A.I.C.M.
Associazione degli Insegnanti
e dei Cultori di Matematica

G.R.I.M.
Gruppo di Ricerca
sull'Insegnamento delle Matematiche

ATTI DEI CONVEGNI DELL'A.I.C.M.

1

MICHELE CIPOLLA

(1880-1947)
LA FIGURA E L'OPERA

CONVEGNO CELEBRATIVO NEL CINQUANTENARIO DELLA MORTE

(Palermo, 8 settembre 1997)

PALERMO
1998

INDICE

Prefazione

Il Circolo Matematico di Palermo ha pubblicato recentemente (1997) una scelta delle *Opere* matematiche di Michele Cipolla (1880-1947), a cura di due insigni algebristi italiani, Guido Zappa e Giovanni Zacher.

Tale pubblicazione rende finalmente giustizia ad una grave dimenticanza dei contributi di alto livello raggiunti da Cipolla in vari ambiti della ricerca matematica italiana della prima metà del ventesimo secolo. Già nel 1991 il Circolo Matematico di Palermo aveva pubblicato una raccolta delle *Opere* di Michele De Franchis (1875-1946), curata da Ciro Ciliberto ed Emanuele Sernesi, e chi scrive si augura che al più presto esso si faccia promotore anche della pubblicazione di una *Selecta* delle opere di quei matematici che con Cipolla e De Franchis rappresentarono una generazione molto importante per la cultura scientifica siciliana. Di Cipolla, Zappa e Zacher scrivono:

> «A distanza di quasi mezzo secolo dalla sua scomparsa, Michele Cipolla appare come una personalità molto notevole nell'ambiente matematico italiano della prima metà del nostro secolo.
>
> In un periodo in cui, nel nostro Paese, l'Algebra e la Teoria dei numeri erano scarsamente coltivate, egli ha saputo creare una scuola la quale, benché geograficamente alquanto limitata, ha contribuito a tener vivo l'interesse per quelle discipline.»

L'A.I.C.M. (Associazione degli Insegnanti e dei Cultori di Matematica), in occasione del cinquantesimo anniversario della scomparsa di Cipolla, ha promosso, in suo onore, un Convegno, svoltosi l'otto settembre 1997, per delinearne la figura e l'Opera.

Questi Atti del Convegno, stampati con il contributo del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche) del Dipartimento di Matematica di Palermo,* contengono in appendice anche le *Conferenze*, tenute da Cipolla su vari argomenti di Matematica lungo l'arco della sua vita, e che qui vengono pubblicate per la prima volta insieme.

Abbiamo ritenuto, in tal modo, di fare opera gradita a tutti gli appassionati e gli studiosi di Matematica, i quali avranno magari saputo da altri qualcosa su di esse, senza averne mai avuto, però, l'opportunità di gustarne la lettura. Infatti, oltre che insigne matematico, Michele Cipolla fu anche un valente didatta e un efficace conferenziere.

Il suo interesse per la didattica e la divulgazione della Matematica, nonché per la Storia della Matematica, non venne mai meno, lungo tutto

---

* I contributi del GRIM sono relativi ai fondi M.U.R.S.T. 40% (1996) e al contratto CNR n. 96.00204.01.

l'arco della sua carriera scientifica. Da spirito illuminato, egli era realmente consapevole del ruolo centrale della Matematica nella cultura dell'uomo, ma, com'egli stesso avvertiva:

«Questa cultura non può acquistarsi se non con lo studio diligente delle fonti, con la lettura attenta di opere storiche, critiche e didattiche della Matematica.»

È proprio questa cultura ad ampio spettro, che spazia dalla letteratura all'arte e alla matematica, che traspare in modo vivido dalle *Conferenze*, che mantengono, ancora oggi, intatto il loro fascino e la loro immediatezza, e che riflettono l'arte oratoria veramente magistrale di Cipolla.

Possiamo riportare per esse lo stesso giudizio che Luciano Chiara (1910-1969) espresse presentando, nel 1962, la sesta ristampa di un'altra raccolta di conferenze di Cipolla, pubblicate sotto il titolo di *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori:*

«Coloro che, come me, ebbero la ventura di godere dell'alto magistero dell'insegnamento di Michele Cipolla sanno dell'entusiasmante comunicatività delle sue lezioni. Ed io reputo queste *Conferenze* come le più adatte a dare un'idea precisa della sua statura nell'arte del porgere. Esse sono state raccolte e stampate quasi come venivano di getto magistralmente dettate dalla sua voce suadente, ora squillante, ora bassa, ora lenta, ora veloce e sempre accompagnata dalla mimica più composta ed espressiva.»

Cipolla diede mirabile prova delle sue qualità didattiche in alcuni trattati universitari che sono ormai tra i classici della letteratura matematica del novecento: l'*Analisi Algebrica* del 1914, che ebbe varie edizioni e che ricevette la lode di F.Severi (1880-1961), matematico geniale ma non certo tenero nei suoi giudizi; la *Teoria dei Gruppi d'ordine finito*, pubblicata in tre volumi tra il 1920 e il 1922, per quell'epoca una delle opere più avanzate sull'argomento; le *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, che ebbero varie edizioni; *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori* (prima edizione 1927) che è stata utilizzata da diverse generazioni di insegnanti per la preparazione ai concorsi e che è ancora in commercio.

Le *Conferenze* sono state tutte trascritte, poiché alcune parti degli estratti originali erano a malapena leggibili, mantenendo ogni caratteristica della stampa originale, compresa la numerazione delle note, che a volte non segue l'uso corrente.

Aldo Scimone
Filippo Spagnolo

COMITATO ORGANIZZATORE

CARMELO ARENA

DOMENICO CUCCIA

TERESA MARINO

FRANCESCO PINTALDI

SERGIO PRESTANA

ALDO SCIMONE

FILIPPO SPAGNOLO

DIARIO DEI LAVORI

SEDUTA INAUGURALE

Lunedì 8 settembre 1997 - ore 9.30

Saluto e Introduzione del Prof. DOMENICO CUCCIA (Preside del Liceo socio psico-pedagogico ‘C.Finocchiaro Aprile’ di Palermo).

Saluto della Prof. TERESA MARINO (Direttore del G.R.I.M., Dipartimento di Matematica di Palermo).

Saluto del Prof. FRANCESCO PINTALDI (Presidente dell'A.I.C.M., Liceo Europeo ‘Maria Adelaide’ di Palermo).

FEDERICO BARTOLOZZI: «L'opera matematica di M. Cipolla con particolare riguardo alla Teoria dei Gruppi».

FILIPPO SPAGNOLO: «Michele Cipolla e la Didattica delle Matematiche».

II SEDUTA

Lunedì 8 settembre 1997 - ore 15.30

FILIPPO SPAGNOLO: «I lavori di M.Cipolla relativi all'assioma di Zermelo».

ALDO SCIMONE: «La presenza di Michele Cipolla a Corleone dal 1904 al 1911».

ALDO BRIGAGLIA: «Michele Cipolla e il Circolo Matematico di Palermo».

PREMIAZIONE DEI VINCITORI DELLE GARE DI MATEMATICA
1996-97

LA FIGURA E L'OPERA DI MICHELE CIPOLLA
(1880-1947)

CONVEGNO CELEBRATIVO DEL CINQUANTENARIO DELLA MORTE

SEDUTA INAUGURALE

8 settembre 1997 - ore 9.30

Prof. DOMENICO CUCCIA, *Preside del Liceo socio psico-pedagogico "C.Finocchiaro Aprile" di Palermo.*

Mi è gradito dare il benvenuto all'A.I.C.M. che oggi celebra in questa nostra sede il Cinquantenario della morte di Michele Cipolla, illustre Cultore di Scienze Matematiche, e Maestro insigne che ha creato una Scuola di studiosi che rende onore alla Città di Palermo e alla cultura matematica italiana.

Sul piano personale mi lega alla figura di Michele Cipolla lo studio della matematica fatto negli anni liceali, e non posso non ricordare con simpatia la chiarezza e nello stesso tempo il rigore scientifico dei Suoi testi che invitavano allo studio e aprivano orizzonti speculativi di enorme spessore. Attraverso lo studio sui libri del Prof. Cipolla, l'alunno perveniva alla piena consapevolezza del valore teorico e al tempo stesso pratico delle Scienze Matematiche.

Auspicherei, per il bene della Scuola, che quei magnifici testi, con i dovuti aggiornamenti, fossero riproposti alle nuove generazioni di studenti.

Non posso che augurare ai partecipanti al Convegno un proficuo lavoro e mi dichiaro onorato di potere accogliere, anche per il futuro, incontri di studio dell'Associazione A.I.C.M., per i cui componenti auspico i successi che meritano e i dovuti riconoscimenti da parte delle autorità competenti.

Prof. TERESA MARINO, *Direttore del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica di Palermo.*

Sono contenta di quest'occasione che vede realizzato un desiderio che tanti di noi, mi riferisco all'A.I.C.M. e al gruppo G.R.I.M. di ricerca in Didattica della Matematica che da tanti anni opera presso il nostro Ateneo palermitano, hanno coltivato e portato pazientemente a buon fine, e cioé quello di ritrovarci tra allievi ed allievi degli allievi ... (in un principio di ricorrenza) a ricordare la figura di uno dei più grandi matematici della gloriosa scuola palermitana: Michele Cipolla, di cui ricorre il cinquantenario della morte e che è stato maestro di molti nostri maestri.

Mi piace sottolineare il fatto, secondo me significativo, che il nostro incontro si svolga al di fuori delle strutture accademiche perché questo, a mio parere, segna un momento di riavvicinamento tra la cultura cosiddetta “laica” (tra virgolette, la *Città* o come si suol dire il *Territorio*) e la Cultura cosiddetta accademica, in qualche modo elitaria, come è stato negli ultimi decenni.

In realtà ciò costituisce una sorta di ritorno alle origini, in quanto il Cipolla è sempre stato attento ai problemi dell'insegnamento della Matematica e presente nella Didattica militante.

Ringrazio perciò tutti i convenuti, ed in particolare la Scuola che ci ospita per aver reso possibile questo incontro che, speriamo, sia il primo di una lunga serie. Grazie.

Prof. FRANCESCO PINTALDI, *Presidente dell'*A.I.C.M. *(Associazione degli Insegnanti e dei Cultori di Matematica), Liceo Europeo 'Maria Adelaide', Palermo.*

Quale Presidente dell'A.I.C.M., rivolgo un doveroso ringraziamento, in primo luogo al Preside dell'Istituto 'C.Finocchiaro Aprile', prof. Domenico Cuccia, sia per le parole di apprezzamento rivolte all'A.I.C.M. per l'organizzazione del Convegno, sia per la disponibilità dimostrata, incoraggiando in tal modo l'iniziativa.

Allo stesso modo ringrazio, a nome di tutti i Soci, i relatori che ci stanno onorando della loro partecipazione.

Nel commemorare la figura del grande Matematico e Maestro, prof. Michele Cipolla, non possiamo non sottolineare il grande contributo che l'ambiente culturale matematico palermitano ha dato alla cultura matematica internazionale a partire dagli ultimi anni del 1800, da quando, cioé, nel 1884 il prof. G.B.Guccia istituì il Circolo Matematico di Palermo, che ha dato stimoli fortemente significativi alla ricerca matematica e fama, per le pubblicazioni raffinate ed eleganti, a molti matematici siciliani.

Tra questi grandi matematici dobbiamo annoverare il prof. Michele Cipolla. L'A.I.C.M., nel cinquantenario della morte del Maestro, ha voluto rendere omaggio ricordandone l'Opera e la Figura, ritenendo, giustamente, che grande sia stato il Suo contributo sia nella ricerca matematica che nella didattica, anticipando con i Suoi metodi di insegnamento molti degli orientamenti attuali. I notevoli sforzi che in questi anni si compiono per eliminare la tendenza dei giovani, che in genere rifiutano l'approccio con la matematica, sicuramente sono in linea con il suo modo di presentare la matematica.

Procederemo, in coda al Convegno, alla premiazione delle gare di Matematica. Si tratta di gare in spirito di amicizia, organizzate per stuzzicare la curiosità e avvicinare la matematica alla gente. Le gare costituiscono una grande occasione per promuovere interesse per la disciplina proponendola in modo diverso, dandole la dimensione di divertimento, proprio come il Maestro in vari Suoi scritti ha tenuto a sottolineare.

Ancora un doveroso ringraziamento va al prof. Sergio Prestana che ha curato l'emissione di un Annullo Postale Speciale dell'Ente Poste, e infine ai familiari dello Scomparso che ci hanno onorato della Loro partecipazione e al pubblico che così numeroso ha voluto manifestare un profondo interesse per il Grande Matematico e per la Cultura Matematica in generale.

L'opera matematica di Michele Cipolla con particolare riguardo alla Teoria dei Gruppi

Federico Bartolozzi
Dipartimento di Matematica di Palermo

Nel Dicembre del '94, in occasione dell'inaugurazione dell'anno accademico dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, nella prolusione da me tenuta avente come argomento *"G.B.Guccia e il Circolo Matematico di Palermo-La grande generazione matematica palermitana"* concludevo il mio intervento occupandomi, brevemente, della grandiosa opera matematica di Michele Cipolla, uno dei tre grandi, insieme a Giuseppe Bagnera e Michele De Franchis di quella generazione e auspicando la nascita di qualche iniziativa atta a colmare un'assenza, non lodevole, di attenzione nei suoi riguardi.

Nel cinquantenario della sua morte (che ricorre proprio oggi), questo Convegno, cui mi onoro di partecipare, altre meritorie iniziative che seguiranno[1], ma, soprattutto, la ristampa recentissima (luglio '97) delle opere scientifiche più significative di Michele Cipolla da parte del Circolo Matematico di Palermo[2], segnano un avvicinamento all'obbiettivo auspicato che, in qualche misura, ripara il torto fatto, seppure inconsapevolmente, nei suoi riguardi: quello di avere taciuto dei suoi grandi meriti per tanti lustri.

Detto questo, nel difficile, per me, tentativo di dare una visione, seppure parziale, della sua opera scientifica più originale, ricordo anzitutto, senza pretesa di completezza quali sono stati i filoni più importanti delle ricerche del Cipolla:

I) Questioni aritmetiche e precisamente:
a) ricerche di analisi indeterminata;
b) ricerche sulle congruenze numeriche;
c) ricerche di calcolo aritmetico integrale;
d) aritmetica asintotica.

---

1 Fra queste, la *Commemorazione* prevista a Roma il 12 Dicembre '97 presso l'Accademia Nazionale dei Lincei.

2 Si rinvia, appunto, all'Introduzione del volume *Michele Cipolla-Opere* a cura di Guido Zappa e Giovanni Zacher- Supplemento ai Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo-Serie II-47-1997. Per la bibliografia sulle questioni trattate nella presente nota, in particolare per il problema della classificazione dei gruppi semplici finiti si segnala la monografia di Daniel Gorenstein, *Finite Simple Groups, an introduction to their classification*, Plenum Press- New York and London, 1982.

II) Questioni algebriche e precisamente:

a) ricerche sui gruppi finiti;

b) teoria delle equazioni (radici dell'unità, radici immaginarie, basi di un ideale, etc.).

III) Questioni sulla sommazione delle serie e sui sistemi di funzioni ortogonali.

IV) Questioni sui fondamenti della matematica.

V) Storia e didattica della matematica.

Come Giovanni Zacher e Guido Zappa affermano nell'*Introduzione* alla ristampa di cui poc'anzi parlavo-ristampa che si è potuta realizzare grazie al contributo scientifico offerto da questi due eminenti algebristi italiani, ai quali rivolgo un pensiero grato e devoto-"gli apporti principali (del Cipolla) alle conoscenze matematiche sono quelli relativi alla soluzione di equazioni algebriche nei campi finiti, e quelli costituenti la teoria dei sottogruppi fondamentali. In ambedue questi campi egli è stato apportatore di idee nuove ed ha raggiunto risultati profondi grazie alla sua straordinaria abilità dimostrativa".

Inizio, quindi, col ricordare i risultati sulla risoluzione di equazioni algebriche in un campo finito: si tratta di un gruppo di lavori, molti dei quali scritti in giovinezza (il cosiddetto 1° periodo (1902-1907), per riprendere l'impostazione di Zacher e di Zappa), dedicati al problema della soluzione delle congruenze binomie. Più in generale il problema globale si può porre in questi termini:

Se k è un campo finito di ordine $q\geq 2$ e se $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ [$k[x]$, con $a_0 \neq 0$ e $gr\ f(x)=n$, $0<n<q-1$ (come si può supporre) risolvere l'equazione $f(x)=0$ significa trovare un polinomio nei coefficienti indeterminati di $f(x)$ tale che, per ogni sistema di valori dei suddetti coefficienti per i quali l'equazione $f(x)=0$ abbia n radici distinte, $f(x)$ assuma un valore uguale ad una di queste radici.

Una tale soluzione ottenuta "senza tentativi", cioè con formule che forniscono direttamente la soluzione soltanto in funzione dei dati, è stata dal Cipolla chiamata una soluzione "apiristica" (α privativo e πειρ<ω = provo, tento).

Il Cipolla, dopo una serie di lavori sulla questione, lavori particolari ma significativi per la tecnica innovativa adottata per la risoluzione del problema, soltanto nel 1930 (cioé negli anni della piena maturità scientifica) risponderà completamente alla questione generale fornendo delle formule di risoluzione apiristica delle equazioni di grado qualsiasi in un campo finito. Tale felice conclusione avverrà dopo avere ridotto il problema ad una questione di interpolazione tipo Lagrange e mediante una formula interpolare[3] valida soltanto in un campo finito, ma più vantaggiosa per la sua semplicità, della formula classica di interpolazione del Lagrange (non passi sotto silenzio che negli anni '30, Cipolla poteva sfruttare anche le idee di un altro grande matematico, suo coetaneo, Gaetano Scorza, il quale aveva ripreso (1926) in un caso particolare, quello delle equazioni binomie in un campo finito, il problema della risoluzione, trattandolo come un problema di interpolazione e riottenendo le formule di risoluzione di Cipolla del 1906).

Ma andiamo per gradi, poiché non è possibile apprezzare appieno il grande contributo dato dal Cipolla al tema in questione se non si prendono in esame i suoi lavori giovanili, ma pionieristici quanto alle tecniche proposte.

Il Cipolla esordisce sul tema affrontando problemi a prima vista molto particolari, già da altri autori visitati (Alberto Tonelli, Tamarkine, Friedmann, Legendre etc.) e spesso risolti con metodi sperimentali, talvolta farraginosi, per lo più validi caso per caso; ma, ecco il matematico lungimirante in azione: pur correndo il rischio di mostrarsi ripetitivo, intuisce che sono necessarie idee nuove, da realizzare con metodi diversi da quelli sino ad ora utilizzati, per poter pervenire a risultati meno empirici.

Brevemente accenniamo ai vari gradi delle conquiste del Nostro nell'ambito delle equazioni binomie in un campo finito o, se si vuole, delle congruenze binomie.

In una prima nota del 1903 Cipolla prende in esame la congruenza $x^2 \neq a \ (mod\ p)$, a intero, p primo dispari, mirando subito al caso difficile in cui $p \neq 1 \ (mod\ 8)$. In tal caso, A.Tonelli,professore a Palermo dal 1877 al 1879, aveva trovato una soluzione (1892) la quale presupponeva la conoscenza di numeri soddisfacenti certe condizioni ad hoc, da determinarsi sperimentalmente (la risoluzione, come suol dirsi, richiedeva un certo numero di "tentativi"). Cipolla trova una nuova formula che esige pur essa tentativi, ma con il numero di questi fortemente limitato.

---

[3] L'osservazione è questa: in un campo finito di ordine q l'espressione $1-x^{q-1}$ assume valore 1 se $x=0$ e valore 0 per ogni $x \neq 0$; ne deriva che, dati certi valori α_i, β_i, ... ,γ_i del campo in questione, la funzione in α, β, ... , γ :

$$[1-(\alpha-\alpha_i)^{q-1}]\ [1-(\beta-\beta_i)^{q-1}] \cdots\cdots [1-(\gamma-\gamma_i)^{q-1}]$$

assume valore 1 per $\alpha=\alpha_i$, $\beta=\beta_i$, ... , $\gamma=\gamma_i$, e valore 0 altrimenti. Combinando le espressioni di questo tipo per $i=1, 2,$ ... , n con coefficienti r_1, r_2, ... , r_n, si trova un'espressione che prende valore r_1 per $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, ... , $\gamma=\gamma_1$, r_2 per $\alpha=\alpha_2$, $\beta=\beta_2$, ... , $\gamma=\gamma_2$ e così via. Con tale formula Cipolla trova una soluzione apiristica per ogni equazione algebrica in un campo finito.

Cipolla ritornerà subito dopo (1904) sulla medesima congruenza trattandola, prima, rispetto ad un modulo potenza ad esponente intero positivo di un primo dispari, poi, modulo un qualsiasi intero composto dispari, sino a pervenire ad una soluzione "senza tentativi", cioé con la parola da lui introdotta, *apiristica*.

