



---

## HARMONIC SOUNDS, GEOMETRICAL TRANSFORMATIONS AND COMPOSITION PROCESS IN J. S. BACH: A DIDACTIC PROPOSAL

Daniela Galante

G.R.I.M., (Research Group for Mathematics Teaching) Department of Mathematics and  
Applications of the University of Palermo,  
[danifranco@aliceposta.it](mailto:danifranco@aliceposta.it)

With this work I would like to give a modest contribution to the present debate about the importance of mathematics in modern society, by emphasizing the unity of culture in the diversity of knowledge through some parallel aspects running between acoustics physics, mathematics and music.

The world of music presents two strictly connected components: the “artistic” one and the “scientific” one. The starting point of this research is sound. The sounds which are around us are made by many sonorous concomitant waves. In general we can say that sounds are generated starting from a fundamental frequency of prevalent intensity to which are added sounds of much lower intensity and hardly perceivable. Each of these frequencies takes the name of *Harmonic*. The knowledge of the acoustic phenomenon of harmonics had great importance in the construction of scales and of the modern tonality, and became the natural basis upon which all the laws of contemporary harmony developed.

At all times, mathematics has presented and presents close relationships with the real world and a modern teaching of mathematics can't absolutely ignore these ties, if it doesn't want to be only a vain exercise of formal skills bound to be soon forgotten at the end of the educational path.

So that it is necessary to teach how to recognize the mathematics implicit in the different situations of the real world. According to these considerations, it can be supposed that something is going to change in mathematics teaching not only in its contents, but in its teaching methods, too.

So we can say that geometrical transformations have a very important role if we think about the symmetry in art, in nature and in the structure of crystals and of molecules.

With this work I would like to show an example of how it is possible, with the help of music, not only to see the probable applications of geometrical transformations but also to listen to the effect they can have over a melody and this, in my opinion, makes the study of geometry decidedly more interesting. When we listen to a music passage the first thing which attracts us is the sense of equilibrium that is to say symmetry. When we say that a figure is symmetrical we intend to say that we can apply to it some isometries which leave the whole figure unchanged while it permutes its parts. Then the object of the investigation are the geometrical transformations “discovered” in the construction of tune bits and applied to the popular tune *Frère Jacques*. In the second part the application of the isometries that J. S. Bach makes, with a scientific precision, in the *Music Offering*, is analysed.

### References

- Bach J. S., *Musikalisches Opfer*, Londra, ed. Bosey & Hawkes, 1952  
Basso A., L'età di Bach e di Haendel, *Storia Della Musica a cura della S.I.M.*, Torino, edt '85  
Coxeter H. S. Macdonald, *Introduction to geometry*, London, John Wiley, 1961  
Dedò M., *Trasformazioni geometriche*, Bologna, Zanichelli, 1996  
Emmer M., *Matematica e Cultura, Atti del Convegno di Venezia*, 1997, MI., Springer, 1998  
Frova A., *Fisica nella Musica*, Bologna, Zanichelli, 2001



Furinghetti F., *Matematica oggi, dalle idee alla scuola*, Genova, Mondadori, 1990  
Hofstadter D. R., *Godel, Escher, Bach*, Milano, Adelphi, 1994  
Karolyi O., *La grammatica della musica*, Torino, Einaudi, 1969  
La Nuova Enciclopedia Della Musica Garzanti, Milano, Garzanti Editore, 1993  
Pintacuda S., *Acustica Musicale*, Milano, Curci,  
Righini P., *Lessico di Acustica e Tecnica Musicale*, Milano, Zanibon, 1980  
Rossi L., *Teoria Musicale*, Bergamo, Edizioni Carrara, 1977

## LES SONS HARMONIQUES, LES TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES ET LES PROCEDES DE COMPOSITION DE J. S. BACH. UNE PROPOSITION DIDACTIQUE.

