mere application tools handling and using dynamic geometrical imagination and mathematical literacy is visible? How to change teacher's mind in order to consider dynamics in the figure and not to understand findings statically? Teachers experienced an initial loss of control in this environment (McDougall, 1996). Is it possible that this feeling could be provoked by insecurity in mathematics itself when mathematics behaves unlike teacher's expectations?

Methodology and findings

Mathematics teachers' behaviour in dynamic geometry environment was observed during last decade, partly in regular pre-service studies at the Faculty of education, partly in courses of DGE (*Cabri*), and in preparation courses for teachers "ICT in mathematics education", which was a part of the national teachers training program "Information literacy" in Czech Republic in 2003 – 2006. General approach to the media and to the content, as well as to behaviour when solving several chosen tasks was observed. The tasks were given during the course as the teachers attending had not been that experienced yet.

The aim of the **Task 1** was to identify the locus of middle points S of AB segments where the edge point B was fixed and the edge point A was a vertex of a square of a given length and of a weight point in the given point M . The task was set dynamically, "There is a square board nailed in the middle of the wall. We are searching for the middle S of a rubber band stretched from one of the corners of the board to a nail on the wall as the board rotates." Attendants tested didn't see any dynamic model but a static drawing. They had to choose one out of five answers: an ellipse, a circle, an arc, a square, a segment. After answering they could create a model and verify their hypotheses.

It is interesting that there was no significant difference between answers of teachers and high school students. Most frequent answer in both groups was not a circle but an ellipse and this finding was repeated. Apparently, teachers faced a problem they had not come across before. For this reason, they could not use their knowledge of school mathematics. Their dynamical imagination was not remarkably

better than the pupils’. Their insecurity invoked by the unique situation was increasing and led to fear to answer or guess.

In the **Task 2**, teachers had to identify the locus of all intersection points O of triangles of free vertices A , B and a vertex C lying on a given line p . Teachers constructed a figure in *Cabri* and then examined the shape of the locus. The settings projected on the wall displayed the join of the points A , B as an approximate parallel to the line a . The shape of the locus resembles a parabola at the first sight (and very often even after manipulation). Not until the vertices A and B are situated in opposite half-planes given by the line a it is evident that the curve is a hyperbole.

Many teachers haven’t discovered the hyperbole by dragging. Often, they were afraid to move the points too much. Probably, they did not even consider dragging the point to other half-plane or they had no idea how and where to drag the point to achieve a significant change of figure. Possibly, they feared such a radical change might break the figure and it would not respond to the original setting. Not every manipulation leads to a mistake detection. It seems correct manipulation is essential to be mastered as well.

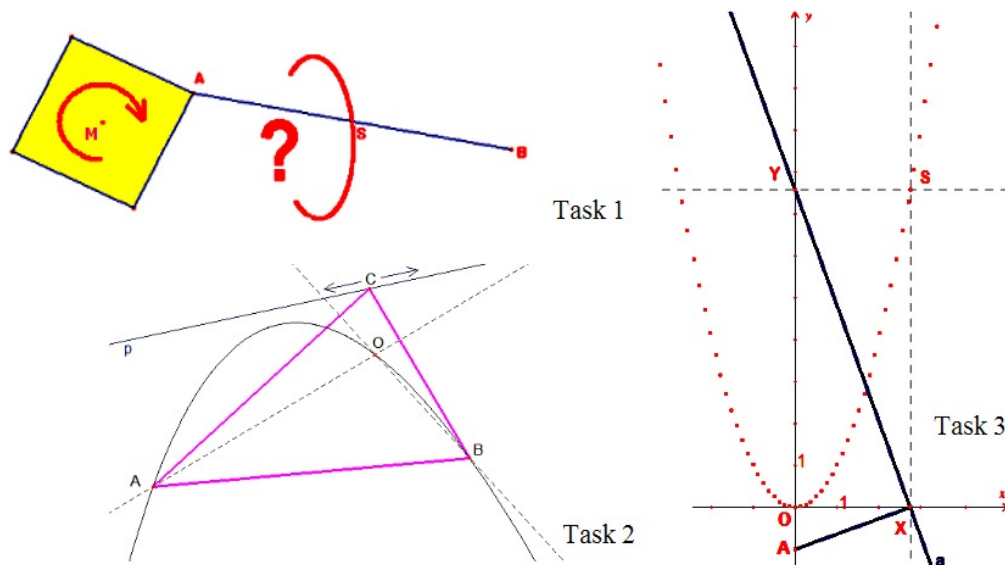


Figure 1 – Figures illustrating the Tasks No. 1, 2, 3

The aim of the **Task 3** was to discover a parabola as a trace of moving point S in a given figure which was first constructed by the user according to drawing instructions. The position of the point S is given by the positions of two points X , Y . X is a moveable point on the axis x , point Y is an intersection point of axis y and a perpendicular line a to segment AX going through X .