Con questa serie di lavori, limitatamente a congruenze binomie del tipo $x^2 \neq a \ (mod\ m)$, m intero positivo, Cipolla faticosamente, ma con successo, apre un nuovo sentiero, indicatore della strada, più elegante e meno ambigua da percorrere; da osservare che, in quegli stessi anni (1905), relativamente a congruenze della forma $x^2 \neq a \ (mod\ 2^h)$, Cipolla, dopo avere discusso e confutato un metodo di risoluzione per essa dovuto a Legendre, ma basato sull'uso poco cauto di serie, talora divergenti, riprende l'algoritmo di Legendre rendendolo rigoroso ed estendendolo alla risoluzione delle congruenze della forma $x^{2^m} \neq a \ (mod\ 2^h)$. E così anche il caso $p=2$ viene sistemato. Nel biennio successivo, 1906-1907, Cipolla affronta il problema globale di cui parlavo all'inizio supponendo dapprima $¿k¿=q=p$, p primo dispari e $f(x)=x^n-a=0$ (è noto, infatti, e a ciò abbiamo già accennato, che se $¿k¿=p$ la teoria delle equazioni in k si identifica con quella delle congruenze $(mod\ p)$).

Precisamente in un lavoro del 1906 pubblicato su “Mathematische Annalen” Cipolla, riducendosi senza perdere di generalità al caso in cui $n¿(p-1)$, fornisce soluzioni apiristiche di quell'equazione una volta conosciuto un cosiddetto "sistema completo di n-mo grado” cioè un sistema di $p-1/n$ numeri le cui potenze n-me siano tutte incongrue tra loro $(mod\ p)$.

Successivamente, con due note lincee del 1907 chiude definitivamente la questione, relativamente alle congruenze binomie generali $x^n \neq a \ (mod\ p^h)$, p primo, $h \geq 1$. Precisamente, nella I nota lincea, riconosciuto che $n¿p^{h-1}\ (p-1)$ (sempre), Cipolla tratta il caso in cui n è del tipo p^r (stesso primo p); nella II nota lincea tratta il caso di n divisore qualsiasi di $p^{h-1}\ (p-1)$ definendo i cosiddetti “sistemi completi di n-mo grado $(mod\ p^h)$”, concetto che generalizza quello di “sistema completo di n-mo grado $(mod\ p)$”.

Cipolla ritornerà, come già detto, parecchi anni dopo sull'argomento con una risposta la più generale possibile.

Notevoli, inoltre, nell'ambito della teoria dei numeri, alcuni risultati concernenti la determinazione asintotica dell'n-mo numero primo (argomento della sua tesi di laurea) e la totalità di numeri primi che non superano un numero assegnato: in tali lavori è possibile scorgere Cipolla nella qualità di illuminato allievo di Gabriele Torelli, impegnato, sotto la guida di questo ottimo cultore di teoria dei numeri, professore a Palermo dal 1891 al 1907, nelle sue prime difficili ricerche, nonché, sotto la veste di continuatore dell'uso di raffinate tecniche numeriche, il cosidetto "calcolo numerico integrale" creato dal geniale matematico E.Cesàro per sistemare in un contesto generale vari procedimenti di aritmetica.

Michele Cipolla seppe, nel corso della sua lunga attività scientifica, sviluppare ulteriormente tale metodo, applicandolo in svariate sue ricerche. Ma mi sembra sia giunto il momento, tacendo, per motivi di spazio e di tempo, di altre ricerche di teoria dei numeri, tutte ad alto livello, di parlare di Michele Cipolla "gruppista".

Per fare ciò partirò da lontano per tentare, nella mia visione, di spiegare quale progetto di ampia portata abbia Egli potuto concepire: quello della "classificazione" dei gruppi finiti.

Avrò come riferimento, e più tardi si capirà il motivo, il problema che forse di più ha appassionato i matematici di questo secolo, soltanto in tempi recenti compiutamente risolto, quello della "classificazione dei gruppi semplici finiti". Di tale problema mi occuperò brevemente, dopo aver detto cosa debba intendersi con la parola "classificazione". In Matematica, il procedimento usuale per "classificare" una collezione di oggetti consiste 1) nell'associare ad ogni elemento della collezione una certa famiglia di invarianti, 2) nel provare che ogni oggetto è univocamente individuato dai suoi invarianti, 3) nel determinare quali insiemi di invarianti, nel contesto in esame, corrispondono agli oggetti.

Gli invarianti usati per classificare i gruppi semplici finiti, sono alcuni sottogruppi locali di un gruppo siffatto, generalmente i normalizzanti di opportuni sottogruppi di ordine primo, in particolare, e sottolineo ciò, i *centralizzanti* di involuzioni.

Per le asperità intrinseche al vasto programma, il cammino per raggiungere il risultato è stato lungo ed impervio; in ogni caso si è dovuto costruire pietra su pietra con vero gigantesco lavoro di "équipe".

Senza dubbio, due pietre miliari della classificazione, indispensabili per l'acquisizione dell'obbiettivo, sono stati due risultati, tanto generali quanto coinvolgenti:

(I) *Teorema dell'ordine dispari* (W. Feit - J.Thompson 1963):

"Ogni gruppo di ordine dispari è risolubile"

e

(II) *Teorema di R.Brauer- K. Fowler* (1965):

"Se *H* è un gruppo finito esiste al più un numero finito di gruppi semplici finiti *G* che possiedono una involuzione *t* tale che $C_G(t)–H$".

Il Teorema (I) permette di affermare che i gruppi semplici finiti non abeliani, G, sono di ordine pari e quindi possiedono un'involuzione t.

Il teorema (II) suggerisce di tentare la classificazione dei gruppi semplici finiti in termini di centralizzanti di involuzioni: infatti, esiste soltanto un numero finito di gruppi semplici finiti G_0, dotati di un'involuzione t_0, tali che $C_{G_0}(t_0)– C_G(t)$.

In sostanza, con un ristretto numero di eccezioni, G è l'unico gruppo semplice con un tale centralizzante.

Ne deriva: i centralizzanti di involuzioni forniscono un insieme di invarianti che sta alla base del problema di classificazione (da osservare che il completo riconoscimento di detto insieme avviene dopo circa mezzo secolo da quando Cipolla comincia ad occuparsi di gruppi).

Ovviamente per la dimostrazione del teorema di classificazione intervengono altre svariate e difficili tecniche dimostrative, quali, ad esempio, la teoria della "fusione", la teoria del "transfer", la teoria dei caratteri modulari (gruppi sporadici); ma non è di questo che intendiamo occuparci (non avrei, fra l'altro, la completa conoscenza di alcune delle tecniche necessarie) bensì di come Cipolla, rivolgendo la sua attenzione, dal 1908 al 1914 (2° periodo) allo studio delle proprietà strutturali dei gruppi finiti, abbia nutrito, almeno all'inizio, un progetto avanzato ed articolato degno di un vero matematico di razza: quello di classificare i gruppi finiti avendo come concetto guida uno di quelli adottati, circa mezzo secolo più avanti, per la classificazione dei gruppi semplici non abeliani, cioé il "centralizzante di un elemento" di un gruppo finito (non abeliano). Ancora una volta cercherò di scendere in qualche dettaglio per far rivivere alcune di quelle suggestive esperienze di ricerca, così ardite e così nuove per i tempi.

Cipolla esordisce nella teoria con una Nota del 1908 dal titolo "Sulla teoria dei gruppi abeliani" pubblicata sui Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (da notare che i suoi successivi lavori, quelli più significativi in teoria dei gruppi, verranno pubblicati tutti (sono in numero di nove) nella suddetta rivista).

In tale Nota, ricollegandosi ad un risultato di Frobenius riguardante il numero delle soluzioni dell'equazione $x^n=1$, ove n è un assegnato divisore dell'ordine di un gruppo finito, determina, fra l'altro, sfruttando le sue approfondite competenze maturate in ambito aritmetico, la funzione numerica $\nu(n)$ che fornisce il numero delle soluzioni nel caso di un gruppo abeliano: tale funzione si esprime per il tramite degli invarianti del gruppo.[4]

---

[4] Si tratta di questo. Si prova che se G è un gruppo abeliano finito di ordine n, allora

$$G – G_1 6\ G_2 6 \ldots 6\ G_t \text{ (prodotto diretto)}$$

ove G_i sono gruppi ciclici di ordine e_i ($i=1, 2, \ldots, t$). Gli interi e_i hanno le proprietà: 1) $e_i +1¿e_i$, $i=1, \ldots, t-1$, 2) $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_t=n=¿G¿$, 3) gli e_i sono univocamente determinati dalle proprietà 1) e 2).
Gli interi e_i si dicono *invarianti* del gruppo G. Quanti sono, quindi, a meno di isomorfismi, i gruppi abeliani di ordine n ? Tanti, quanto tutte le possibili t-ple di interi $e_1, e_2, \ldots, e_t$ tali che ciascun e_i è multiplo del successivo e $\prod_{i=1}^{t} e_i = n$.

E, dopo avere intuito che, nel caso non commutativo, sono necessarie ulteriori conoscenze sulla struttura dei gruppi finiti che possono occupare il ruolo che gli invarianti hanno nel caso particolare di un gruppo abeliano, introduce nella prima serie di note (quattro) aventi tutte per titolo: "Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito" i concetti che si riveleranno strategici nella sua indagine, quelli cioè di:

a) **sottogruppo fondamentale S** di un gruppo *G* (oggi detto **centralizzante di un elemento** non centrale di *G*);

b) **sistema fondamentale** associato ad un sottogruppo fondamentale *S*, formato da tutti e soli gli elementi di *G* che ammettono *S* come loro centralizzante;

c) **sottogruppo abeliano fondamentale** di un sottogruppo fondamentale *S*, consistente nel centro di *S* (oggi detto, con G.Scorza, **normocentro**, cioé centro del centralizzante di un elemento).

Dopo ciò, Cipolla ottiene una efficace espressione formale, pregna di future implicazioni, di un gruppo finito come combinazione lineare, a coefficienti interi, del suo centro e dei vari normocentri e risponde alla questione posta all'inizio, cioé di determinare il numero $\nu(n)$ degli elementi di un gruppo finito *G* che soddisfano all'equazione $x^n=1$, riconducendo la determinazione della funzione numerica $\nu(n)$ a quella relativa a opportuni sottogruppi abeliani del gruppo (questione da lui già risolta, come prima osservato).

E ancora, tramite quell'espressione formale di cui prima si diceva, ridimostra il classico teorema di Frobenius secondo il quale se *n* divide l'ordine di un gruppo finito, il numero $\nu(n)$ degli elementi del gruppo che soddisfano l'equazione $x^n=1$ è un multiplo di *n*. Da notare la complessità dimostrativa della 1ª dimostrazione (1895) di detto teorema data dal Frobenius, poi, dallo stesso Frobenius, semplificata nel 1903 (si tratta di due note apparse sul "Sitzungsberichte der K.preussischen" di Berlino).

Successivamente Cipolla affina ancora lo studio della struttura dei gruppi finiti non abeliani, fornendo per essi le definizioni di tipo e di rango; precisamente, dopo avere osservato che non esistono gruppi non abeliani con meno di tre sottogruppi fondamentali e che i cosidetti gruppi hamiltoniani ne contengono soltanto tre, mette in evidenza, sfruttando il gruppo diedrale dell'ordine $4(q-1)$, q intero >2, che per ogni siffatto intero q esistono gruppi con q sottogruppi fondamentali. Dopo ciò, un gruppo non abeliano si dice di **tipo** τ se possiede $q=\tau+2$ sottogruppi fondamentali. Inoltre, dopo avere ordinato parzialmente, per inclusione, l'insieme dei sottogruppi fondamentali di un gruppo finito non commutativo, Cipolla considera un elemento di detto insieme e la sua **altezza** come membro di quell'insieme parzialmente ordinato e chiama **genere** di un sottogruppo fondamentale la suddetta altezza; quindi, definisce il

rango, *r*, di un gruppo come il massimo dei generi dei suoi sottogruppi fondamentali e stabilisce la seguente notevole disuguaglianza intercorrente tra rango e tipo di un gruppo: $r \leq \frac{1}{3}(\tau+2)$. Tale disuguaglianza verrà, nel seguito, migliorata dallo stesso Cipolla e, a testimonianza della validità della problematica, da altri autori, tra i quali Gaetano Scorza e Guido Zappa.

La quarta nota della serie "Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito" (1912), e le successive tre aventi come titolo "I gruppi finiti dei primi tre tipi" (1914), rappresentano, a mio parere, l'audace tentativo di pervenire, tramite il concetto di tipo, alla classificazione dei gruppi finiti (tentativo soltanto formalmente riuscito) e, al tempo stesso, la consapevolezza, forse anche avvertita dallo stesso Cipolla, di avere fallito nell'impresa.

Il Cipolla infatti, dopo il 1914 (in quell'anno aveva soltanto 34 anni) non ritornerà più a cimentarsi con problemi originali riguardanti la teoria dei gruppi, se si fa eccezione di un lavoro pubblicato nel 1924 dal titolo "I sottogruppi fondamentali di un gruppo di Hölder" ove, però, a parte alcune difficoltà tecniche superate con la solita eleganza e padronanza dei mezzi propri dell'aritmetica, non si scopre più l'apporto di nuove idee stimolatrici.

Da osservare, per contro, che negli anni che vanno dal 1920 al 1922, Cipolla scrive, con mano magistrale, quasi a completare ed a arricchire la scarsa letteratura italiana sull'argomento (si ricordi che soltanto nel 1900 appare il primo libro italiano sui gruppi e sulla teoria delle equazioni, quello di Luigi Bianchi) la sua "Teoria dei gruppi d'ordine finito" Parti I, II, III: si tratta, nel genere, di un capolavoro che poteva essere scritto soltanto da un ricercatore di grande classe, specialista nel settore.

Altro esempio della ricerca ad altissimo livello che supporta l'attività didattica e di divulgazione: si tenga ben presente che nei primi del '900, a dispetto di una rigogliosa, fortissima e, anche numericamente notevole, scuola tedesca e anglo-sassone, in particolare americana, di Algebra, in Italia si ricominciano a muovere i primi passi nelle ricerche di teoria dei gruppi.

È con rinnovato, consapevole orgoglio di potere indicare in Michele Cipolla, "modesto" professore di Matematica del Ginnasio di Corleone, nonché del Liceo di Potenza, uno degli artefici più prestigiosi della rinascita scientifica italiana in un'area, quella algebrica, da noi tradizionalmente poco curata. Ma ritorniamo all'affermazione da me fatta sul fallimento del tentativo di classificazione che, se non giustificata, ha il sapore di una presunzione non costruttiva.

In quella 4ª Nota, che, come dicevo, rappresenta il culmine e la fine di una complessa indagine scientifica, troppo ardita per essere portata a compimento da una sola mente, sia pure essa geniale (vedi, per contro, la molteplice e qualificata "troupe" di matematici impegnati per la classificazione dei gruppi semplici finiti), Cipolla mette nella stessa classe due gruppi G_1 e G_2 se, detti Z_1 e Z_2 i loro centri, G_1/Z_1 è isomorfo a G_2/Z_2, in altre parole se G_1 e G_2 hanno i loro gruppi di automorfismi interni isomorfi; così operando viene provato che i gruppi di dato tipo si distribuiscono in un numero finito di classi. È chiaro allora il tentativo di Cipolla di classificare i gruppi finiti non abeliani in base al tipo e, al tempo stesso, l'impervietà del percorso intrapreso perché, al crescere del tipo, il numero delle classi di gruppi di dato tipo cresce così a dismisura da non consentire il controllo della situazione creatasi.

Qui si esauriscono, come prima accennato, le idee trainanti e seguono le pur lodevoli applicazioni, spesso tecnicamente difficili, di quelle idee da parte dello stesso Cipolla e della sua Scuola: infatti, nelle quattro Note successive Egli ha trovato la struttura completa dei gruppi dei primi tre tipi e di quelli il cui ordine è libero da quadrati (gruppi di Hölder), lasciando ai suoi allievi Gaspare Mignosi, Vincenzo Amato e Salvatore Amante il compito di indagare sulla struttura dei sottogruppi fondamentali di alcune classi notevoli di gruppi (quali, ad esempio, il gruppo simmetrico su n oggetti, il gruppo lineare proiettivo 2-dimensionale su un campo finito, i gruppi a sottogruppi a due a due permutabili, etc.).

Assistiamo quindi ad un lento esaurimento di creatività nella teoria dei sottogruppi fondamentali, teoria "assai elegante e suggestiva" che rimane, però, isolata nel contesto del grande sviluppo della teoria dei gruppi in questo secolo.

Bisognava aspettare circa cinquant'anni per arrivare al più significativo problema di classificazione riguardante i gruppi finiti ed occorrevano le idee e la collaborazione di molti, alcuni dei quali dall'ingegno eccezionale (due, per tutti, J.Thompson e R.Brauer), per coronare col successo le ricerche sempre avvincenti, ma spesso ad andamento altalenante, sull'argomento.

L'impresa di Cipolla non ebbe successo; i principi che la ispirarono fecero invece una lunga strada, perché unica è stata l'idea generatrice: l'uso opportuno del concetto di **centralizzante di un elemento di un gruppo**, come acutamente R.Brauer propose nel famoso Congresso internazionale dei Matematici di Amsterdam del 1954.

Mi piace, infine, a conforto anche di questa interpretazione, concludere con le parole di Guido Zappa e di Giovanni Zacher:

"Grande merito di Cipolla è stato quello di avere intuito l'importanza del concetto di centralizzante: concetto che ha giocato un ruolo essenziale, fra l'altro, nella classificazione dei gruppi semplici finiti. Il fatto che fin dall'inizio del Novecento il Cipolla faccia uso di quel concetto per l'analisi dei gruppi finiti evidenzia la sua fervida intuizione matematica che gli permise, fin da allora, di individuare uno degli strumenti più idonei per lo studio delle proprietà strutturali dei gruppi".

Michele Cipolla e La Didattica delle Matematiche

Filippo Spagnolo
GRIM-Dipartimento di Matematica di Palermo

La Didattica delle Matematiche è lo studio dei fenomeni di Insegnamento/Apprendimento attraverso un processo di comunicazione[1].

Questo studio é contestualizzato in un determinato periodo storico. La Storia dell'attività di un matematico come M.Cipolla affronta parecchi contesti relativi alla comunicazione delle matematiche.

- Storia della sintassi dei linguaggi matematici: sistematizzazione attraverso la Logica;
- Storia della pragmatica dei linguaggi matematici: libri di testo, le recensioni, gli articoli sulle riviste di didattica (riflessioni sulla *meta*comunicazione).
- Le Conferenze: Sintesi meta-logiche sui fondamenti e sulla comunicazione.

Questa attività è stata iniziata contestualmente a quella di ricerca matematica. Per quanto riguarda le questioni sui fondamenti e sulla didattica delle matematiche possiamo individuare due grandi periodi:

1. Dal 1903 al 1923: oltre ai lavori sui fondamenti e sull'assioma di Zermelo trattati nell'intervento precedente, possiamo prendere in considerazione circa undici articoli pubblicati sul“Periodico di Matematiche” e tre articoli pubblicati sulla rivista “Il Pitagora” .

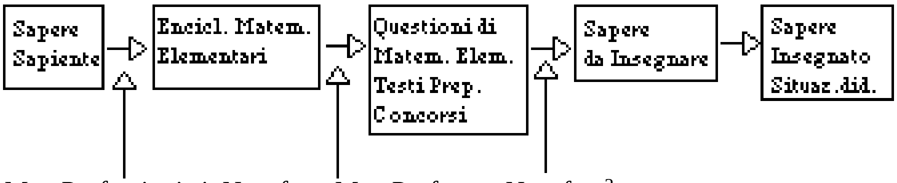
2. Dal 1923 al 1947: il 1923 rappresenta un anno importante in quanto Cipolla interviene nella stesura della “ *Relazione*[2] *sui libri di testo per l'insegnamento dell'Aritmetica esaminati dalla Commissione Centrale”*. Nello stesso anno inizia le pubblicazioni per la scuola secondaria di 1° e 2° grado (i periodi più intensi sono quelli che vanno dal 1923 al 1927 e dal 1929 al 1934). Dal 1923 iniziano anche le conferenze riguardanti temi di fondamenti delle matematiche, filosofia delle matematiche, storia delle matematiche. Dello stesso periodo sono gli interventi sulla Logica riguardanti la “definizione” e l'assioma transfinito di Hilbert.

---

[1] Per una visione più completa del punto di vista su questo argomento si veda: Filippo Spagnolo, *La Comunicazione delle Matematiche*, di prossima pubblicazione, Casa Editrice La Nuova Italia, Firenze.

[2] Relazione pubblicata dal Ministero della Pubblica Istruzione, 3 (1923), p. 11.