Daniela Galante

Membre du G.R.I.M. , Département de Mathématique de l'Université de Palerme,  
[danifranco@aliceposta.it](mailto:danifranco@aliceposta.it)

Avec ce travail je désire donner une modeste contribution au présent débat sur l'importance de la mathématique dans la société moderne en mettant en évidence l'unité de la culture dans la diversité des savoirs à travers quelques aspects parallèles qu'il y a entre la physique acoustique, la mathématique et la musique.

Le monde de la musique présente deux éléments étroitement reliés l'artistique et le scientifique. Le point de départ de cette recherche c'est le son. Les sons qui nous entourent sont formés par plusieurs ondes sonores concomitantes. En général nous pouvons dire que les sons ont origine d'une fréquence fondamentale d'intensité prédominant à laquelle se sur posent des sons de fréquence d'intensité beaucoup plus basse et difficilement percevables. Chacune de ces fréquences prend le nom de harmonique. La connaissance du phénomène acoustique des sons harmoniques eut une grande importance dans la constitution des échelles et de la tonalité moderne et constitue la base naturelle sur laquelle se développèrent toutes les lois de la harmonie contemporaine.

Dès toujours la mathématique a présenté et présente des liens très étroits avec le monde réel et un enseignement moderne de la mathématique ne peut pas absolument négliger ce lien s'il ne veut pas se réduire à un exercice stérile de habiletés formelles destinées à un oubli très rapide hors des salles de classe. Il s'agit donc d'enseigner à reconnaître la mathématique *implicite* dans les situations les plus différentes du monde réel. Avec ces considérations on peut donc supposer que l'on commence à changer quelque chose dans l'enseignement de la mathématique non seulement au point de vue des contenus mais aussi il est à souhaiter, des méthodologie didactiques. Dans ce sens les transformations géométriques jouent un rôle considérable : il suffit de penser aux symétries dans l'art, dans la nature.

Avec ce travail je montre un exemple de comment avec l'aide de la musique il est possible non seulement de voir les applications possibles des transformations géométriques mais d'écouter l'effet qu'elles peuvent avoir sur une mélodie et cela, à mon avis, rend l'étude de la géométrie décidément plus entraînant. Quand nous écoutons un morceau musical la première chose qui nous attire c'est son sens d'équilibre, c'est à dire sa symétrie. Quand nous disons qu'une figure est *symétrique* nous entendons que nous pouvons y appliquer certaines isométries qui laissent l'entière figure inchangée pendant qu'elle change ses parties. Donc objet d'enquête sont les transformations géométriques *découvertes* dans la construction d'incises mélodiques et appliquées à la mélodie populaire Frère Jacques. Dans la deuxième partie on analyse la rigoureuse application des isométries que J.S.Bach réalise avec précision scientifique dans l'Offrande Musicale.



**CIEAEM 57 – Italie – Italy**  
**Piazza Armerina,**  
**July 23-29, 2005**

**Foire aux idées, Session de Poster**  
**Forum of Ideas, Poster Session**

---

### **Bibliographie**

- Bach J. S. , *Musikalisches Opfer*, Londra, ed. Bosey & Hawkes, 1952  
Basso A., L'età di Bach e di Haendel, *Storia Della Musica a cura della S.I.M.*, Torino, edt '85  
Coxeter H. S. Macdonald, *Introduction to geometry*, London, John Wiley, 1961  
Dedò M., *Trasformazioni geometriche*, Bologna, Zanichelli, 1996  
Emmer M., *Matematica e Cultura, Atti del Convegno di Venezia*, 1997, MI., Springer, 1998  
Frova A., *Fisica nella Musica*, Bologna, Zanichelli, 2001  
Furinghetti F., *Matematica oggi, dalle idee alla scuola*, Genova, Mondadori, 1990  
Hofstadter D. R., *Godel, Escher, Bach*, Milano, Adelphi, 1994  
Karolyi O., *La grammatica della musica*, Torino, Einaudi, 1969  
La Nuova Enciclopedia Della Musica Garzanti, Milano, Garzanti Editore, 1993  
Pintacuda S., *Acustica Musicale*, Milano, Curci,