When the line a does not cross the axis y the task itself can prove user’s level of dynamic imagination by a simple test. Whereas an advanced dynamic geometry user would drag the point X along the axis until the intersection point would show, most of the teachers moved the plane using scroll bar so they did not get the figure as a dynamic.

The lecturer then performed a “computer proof” and the searched shape was a parabola. It was verified having created a conic of five points lying on the locus using a Cabri testing tool. Only few were against the proof results. Most of them took it for granted. Often, the lecturer had to ask for the proof himself.

It confirms a statement by C. Laborde about a complicated turn-over from visual to analytical level of geometrical thinking. Even after giving a hint of trying to prove y -coordinate of the point S was a square power of x -coordinate, for which knowledge of a 7-th grade pupil in similarity of triangles OAX , OXY is sufficient, only very few of the teachers were able to prove it.

Another research examining mistakes made by trainee teachers when handling dynamic constructions is described in (Vaníček, 2007). The result was that some type of mistakes is neither clearly mathematical, nor general computer mistakes (e.g. lack of dynamical imagination and misunderstanding of the philosophy of how the software works).

Conclusions

Teachers participating on DGE educational courses have problems not only handling the application but understanding dynamic geometry itself:

- they cannot manipulate the figure so as to be able to find important situations and invariants, they do not know where to drag
- they lack dynamic imagination, they cannot imagine changes in the figure when being manipulated
- they cannot always use findings from space-graphic level in the abstract level and to use their previous theoretical knowledge of mathematics to find the solution at the space-graphics level

The main positive finding from these teachers education courses is: as soon as teachers master controlling the DGE application and understand the principles of the dynamics, they find out the fundamentals of their work is mathematics again and not a computer. Then the insight achieved and knowledge of mathematics gives them sufficient self-confidence to realize lessons using a computer effectively which corresponds to experience described by McDougall (1996). Unfortunately, not every teacher can achieve this state and many stay at the level where they are only able to use prepared figures for dragging and to use DGE for quick and exact drawing without using its dynamics. There is a question whether any further education or existence of special textbooks would help them.

Acknowledgement: The research was partially supported by the GACR 406/08/0710.

References

- JONES, K. Classroom implications of research on dynamic geometry software. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.*, Bellaria, Italy, 2003.
- LABORDE, C. Dynamic Geometry as a Window on Mathematical Learning: Empirical Research on the Use of Cabri-Geometry. *Proceedings of 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Nicosia 2000. p. 161-173.
- McDOUGALL, D. E. Mathematics Teachers' Needs in Computer-based Geometric Environments. *8th International Congress on Mathematics Education*. Sevilla, 1996.
- NIESS, M. L. Guest Editorial: Preparing Teachers to Teach Mathematics with Technology. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, Vol. 6, No. 2, 2006, p. 195-203.
- VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií [Debates with Geometry]*. Praha: Panorama, 1989. ISBN 80-7038-031-4.
- VANÍČEK, J. Dynamical Geometry: Analysis of Mistakes in Student Constructions. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, Vol. 14, No. 4, 2007, p. 197-203.
- WILSON, P. S. Teacher Education, A Conduit to the Classroom. BLUME, G. W., HEID, M. K. (eds.) *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases and Perspectives, Volume II*. Charlotte, NC: IAP, 2008.