Per meglio comprendere il problema della trasposizione didattica riguardante il periodo di Cipolla ci riferiremo al seguente schema:



Mat. Professionisti (ed Insegnanti)[4]   Noosfera, Mat. Profess. Ispettori ed Insegnanti   Noosfera[3]

Il primo passaggio dal Sapere Sapiente all'Enciclopedia delle Matematiche Elementari in Italia è avvenuto dal 1909 al 1962.

Collaborarono all'Enciclopedia delle Matematiche Elementari numerosi matematici che erano impegnati nella ricerca e contemporaneamente sensibili ai problemi della trasposizione didattica. Cipolla interviene con due contributi: 1) Teoria dei numeri. Analisi indeterminata (1° volume del 1909); 2) Matematica ricreativa (Volume 3° parte seconda 1949 postuma).

Sempre nell'ambito dei passaggi tra il Sapere Sapiente e il Sapere da Insegnare si collocano le conferenze presso la Biblioteca Filosofica di Palermo, presso l'Università di Catania, presso l'Università di Palermo. Possiamo individuare due grandi temi che rappresentano il motivo conduttore delle conferenze: La Matematica e il problema della conoscenza, La Storia della Matematica.

La Matematica e il problema della conoscenza

1. La posizione odierna della matematica di fronte al problema della conoscenza. (1927)
   - Rapporto tra filosofia e matematica nel mondo greco;
   - La sistematizzazione dei linguaggi matematici attraverso una riflessione metalogica (Peano, Russell e contemporanei).

Argomentazioni anche di natura storica;
   - Infinito, infinitesimo, continuo. Sia attraverso l'uso costruttivo dei postulati come quello di Archimede che con riflessioni di natura logica sul postulato dell'infinito.

---

[3] Per “Noosfera” si intende l'insieme di Associazioni, Istituzioni Ufficiali, Riviste, ecc.

[4] Sino alla seconda metà del secolo numerosi insegnanti universitari provenivano dalla scuola secondaria superiore. Michele Cipolla, sino al 1911, ha insegnato in scuole secondarie superiori (Corleone e Potenza). Dal 1911 ha sempre insegnato all'Università, mantenendo un rapporto costante con il mondo della Scuola.

– La matematica ha origine nell'intuizione ma si può generalizzarla attraverso i processi di astrazione e deduzione.

2. Il problema del transfinito e la soluzione di Hilbert. (1934)
Logica - Storia - Fondamenti

Equivalenza tra l'assioma del transfinito di Hilbert e il principio di Zermelo (lavoro del 1913)
– Hilbert sostiene che il postulato del transfinito assieme a quello l'infinito sono sufficienti.
– Cipolla dimostra l'equivalenza tra il postulato del transfinito di Hilbert (introdotto da Hilbert in aggiunta al postulato dell'infinito) e il postulato di Zermelo.

Russell sostiene che tutta la matematica si possa costruire deduttivamente su di un unico postulato quello dell'infinito (ogni numero ammette il successivo).

Corso post-universitario 1934 di Filosofia matematica:

3. La definizione nella storia del pensiero logico
4. La definizione secondo il pensiero matematico moderno
– definizioni per intersezioni di classi: quadrato=quadrilatero equilatero ed equiangolo;
– definizioni per riunioni di classi: numero reale=numero razionale e irrazionale;
– definizioni per operatori speciali di classi o altri elementi noti: *(definendo)=f(a,b,...,c)*
π=circonferenza/diametro
π=minima radice positiva dell'equazione *sen x=0*
– definizioni per induzione
Le definizioni mirano alla costruzione di concetti nuovi che abbracciano altri concetti noti o ne estendono il significato.

5. Nulla e Zero (1937)
(Voce Treccani)
Definizione secondo Peano e Russell
Storia dello “Zero”
“Sopprimete lo zero nel Corpo dei Reali (assoluti o relativi) ed avrete distrutto il Continuo.”

6. Aritmetica e Matematica ricreativa (Giochi)
– *Bellezze palesi e ascose l'aritmetica (1922)*
– *Indagini antiche e nuove sui misteri l'aritmetica (1935)*

– *Mistica dei numeri, Aritmetica magica e satanica (1938)*

La Storia Delle Matematiche

1. Evaristo Galois nel 1° centenario della morte (1932)
2. Il contributo italiano alla rinascita della matematica nel Duecento (1934)
   L'opera di L.Pisano non può completamente intendersi e valutarsi se non si esaminano le condizioni politiche, economiche e sociali del tempo in cui sorse, se non si scrutano i fattori principali che la determinano.

Concludo questo intervento con una osservazione riguardante le conferenze ed in particolare la conferenza sulla “Mistica dei numeri - Aritmetica magica e satanica”, nella quale il Cipolla così si esprime:

“Quando i posteri si occuperanno di me (mi auguro di no), qualche sfaccendato farà forse delle analoghe scoperte e dirà che anche a me il 17 è stato fatale; difatti io son nato nel 1880 e 1+8+8+0=17 e precisamente il 28 ottobre (notate: nell'annuale a ritroso della marcia su Roma) e la mia 17ª conferenza alla Biblioteca filosofica l'ho fatta nell'anno 1938 e 1938=114x17.”

Questa conferenza nel 50° anniversario della morte: 8-9-1997
8+9=17.

II SEDUTA

8 settembre 1997 - ore 15.30

Presiede il Prof. F.Pintaldi

I lavori di Michele Cipolla sull'assioma di Zermelo

Filippo Spagnolo
GRIM-Dipartimento di Matematica di Palermo

Introduzione.

Nella introduzione al volume che il Circolo Matematico di Palermo dedica a Michele Cipolla, Guido Zappa e Giovanni Zacher[1] individuano quattro periodi :

1. 1902-1907, dedicato alla Teoria dei Numeri;
2. 1908-1914, vede la costruzione della teoria dei sottogruppi fondamentali e altre questioni di analisi;
3. 1915-1922, impegnato in problemi di analisi;
4. 1923-1947, approfondimento dei temi precedenti ed una attenzione ai problemi relativi ai fondamenti.

La classificazione dei lavori di M.Cipolla in questi quattro periodi ha bisogno forse di una revisione soprattutto per le questioni che riguardano i fondamenti della matematica e la didattica della matematica.

In questo intervento si tenterà di mettere in evidenza i lavori di Michele Cipolla riguardo le questioni sui fondamenti delle matematiche[2] in relazione al dibattito dei suoi contemporanei sia in Italia che all'estero.

Naturalmente la suddivisione dei quattro periodi individuati da G. Zappa e G. Zacher potrà essere suscettibile di alcuni aggiustamenti.

Posizione del problema e suo riferimento storico.

Innanzi tutto cerchiamo di dare una definizione dell'assioma di Zermelo:

---

[1] *Michele Cipolla, Opere,* a cura di Guido Zappa e Giovanni Zacher, Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Serie II, numero 47, anno 1997.

[2] F. Spagnolo, *Una sintesi dell'opera di M. Cipolla sull'assioma della scelta e nel campo della didattica*, L'insegnamento della matematica, vol. 8, n. 4, 1985.

“Per ogni insieme S vi é una funzione f che associa ogni sottoinsieme non vuoto A di S ad un unico elemento f(A)”.

Sostanzialmente possiamo dire che :”*un elemento é “scelto” da ogni sottoinsieme A di A formando un altro insieme”.*

Una breve panoramica storica sull'Assioma della Scelta o di Zermelo ci consentirà di poter contestualizzare brevemente le problematiche in gioco:

1904- Presa di coscienza del problema:
Zermelo formula l’assioma della scelta per rispondere ai problemi del buon ordinamento di un insieme (Teoria Cantoriana degli Insiemi).
In particolare dimostra che l’assioma della scelta e del buon ordinamento sono equivalenti.[3]

1905- G. Vitali utilizza l’assioma di Zermelo per offrire un esempio di insieme non misurabile.

1906- G. Peano critica l’assioma della scelta in quanto non costituisce una solida forma di ragionamento e le dimostrazioni che lo utilizzano non risultano essere valide. Dimostrare per Peano significava ricondurre esclusivamente a sillogismi (dimostrazioni finite) mentre il principio di Zermelo non sembrava ammettere tale riduzione.

1908- Zermelo assiomatizza la teoria degli insiemi e formula in modo nuovo l’assioma.

1912- Cipolla pubblica negli atti dell’Accademia Gioenia di Catania il lavoro sul Postulato di Zermelo[4]. In tale lavoro, senza usare l’assioma di Zermelo, con successioni di Insiemi riesce ad introdurre le problematiche relative ai limiti.

1918- Sierpinski dà corpo all’assioma della scelta investigando in diversi linguaggi matematici.

1926- Cipolla pubblica il lavoro: Sui fondamenti logici della matematica secondo le recenti vedute di Hilbert. In questo lavoro dimostra l’equivalenza della

---

[3] Le osservazioni alla prima stesura dell’assioma furono di due tipi, il primo tipo di natura metateorica cioè sono contro l’assunzione del principio e contro l’uso quindi delle definizioni impredicative, il secondo tipo riguardavano gli eventuali errori sulla dimostrazione di equivalenza.

[4] M. Cipolla, *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*, Atti dell’Accademia Gioenia di Catania, serie 5ª, vol. VI, 1912. Nel 1923 lo stesso lavoro sarà presentato alla S.I.P.S. (Società Italiana per il Progresso delle Scienze), Congresso nazionale a Catania. Il Congresso della S.I.P.S., almeno sino al 1927, rappresentava l’unico momento di incontro dei matematici Italiani. E’ del 1927 il primo convegno U.M.I..

funzione transfinita di Hilbert e il principio di Zermelo nella sua forma più generale.

1938- Gödel dimostra la consistenza relativa dell'Assioma della Scelta (Assioma di Zermelo) e dell'ipotesi generalizzata del continuo. "Ogni modello dei postulati usuali per la teoria degli insiemi, ma non necessariamente dell'assioma, ha un sotto modello in cui sia l'Assioma della Scelta che l'Ipotesi del Continuo Generalizzata sono veri."

1963- Cohen dimostra l'indipendenza del continuo nella logica del 1° ordine[5].

L'analisi dei lavori oggetto di discussione.

In questa sede ci occuperemo dell'analisi dei seguenti lavori che costituiranno quindi l'elemento della discussione. I lavori riportati riguardano le riflessioni sull'assioma di Zermelo (1912) soprattutto per quanto riguarda il dibattito sui fondamenti l'analisi e la funzione transfinita di Hilbert (1923-1934) per quanto riguarda le riflessioni più legate alla Logica matematica.

1. 1912
M. Cipolla
Accademia Gioenia Catania.
(Congresso SIPS Catania 1923)
Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni.

2. 1914
M. Cipolla
Ed. Capozzi, Palermo
Analisi algebrica ed introduzione al calcolo infinitesimale.
(Libro di testo universitario)

3. 1921
L. Tonelli[6]
Ed. Zanichelli
Bologna
Fondamenti di calcolo delle variazioni.

---

[5] La logica predicativa del 1° ordine usa quantificatori limitati alle variabili individuali: , riferiti a singoli oggetti matematici.
La logica predicativa del 2° ordine usa quantificazioni di variabili predicative e/o funzionali. Due specie di variabili: 1) varia sugli elementi delle strutture; 2) varia su sottoinsiemi delle strutture. I linguaggi infinitari sono inclusi (es. l'analisi classica).

[6] Il lavoro di Tonelli viene inserito perché ci fornisce un utile riferimento per inquadrare il lavoro di Cipolla nel panorama nazionale e, come si vedrà successivamente, anche internazionale.

(Libro di testo Universitario)

3. 1923
M. Cipolla
SIPS Catania - Congresso
Sezione Matematica
Sui fondamenti della matematica secondo le recenti vedute di Hilbert.

4. 1934
M. Cipolla
Conferenza "Biblioteca Filosofica di Palermo".
Il problema del transfinito e la soluzione di Hilbert.

Sin dal suo primo lavoro i suoi riferimenti costanti sono indirizzati alla scuola del Peano e ai lavori di Russell.

Ma esaminiamo in dettaglio il contenuto dei singoli lavori.

Il 1° lavoro

Il postulato di Zermelo (o di esistenza della funzione selettiva) può limitare la nozione di classe nel senso che si possono attribuire alle classi che si considerano proprietà contraddittorie:*"... il miglior consiglio é di cercarne di evitare l'applicazione."*

Già Dini e Peano avevano evitato la funzione selettiva nella teoria dei limiti delle funzioni.

La teoria acquista in eleganza e semplicità se si pone a fondamento il postulato di Zermelo (Jordan, Arzelà, Bagnera, ...).

"Se un insieme ammette un valor limite, si può dall'insieme staccare una successione che tenda a quel valor limite."

Il lavoro di Cipolla:

"...estendendo la nozione di valor limite ad una classe d'insiemi nonché le proposizioni fondamentali sulle successioni numeriche alle successioni d'insiemi, si può, senza far uso del postulato d'esistenza della relazione selettiva, conservare alla teoria dei limiti delle funzioni quella semplicità ed eleganza che quel postulato consente, restando sempre il vantaggio della possibilità di collegare quella teoria anziché alla teoria degl'insiemi ordinari (che può omettersi), all'altra più semplice delle successioni."

Gregory H. Moore[7] così riferisce sull'influenza dell'assioma della scelta sulla comunità dei matematici dal 1908 al 1918:

Except in algebra, the Axiom was rarely applied consciously to obtain new results between 1908 and 1918, but mathematicians increasingly recognized its previous implicit uses. In 1915 Hartogs showed that the Axiom was indispensable to any adequate theory of infinite cardinals since the Axiom and the Trichotomy of Cardinals are equivalent.

[7] Gregory H. Moore, *Zermelo's axiom of choice (Its origins, development, and influence*, Springer-Verlag, N. York, Heidelberg, Berlin, 1982.

The first mathematician to grasp how deeply analysis depended on the Axiom was Cipolla, who recognized that it implied the equivalence of limit point and sequential limit point in R, as well as of continuity and sequential continuity. Cipolla attempted to circumvent the Axiom, as far as possible, by employing sequences of sets rather than of points, but his influence was slender. (p. 193)

Il 2° lavoro: l'analisi algebrica

Il libro di testo di analisi algebrica rappresenta una riflessione sui fondamenti dell'analisi classica e nello stesso tempo stabilisce una riflessione sugli insiemi numerici e sugli ampliamenti. Si inserisce nel dibattito sull'Aritmetizzazione dell'Analisi attraverso le due premesse al programma di analisi riguardanti la Logica e la teoria dei Numeri Reali esposti attraverso degli ampliamenti numerici a partire da N. Sarà a questo lavoro che farà costante riferimento il Tonelli nella sua opera sul Calcolo delle variazioni. Riportiamo l'indice del libro di testo:

- Principi di logica: Calcolo proposizionale, alcune figure di ragionamento, logica delle classi riferendosi a Russell (*Principia mathematica* del 1910).
- I fondamenti dell'aritmetica: Approccio al cardinale con Russell ed all'ordinale con Peano. Introduzione nel cardinale dell'assioma dell'infinito ed equivalenza con l'esistenza del successivo nell'ordinale. Ampliamenti sino a Q.
- Calcolo combinatorio: le successioni vengono introdotte in questa sede per poter parlare di gruppi di operazioni e di gruppi finiti.
- I determinanti.
- Forme algebriche.
- I numeri reali.
- Successioni numeriche e limiti.
- Le serie numeriche.
- Funzioni reali di una variabile reale.
- La derivazione.
- Serie di potenze.
- Zeri di una funzione.
- I numeri complessi.
- Il teorema fondamentale (esistenza degli zeri di una funzione razionale intera).
- Funzioni simmetriche.
- Risultanti.
- Risoluzione generale delle equazioni dei primi quattro gradi.
- Funzioni a più valori e risolventi di Lagrange.
- Risolubilità per radicali e teorema di Ruffini.

Il 3° lavoro: Sui fondamenti logici della matematica secondo le recenti vedute di Hilbert

Dimostra l'equivalenza tra la funzione transfinita di Hilbert ed il postulato di Zermelo con l'intento dichiarato sin dall'inizio di ribadire l'importanza dell'opera di Russell e Whitehead da una parte e Peano dall'altra. La seguente tabella cerca di sintetizzare le reciproche posizioni di Hilbert e Cipolla sul principio di Zermelo.

HILBERT	RUSSELL "Principia Mathematica"	CIPOLLA
• Principio dell'Infinito • Principio dell'Induzione Operazione ed esistenza del successivo.	Si può giungere a definizioni nominali di numero introducendo il principio dell'infinito.	Ribadisce una equivalenza tra le due posizioni.
La funzione τA *"Per ogni predicato A un oggetto determinato τA"* $A(\tau A) \rightarrow A(a)$ *Se il predicato A conviene all'oggetto τA, esso conviene ad un oggetto qualunque a.* 5 assiomi per caratterizzare. • La funzione transfinita equivale al "tutto" • La trasformazione della variabile reale in apparente equivale all'Esiste	Assioma di riducibilità: *"Penelope ha tutte le qualità di una donna virtuosa"* Interviene l'idea di tutto con variabili apparenti. *"Penelope é simbolo di virtú muliebre"* *Priva di variabili apparenti.*	L'elemento τA resta impreciso mancando di una legge che permetta di assegnarlo. "A=essere incorruttibile" τA = un uomo di tal grado di rettitudine, che se a lui si dovesse attribuire la qualifica d'incorruttibile, dovrebbero dirsi incorruttibili tutti gli uomini. Se A é un altro non ho uno strumento per individuarlo.
L'assioma del transfinito è compatibile con gli altri assiomi della sua teoria. *[illegible]:* Le proposizioni vengono trasformate in formule numeriche.		Trasforma la compatibilità in definizione e dimostra l'equivalenza con Zermelo

· La teoria della deduzione non elementare (variabili apparenti) può essere fatta, come nei Principia, senza distinzione tra classi finite ed infinite.
· Le antinomie vengono risolte attraverso la gerarchizzazione delle classi.
· I numeri naturali, razionali e reali possono essere introdotti con definizioni nominali. L'isomorfismo aritmetico (già introdotto nell'analisi algebrica) permette di consolidare questa posizione.

· La teoria dei limiti di funzione é stata riannodata da alcuni matematici alla teoria dei limiti delle successioni numeriche e può ricondursi alla teoria della convergenza d'insiemi senza fare riferimento a Zermelo.
· La teoria della misura di Lebesgue é stata liberata dall'applicazione del principio di Zermelo mediante modificazioni introdotte da Leonida Tonelli (*Fondamenti di Calcolo delle variazioni*)[8] .

La sua posizione nella conferenza del 1934 sul problema del transfinito e la soluzione di Hilbert é più disponibile ad accettare la funzione transfinita di Hilbert:

"...ma sembrami che ai simboli si chieda troppo: nè i simboli, nè l'intuizione, da soli, possono darci la Matematica che è creazione del pensiero! Comunque, dopo un decennio di meditazione sulla risoluzione data da Hilbert al problema del transfinito debbo confessare che i miei antichi convincimenti sono alquanto scossi! Non ammettiamo noi forse, senza difficoltà, affermando la continuità della retta, che esiste sempre su questa un punto di separazione tra due classi contigue di punti della retta stessa? Ma esiste effettivamente questo punto? Non pare, perché possiamo anche supporre la retta discontinua senza cadere, con ciò, in contraddizioni! Ed allora perché non dovrei ammettere l'esistenza della funzione transfinita di Hilbert o, ciò è lo stesso, la esistenza della relazione selettiva di Zermelo? La difficoltà è questa: mentre posso immaginare il punto separatore poiché posseggo il concetto astratto di punto, e le classi contigue mi aiutano a fissarlo sulla retta con una precisione che posso supporre tanto grande quanto voglio, l'affermazione pura e semplice dell'esistenza della relazione selettiva mi è insufficiente allo scopo della definizione dell'insieme.

Tale affermazione è come quella dell'esistenza di un tesoro; a che mi giova essa se non so dove il tesoro sia nascosto, se non ho i mezzi per rintracciarlo? Ecco l'ostacolo che ancora m'impedisce di schierarmi fra i logici hilbertiani."

In questa conferenza si dichiara un logicista ma é disponibile ad accettare il formalismo a patto che questi riesca a giustificare semanticamente gli enti introdotti.

Il lavoro di M. Cipolla nel panorama Italiano e internazionale del periodo.

– Il lavoro del 1912 é in perfetta sintonia con i "Principia mathematica" del 1910. Rappresenta la risposta ad uno dei problemi importanti della storia della logica nei primi venti anni del secolo e cioè sui *rapporti tra la logica e i contenuti matematici*. Gli altri problemi che saranno affrontati dagli anni trenta in poi sono *sulla natura della logica* e *sulla natura del*

[8] In questo lavoro vi é un riferimento costante al lavoro di Tonelli sui fondamenti del calcolo delle variazioni.

suo linguaggio. Nella storia della Logica si erano già delineati due correnti di pensiero e cioè l'algebra della Logica (Boole) e riflessione sui Fondamenti della matematica (Frege, Peano, Dedekind, Hilbert). La posizione di Russell coniugava, ancora per poco, i due punti di vista. Negli anni trenta questa divisione sarà più netta e caratterizzerà le ricerche di Logica degli anni sessanta.

− Questo é in sintonia con il lavoro svolto nell'ambito nazionale da altri matematici come ad esempio il Tonelli. Egli utilizza il lavoro di Cipolla citandolo continuamente per tutto il capitolo sulle "Funzioni e curve di funzioni" nel suo "Fondamenti del Calcolo delle Variazioni" (1921). Ma le relazioni con il lavoro di Tonelli hanno anche una legittimazione internazionale come osserva il Moore (op. cit., p. 243):

«*Not all the theorems that a mathematician might wish to preserve could beseparated from the Axiom by some new technique, such as Cipolla (1913) had introduced for sequential limit points or as Tonelli had proposed for the integral.*»

− Le tematiche affrontate nei Principia sono connesse: 1) all'assioma di riducibilità; 2) all'assioma della scelta (moltiplicativo); 3) all'assioma dell'infinito. Cipolla ha affrontato il 2° e il 3° direttamente ed il 1° indirettamente.
− Dopo il primo decennio del secolo la scuola italiana non costituisce più un interlocutore nel dibattito sui fondamenti della matematica e sul rinnovamento della logica[9]. I lavori riguardanti la funzione transfinita escono di scena definitivamente per essere inglobati nei lavori sulla computabilità da Ackermann, Skolem ed altri.
− I problemi che saranno poi affrontati negli anni trenta saranno:
1) Distinzione tra linguaggi del 1° e 2° ordine;
2) Distinzione tra sintassi e semantica;
3) Distinzione tra metodi finitisti e non.
− Sul postulato di Hilbert del transfinito verrà poi detto: "contiene il nucleo di uno dei più controversi assiomi della letteratura matematica, ossia l'assioma della scelta. Verrà utilizzato da Ackermann nella sua tesi nel 1924 e poi non se ne parlerà più".

Conclude C. Mangione (op. cit., p 543) sui primi anni venti:

"*I riferimenti erano ormai intuizionismo e formalismo: il decennio successivo decreterà addirittura anche la fine del formalismo, almeno inteso in senso hilbertiano; e la grande avventura logicista, in effetti, viveva già soltanto della sua storia gloriosa. Ben presto la situazione avrebbe assunto caratteri nuovi e inaspettati. E' in-*

[9] C.Mangione - S.Bozzi, *Storia della Logica (da Boole ai nostri giorni)*, Garzanti, 1993.

fatti al convegno di Könisberg che Gödel presentò per la prima volta i suoi risultati sulla indecidibilità dell'aritmetica.”

La presenza di Michele Cipolla a Corleone dal 1904 al 1911

Aldo Scimone
Liceo socio-pedagogico "C.Finocchiaro Aprile" di Palermo

Non è rara la vicenda di alcuni docenti universitari che prima di iniziare la loro carriera accademica, hanno insegnato per un certo numero di anni nelle scuole secondarie di primo o di secondo grado.

Di esempi se ne possono trovare parecchi: Giuseppe Vitali (1875-1932), uno dei matematici più insigni del novecento, insegnò per un lunghissimo periodo nelle scuole medie, pur producendo nel frattempo alcuni dei lavori più originali e profondi dell'analisi del ventesimo secolo, alla pari con il matematico francese Henri Lebesgue (1875-1941). A questo proposito, si racconta che il matematico Vito Volterra (1860-1940), forse nel 1922, ebbe modo d'incontrare a Parigi il Lebesgue, il quale gli chiese notizie di Vitali. Informato che Vitali insegnava matematica in un liceo di Genova, un po' meravigliato, il Lebesgue rispose: "Mi rallegro che l'Italia abbia la possibilità di tenere all'insegnamento liceale matematici come il Vitali". Anche Gaetano Scorza (1876-1939), dopo un breve periodo in cui fu assistente di Eugenio Bertini (1846-1933) a Pisa e per un anno di Corrado Segre (1863-1924) a Torino, nel 1902 passò nei licei; nel 1907 venne ad insegnare anche a Palermo, all'Istituto 'Filippo Parlatore' entrando in stretto contatto con il *Circolo Matematico* di Giovan Battista Guccia (1855-1914), e solo nel 1912 passò all'insegnamento universitario.

Simile fu l'inizio della carriera di Michele Cipolla (1880-1947). Io venni a conoscenza che egli insegnò per sette anni, dal 1904 al 1911, a Corleone, nel Regio Ginnasio "G.Baccelli", dalla lettura di un passo del bel volume che A.Brigaglia e G.Masotto hanno scritto sul *Circolo Matematico di Palermo.* In seguito, trovandomi ad insegnare nel Liceo Scientifico "Don G.Colletto" di Corleone, fui spinto dalla curiosità di appurare se per caso fosse rimasta qualche traccia di quella presenza. La prima ricerca fu ovviamente nella segreteria del Liceo Classico 'G.Baccelli', ma la documentazione rimasta era veramente esigua, riducendosi a soli tre registri in cui erano stati trascritti gli esiti di vari esami di licenza e di ammissione a varie classi del Ginnasio inferiore, per un arco di tempo che va dal 1880 al 1910. In uno di questi registri compare la firma che attesta la presenza di Cipolla nell'anno della sua nomina, il 1904, e anche una sua ultima firma in data 20 novembre 1909 e nulla più. Da alcuni registri è manifesto come le classi dove insegnava

Matematica e scienze naturali non erano numerose. Così, dal Registro annuale relativo all'anno scolastico 1905-1906, le classi prima, seconda, terza, quarta e quinta ginnasiale erano formate rispettivamente da quindici, otto, cinque, nove e tre alunni. Ebbi anche la tentazione di rintracciare qualche alunno di Cipolla, ma venni frenato dal tentare una simile impresa dalla constatazione che non avrei avuto tempo sufficiente per portarla a termine.

Ebbi miglior fortuna nel ricostruire la cronaca delle giornate che Cipolla trascorreva a Corleone, dov'egli soggiornava per più giorni a settimana, avendo l'obbligo della residenza (anche perché allora sarebbe stato molto più faticoso che ai nostri giorni affrontare giornalmente il viaggio di andata e ritorno). Aiutato da due colleghe e amiche quali le Proff. Antonina Crapisi e Maria Patti potei rintracciare la Sig. Caterina Cardella, vedova del Sig. Lisi, che era stato uno stimato falegname, in casa del quale Cipolla stette per tutti gli anni trascorsi a Corleone. Molte notizie su quel periodo le venni a sapere anche giovandomi dell'amicizia del compianto Preside Cino Cipolla, uno dei figli del grande matematico.

Desidero spendere qualche parola su Corleone, perché, forse, molti dei giovani presenti non conoscono questo paese, né l'hanno mai visitato, e purtroppo ne avranno sentito parlare soltanto per i noti fatti delittuosi ai quali è stata abbinata la sua storia.

Corleone dista da Palermo circa sessanta chilometri ed è uno dei paesi più caratteristici dell'entroterra siciliano. Vanta antiche tradizioni culturali e sociali, e molti sono i corleonesi che hanno onorato il loro paese e continuano a farlo con la loro attività di studiosi. Vi sono belle chiese del seicento e del settecento che testimoniano la ricchezza architettonica del paese.

Lo circondano campi di grano, vigneti e uliveti; inoltre rinomata è la bontà delle carni degli allevamenti bovini e suini, nonché quella dei prodotti caseari.

All'inizio del secolo il paese aveva una struttura ancora più agricola e artigianale, e raggiungerlo da Palermo significava affrontare, senza eufemismi, un vero viaggio!

L'unico treno che vi arrivava partiva da quella deliziosa stazione liberty del Basile, nei pressi del fiume Oreto, che ormai l'incuria degli uomini sta definitivamente distruggendo. Il viaggio durava circa quattro ore, perché il trenino, oltre Corleone, Burgio e Bisacquino, toccava altre frazioni minori. Possiamo quindi immaginare come il viaggio fosse lungo e spossante; alcune fermate erano pure impreviste, perché ogniqualvolta un tratto di percorso più ripido non permetteva al treno di procedere speditamente, alcuni passeggeri, di buona volontà e con molta pazienza, scendevano e spingevano il treno finché la pendenza non fosse stata superata.

Per l'alloggio, Cipolla, venne indirizzato al sig. Lisi, uomo corpulento, cordiale e molto intelligente. Il Lisi, che a quell'epoca abitava con due sue sorelle, lo prese a pensione nella sua casa ubicata al n. 9 di via Cammarata, a due passi da piazza S.Agostino, dove aveva sede, al n. 5, il Regio Ginnasio. La casa era confortevole, appartata, e Cipolla vi trovò l'atmosfera e la serenità necessarie per condurre a buon fine alcune sue ricerche.

Con il passare degli anni e con la consuetudine quotidiana, Cipolla, che aveva un carattere cordiale, divenne amico del Lisi e anche di un altro inquilino del falegname, il colonnello Pietro Riggio che, per conto dell'esercito, andava spesso a Corleone per acquistare animali. Dopo la pausa del dopopranzo, i tre amici facevano volentieri una passeggiata, parlando di vari argomenti, e l'amicizia, a detta della sig. Cardella, durò sempre, anche quando Cipolla passò all'Università.

Il falegname affascinava Cipolla per l'intelligenza pronta e l'intuito spiccato; non di rado la loro conversazione toccava argomenti anche di natura elevata. Le sorelle del Lisi invitavano spesso il loro inquilino così cordiale a prendere il caffè nel primo pomeriggio, intrattenendolo con il loro conversare semplice e gradevole. Questi erano gli unici svaghi del giovane matematico, perché, per la maggior parte del tempo, egli rimaneva nella propria camera, intento alle sue ricerche matematiche.

Il periodo passato a Corleone dovette essere sicuramente uno dei più soddisfacenti per la produzione scientifica di Cipolla. Lontano da Palermo, senza poter parlare per parecchi giorni delle sue intuizioni matematiche con nessuno di pari livello, impegnato con l'insegnamento e con tutto il contorno che esso comporta, col pensiero della famiglia a Palermo, e con tutto il disagio del viaggiare, tuttavia Cipolla proprio in quegli anni produsse molti dei suoi lavori matematici più significativi e profondi.

Come questa mattina ci ha ricordato il Prof. Bartolozzi, Cipolla si era laureato nel 1902 discutendo una tesi su un problema, propostogli dal suo maestro G.Torelli (1849-1931), di teoria analitica dei numeri, relativo alla determinazione asintotica dell'*n*-esimo numero primo. In quell'occasione aveva ricevuto anche gli elogi del grande matematico E.Cesàro che all'epoca era il massimo esperto italiano di teoria dei numeri. Era quindi passato allo studio delle congruenze binomie di grado superiore, ponendosi il problema di determinarne delle formule risolutive esatte, che non dipendessero da prove e tentativi, come si era fatto quasi sempre. Egli giunse ad alcune formule che risolvevano il problema per congruenze di qualsiasi grado e le chiamò formule "apiristiche", coniando il termine dalla lingua greca per mettere in luce il fatto che esse non erano empiriche. Anche a quel periodo risalgono altre ricerche importanti di Cipolla nel campo dell'Algebra, di cui egli fu uno dei massimi cultori (per inciso fu tra i primi ad introdurre il concetto di "sottogruppo normale"), come quelle sui gruppi abeliani e sulla strutura dei gruppi d'ordine finito. Giustamente scrivono Brigaglia e Masotto:

«Furono anni tra i più densi e attivi nelle ricerche di Cipolla", ricerche, ricordiamolo, che gli fecero vincere nel 1911 la cattedra di *Analisi algebrica* a Catania».

Ma qual era lo stile d'insegnamento di Cipolla? Sarebbe stato auspicabile ascoltare in merito la testimonianza di qualche suo allievo, ma in mancanza di ciò, possiamo trarre qualche indicazione dai libri che egli scrisse per i licei e che ormai sono dei classici della didattica matematica, come da altri testi più elevati, come l'opera: *La Matematica elementare nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori*, che intere generazioni di insegnanti hanno studiato per la preparazione ai concorsi. Così, dalla prefazione di un suo testo di geometria per i licei, si legge:

«... A tale educazione mentale ... contribuirà validamente l'insegnante con opportune interrogazioni ed esercizi che farà seguire alle sue spiegazioni; spiegazioni che saranno più efficaci se accompagnate da una lettura del testo ... Bisogna insegnare a leggere ... Perché la lettura non deve essere un esercizio vocale che lasci passiva la mente, ma deve stimolar questa a capire, sì da crearsi immagini ordinate e coordinate che vivano e rimangano».

Quanta attualità! Più avanti, sempre nello stesso testo, egli rimarca l'opportunità di inserire nei manuali letture di storia della matematica, convinto che esse servano ad accrescere le cognizioni culturali dello studioso, procurandogli anche interesse e diletto. Solo oggi si va sempre più comprendendo come il contesto storico sia necessario nell'insegnamento della matematica, per fare constatare agli allievi che essa non si cristallizza in teorie logicamente ineccepibili e formalmente compiute all'atto del suo costituirsi, bensì che ogni teorema, ogni progresso matematico implica errori, sconfitte, ripensamenti, com'é giusto che sia.

Altra grande intuizione didattica di Cipolla fu quella di proporre agli allievi, anche universitari, nel corso delle sue lezioni, la risoluzione di qualche gioco matematico per affinare le loro capacità logiche e intuitive, senza annoiarli.

Che i giochi matematici siano ormai considerati un valido ausilio didattico, per il loro carattere eminentemente euristico e per l'incentivo che possono dare alla creatività e alla fantasia del ragazzo, è oggi cosa abbastanza nota. Ma anche in questo aspetto della didattica della matematica, si può affermare che Cipolla sia stato un vero anticipatore. In anni successivi egli scrisse:

«La matematica ricreativa tratta di questioni che destano interesse e curiosità per il loro carattere giocoso e di passatempo, a base di nozioni matematiche ordinariamente elementari. Il carattere giocoso e di passatempo di siffatte questioni non le rende d'importanza didattica minore delle altre, anzi servono utilmente al maestro che ama istruire dilettando. Non mancano di valore scientifico, anzi molte fra esse sono state di stimolo all'istituzione di nuovi metodi d'indagine, altre han dato origine a nuove importanti teorie matematiche».

Prima di concludere voglio aggiungere qualche nota sulla carica umana di Cipolla. Sempre attraverso la sig. Cardella ebbi la fortuna di mettermi in contatto con la Sig. Erina Cappello Spaziani, figlia di una ex allieva universitaria di Cipolla. Da essa ricevetti una bella lettera, nella quale viene tracciato questo affettuoso ritratto del Maestro:

«Il ricordo del professore Cipolla in una allieva ottantaduenne è ancora vivo. Io che sono la figlia di questa Insegnante lo conosco per averlo sentito nominare da mia madre moltissime volte. Il Prof. Cipolla era un Maestro di cultura e vita. Mamma raccontava spesso del suo professore e debbo dire che dei tanti era l'unico ad essere menzionato. Riporterò due ricordi che mi hanno colpita e che, penso, possono dare la misura di un Maestro insigne, di un mondo, purtroppo, quasi del tutto scomparso. Gli allievi del Prof. Cipolla si presentavano ai concorsi con la consueta speranza di vincere. Ma tutti a fine prova si recavano alla casa del Maestro. Il Professore era a loro disposizione. Gli ex allievi gli riferivano lo svolgimento del problema proposto in esame e Lui spiegava e poi concludeva in uno dei due modi: "Si prepari per l'orale, va bene" oppure "Sarà per l'anno prossimo, si prepari a ricominciare". Gli alunni del Professore, senza appuntamento, senza dover pagare un soldo (oggi si direbbe una lira) avevano la possibilità di un riscontro sincero, affettuoso, disinteressato su una prova che poteva decidere il loro futuro. Ma il Maestro, spesso, per la sua bravura era chiamato a far parte di commissioni particolarmente importanti. E, allora come oggi, fioccavano le raccomandazioni. A fianco del nominativo dell'esaminando il Professore segnava il nome del raccomandante ... accanto al nominativo del poveretto non raccomandato il proprio, assicurando di tenere in debito conto le proprie segnalazioni».

Il compianto Preside Cino Cipolla, fra tante altre cose, mi mostrò un giorno un vecchio quadernetto dalla copertina nera in cui il Padre, quand'era liceale, aveva scritto in bellissimo corsivo inglese una raccolta di proprie poesie nello stile del Carducci, che egli recitava a memoria.

Cipolla, nella testimonianza del figlio, amava infatti la Matematica con un trasporto lirico simile a quello che aveva per la Poesia. Mi piace concludere leggendovi le ultime tre quartine di una di queste poesie, dal titolo "Alla Musica", perché se ne trae quella gentilezza d'animo che mai abbandonò il grande matematico:

Ed intanto che suono il sol risplende
Sopra i verdi giardini
E viene ad invitare, fra le tende,
Gl'inquieti miei piedini.

Se mi distraggo allora o sbaglio tasto
Chi ne ha colpa? il sole;
"Correte, dice, in mezzo al campo vasto
Venite fra le aiuole,

Un'ape s'è posata sulle rose,
Vola una farfalletta
Dalle ali d'oro" ... ed altre belle cose;
Come non dargli retta?

Michele Cipolla e il Circolo Matematico di Palermo

Aldo Brigaglia
Dipartimento di Matematica di Palermo

(Il Prof. Aldo Brigaglia non ha potuto consegnare in tempo il manoscritto del suo intervento al Convegno, per cui ha autorizzato il Comitato organizzatore a pubblicare, con la sua supervisione, il presente resoconto, trascritto sulla base di alcuni appunti.)

Il Prof. Pintaldi dà la parola al Prof. Brigaglia, che esordisce mettendo in rilievo come, all'epoca in cui Michele Cipolla iniziò la sua carriera di matematico, Palermo viveva una stagione culturale fervida di studi matematici, soprattutto per la presenza del *Circolo Matematico*.

Fondato nel 1884 da Giovan Battista Guccia (1855-1914), esso era diventato ben presto non solo il punto d'incontro degli studiosi palermitani, ma anche, attraverso la sua prestigiosa rivista, i *Rendiconti*, punto di riferimento delle scoperte matematiche più originali del tempo, in campo mondiale.

Valgano per tutte le parole di Edmund Landau che, anche a nome dei suoi colleghi di Gottinga, David Hilbert, Felix Klein, e Costantin Caratheodory (tutti soci del Circolo) non aveva esitato a sottoporsi al disagio di tre giorni di viaggio per partecipare alla cerimonia celebrativa del XXX anniversario della fondazione del Circolo, durante la quale venne consegnata a Guccia una medaglia d'oro (con una sottoscrizione internazionale). Le sue parole, certamente disinteressate, costituiscono, ancor oggi, il giudizio più valido:

> Noi celebriamo il giubileo di una società che ... ha riunito quasi mille matematici in tutto il mondo e tra questi i più grandi e i più illustri studiosi d'Italia, di Germania, d'Inghilterra, di Francia, degli Stati Uniti, d'Ungheria e di tutte le nazioni dove si coltiva la nostra scienza. È l'unica organizzazione permanente che abbiamo; così noi consideriamo Palermo come il centro del mondo matematico. Non è solo perché Palermo è la sede di una società alle riunioni della quale non possiamo assistere. Non è solo per il piacere e l'onore che proviamo a essere in relazione con quel ben noto matematico e quell'uomo affascinante che è il signor Guccia.
>
> La ragione sta principalmente nella rivista, i «Rendiconti», che il Circolo Matematico pubblica sotto la direzione del suo fondatore, il sig. Guccia, che ha consacrato a questa direzione il lavoro di questi ultimi trenta anni. [...] I «Rendiconti» sono ora la migliore rivista del mondo. Il Sig. Guccia è riuscito a conquistare come

amici del suo giornale i matematici seri di tutto il mondo. Bisognerebbe entrare in dettagli [...] per poter spiegare perché si preferisca pubblicare le proprie ricerche migliori nei «Rendiconti» di Palermo, piuttosto che in qualsiasi altro periodico del mondo.

Il clima culturale palermitano generato dalla presenza del *Circolo* aveva favorito senza dubbio l'attività di ricerca del giovane Cipolla, perché, altrimenti, non si potrebbe spiegare come mai egli abbia potuto produrre i suoi lavori più originali in teoria dei numeri e in algebra, durante i sette anni che trascorse insegnando nel Ginnasio di Corleone, subito dopo la laurea.

Furono anni fra i più densi ed attivi nelle ricerche del Nostro, anni che lo posero all'attenzione dei maggiori algebristi italiani, tanto da permettergli, con la sua produzione, di vincere la cattedra di Analisi algebrica all'Università di Catania, dove rimase per un decennio.