Analysing the impact of teachers’ research in their classrooms

Stefan Zehetmeier
 University of Klagenfurt, Austria

Rationale

In the discussion about the quality of schools and instruction, teachers are playing a central role. Various types of professional development (PD) projects are offered to support and qualify the teachers. In particular, activities that engage teachers researching their own classrooms and schools (action research, see e.g., Altrichter, Feldman, Posch, & Somekh, 2007) become an important feature of in-service professional development. Ingvarson, Meiers, and Beavis (2005) state: “PD for teachers is now recognised as a vital component of policies to enhance the quality of teaching and learning in our schools. Consequently, there is increased interest in research that identifies features of effective professional learning” (p. 2). Evaluations of such PD projects are in most cases conducted during or at the end of the initiative and provide results regarding short-term effects. Beyond that, also an analysis of sustainable effects is crucial: “Too many resources are invested in PD to ignore its impact over time” (Loucks-Horsley, Stiles, & Hewson, 1996, p. 5). But sustainability analysis is often missing because of a lack of material, financial and personal resources. (McLaughlin & Mitra, 2001). Research on this issue is rather scarce (Rogers, 2003): “Few studies have actually examined the sustainability of reforms over long periods of time” (Datnow, 2006, p. 133). Hargreaves (2002) summarises the situation as follows: “The sustainability of educational change has, in this sense, become one of the key priorities in the field” (p. 120).

To deal with this key priority, a case study with 4 teachers who took part in an Austrian PD programme (IMST project; see Krainer, 2005, 2008) was conducted. The research questions framing this research were:

- Which short-term impact is caused by the teachers’ participation in the PD programme?
- Which sustainable impact is caused by the teachers’ participation in the PD programme?
- Which factors foster or hinder these kinds of impact?

Theoretical framework

The theoretical background framing this research contains a model describing the impact of PD programmes: the IPROD-model (Impact of Professional Development model; Zehetmeier, 2008):

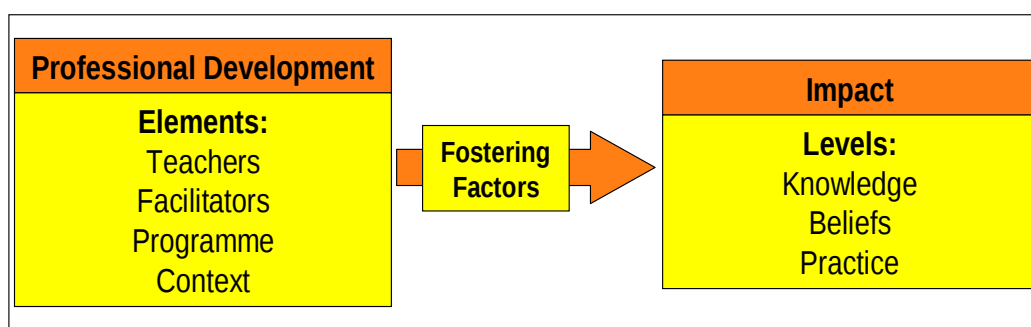


Figure 1: The IPROD-model

A more elaborated description of the model can be found in Zehetmeier (2008, 2009, in preparation).

Method

The research reported here follows a case study design (Stake, 1995; Yin, 2003). The study involved a group of 4 teachers of a secondary school in Vienna, Austria. The teachers were participants in the Austrian IMST project (Krainer, 2005, 2008) for three years (2001-2004) and had teaching experience varying from 20 years to 0 years. They all were practicing team teaching and were interested in finding out what characteristics made their team teaching successful. To answer this question, they used methods of action research (Altrichter et al., 2007) during the three years of participation in the IMST project, in particular joint analysis of their teaching videos.

The case study had a longitudinal design and analysed the sustainable impact (three years after the end of the project) of teachers' participation in the IMST project. The study included data from varying sources and dates to gain validity by “convergence of evidence” (Yin, 2003, p. 100): Collection of data was done during 2001 and 2008 and contained documents (teachers' annual written project reports; 2002-2004), archival records (author's artefacts; 2001-2004), open-ended and structured interviews (interviews with teachers, colleagues and principal; 2005, 2007, and 2008), and observations (individual observations and video recordings of the participants' teaching; 2001-2004).

Data analysis included both, inductive and deductive elements (Altrichter & Posch, 2007). In a first step, all data from before 2007 were analysed and – according to the research questions – coded inductively. The second step included conception and deductive analysis of the interviews 2007 (three years after the end of teachers' participation). The third step combined the results of the former ones and was completed by a focus group interview with all teachers and the principal (member checking; see Creswell, 2007).