Per quanto riguarda i rapporti tra Michele Cipolla e il Circolo, essi non furono dei più idilliaci (senza dubbio anche a causa delle «asperità di carattere» del Guccia di cui parla il De Franchis nel suo necrologio), tanto che Cipolla non fu nemmeno, fino alla morte di Guccia, un elemento attivo dell'associazione. Tant'é che nei *Rendiconti* egli non pubblicò che tre soli lavori: *Sulle equazioni algebriche le cui radici sono tutte radici dell'unità* (1914), *Formule di risoluzione apiristica delle equazioni di grado qualunque in un corpo finito* (1930), e *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra* (1932), (quest'ultima definita «bella Memoria» nel necrologio scritto da Vincenzo Amato).

Riallaciandosi alle ricerche algebriche di Cipolla, il prof. Brigaglia sottolinea come il periodo in cui Cipolla ottiene risultati significativi in teoria dei numeri e in algebra è, nel panorama italiano, denso di grandi aspettative, tanto che si assiste alla fioritura di un'ampia trattatistica di ottimo livello qualitativo. Basti pensare alle *Lezioni sulla Teoria dei Numeri Algebrici* di Luigi Bianchi (1923), al trattato *Corpi numerici ed Algebre* di Gaetano Scorza (1921), e al trattato litografato in tre volumi di Cipolla, *Teoria dei Gruppi di ordine finito e sue applicazioni* (1920-1922).

Si tratta di un complesso di opere omogenee, che avevano uno scopo ben preciso: inserire la scuola italiana nella fase di grande sviluppo che ormai si delineava nettamente nel panorama internazionale delle teorie algebriche «astratte», fornendo agli studenti un complesso di materiali adeguato alle nuove tendenze.

Ma è altrettanto vero - sottolinea il prof.Brigaglia - che queste aspettative vennero disattese. Infatti, mentre nel 1923 l'algebra italiana si trovava da molti punti di vista in una situazione più favorevole rispetto a quella di altri paesi, come per esempio, la Francia, colpisce il fatto che nel giro di appena dodici anni, dal 1924 al 1936, la situazione è completamente ribaltata.

Tenuto conto dell'impetuoso sviluppo internazionale degli studi algebrici, in quei dodici anni l'Italia accumula gravi ritardi che saranno poi colmati solo in tempi molto recenti.

Mentre in Francia giunge alla ribalta una nuova generazione di algebristi e studiosi di teoria dei numeri della statura di Herbrand, Chevalley, Weil, Dieudonné e Dubreil, in Italia solo Giovanni Ricci si pone al livello degli alti stansard internazionali.

Esplorando le cause di questa situazione incresciosa, ciò che colpisce è il netto rifiuto opposto dalla comunità matematica italiana a dare un riconoscimento adegueto agli studi algebrici.

Con l'eccezione dei corsi interni tenuti da Ricci alla Normale di Pisa, in Italia, in quel periodo, non si tennero più corsi di algebra, come quelli sperimentati da Scorza e Cipolla a Catania e da Bianchi a Pisa.

L'impressione - secondo il prof.Brigaglia, a conclusione del suo intervento - è che gli studi algebrici ebbero questo repentino declino in Italia non tanto per una debolezza interna, quanto per una completa e sistematica disincentivazione di tali studi, per cui i migliori laureati che avevano mostrato interesse per i linguaggi algebrici vennero indirizzati in altri settori di ricerca, come l'analisi e la geometria algebrica che rappresentavano le sole discipline con qualche possibilità di sbocco nella carriera universitaria.

Conferenze

di

Michele Cipolla

ELENCO DELLE CONFERENZE DI MICHELE CIPOLLA

1. *Bellezze palesi e bellezze ascose dell'Aritmetica*, Esercitazioni Matematiche, 1922, pp. 61-79.

2. *Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert,* Annali di Matematica, serie 4ª, tomo I, 1923-24, pp. 19-29.

3. *La posizione odierna della Matematica di fronte al problema della conoscenza*, Esercitazioni Matematiche, volume V, 1929, pp. 191-204.

4. *Evaristo Galois nel primo centenario della sua morte,* Esercitazioni Matematiche, serie 2ª, volume VII, 1933, pp. 3-9.

5. *Il contributo italiano alla rinascita della Matematica nel Duecento*, Esercitazioni Matematiche, serie 2ª, volume VIII, 1934, pp. 1-12.

6. *La definizione nella storia del pensiero logico*. *La definizione secondo il pensiero matematico moderno.* Esercitazioni Matematiche, fasc. 6, 7, 8, volume VII, 1934, pp. 146-149.

7. *Il problema del transfinito e la soluzione di Hilbert*, Esercitazioni Matematiche, serie 2ª, volume VII, 1934, pp. 206-208.

8. *Indagine antiche e nuove sui misteri dell'Aritmetica*, Esercitazioni Matematiche, serie 2ª, volume VIII, 1935, pp. 149-161.

9. *Nulla e zero*, Esercitazioni Matematiche, serie 2ª, volume X, 1937, pp. 1-10.

10. *Mistica dei numeri-Aritmetica magica e satanica*, Esercitazione Matematiche, serie 2ª, volume XI, 1938, pp. 1-19.

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. I, f. 1, v. II, 1922, pp. 61-79.

Bellezze palesi e bellezze ascose dell'Aritmetica

Conferenza tenuta da M. CIPOLLA *nella R. Università di Catania il 12 febbraio 1922 per la solenne inaugurazione del Seminario Matematico.*

L'Aritmetica è, senza dubbio, fra le scienze matematiche quella che più risalta per le sue particolari bellezze, esercitando il suo fascino anche sul profano.

Molte proprietà dei numeri naturali possono essere infatti riscontrate e comprese da chi non ha una speciale cultura matematica, bastando a ciò le poche nozioni e i procedimenti elementari che si apprendono fin dall'infanzia. Sono spesso tali fatti aritmetici che rivelandosi da prima come curiosità in uno spirito anche non particolarmente coltivato, ne fermano l'attenzione, e destano quell'intenso desiderio di scrutare la ragione riposta, che poi è quello che spinge l'indagine e sviluppa l'attività matematica.

Le opere più antiche d'Aritmetica sono piene di questioni curiose ed attraenti, ma spesso così lontane dalla realtà e dalle applicazioni pratiche, che uno spirito grossolano potrebbe stimarle pressoché inutili. Eppure tante di esse hanno promosso i metodi di ricerca, e dato origine a vere e proprie teorie, d'importanza indiscutibile!

Nella scienza le questioni particolari scompaiono: sono i metodi che restano, fintanto che altri non s'inventano più semplici o più efficaci.

Il matematico non può né deve preoccuparsi della possibilità di un'applicazione più o meno immediata delle sue ricerche. Egli investiga quando l'occasione gli si offre, nel campo in cui prova maggior diletto, verso quel centro di bellezza dal quale il gusto suo, che più si affina, sente di essere attratto.

Il progresso della Scienza, come quello dell'Arte, non può essere segnato se non a questo patto.

Le *Disquisitiones Arithmeticae* di Carlo Federico Gauss sono tutto un inno alle bellezze dell'Aritmetica. I lavori aritmetici di Ernesto Cesàro attraggono e conquidono per il calore di passione che vi profuse quel matematico di genio.

Nei tempi più antichi le opere matematiche furono accompagnate da raccolte interessanti di curiosità aritmetiche e problemi dilettevoli. Avrò occasione di citarne diverse.

L'insegnamento della Matematica che per la sua efficacia deve seguire lo sviluppo storico di questa Scienza, non può trascurare quanto serve ad attrarre e a dilettare il discente. L'insegnante che riduce la materia all'avidità delle formole, per quanto esatte, allo schema dei ragionamenti, per quanto rigorosi, fallisce alla sua missione. Se egli sente tutta la bellezza, l'utilità, l'importanza di quelle formole, tutto il vigore di quei ragionamenti, comunichi questo suo sentire alla scolaresca, le infonda tutta la passione sua; e accenderà con la sua fiamma altre fiamme all'amore e al culto della Scienza!

Gli antichi furono maestri a noi anche in questo. E io non so se ancor oggi debba esclamare col Poeta della Bellezza:

Era più lieta
Urania un dì, quando le Grazie a lei
il gran peplo fregiavan!

FIGURE MAGICHE E RICREAZIONI ARITMETICHE. - Fra le curiosità più attraenti dell'Aritmetica, che posson essere portate nella Scuola fin dalle prime lezioni, specialmente per addestrare gli alunni all'algoritmo dell'addizione, sono i *quadrati magici*.

Eran noti verso il 1000 ai Cinesi, agl'Indiani, agli Arabi, presso i quali venivano considerati come amuleti aventi virtù misteriose, come per esempio quella di preservare dalla peste. Portati in Europa, furono molto in voga nel 1500, e se ne servirono gli astrologhi nelle loro speculazioni occulte.

Fin da ragazzi abbiamo appreso a costruire il quadrato magico di 3, cioé con 9 caselle ([1]): esso è unico, non considerandosi come distinti i quadrati ottenuti da uno stesso per rotazioni attorno al centro o per ribaltamento. Si hanno invece 880 quadrati magici di 4, e furono tutti deter-

---

(1) Il quadrato magico di 3:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

è riportato in un libro del matematico ebreo ABRAHAM IBN ESRA, vissuto nella seconda metà del 12° secolo; cfr. M. STEINSCHNEIDER, Bibliotheca Mathematica, s. 2^a, v. 10°, a. 1869, p. 39.

minati da Frenicle ([2]). Ne voglio ricordare uno solo, il più antico di cui si abbia notizia in Occidente:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Si trova in un'incisione in rame del 1514, dovuta ad Alberto Dürer ([3]), e intitolata «La Malinconia».

Ecco come ce la descrive Teofilo Gauthier ([4]):

Sans ordre autour de lui mille objects sont épars;
Ce sont des attributs de sciences et d'arts,
La règle et le marteaux, la sphère emblématique,
Le sablier, la cloche et la ***table mystïque****.*
. . . .
Une chauve-souris qui d'un donjon s'envole
l'orte écrit sur son aile ouverte en banderolle:
Mélancolie*.*

Veramente il pipistrello porta scritto sull'ala aperta: MELENCOLIA, con evidente errore ortografico, e la stessa tavola mistica presenta un errore grossolano: v'é un 2 al posto del 9, cosicché il 2 figura due volte, ciò che altera in modo banale il misticismo, per così dire, della tavola. Il Dürer era anche un matematico! Come si spiega dunque quest'errore? Secondo me, in modo semplicissimo. È stato fatto ad arte, come l'errore ortografico, per significare maggiormente il disordine, la noncuranza, l'indolenza propria delle persone malinconiche!

Un secolo dopo, l'intima struttura dei quadrati magici veniva svelata dai matematici. Bachet de Méziriac nei suoi *Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres*, la cui prima edizione comparve a Lione, nel 1612, insegnava a costruire i quadrati magici di un numero dispari di caselle con un processo grafico detto delle *terrazze*; Frenicle de

(2) Mém. l'Acad. des sciences de Paris, a. 1693, p. 484; Sui quadrati magici di 4 si può consultare l'opuscolo del Dr. PROMPT, *Recherches analytiques sur les carrés magiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1917.

(3) ALBERTO DÜRER, celebre pittore, incisore ed architetto, nato a Norimberga (1471-1528). Sembra che abbia studiato descrittiva nell'Università di Bologna con SCIPIONE DAL FERRO.

(4) L'incisione, assieme ai versi del GAUTHIER, è riprodotta a pag. 20 dell'opuscolo del PROMPT ([2]).

Bessy nel 1693 risolveva il problema stesso per il caso di un numero pari di caselle. Sono di quel tempo le *Récréations mathématiques et physiques* di Ozanam (Paris, a. 1694) e il *Traité des quarrés sublimes* di Poignard (Bruxelles, a. 1704). Cito ancora il *De quadratis magicis* di Leonardo Eulero, e mi fermo col ricordare l'opera di Violle del 1838 che porta questo titolo suggestivo: *Traité complet des carrés magiques pairs et impairs, simples et composés, à bordures, compartiments, châssis, équerre etc., suivi d'un traité des cubes magiques*.

Come si vede, ce n'è per tutti i gusti. E non vi parlo dei quadrati di più profonda magia, detti *diabolici* ([5]), che han pure la loro letteratura. Ma non si creda che gli studi più moderni, come il saggio del Maillet per una teoria generale dei quadrati magici fondata sulla teoria delle sostituzioni su n lettere ([6]), abbian detto l'ultima parola sul riguardo. Chi è riuscito per es. a determinare il numero dei quadrati magici di base n assegnata?

LE SOMME DELLE POTENZE SIMILI DEI PRIMI n NUMERI NATURALI. - Gli antichi matematici si occuparono non poco delle relazioni fra le somme delle potenze simili dei primi n numeri naturali. Vi sono difatti tra esse delle relazioni eleganti, alcune delle quali non è difficile scoprire.

Ricordo, in proposito, con quanto calore un mio amico non matematico, parecchi anni or sono, mi parlava di una sua scoperta. Egli aveva trovato che sommando via via i cubi dei numeri naturali si ottengono i quadrati delle somme dei numeri stessi. Dovetti convenire che si trattava di una proprietà graziosissima, ma dovetti pure aggiungere che quella proprietà è notissima e antichissima, perché si trova già nel libro di Aritmetica di El-Hassar, matematico arabo del 1300.

---

(5) I quadrati diabolici sono quadrati magici che restano tali quando si spezzano in due rettangoli con una qualunque parallela a uno dei lati e si traspongono questi rettangoli. Tale denominazione si deve a E.LUCAS, *Récreations mathématiques* (interessantissima opera in 4 volumi), v. 1, Paris, a. 1882, préface p. XVII. Un quadrato diabolico è il seguente:

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

Per la teoria dei quadrati diabolici si può consultare A.H.FROST, Quart. Journ., v. 7, a. 1866, p. 92; v. 8, a. 1867, p. 74; v. 15, a. 1878, p. 34, 93, 366; e M.FROLOV, Ass. franç. avanc. sc., v. 15, a. 1886, p. 172.

(6) Mém. Acad. sc. Toulouse, s. 9, v. 6, a. 1894, p. 258; Quart. Journ., v. 27, a. 1895, p. 132.

Lo stupore del mio amico crebbe quando gli mostrai che la proprietà da lui scoperta risulta facilmente da un'ordinaria tavola pitagorica, sommandone i numeri in due modi: per righe, e per angoli retti com'è indicato nel quadro seguente.

1	2	3	...	n
2	4	6	...	2n
3	6	9	...	3n
. .	. .	. .	. .	. .
n	2n	3n	...	n^2

Tale metodo per scoprire delle relazioni fra le somme s_1, s_2, s_3, ... delle potenze prime, seconde e terze, ecc. dei numeri naturali ci fu tramandato dagl'Indiani e dagli Arabi, e si trova esposto nella *Chiave del Calcolo* di Alqâchâni, medico ed astronomo del 1400 ([7]).

Si noti che se ai numeri della tavola pitagorica si sostituiscono i loro quadrati o i loro cubi si arriva con metodo analogo a dimostrare le relazioni

$$2s_5 = 3s_2^2 - s_3 \quad , \quad s_7 = 2s_3^2 - s_5 \ ,$$

la seconda delle quali fu segnalata da Jacobi ([8]).

La somma dei cubi dei primi *n* numeri dispari è data da questa formola elegantissima:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n\text{-}1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1).$$

Ebbene essa è almeno sei volte secolare! Difatti si rinviene nel *Talckys* di Ibn Albanna del 13° secolo ([9]).

Oggi noi possediamo dei mezzi molto rapidi per il calcolo delle somme in discorso e per ottenere quante relazioni vogliamo tra esse ([10]), ma non possiamo non essere compresi da ammirazione per la perspicacia degli antichi matematici arabi.

---

(7) *La clé du Calcul*, trad. di WOEPCKE, da una copia dell'a. 1589, Annali di Mat., v. 6, a. 1864, p. 225.

(8) *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher*, Altona, a. 1863, v. 5, p. 299.

(9) *Le Talckys* di IBN ABANNA, publié et traduit par A. MARRE, Roma, a. 1865; Atti Acc. Pont. N. Lincei, v. 17, a. 1864.

(10) Cfr. ad es.: M.CIPOLLA, *Analisi algebrica*, 2ª ed., a. 1922 (Palermo, D.Capozzi) p. 72, 88.

LEONARDO PISANO E LA DIFFUSIONE IN OCCIDENTE DELL'ARITMETICA INDO-ARABA. - Agl'Indiani e agli Arabi noi dobbiamo non soltanto le cifre dell'attuale sistema di numerazione, divenuto mondiale, ma una serie di fatti e procedimenti aritmetici ed algebrici, tramandati a noi e alle nazioni europee per l'opera di volgarizzazione e di diffusione che specialmente nel 13° secolo ne fecero i nostri mercanti, i quali per motivi diversi, ma più per ragioni di commercio, venivano a conoscenza della cultura araba, e ne parlavano e ne scrivevano con grande ammirazione.

Ecco ciò che ne dice LEONARDO PISANO, il maggiore matematico della prima metà del 1200, nella prefazione al celebre suo *Liber Abbaci* ([11]):

«Essendo stato mio padre nominato notaro dei mercanti pisani alla «dogana di Bugio, chiamatomi presso di lui, mentre ero ancora ragazzo, «volle che imparassi l'abbaco... Mi piacque tanto quell'arte a preferenza «delle altre, e tanto mi dedicai ad essa che tutto quello che si studiava in «Egitto, in Siria, in Grecia, in Sicilia e in Provenza coi metodi propri di «quei paesi di commercio pei quali poi viaggiai, appresi con grande «amore, ed imparai anche l'arte della disputazione. Ma pur tutto questo, e «l'algoritmo e l'arco di Pitagora, stimai quasi errore al confronto dei «metodi degl'Indiani (*Sed hoc totum etiam et algorismus alque arcus «pictagorae quasi errorem computavi respectu modi indorum*). Cosicché, «dopo avere studiato tali metodi con grande attenzione, aggiungendovi «le mie ricerche e quanto ritenni opportuno trarre da Euclide, mi son «dato a comporre un'opera in quindici capitoli, dove quasi tutto ho «rigorosamente dimostrato, perché coloro che desiderano apprendere tale «scienza, vi siano istruiti nei metodi che più eccellono in confronto agli «altri, e la gente latina non ne sia più oltre tenuta lontana (*ut extra, «perfecto pre ceteris modo, hanc scientiam appetentes instruantur, et «gens latina, de cetero, sicut hactenus, absque illa minime inveniatur*).

Il *Liber Abbaci*, la *Practica geometriae* e le altre opere minori di Leonardo Pisano portarono una nuova luce nelle cognizioni matematiche dei paesi d'occidente, nei quali la cultura greca era stata soffocata dalle invasioni barbariche. Quei libri, nei quali splende il genio italico, furono di modello e di guida, per circa tre secoli, agli studiosi e ai pratici!

I maggiori sviluppi della Matematica nel secolo XVI e nei successivi dovevano fare gradatamente dimenticare le opere di Leonardo da Pisa;

---

(11) *Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacij pisano in anno* MCCII. Pubblicato da B.BONCOMPAGNI, Roma, MDCCCLVII.
Circa la vita, le opere di Leonardo Pisano e la bibliografia relativa, si consulti l'interessante lavoro di E.BORTOLOTTI, *Italiani scopritori e promotori di teorie algebriche*, Annuario della R. Univ. di Modena, a. 1918-19.

ma esse rivissero all'ammirazione degli studiosi quando, nel 1857, furono dal Boncompagni ripubblicate ([12]).

Leonardo Pisano ci dice di avere appreso l'arte della disputazione. In quei tempi infatti erano frequenti le dispute su tutti i rami del sapere, e si tenevano anche pubblicamente con grande concorso di popolo e con l'intervento delle autorità civili, militari e religiose. Alcune di queste sfide sono rimaste celebri. L'imperatore Federico II che si compiaceva di tenere presso di sè i filosofi e gli scienziati di maggior grido, non si lasciava sfuggire l'occasione di farli contendere coi dotti delle città nelle quali si recava. E così quando passò per Pisa nell'estate del 1226, fece invitare Leonardo a sostenere una disputa coi matematici della sua corte. Di questa disputa, come della questione che Leonardo risolse, ne abbiamo notizia nella stessa lettera dedicatoria del *Liber quadratorum*; opera che egli scrisse traendo lo spunto precisamente da quella questione:

«*... occurrens Magister Johannes panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem, ut* **invenirem numerum quadratum cui quinque additis vel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur**.»

La questione, dunque, proposta da maestro Giovanni da Palermo a Leonardo era di trovare un quadrato che aumentato o diminuito di 5 dia sempre un quadrato, cioé di trovare tre numeri (razionali) x, u, v, soddisfacenti alle equazioni

$$x^2 + 5 = u^2 \quad , \quad x^2 - 5 = v^2.$$

Non si creda che sia questo un problema molto facilmente risolubile, pure coi mezzi di cui disponiamo oggigiorno, tanto più che esso non ammette soluzioni nel campo dei numeri interi.

Leonardo Pisano rispose a Giovanni Palermitano che il numero quadrato che lui chiedeva è $\frac{1681}{144}$ eguale a $\left(\frac{41}{12}\right)^2$. Esso infatti aggiunto a 5 dà il quadrato di $\frac{49}{12}$ e diminuito di 5 dà il quadrato di $\frac{31}{12}$.

I numeri interi n pei quali sono possibili in numeri razionali le equazioni

$$x^2 + n = u^2 \quad , \quad x^2 - n = v^2,$$

furono più generalmente studiati da Leonardo nel *Liber quadratorum* ([13]).

---

(12) B.Boncompagni, Scritti di Leonardo Pisano del secolo decimoterzo, Roma, a. 1857.

(13) Cfr. il v. 2° degli scritti di Leonardo Pisano, (12), Roma, a. 1862, pagina 266.

Di essi si occuparono il Genocchi (14), e poi il Wöpcke che dimostrò l'origine araba della questione (15).

L'ANALISI INDETERMINATA. I TRIANGOLI DI FERMAT E L'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT. - Le quistioni cui ho accennato, rientrano nel campo dell'Analisi indeterminata, che ha per oggetto la risoluzione in numeri interi delle equazioni a coefficienti interi e a più incognite. Tracce notevoli di questioni siffatte noi troviamo anche presso i popoli dell'estremo Oriente, nei primi secoli dell'era volgare. Le regole, ad es., che diede Gauss per determinare un numero che dia resti assegnati secondo divisori assegnati, sono state ritrovate - nel caso che i divisori siano primi fra loro a due a due - nell'opera intitolata Ta-yen, che vuol dire «grande generalizzazione», del cinese Tsun-tsé, vissuto nel 3° secolo (16).

L'Analisi indeterminata, specialmente quella di primo grado, è legata al nome di Diofanto, ma essa raggiunse le più alte vette nei tempi moderni, specialmente con Gauss, cui si deve la mirabile perfezione di talune teorie, come quella delle congruenze e delle forme quadratiche. Fu lui che dimostrò per la prima volta la celebre legge di reciprocità dei residui quadratici, intravista dalla mente perspicace di Leonardo Eulero (17). Fu con Gauss che la teoria aritmetica delle forme quadratiche e l'analisi indeterminata di secondo grado con due incognite raggiunse l'alta perfezione che essa oggi presenta.

Moderne ricerche hanno portato innanzi la difficile teoria aritmetica delle forme di grado superiore al secondo, ma molto resta ancora all'investigazione. Problemi già posti da secoli sono tuttavia insoluti.

La questione di trovare un triangolo rettangolo i cui lati siano espressi in numeri interi è risolta da Diofanto, e corrisponde alla risoluzione in numeri interi (detti *pitagorici*) dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

I commentatori di Diofanto dovevano essere naturalmente condotti a considerare soluzioni soddisfacenti a condizioni speciali. Così il Fermat, nella sua 2ª osservazione alla Questione 24ª del libro 6° di Diofanto, propone di trovare un triangolo in numeri interi che soddisfi alle due seguenti condizioni: l'ipotenusa sia un quadrato, e la somma dei cateti sia

---

(14) Ann. sc. mat. fis., vol. 6, a. 1855, p. 273-320.

(15) Annali di Matematica, s. I, v. 3, a. 1860, p. 206; v. 4, a. 1861, p. 247.

(16) C.F.GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae, a. 1801 (Werke, t. I), art. 32-36; K.D.BIERNATZKI, Journ. reine angew., Math., t. 52, a. 1856, p. 59; MATTHIESSEN, ivi, t. 91, a. 1881, p. 254. Cfr. pure M.CIPOLLA, l. c. (10), pag. 54-56.

(17) Per un'ampia bibliografia sulla legge di reciprocità dei residui quadratici si può consultare M.CIPOLLA, *Theoria de congruentias intra numeros integro*, Revue de Mathématiques, Torino, a. 1905, p. 89-117.

pure un quadrato. Il problema si risolve quando si sa risolvere in numeri interi l'equazione

$$2x^4 - y^4 = z^2.$$

Una soluzione di quest'equazione fu data dallo stesso Fermat:

$$x=13, y=1, z=239,$$

e ad essa corrisponde un triangolo i cui lati sono espressi da numeri di 13 cifre; eppure è questo il triangolo di Fermat di minima ipotenusa.

L'ingegnoso procedimento di Fermat permette di ricavare una soluzione da un'altra già nota, ma Eulero mostrò con un esempio che questo metodo non dà tutte le soluzioni di quell'equazione. La questione fu risolta da Lagrange, ma il procedimento suo è così laborioso che non si riesce a scoprire la legge di formazione delle soluzioni. Le formole di risoluzione furono date più tardi da V.A.Lebesgue ([18]).

Di questa ricerca del Fermat dovette certamente avere notizia il nostro Torricelli, perché il Prof. Gino Loria curando l'edizione delle opere del grande faentino, fra diversi problemi, semplicemente proposti dal Torricelli, ne trovò uno che può considerarsi come una particolarizzazione del problema di Fermat. Si chiede infatti di determinare un triangolo rettangolo in numeri interi che abbia non solo per ipotenusa un quadrato e per somma dei cateti un quadrato, ma anche un quadrato per somma dell'ipotenusa e del cateto maggiore.

La risoluzione di questo problema del Torricelli fu da me, quattro anni or sono, in un lavoro pubblicato negli Atti dell'Accademia Gioenia. Mi fu facile, dopo le ricerche del Poincaré e di Beppo Levi sulla determinazione dei punti razionali di una curva algebrica, dimostrare l'esistenza d'infiniti triangoli torricelliani. Ma non così facile mi si presentò la questione di determinare il triangolo torricelliano di minima ipotenusa. Perfezionando le formole di Lebesgue, e ordinando i triangoli di Fermat secondo i valori crescenti delle ipotenuse, potei stabilire un criterio per il quale noti gli elementi del triangolo di posto n, si può riconoscere se i triangoli di posto $2n$ e $2n+1$ siano torricelliani. Così potei stabilire che il primo triangolo di Fermat che sia torricelliano è il 12°. La sua ipotenusa è espressa da un numero di 165 cifre.

Ma il problema di Fermat ha dato origine a tante questioni per risolvere le quali sono sorte delle teorie intere.

Il Fermat cercando di perfezionare quel suo procedimento al quale ho accennato, riuscì a dimostrare ([19]) l'inesistenza di soluzioni in numeri interi non nulli dell'equazione

---

(18) Per la bibliografia relativa si consulti: M.CIPOLLA, *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, Atti Acc. Gioenia, Catania, v. 5, a. 1918, v. XI.

(19) P. DE FERMAT, *Observations sur Diophante*, Oeuvres, v. 1, p. 340; v. III, p. 272; cfr. anche H.G.ZEUTHEN, Geschichte der Math. im 16 und 17 Iahrundert, Leipzig, a. 1903, p. 163.

$$x^4 - y^4 = z^2,$$

Con lo stesso procedimento Frenicle ([20]) pervenne a conclusione analoga per l'equazione

$$x^4 + y^4 = z^2,$$

e quindi per l'equazione

$$x^4 + y^4 = z^4.$$

Fermat enunciò allora ([21]) più generalmente l'impossibilità di soddisfare con numeri interi non nulli all'equazione:

$$x^n + y^n = z^n.$$

qualunque sia l'intero n, purché maggiore di 2. È questa la famosa proposizione che va sotto il nome di *ultimo teorema di Fermat*.

Sappiamo che è vera per n=3, come dimostrò Eulero ([22]), che è pur vera per n=4, in seguito al ricordato teorema di Frenicle, per n=5 secondo una dimostrazione di Dirichlet ([23]); sappiamo che è vera per tutti i valori di n da 3 a 100 ed anche per numeri maggiori di 100 soddisfacenti a condizioni speciali in base ad uno studio di Kummer ([24]); ma attendiamo ancora una dimostrazione per un n qualunque maggiore di 2. Non sono mancati gli annunzi di vittoria anche da parte di qualche matematico illustre d'oltr'Alpe; è pure comparsa qualche dimostrazione errata; e non è trascorso un anno dacché abbiamo ricevuto l'invito di prendere la prenotazione d'un lavoro straniero, dove - a giudizio dell'editore - trovasi la sospirata dimostrazione!

Per conto mio non vorrei leggere ormai che un solo lavoro sull'ultimo teorema di Fermat: quello che l'Accademia delle scienze di Gottinga giudicherà meritevole del premio Wolfskel di 100000 marchi; e mi auguro davvero di poterlo leggere, nell'interesse della scienza!

Quanti matematici vorrebbero avere questa consolazione prima di chiudere gli occhi per sempre!

I NUMERI PRIMI E I LORO MISTERI. - I numeri primi han dato luogo, in ogni tempo, a questioni e ricerche numerose, a teorie diverse che si elevano dalle considerazioni più elementari alle più alte concezioni della Matematica. Ciò si spiega con l'importanza speciale che il concetto di

(20) B.FRENICLE DE BESSY, *Traité des triangles rectangles en nombres*, Paris, a. 1676; Mém. Acad. sc. Paris, a. 1666-99, v. 5, ed. Paris 1729, p. 178.

(21) P. de Fermat, *Observations sur Diophante*, Oeuvres, v. 1, p. 291; v. III, p. 241. Si consulti inoltre la memoria bibliografica: *Sull'ultimo teorema di Fermat*, di D.GAMBIOLI, Periodico di Mat., v. 16, a. 1901.

(22) L.EULER, Algebra, v. II, p. 509-16.

(23) G.LEJUNE DIRICHLET, Journ. reine angew. Math., v. 3, a. 1828, p. 354; Werke, v. I, Berlin, a. 1889, p. 13, 23, 91.

(24) E.E.KUMMER, Journ. reine angew. Math. v. 40, a. 1850, p. 130; Journ. math. pure et appl., s. I, v. 16, a. 1851, p. 488.

numero primo ha non soltanto in Aritmetica ma in qualunque ramo della Matematica.

La questione di determinare una proprietà caratteristica dei numeri primi per stabilire un criterio per riconoscere se un numero sia primo o no è fra le più antiche. In un'Aritmetica cinese del tempo di Confucio (5 secoli prima dell'era volgare) si legge che il *numero* 2^p-2 *è divisibile per p, se p è primo, e non lo é se p è composto*.

Di queste due proposizioni è vera soltanto la prima, che è un caso particolare del teorema di Fermat: *Se p è un numero primo ed a non è divisibile per p, allora* $a^{p-1}-1$ *è divisibile per p*.

In una pubblicazione che rimonta ormai a 18 anni fa ([25]), io dimostrai che esistono infiniti numeri composti che verificano il teorema di Fermat ad una data base comunque assegnata, e indicai anche un procedimento per determinarli tutti.

Il teorema inverso di quello di Fermat è però valido per certe categorie speciali di numeri primi. Ed in vero il Lucas fece notare al Congresso di Clermond-Ferrand del 1876 ([26]) che: *se a è primo con p e* $a^{p-1}-1$ *è divisibile per p, ma* a^d-1 *non è divisibile per p per nessuno divisore puro d di p-1, allora p è primo*.

E ne trasse varie conseguenze, fra le quali voglio citarne una ([27]) che riguarda i numeri primi della forma $2^{2^n}+1$che hanno speciale importanza nella teoria della divisione della circonferenza in parti eguali:

Condizione necessaria e sufficiente perché il numero $2^{2^n}+1$ *sia primo è che divida il numero*

$$3^{2^{2^n-1}}+1$$

La difficoltà per eseguire la divisione con un dividendo così alto viene ridotta prendendo i successivi resti delle potenze di 3 secondo il divisore $2^{2^n}+1$. Le moderne macchine calcolatrici permettono, entro i primi valori di n, di eseguire rapidamente questi calcoli; ma forse non sarà difficile di spingere i calcoli per valori anche alti di n. Chi sa se con

---

(25) M.CIPOLLA, *Sui numeri composti che verificano la congruenza di Fermat*, Ann. di Mat., s. 3, v. 9, a. 1903, p. 139-160.

(26) Cfr. anche E.LUCAS, *Théorie des nombres*, Paris, a. 1891, p. 441; e per alcune applicazioni di questo teorema: G.ARNOUX, Assoc. fr. avanc. sc. v. 32, (Angers) a. 1903, p. 113.

(27) PROTH, Nouvelle Corresp. Math., v. 4, a. 1878, p. 210; Comptes rendus Ac. sc. Paris, v. 87, a. 1878, p. 374. I teoremi analoghi che si ricavano sostituendo alla base 3 il numero 5 o 10 erano stati già dati fa TH. PÉPIN, Comptes rendu Ac. sc. Paris, v. 86, a. 1877, p. 329. Nella prefazione alla sua *Théorie des nombres* ([26]) E.LUCAS dà come suo questo teorema, ma vi si nota un errore tipografico.

questo mezzo non si riesca ad apprendere qualche cosa di più sui numeri primi della forma $2^{2^n}+1$.

Di essi se ne conoscono soltanto cinque e corrispondono ai valori di n da 0 a 4. È ancora un mistero se ne esistono altri! Eulero ([28]), contrariamente all'opinione di Fermat, trovò che il numero $2^{2^n}+1$ è composto per n=5. E composti ([29]) furono riconosciuti in seguito i numeri corrispondenti ai valori di n=6, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38. I numeri corrispondenti ai due ultimi valori di n hanno più di 20 milioni di cifre, e sono rispettivamente divisibili per $2^{39} \cdot 5+1$ e $2^{41} \cdot 3+1$; inoltre il numero $2^{39} \cdot 5+1$ è stato riconosciuto primo da Seelhoff. Esso però non è il maggiore dei numeri primi finora conosciuti; questo primato oggi, e da un anno appena, è tenuto dal numero 2^{127} -1 che ha 39 cifre, e dà il dodicesimo numero perfetto: $2^{126}(2^{127}-1)$.

Si deve infatti ad Euclide ([30]) la prop.: s*e* 2^p-1 *è un numero primo, allora* 2^{p-1} *(*2^p-1*) è un numero perfetto, cioé uguale alla somma dei suoi divisori puri*. Eulero ([31]) dimostrò inversamente che tutti i numeri perfetti pari sono dati dalla formola di Euclide.

Si conoscono finora dodici numeri perfetti pari e corrispondono ai valori di p eguali a 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127; per tutti gli altri valori di p non superiori a 67, i corrispondenti numeri sono stati riconosciuti composti ([32]).

---

(28) L.EULER, Comm. Ac. Petrop., v. 6, a. 1732-3, ed. a. 1738, p. 103. Si ha difatti
$$2^{2^5}+1= 6416700417.$$

(29) Per n=6 si ha il divisore primo $2^9 \cdot 5+1$ (F.LANDRIS, Nouv. corr. math., v. 6, a. 1880, p. 417). Per n=12, 23 si hanno rispettivamente i divisori primi $2^{14} \cdot 7+1$, $2^{25} \cdot 5+1$ (J.PERVOUCHINE, Bull. Acad. Pétersb. v. 24, a. 1878, col. 559; v. 25, a. 1879, col. 63; Mélang. math. astr. Ac. Pétersb., v. 5, a. 1874-81, p. 505, 519). Per n=36 si ha il divisore primo $2^{39} \cdot 5+1$ (P.SEELHOFF, Zeitschr. Math. Phys., v. 31, a. 1886, p. 380). Per n=9, 11, 18, 38 si hanno rispettivamente i divisori $2^{16} \cdot 37+1$, $2^{13} \cdot 39+1$, $2^{20} \cdot 13+1$, $2^{41} \cdot 3+1$ (E.B.ESCOTT, Interméd. math., v. 10, a. 1903, p. 158; v. 11, a. 1904, p. 79). Tavole di divisori dei numeri della forma $2^n \pm 1$ per n<64 si trovano in un opuscolo di F.LANDRIS: *Sur la décomposition des nombres en facteurs simples*, Paris, a. 1869; in una memoria di E.LUCAS, American Journ. math., v. 1, a. 1878, p. 239, e in un'altra di R.BALL, Messenger math., v. 21, a. 1891-2, p. 34, 21.

(30) EUCLIDE, *Elementa*, l. 9, prop. 36.

(31) L.EULER, Comment. arith., v. 2, Pétersb., a. 1849, p. 514.

(32) I primi quattro numeri perfetti (pari) erano conosciuti nell'antichità (NICOMACO (a. 100 d.C.), Introd. Arith., l. I, cap. 16, ed. Hoche, Leipzig, 1866, p. 40). I primi otto si trovano in L.EULER, Nouv. Mém. Ac. Berlin, a. 1772, p. 35; il nono è stato indicato da P.SEELHOFF: Zeitsch. Math. Phys., v. 31, a. 1886, p. 174, da J.PERVOUCHINE, Boll. Ac. Pétersb., v. 31, a. 1887, col. 352 e da J.HUDELOT; Mathesis, s. I, v. 7, a. 1887, p. 45. Il decimo e l'undicesimo numero perfetto risultano dai calcoli fatti nel 1911 da A.E.POWERS (Bull. Amer. Math. Soc. v. 18, a.

Non si conoscono numeri perfetti dispari, e gli sforzi fatti finora per dimostrare la loro inesistenza sono riusciti vani ([33]). Dobbiamo contentarci di questo risultato curioso del Catalan ([34]): *Un numero perfetto dispari, se esiste, dovrà essere composto di almeno 26 fattori primi differenti, e quindi dovrà essere un numero almeno di 45 cifre*.

Ho già parlato di un metodo, fondato sul teorema di Fermat, per riconoscere se un numero sia primo o composto; ma esso non ha il pregio della generalità. Un metodo generale non può essere fondato che su qualche proprietà caratteristica dei numeri primi, ma quelle poche che conosciamo, come ad es. il teor. di Wilson, forniscono metodi praticamente laboriosi.

Per la determinazione dei numeri primi non superiori ad n basta la conoscenza dei numeri primi non superiori a $\sqrt{n}$; e i metodi fondati su quest'osservazione non son altro che trasformazioni del *crivello di Eratostene*.

Per la decomposizione di un numero dispari N in fattori il Prof. Fontebasso segnalò l'anno scorso, nei Rendiconti della R.A. dei Lincei ([35]), il seguente procedimento.

Sia K la radice quadrata intera di N ed R il resto, e si consideri la successione

$$2K+1-R,\quad 2K+3-R,\quad 2K+5-R,\ \ldots,\ N$$

e l'altra

$$2K+1-R,\quad 4K+4-R,\quad 6K+9-R,\ \ldots,\ \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - N,$$

1911-12, p. 162; Proc. London Math. Soc. s. 2, v. 13, a. 1914) e il dodicesimo da quelli fatti nel 1920 da E.FAUQUEMBERGUE (Sphinx-Oedipe, febbraio 1920; e nella stessa Rivista del luglio 1914 il caso di p eguale a 107 che dà l'undicesimo numero peretto).

Per tabelle di divisori dei numeri della forma 2^p-1 cfr. nota ([29]). Il numero corrispondente a p eguale a 67 è stato riconosciuto composto da J.N.COLE: Boll. Amer. Math. Soc., v. 10, a. 1903-4, p. 134. Per altri valori più alti di p che diano numeri composti cfr.: A.CUNNINGHAM, Report, British Association for the advancement of Scinces, a. 1895, p. 614, e A.GÈRARDIN, Comptes rendus des sociétés savantes en 1920, pp. 53.

Per una più estesa bibliografia, cfr. E.DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, Washington, 1919, p. 22 e seguenti.

(33) Sono erronee le dimostrazioni di J.Carvallo (C.R. Acad. sc. Paris, v. 81, a. 1875, p. 73) e quella di M.Lazzarini (Period. di Mat., v. 18, anno 1903, p. 201; cfr. in proposito le osservazioni di C.Ciamberlini e M.Cipolla, ivi, p. 283, 285). Non esistono numeri perfetti della forma $4u$+3 (M.A.Stern, Mathesis, s. 1, v. 8, a. 1886, p. 248).

(34) Mathesis, s. 1, v. 8, a. 1888, p. 112.

(35) v. 30, a. 1921, 2° sem., p. 212.

di cui ciascun termine è la somma del precedente e del corrispondente termine della prima successione.

Or bene, se un termine della seconda successione, per es. l'm^{imo}, è il quadrato di un numero intero Q, allora risulta

$$N=(K+m+Q)\,(K+m-Q).$$

È pure vera la proposizione inversa. E ne discende che affinché il numero N sia primo occorre e basta che, nella seconda successione, soltanto l'ultimo termine sia un quadrato.

Il metodo di Fontebasso è in sostanza fondato sulla rappresentazione di un numero come differenza di due quadrati; rappresentazione che, allo stesso scopo, era stata utilizzata dal Fermat, come risulta da una sua lettera indirizzata, non si sa bene se a Frenicle o al padre Mersenne ([36]). Un tale procedimento può essere utile, più che a scomporre in fattori un numero assegnato, a costruire una tavola di divisori dei numeri, purché a tale costruzione si accompagni quella di una tavola di quadrati.