Results

The study's results point – for each of the teachers – to various types of impact (e.g., only short-term, only long-term, or sustainable; planned or unintended) on different levels: E.g., new *knowledge* about team teaching and situational reflection; changed *beliefs* about feedback and self-esteem; new teaching *practice* regarding collaboration and networking with colleagues. The

study also provides answers to the question of factors fostering these kinds of impact: Ownership, networking and joint reflection turned out to be the most important factors facilitating the sustainability of impact.

The results show also impact on levels which are not covered by the IPROD-model. E.g., on the level of students' beliefs, the image and reputation of mathematics and sciences was increased from the pupils' perspective. On a beyond-school level, the new generated knowledge about team teaching was shared with teachers from other schools.

More information concerning the method and results of this case study can be found in Zehetmeier (2008, in preparation).

Discussion

These results are not only interesting regarding the research questions (see above); on a meta-level, these results also lead to a discussion and modification of the theoretical model: Zehetmeier (2008) points out that the IPROD-model is basically well suited to be used as theoretical framework for impact analysis. Nonetheless, he also states that the complexity of possible impact is not fully covered by the IPROD-model. The results of the described case study show that the IMST project also made impact on students' beliefs or other – non participating – teachers' practice. In particular, the findings of this analysis demonstrate that the taxonomy of levels of impact needs to be extended (Zehetmeier, 2008, 2009): The categories *knowledge*, *beliefs*, and *practice* are suitable to cover the impact in the teachers' level. But also on the levels of pupils, colleagues, principals, and parents all three categories (knowledge, beliefs, and practice) are respectively necessary to gather possible levels of impact. Moreover, in addition to these *in-school* levels, also *beyond-school* levels need to be considered when analyzing the impact of professional development programmes: e.g., other schools, media, policy, or scholarship.

References

- Altrichter H., Feldman A., Posch P., & Somekh, B. (2007). *Teachers Investigate their Work - An Introduction to Action Research Across the Professions*. London: Routledge/Taylor & Francis Group.
- Altrichter, H., & Posch, P. (2007). *Lehrerinnen und Lehrer erforschen ihren Unterricht [Teachers investigate their work]*. Bad Heilbrunn, Germany: Klinkhardt.
- Creswell, J. (2007). *Qualitative inquiry & research design. Choosing among five traditions (2nd Edition)*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Datnow, A. (2006). Comments on Michael Fullan's, "The future of educational change: System thinkers in action". *Journal of Educational Change*, 7, 133-135.
- Hargreaves, A. (2002). Sustainability of educational change: the role of social geographies. *Journal of Educational Change*, 3, 189-214.
- Ingvarson, L., Meiers, M., & Beavis, A. (2005). Factors affecting the impact of professional development programs on teachers' knowledge, practice, student outcomes and efficacy. *Education Policy Analysis Archives*, 13(10), 1-28.
- Krainer, K. (2005). *Das Projekt IMST² als Impulsgeber für das österreichische Bildungssystem – eine Bilanz [The IMST² project as trigger for the Austrian educational system]*. Klagenfurt: Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung (IUS).
- Krainer, K. (2008). Innovations in Mathematics, Science and Technology Teaching. In J. Vincent, J. Dowsey, & R. Pierce (Eds.), *Connected Maths. MAV Annual Conference 2008* (pp. 199-212). Brunswick, Vic: The Mathematical Association of Victoria (MAV).
- Loucks-Horsley, S., Stiles, K., & Hewson, P. (1996). Principles of effective professional development for mathematics and science education: A synthesis of standards. *NISE Brief*, 1(1), 1-6.
- McLaughlin, M., & Mitra, D. (2001). Theory-based change and change-based theory: Going deeper, going broader. *Journal of Educational Change*, 2, 301-323.
- Rogers, E. (2003). *Diffusion of innovations*. New York: Free Press.
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods (3rd Edition)*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Zehetmeier, S. (2008). *Zur Nachhaltigkeit von Lehrer/innenfortbildung [The sustainability of teacher professional development]*. Doctoral thesis. Klagenfurt, Austria: University of Klagenfurt.
- Zehetmeier, S. (2009). *The sustainability of professional development*. Paper presented in Working Group 10 at CERME6 in Lyon, France (January 30, 2009).
- Zehetmeier, S. (in preparation). What remains? The sustainability of professional development programmes. *Journal of mathematics teacher education*.