Non mancano tavole abbastanza estese dei divisori dei numeri, come quelle di Burckardt che arrivano sino al 3° milione, di Glaisher che vanno dal 4° al 6° milione, di Dase dal 7° al 9° milione. Esse però non sono esenti da errori, alcuni dei quali sono stati rilevati dal confronto tra l'effettiva enumerazione dei numeri primi dati dalle tavole, e i valori di certe espressioni che danno il numero esatto dei numeri primi che non superano un numero n assegnato. Tali espressioni richiedono soltanto la conoscenza dei numeri primi che non superano la radice quadrata di n, e si devono a Meissel e a Rogel. Altre formole fondate su principi diversi furono ottenute da G.Torelli; sia queste che quelle io estesi in un lavoro pubblicato negli Annali di Matematica del 1905, nel quale determinai delle espressioni generali per la somma dei valori che prende una funzione numerica per tutti i numeri primi che non superano n, noti soltanto i numeri primi che non superano $\sqrt{n}$.

Per il calcolo approssimato della totalità dei numeri primi che non superano n, Legendre e Gauss diedero rispettivamente le espressioni

$$\frac{n}{\log n - 1{,}08366} \qquad , \qquad \int_2^n \frac{dx}{\log x}$$

Entrambe sono state riconosciute, con dimostrazioni estremamente delicate, come valori assintotici della detta totalità.

Per la valutazione approssimata dell'n^{imo} numero primo, il pope russo Pervouchine diede la seguente espressione

---

(36) Oeuvres, v. 2, p. 256.

$$n\log n + n\log\log n - n + \frac{5n}{\log n} + \frac{n}{24\,\log^2 n}\ ,$$

che fu dal Cesàro riconosciuta, fino al terzo termine, come un'espressione assintotica dell'n^{imo} numero primo, e fu da lui corretta per gli altri due termini. Il prolungamento dell'assintotismo sino agl'infiniti dell'ordine $\frac{n}{\log^r n}$, per r intero comunque grande, fu eseguito da me nella mia dissertazione di laurea ([37]).

Le ricerche sulla totalità dei numeri primi hanno come punto di partenza una fondamentale memoria di Riemann, e sono fra le più belle e le più difficili dell'Analisi matematica moderna. Io devo rimandare per esse alla monografia di Gabriele Torelli del 1901, premiata dalla R. Acc. delle scienze di Napoli, e al *Lehrbuch der Primzahlen* del Landau. Mi limito solo a notare che da tali ricerche risulta che la legge di distribuzione dei numeri primi dipende dagli zeri di una trascendente intera, la $\xi(t)$ di Riemann, zeri sui quali l'ultima parola non è stata ancora detta.

Ricerche analoghe sono state fatte per valutare assintoticamente il numero dei numeri primi, fino a un limite assegnato, di una progressione aritmetica.

Il teorema d'esistenza d'infiniti numeri primi in una progressione aritmetica, enunciato già da Eulero, fu dimostrato per la prima volta in tutta la sua generalità dal Dirichlet ([38]).

Tale dimostrazione, che è una delle più interessanti applicazioni dell'Analisi infinitesimale alla teoria dei numeri, richiede però considerazioni così lunghe e complesse, concetti che sembrano così estranei all'Aritmetica e così lontani dalla questione particolare che si tratta, che, pur ammirando la potenza d'ingegno dell'Autore, non si può non restare perplessi, e ci viene di chiedere dove risieda l'avvenire dell'Aritmetica!

È finora fallito ogni tentativo per dimostrare quella prop. in modo elementare o con mezzi notevolmente più semplici ([39]).

---

(37) M.CIPOLLA, *La determinazione assintotica dell'n^imo numero primo*, Rend. Acc. sc. fis. mat. Napoli, s. 3, v. 8, a. 1902, p. 132-166.

(38) G.L.DIRICHLET, Abhandlungen K.Ak. Berlin, a. p. 1837, pagina 45; Werke, v. 1, p. 307.

(39) Sono erronee le dimostrazioni aritmetiche di A.M.LEGENDRE (Théorie des nombres, 4ª ed. conforme alla 3ª. (1830), v. 2, a. 1900, pp. 71-72) e di I.ZIGNAGO (Ann. Math. pures et appl. s. 2, v. 21, a. 1893, p. 47). Si conoscono però varie dimostrazioni aritmetiche ed algebriche del teorema di esistenza d'infiniti numeri primi della forma lineare *Mx+1* e *Mx-1*.

Meno dificile ma pure complicata è la dimostrazione di Tchebycheff del così detto postulato di Bertrand ([40]): *Fra un numero e il suo doppio è sempre compreso un numero primo*.

Io vorrei poter dire domani ai miei allievi: Non abbiamo più bisogno della dimostrazione di Tchebycheff; la proposizione di Bertrand possiamo ora dedurla immediatamente da quella di Goldbach ([41]), finalmente dimostrata:

Ogni numero pari è la somma di due numeri primi!

Aggiungo però subito che non mi faccio quest'illusione, perché la proposizione di Goldbach che trova così sorprendente conferma empirica, entro i limiti in cui è stata verificata, è di natura talmente diversa da quelle finora superate, che dubito assai possa essere vinta allo stato attuale dell'Analisi.

Essa sarebbe la più bella proposizione dell'Aritmetica! Ma il matematico deve pure avere le sue grandi rinunzie e le sue rassegnazioni!

*
* *

Oggi occorre affilare gli strumenti, escogitare nuovi mezzi, aprire vie più rapide e più sicure per raggiungere vette da cui si possano dominare orizzonti più larghi per l'Aritmetica. E allora altre bellezze scopriremo, che son oggi appena intraviste, o affatto ignorate.

L'avvenire dell'Aritmetica è l'avvenire stesso della Matematica!

Intanto l'opera ferve. Ferve nel silenzio della stanza da studio del maestro, come in quella dello studente, ferve fin nell'aula della lezioni, che conosce l'entusiasmo del docente e la brama di sapere degli allievi.

Ma noi che siamo per volgere all'occaso, ogni speranza poniamo nei giovani dell'Italia rinnovata!

Noi guardiamo a quelli che nelle trincee portarono i nostri libri, le nostre dispense litografate, gli appunti di scuola delle compagne, e confortarono così, come meglio potevano, la travagliosa attesa del cimento; noi guardiamo a quelli che il cimento non videro, ma ne intesero tutto l'ardore e ne vissero tutte le ansie; guardiamo a quelli entrati da poco nelle aule universitarie, alle quali han ridato la primitiva gaiezza, il consueto calore. E particolarmente guardiamo a Voi, o giovani dell'Univer-

---

(40) J.BERTRAND, Journ. de l'Èc. Polytech., a. 1845, cah. 30, p. 123; P.TCEBYCHEFF, Journ. math. pures et appl., v. 17, a. 1852, p. 366; Mém. Ac. Imp. Pétersb., v. 7, a. 1854, p. 17; Oeuvres, v. 1, (1899), p. 49.

(41) Lettera di CHR.GOLDBACH a L.EULER del 7 giugno 1742 e di EULER a GOLDBACH del 30 giugno 1742. Per la relativa bibliografia e per interessanti considerazioni cfr. la recentisima nota di G.TORELLI, Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli, 12 novembre 1921.

sità nostra, che avete creato quel prodigio che è il Circolo Matematico, e che oggi, con pari entusiasmo, siete accorsi all'inaugurazione del nostro Seminario; guardiamo a Voi, il cui fervore animoso trova eco profonda, e larga simpatia fra i compagni delle altre Università d'Italia.

E si rinsalda in noi la fede che i frutti di questo comune amore per la scienza, non potranno tardare. E saranno per l'Italia nuovi lauri che, intrecciandosi nell'aureola della Vittoria, contribuiranno a che il nome Suo, sempre celebrato, ascenda ancora più alto nel rispetto e nella stima del mondo, dimostrando che sempre rifulge e sempre trionfa nelle Scienze, come nelle Lettere e nelle Arti, il genio della nostra stirpe!

ANNALI DI MATEMATICA
Serie IV, Tomo I, 1923-24, pp. 19-29.

Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert

Conferenza tenuta da M.Cipolla a Catania il 7 aprile 1923 alla Sezione Matematica della XII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze

---

DAVID HILBERT, in diverse conferenze tenute l'anno scorso a Copenaghen, ad Amburgo, alla *Deutschen Naturforscher-Gesellschaft*, ha dato notizia delle sue ultime ricerche sui fondamenti logici della Matematica, eseguite in collaborazione con PAUL BERNAYS, nell'intento, com'Egli dice, di bandire definitivamente dal mondo ogni dubbio sulla certezza delle conclusioni matematiche. Io mi riferirò all'ultima delle dette conferenze, che è pubblicata nel vol.88 dei *Math. Annalen*, e contiene anche una dimostrazione del principio di ZERMELO delle infinite scelte per classi d'insiemi di numeri reali.

Tali ricerche dell'eminente matematico tedesco, che ha dato alla Scienza tanti preziosi contributi, non soltanto nei suoi sviluppi superiori ma anche sui fondamenti, non possono non destare il più alto interesse, particolarmente fra i matematici italiani che da più di un trentennio lavorano sui principi logici della Matematica, adoperandosi, in special modo, ad evitare nei loro ragionamenti l'applicazione del principio di ZERMELO. Deve la loro opera ritenersi oggi come superflua, dopo i risultati di HILBERT? Viene diminuita l'importanza dei *Principia mathematica* di RUSSELL e WHITEHEAD ([1]), l'opera più grandiosa che, sulla base del *Formulario* del nostro PEANO, sia stata scritta finora sui fondamenti logici della Matematica?

La risposta non è affermativa, a mio giudizio, e le ragioni ho l'onore di esporre agli illustri Colleghi convenuti dalle varie parti d'Italia a questa grande Riunione delle Scienze.

1. Quali siano i concetti e i principi logici che HILBERT pone a base della Matematica non è possibile dire con tutta precisione, fintanto

---

(1) Cambridge, *University Press*, v.I (1910, v.II e III (1913). Per un'esposizione sommaria si può consultare la mia *Analisi algebrica* (2ª ed., Palermo, 1921, ed. D.Capozzi).

che non sarà pubblicata la sua teoria del ragionamento. Ma nella conferenza cui mi riferisco, ho trovato sufficienti cenni di essa per farmene una chiara idea.

HILBERT assume, come nozioni primitive, l'implicazione, la negazione e l'eguaglianza (nel senso leibniziano), assegnando quattro proposizioni primitive (assiomi) per la prima di queste nozioni e due per ciascuna delle altre.

Per indicare l'implicazione Egli pone una freccia ($\to$) tra la premessa e la conseguenza (in luogo del segno $\supset$ di uso ormai generale) e per indicare la contradittoria di una proposizione pone su questa un tratto rettilineo ($-$).

La congiunzione (cioè l'affermazione simultanea) di due proposizioni, indicata dal simbolo & (che sta per «e»), e la disgiunzione di due proposizioni (cioè l'affermazione l'una o l'altra), indicata col simbolo (che sta per «o») sono definite mediante l'implicazione e la negazione:

A&B sta per $\overline{A \to \overline{B}}$

A v B sta per $\overline{A} \to B$

Il metodo, fin qui, è inverso, in parte, a quello adottato nei *Principia* di RUSSELL e WHITEHEAD, dove sono assunte come primitive la disgiunzione e la negazione, e definite, in base a queste, l'implicazione e la congiunzione.

Per indicare che all'oggetto a si attribuisce il predicato A, HILBERT usa la notazione A(a); così, a proposito dell'eguaglianza, Egli introduce, dopo l'assioma

$$a=a$$

l'altro

$$(a=b)\to[A(a)\to A(b)].$$

Questi sono invece dimostrati nei *Principia* come conseguenza della definizione d'eguaglianza:

«$a=b$» sta per «qualunque sia A, $A(a) \to A(b)$».

Il secondo assioma discende da questa definizione in virtù del principio di ARISTOTELE; il primo si trae dalla definizione stessa per il principio di identificazione $A(a)\to A(a)$, ma per potere affermare isolatamente la proposizione $a=a$, che è conseguenza nell'implicazione

$$[A(a)\to A(a] \to(a=a),$$

bisogna ricorrere al principio della deduzione: *Poiché la premessa è vera, tale è la conseguenza, e può affermarsi separatamente.*

Quest'importante principio, messo nel dovuto rilievo da RUSSELL, non è tra gli assiomi indicati da HILBERT; di esso però ho trovato traccia là dove Egli dice che una dimostrazione è una figura formata da affermazioni secondo lo schema

$$\frac{\quad\rightarrow\quad}{}$$

Qui il tratto non sta per indicare la contradittoria di una proposizione, ma per separare la conseguenza di un'implicazione da questa e dalla relativa premessa.

Per il numero naturale, HILBERT stabilisce questi assiomi:

$$a+1 \neq 0,\ \delta(a+1)=a.$$

Il primo dice che il successivo di un numero non è zero; il secondo che il precedente di $a+1$ è a. Questo secondo assioma sostituisce la proposizione primitiva di PEANO: *Se i successivi di due numeri sono eguali, i numeri sono eguali.*

Il principio dell'infinito *(Ogni numero ha il successivo)* e il principio di induzione sono, a quanto pare, compresi nell'idea di numero che nasce da *0* con l'applicazione ripetuta dell'operazione di «successivo». Secondo RUSSELL, invece, si può giungere alla nozione di numero con definizioni nominali, e introducendo una sola proposizione primitiva: il principio dell'infinito.

Non mi pare, dunque, che questa prima parte della teoria di HILBERT, che si riferisce alla deduzione elementare e all'idea di numero naturale, segni qualche passo innanzi rispetto alla teoria di PEANO-RUSSELL.

2. Passiamo ora ad esaminare quella parte della teoria che concerne la deduzione non elementare e transfinita. «Quando avviene - si domanda HILBERT - che ci solleviamo per la prima volta dall'intuizione concreta e dal finito ? Quando applichiamo i concetti di *tutto* ed *esiste*».

Egli osserva che per le totalità finite questi concetti possono essere ricondotti rispettivamente alla congiunzione e alla disgiunzione. Dicendo, ad es., che tutti i banchi di quest'aula sono di legno, s'intende dire: «questo banco è di legno, quel banco è di legno e... e il banco lì è di legno». «Esiste in quest'aula un uomo calvo» val quanto dire «o quest'uomo è calvo o quell'uomo è calvo o... o quell'uomo lì è calvo».

HILBERT adotta i simboli *(a), (Ea),* usati nei *Principia*, per rappresentare le espressioni: «per tutti gli *a*» ed «esiste un *a*», e i simboli $(\overline{a})$ e $(\overline{E}\,a)$ per rappresentare le espressioni «non per tutti gli *a*» e «non esiste un *a*». Ed osserva che per totalità finite sono rigorosamente dimostrabili le equivalenze:

$$(1) \qquad \begin{cases} (\bar{a})A(a) \quad \textit{equivale a} \quad (Ea)\overline{A}(a), \\ (\overline{Ea})A(a) \qquad '' \qquad (a)\overline{A}(a); \end{cases}$$

ma per totalità infinite non è lecito ricondurre i secondi membri alla disgiunzione e alla congiunzione, rispettivamente, perché queste avrebbero infiniti termini o infiniti fattori, e mancherebbero di significato preciso: quando alle somme logiche con infiniti termini, o ai prodotti logici con infiniti fattori si applicano, senza scrupolo, gli stessi procedimenti che per le totalità finite, si potrà arrivare ai risultati più assurdi, nè più nè meno come quando alle serie numeriche infinite e ai prodotti numerici infiniti si applicano i procedimenti delle somme e dei prodotti ordinari,

Pare dunque che HILBERT veda in tali applicazioni illecite la fonte prima delle antinomie che sono state rilevate nella teoria delle classi. Allo scopo di evitare le antinomie, non solo, ma per fondare tutta la teoria della deduzione non elementare, e in particolare per stabilire le equivalenze (1) anche per totalità infinite e dimostrare altre proprietà generali, tra cui il principio di ZERMELO, HILBERT introduce una funzione τ che fa corrispondere a ciascun predicato A un oggetto determinato τA (*la funzione transfinita*), e soddisfa al seguente assioma (*assioma transfinito*):

$$(2) \qquad A(\tau A) \rightarrow A(a);$$

in parole: *Se il predicato A conviene all'oggetto* τA, *esso conviene ad un oggetto qualunque a;* cioè il semplice fatto che τA possiede la proprietà *A* implica che tutti gli *a* posseggono la proprietà stessa, ossia che la proposizione *A(a)* è sempre vera. Qui interviene l'idea di *tutto*, e il passaggio dall'affermazione generica *A(a)* (proposizione con variabile reale) all'affermazione *(a)A(a)* (proposizione con variabile apparente) non può farsi se non in base ad un principio logico (enunciato esplicitamente dal RUSSELL (2): *il 2° principio per la trasformazione della variabile reale in apparente*), che può enunciarsi così:

Asserita una proposizione (elementare) generica A(a) si può asserire, separatamente, che qualunque sia a, A(a) è vera.

Tale principio è sostituito, nella teoria di HILBERT , dall'assioma del tutto:

$$(3) \qquad A(\tau \mathrm{A}) \rightarrow (a)A(a) \ \text{ e dal suo inverso } \ (a)A(a) \rightarrow A(\tau A)$$

---

(2) Cfr. anche la mia *Analisi Algebrica* (1), p.11, prop. 11, 2, II.

(dal quale, per l'assioma (2) e il sillogismo, si trae il principio di ARISTOTELE: $(a)A(a) \rightarrow A(a)$, che così viene stabilito mediante la funzione transfinita, da cui però non dipende).

Unitamente ai due assiomi per il tutto, Hilbert pone i due assiomi dell'esistere

$$A\left(\tau\overline{A}\right) \rightarrow (Ea)(Aa), \qquad (Ea)(Aa) \rightarrow A\left(\tau\overline{A}\right) \tag{4}$$

Il primo sostituisce *il 1° principio per la trasformazione della variabile reale apparente:*

L'asserzione di una proposizione (elementare) generica A(a) implica che esiste un valore di a soddisfacente alla proposizione A(a).

L'altro assioma unito al secondo (3) permette di ridurre una proposizione con variabile apparente in una proposizione elementare. La possibilità di una tale riduzione costituisce il cosiddetto *principio di riducibilità* nella teoria di RUSSELL ([3]): *Data una proposizione con variabili apparenti, c'è sempre una proposizione equivalente alla data, che sia priva di variabili apparenti.*

L'assunzione di questo principio non costituisce difficoltà. Consideriamo, ad es., una funzione con una variabile reale x e con una o più variabili apparenti, denotiamola con $\Phi(x)$. Tutti i valori di x che soddisfano a $\Phi(x)$ possiamo considerarli come costituenti un oggetto di nuovo tipo *(oggetto classe)* completamente determinato da $\Phi(x)$. Detto α tale oggetto-classe, possiamo dire che l'asserire $\Phi(x)$ equivale ad asserire che «x è un elemento di α», proposizione che non contiene alcuna variabile apparente.

Così, per es., la proposizione:

«Penelope ha tutte le qualità di una donna virtuosa»,

dove interviene l'idea di tutto e quindi una variabile apparente, equivale a quest'altra

«Penelope è simbolo di virtù muliebre»,

che è priva di variabili apparenti.

Il principio di riducibilità (la cui assunzione ci è consentita dalla facoltà di astrazione che ha la nostra mente) pur essendo contenuto nel 2° assioma (3) e nel 2° assioma (4), differisce da essi profondamente, poiché non afferma affatto l'esistenza di una legge, *unica* per tutte le proposizioni con variabili apparenti, al fine della trasformazione di cia-

(3) Cfr. anche la mia *Analisi Algebrica* ([1]), p.15, prop. 1, 11.

scuna di queste in un’altra elementare, come asseriscono invece gli assiomi (3) e (4) in base alla funzione transfinita τ.

Questa funzione dunque, coi suoi cinque assiomi, incarna vari principî logici comunemente ammessi; fra poco vedremo che essa include anche il principio di ZERMELO, che non è affatto evidente e che non riscuote il generale consenso; si comprende quindi come e perché essa costituisca la chiave di volta di tutta la teoria del ragionamento nella costruzione ideata da HILBERT.

3. Ma l'assunzione della funzione transfinita τ fra i concetti logici fondamentali può farsi senz'altro?

Di essa non vien data una definizione; i relativi assiomi ci dicono solamente questo: l'elemento τA corrispondente al predicato τ deve godere della proprietà A allora e soltanto quando la proposizione $A(a)$ è sempre vera (assiomi (1) e (3)), e deve godere della proprietà contraria $\overline{A}$ nel caso opposto (assiomi (4), dove sia mutato A in $\overline{A}$ e, per conseguenza, $\overline{A}$ in A). L'elemento τA resta dunque imprecisato, mancando l'enunciazione di una legge che permetta di assegnarlo.

Orbene, possiamo ammettere che ci sia questa legge? Possiamo accogliere, in altri termini, la funzione τ fra le nozioni primitive? Quale carattere di evidenza, di semplicità essa possiede? Risponde ad un fatto accessibile alla nostra intuizione?

Io cercherò di spiegarla con l'esempio stesso di HILBERT: il predicato A sia «essere incorruttibile»; allora per τA dobbiamo intendere - in base all'assioma (1) - un uomo di tal grado di rettitudine, che se a lui si dovesse attribuire la qualifica d’incorruttibile, dovrebbero dirsi incorruttibili tutti gli uomini.

Io non resto perplesso nella scelta di tal uomo: la visione dantesca della Giudecca, mi trae subito d’impaccio, e fra i tre dannati che guazzano nella bocca di Satana, cavo il mio uomo: Giuda Iscariota!

Ma se il predicato A è un altro, io non so chi verrà in mio soccorso; oh certo! me la caverò con qualche *altro* mezzo (che potrebbe non aver niente a vedere col precedente!); il guaio sarà se A dovesse descrivere una classe infinita di predicati, perché, non potendo io fare infinite scelte arbitrarie, non so come potrò *definire* l'insieme degli oggetti τA. Non v'è dubbio: fintanto che la τ non è definita, una frase come questa:

«l'insieme degli elementi τA, quando A descrive una classe infinita di predicati»

è assolutamente priva di senso.

L'incertezza della scelta non preoccupa affatto HILBERT: «Nella mia teoria del ragionamento non è affermato che la concezione di un oggetto fra infiniti altri possa sempre effettuarsi, ma bensì che si può, senza rischio d'errori, sperare come se la scelta fosse fatta».

Donde trae HILBERT una tale certezza? Dal fatto, stabilito con dimostrazione, che l'assioma transfinito (2) è compatibile cogli altri assiomi della sua teoria.

Tale dimostrazione della compatibilità degli assiomi costituisce una novità per la teoria della deduzione. Non è guari che HILBERT ha sollevato la questione della compatibilità degli assiomi della logica, questione ardua e finora rimasta insoluta, sebbene il bisogno di risolverla non sia stato mai veramente sentito, perché gli assiomi sono scelti fra le leggi più semplici del ragionamento. Ma, ad ogni modo, è certamente importante che tale dimostrazione sia stata ottenuta. HILBERT ci dice, sommariamente, come dev'essere condotta; si tratta di uno schema non facile nè breve: le proposizioni vengono trasformate in formule numeriche e si fa vedere che l'assurdo $0 \neq 0$ non può sorgere. Sebbene non mi sembri che da tale schema di dimostrazione ne esca chiara e luminosa, non ho motivo di dubitare della sua esattezza. Io affermo invece che essa è superflua ed inutile nei riguardi dell'assioma transfinito.

Infatti, non essendo definita la funzione τ, l'aggruppamento di simboli $A(\tau A)$ manca di significato; ebbene, io trasformo l'assioma (2) in una definizione di $A(\tau A)$:

(5) $A(\tau A)$ sta per $(a)A(a)$;

in parole: «dicendo che τA ha la proprietà A s'intende dire che la proposizione $A(a)$ è vera per tutti gli a».

Mancando allora l'assioma, viene di per sè a cadere la questione della compatibilità di esso con gli altri assiomi. Non è dunque su tale compatibilità che può fondarsi l'asserzione dell'ammissibilità della funzione transfinita.

Ma se la definizione (5) può giovare per la trasformazione formale di una proposizione con variabili apparenti in un'altra che ne sia priva, non può dar valore all'assunzione della τ, perché non è lecito isolare τA dalla frase $A(\tau A)$, che ha significato soltanto in sè.

Pare che HILBERT voglia prevenire tale obbiezione quando dice: «Nella mia teoria del ragionamento sono aggiunti agli assiomi finiti gli assiomi transfiniti, nello stesso modo come in Analisi si aggiungono ai numeri reali gl'imaginari, e in Geometria agli enti effettivi gl'ideali».

E difatti isolare τA dalla definizione (5) richiama un processo proprio delle definizioni per astrazione ma la (5) non ha nemmeno il carattere di una tale definizione, nè io per altro ritengo necessario fermarmi alle difficoltà logiche cui dànno luogo siffatte definizioni. Osservo però che le differenze con le quali in principio furono accolti gl'immaginari sparirono non appena di essi fu data un'interpretazione concreta.

L'interpretazione concreta della τ ne costituirebbe la definizione; ma fintanto che questa manchi, le diffidenze saranno legittime. Nè vale dire: *Andate innanzi, chè la fiducia verrà!* Io posso accogliere l'opinione di chi, ad es. dice: verrà tempo in cui i Matematici sapranno se $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale. Potrò anche lodarne la fede nei futuri progressi della Scienza; ma non potrò seguirlo se mi suggerirà di ammettere, come una verità di sentimento, che $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale!

4. Come applicazione della sua teoria, HILBERT dà la dimostrazione del teorema d'esistenza dell'estremo superiore di un insieme numerico, e la dimostrazione dello stesso principio di ZERMELO per una classe d'insiemi di numeri reali.

Introdotti i numeri reali come allineamenti di cifre 0 e 1 (rappresentazione binaria), Egli dimostra l'esistenza dell'estremo superiore per una successione di numeri reali appartenenti all'intervallo (0, 1) e poi per un insieme qualsiasi contenuto in quest'intervallo. Tale dimostrazione non è nuova ([4]), salvo nella rappresentazione simbolica che mette in rilievo l'uso di una funzione transfinita. Questa però ha qui una definizione precisa. Il principio di ZERMELO non v'interviene, come del resto non interviene in altre dimostrazioni dello stesso teorema d'esistenza, che presuppongono una diversa definizione del numero reale.

Invece una funzione transfinita τ_f analoga alla τ, con un assioma analogo al (2), interviene nella dimostrazione di HILBERT del principio di ZERMELO per una classe M d'insiemi r di numeri reali. La legge che fa corrispondere a ciascun insieme della classe un suo elemento, non è data, ma è *tacitamente ammessa,* altrimenti non avrebbe senso l'espressione: «l'insieme costituito dai rappresentanti $\tau_f\, r$ degli insiemi r appartenenti alla classe M». Ma, io mi domando, non è quest'ammissione in contrasto con la dichiarazione, già notata, dello stesso HILBERT, e cioè che nella sua teoria del ragionamento non è affermato che la concezione di un oggetto fra infiniti altri possa sempre effettuarsi, ma bensì che si può, senza rischio d'errori, operare come se la scelta fosse fatta?

Se non c'è rischio d'errori, c'è rischio di dire dei non-sensi!

Del resto, ammettere l'esistenza della funzione transfinita τ di HILBERT *equivale* perfettamente ad ammettere il principio di ZERMELO nella sua forma più generale, cioè per ogni classe M d'insiemi α esiste

---

(4) Una dimostrazione analoga, supposti i numeri reali rappresentati in un sistema di base B qualunque, è data da G.Mignosi nelle *Esercitazioni matematiche* (Circ. Matematico di Catania), n. I (1921), p.156.

una relazione selettiva, che permette di trarre da ciascun α un suo elemento, sì da costituire un nuovo insieme.

Consideriamo, infatti, per ciascun predicato *A* la classe α degli elementi cui quel predicato conviene. Il legame tra *A* ed α è dato dalla relazione ε (secondo la notazione di PEANO) di appartenenza di un elemento ad una classe:

$$A = \text{essere un elemento di } \alpha = \varepsilon\, \alpha.$$

Denotiamo ora con $x\alpha$ la classe α o la sua opposta $\overline{\alpha}$ secondo che α è il tutto o no (cioè secondo che la prop. *(a)A(a)* è sempre vera o no). Ebbene la funzione composta $\tau\varepsilon x$ è una funzione selettiva, cioè fa corrispondere a ciascun insieme α di *M* un suo elemento:

$$\tau\varepsilon x = \begin{cases} \tau\varepsilon\alpha = \tau A, & se\, \alpha \text{ è il tutto}, \\ \tau\varepsilon\overline{\alpha} = \tau A, & se\, \alpha \text{ non è il tutto}, \end{cases}$$

nel primo caso un elemento di α è τA, nel secondo lo è $\tau\overline{A}$.

Inversamente, se σ è una relazione selettiva che fa corrispondere a ciascun insieme α di *M* un suo elemento, osservando che la funzione inversa di *x* è *x* stessa, e usando (con PEANO) il simbolo 3 per indicare l'inversa di ε, si può affermare che la funzione composta σx3 è una funzione transfinita di HILBERT. Infatti, posto τ=σx3, risulta

$$\tau A = \sigma x \quad A = \sigma x \alpha = \begin{cases} \sigma\alpha, & se\, \alpha \text{ è il tutto}, \\ \sigma\overline{\alpha}, & se\, \alpha \text{ non è il tutto}, \end{cases}$$

nel primo caso è vera la prop. $A(\tau A)$, nel secondo è vera la prop. $\overline{A}(\tau A)$, sicché τA soddisfa all'assioma transfinito e a quelli del tutto e dell'esistere.

Data la perfetta equivalenza fra il principio d'esistenza della relazione selettiva σ e il principio d'esistenza della funzione trasfinita τ, possiamo concludere che *i dubbi sull'ammissibilità del principio di ZERMELO si trasportano sull'ammissibilità della funzione transfinita di HILBERT, restando tali e quali.*

5. Dal nostro esame risulta dunque che la teoria del ragionamento secondo HILBERT non segna, nemmeno per quest'altra parte che si riferisce alla deduzione non elementare, alcun progresso in confronto alla teoria di RUSSELL e WHITEHEAD; anzi l'uso costante della funzione transfinita, anche nelle prime e più semplici proposizioni, la fa apparire assai meno luminosa di quella.

Rimane dunque intera, e meglio affermata, l'importanza dei *Principia* e delle ricerche italiane sui fondamenti logici della Matematica.

Ed io voglio terminare, riassumendo i risultati più recenti, cioè quelli che han fatto seguito all'opera fondamentale e notissima di GIUSEPPE PEANO e della sua Scuola ([5]).

a) La teoria della deduzione non elementare, cioè quella che si riferisce alle proposizioni con variabili apparenti, come $(a)A(a)$, $(Ea)A(a)$, può essere svolta, com'è fatto nei *Principia* ([6]), senza alcuna distinzione tra classi finite ed infinite, e in base a proposizioni primitive molto semplici. In particolare le equivalenze (1) che nella teoria di HILBERT sono dimostrate assumendo come primitivi i concetti espressi da $(\bar{a})$ e $(\overline{Ea})$, e con l'uso della funzione transfinita τ, non son altro, nei *Principia*, che le definizioni di questi concetti o, più esattamente, delle contraddittorie delle proposizioni $(a)A(a)$, $(Ea)A(a)$:

$$\overline{(a)A(a)} \text{ sta per } (Ea)\bar{A}(a), \quad \overline{(Ea)A(a)} \text{ sta per } (a)\bar{A}(a).$$

b) Le varie antinomie costruite sull'idea di classe (antinomie di Epimenide, di Burali-Forti, di Richard, ecc.) sono tutte risolte da RUSSELL con uniformità di metodo, in base alla teoria gerarchica delle proposizioni e delle classi ([7]).

c) La nozione di numero naturale, quella di numero razionale, di numero reale, ecc. possono essere tutte introdotte con definizioni nominali; il concetto di estensione di un campo numerico è venuto, in particolare, ad assumere un significato rigoroso in base alla relazione d'isomorfismo aritmetico, la quale permette di risalire dalle definizioni concrete di numero all'idea astratta di esso, che incarna tutte, e solo le proprietà invarianti rispetto alla relazione d'isomorfismo ([8]).

d) La teoria dei limiti delle funzioni che, mediante il principio di ZERMELO o meglio l'altro, meno ampio, di ARZELÀ-BAGNERA(che è limitato alle sole classi numerabili d'insiemi) è stata elegantemente riannodata da alcuni matematici alla teoria dei limiti delle successioni numeriche, può con pari eleganza e semplicità, svolgersi senza appello ai principî in parola, riducendola, con poche considerazioni, alla teoria della convergenza delle successioni d'insiemi ([9]).

---

(5) Essa è illustrata, assieme ai risultati ottenuti da altri matematici, nella pregevole e recentissima opera di ALPINOLO NATUCCI, *Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, 1923, Fr. Bocca, Editori).

(6) Cfr. v. I, p. 143, e la mia *Analisi algebrica*, 1. c. ([2]).

(7) Cfr. v. I, p. 63.

(8) Cfr. la mia *Analisi algebrica* ([1]), pp. 37, 40, 42, 193, 210, 386.

(9) Cfr. la mia nota *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*, Atti Acc. Gioenia, (Catania), s. 5ª, v. 6°, 1913; e l'*Analisi algebrica* ([1]), p. 274, Cap. VIII.

e) Anche la teoria della misura degl'insiemi, secondo LEBESGUE, e per conseguenza le varie teorie che su di essa si appoggiano, sono state liberate dall'applicazione del principio di ZERMELO, mediante le recenti modificazioni introdotte da LEONIDA TONELLI ([10]).

Può dunque ormai affermarsi che l'Analisi pura matematica non richiede, oltre ai principî logici comuni a tutte le scienze, che un solo assioma, quello dell'infinito.

Il principio di ZERMELO resta così confinato a talune astruse questioni della teoria degl'insiemi, in quelle parti di essa che sono ancora in sviluppo e danno scarse applicazioni. Non volendo dare l'ostracismo ai risultati ivi ottenuti, si può supporre, come appunto è fatto nei *Principia*, che le classi in questione ammettano effettivamente una relazione selettiva. Resta il dubbio che una tale ipotesi importi una restrizione; ma è vano sperare che tutti i dubbi possano essere definitivamente banditi. Le verità matematiche non sono come un continente che si va a mano a mano scoprendo. Le scoperte matematiche sono conseguenza di particolari creazioni della mente, varie e mutevoli nella diuturna, affannosa indagine che tien dietro all'incessante evolversi ed affinarsi dell'intelligenza. È per questo che la Matematica, la più luminosa fra tutte le Scienze, è com'esse un perpetuo divenire.

(10) L.TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, v.I (Bologna, N. Zanichelli Editore).

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. II, f. 1, v. V, 1929, pp. 191-204.

La posizione odierna della Matematica

di fronte al problema della Conoscenza

Conferenza
tenuta nella Biblioteca Filosofica di Palermo il 5 Maggio 1927
dal **Prof. Michele Cipolla**

Le basi della Matematica sono profondamente connesse al problema della Conoscenza, e se il matematico puro può anche tenere un contegno di neutralità fra le contese che oggi, come in ogni tempo, si dibattono per la più soddisfacente soluzione dei problemi gnoseologici, riparandosi nella solida rocca del suo formalismo, egli non può negare le origini sperimentali della Scienza matematica, nè può dimenticare le varie finalità pratiche dei suoi sviluppi teorici.

L'investigazione della realtà concreta, coi mezzi più o meno affinati, il matematico offre uno strumento di precisione ideale che sempre si evolve per sempre meglio adattarsi, svela i legami nell'ordine dei fenomeni, esclude le contradizioni e spiega le apparenti, uno strumento insomma che fa acquisire l'unico vero che può appagare l'intelletto.

Ma donde trae la Matematica il suo carattere di universalità e su che cosa si fonda la sua certezza?

Ecco i due ardui problemi sui quali ho l'onore d'intrattenermi.

*
* *

Piace spesso designare la Matematica come la Scienza dell'infinito. Ed invero questa parola «infinito» - che per molti sa di mistero - non esprime per il matematico che il fondamento di tutte le sue teorie. L'infinito matematico, nei suoi molteplici aspetti, è però la conseguenza - sia pure la più bella, la più grandiosa - di un processo che trae le origini dal diuturno contatto con la realtà concreta e si svolge e si elabora nella nostra mente: il processo di astrazione.

La creazione di enti puramente ideali: quali il punto, le linee, le superfici, i solidi con la loro ideale compenetrabilità, è conseguenza di tal processo, come ne son pure conseguenza l'infinito della retta, l'infinità del piano e dello spazio, l'infinità dei punti di una linea. L'astrazione non è tutta qui, in questi pochi ed elementari concetti geometrici, ma ne son essi i più semplici esempi, quali del resto si affacciano negli sviluppi primordiali, che sono appunto geometrici, della Matematica. Sì che naturale sembra oggi a noi la difficoltà di formulare - nei primi albori della Scienza geometrica - quei concetti astratti senza perdere il contatto con la realtà concreta, al fine di chiedere a quelli la spiegazione dell'intima struttura di questa. Da qui il contrasto tra il finito e l'infinito; contrasto duro, profondo, vano, se vogliamo, nel suo ultimo scopo, ma grandemente utile come assillo all'indagine e allo sviluppo della Scienza.

Ed invero nei sistemi per quanto antagonistici della filosofia presocratica noi vediamo il germe della moderna Analisi infinitesimale.

ANASSAGORA infatti, elevandosi dl'intuizione immediata, assurge ad una concezione profonda dello spazio, precorrendo così EUCLIDE e la moderna Geometria.

«Lo spazio - egli dice - non soltanto è infinito nel senso che ha termine in nessun luogo, ma è anche infinito, per così dire, internamente, in quanto si accosta ad ogni suo punto senza alcuna interruzione: gli elementi dello spazio non sono staccati l'uno dall'altro come se fossero tagliati dall'accetta».

È qui, in fondo, il principio moderno della continuità dello spazio, che sorge dalla concezione della sua illimitata suddivisibilità. ANASSAGORA se ne giova per dimostrare che le aree dei cerchi sono proporzionali ai quadrati dei raggi, aprendo così la via al problema della quadratura del cerchio. Egli ne trae ancora il principio infinitesimale: «nel piccolo non esiste un piccolissimo, ma un sempre più piccolo».

Contro tali concezioni insorgeva la scuola eleata con PARMENIDE e ZENONE. Poneva il primo il problema dell'*essere*, eterno, immutabile, non percepibile direttamente; il secondo formulava quei famosi λοèγοι, coi quali voleva dimostrare assurda l'ipotesi della continuità dello spazio e del tempo, col paradosso notissimo di Achille, il piè veloce, che non può raggiungere la tartaruga e con quell'altro, non meno noto, della freccia che lanciata nello spazio si muove e non si muove nel tempo stesso.

Insorgeva pure la teoria atomistica propugnata da DEMOCRITO, per la quale la sostanza fondamentale è costituita da numerosissime particelle non divisibili *(atomi)*, ed è unica, presentando diversità solo apparenti, che dipendono dalla posizione e dal moto di queste particelle. DEMOCRITO, in uno dei frammenti che ci sono rimasti, si esprime così: «Sono semplici opinioni il dolce, l'amaro, il caldo, il freddo, il colore; di realmente esistenti non vi sono che gli atomi e il vuoto». E in un’altro frammento, contro l'illimitata suddivisibilità dello spazio egli oppone quest'argomentazione: «Si vuole assumere che la divisione è possibile, ebbene si accetti; che la divisione è possibile sempre, e lo si ammetta pure; ma che resta infine? Niente. Non può restare un corpo, altrimenti esso sarebbe divisibile e la sua divisione non sarebbe stata spinta sino all'estremo; potrebbero rimanere soltanto dei punti e i corpi sarebbero formati da punti, e questo è manifestatamente assurdo». Ed ancora, secondo quanto riferisce PLUTARCO, DEMOCRITO opponeva quest'altra argomentazione: « Se un cono si sega con piani paralleli alla base, che cosa deve dirsi delle sezioni: sono eguali o diseguali? Se sono diseguali, il cono mostrerebbe irregolarità tali da farlo apparire come dotato di gradini; se sono eguali, tutte le sezioni sarebbero eguali e non si avrebbe un cono ma un cilindro».

Sappiamo bene che nè i ragionamenti di ZENONE nè le argomentazioni della scuola atomistica scuotono le salde basi della Geometria secondo la stessa concezione pitagorica e di ANASSAGORA, concezione che non era generalmente compresa nel suo significato astratto, perché offuscata dalla intuizione; ma quel significato non poteva essere avvertito da menti più acute. Osserva infatti ARISTOTELE che « le linee sensibili non sono quali il geometra le considera, perché nessuna fra esse è generalmente retta o rotonda»; e in un altro luogo: «nel continuo sono invero parti senza limiti, ma non secondo la realtà, ma secondo la possibilità».

La formulazione precisa, rigorosa del continuo è opera moderna; ma la nozione è in germe nella matematica greca dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili. Certamente il fatto che non vi è alcun sottomultiplo del lato di un quadrato che sia contenuto un certo numero di volte esattamente nella diagonale, dovette suscitare un'impressione profonda e sconvolgere le cognizioni scientifiche di allora. Non era più ammissibile una teoria delle proporzioni fondata sulla commensurabilità. Noi restiamo ancor oggi ammirati, dopo ventidue secoli, dinanzi alla perfetta teoria delle proporzioni che si legge nel libro V degli *Elementi* di EUCLIDE. Essa è dovuta, nei principi fondamentali, a EUDOSSO da Cnido, matematico ed astronomo, filosofo e legislatore, la cui fama - così grande a quei tempi da valergli il nome di divino - è tornata a rifulgere modernamente dopo gli studi dell'IDELER e del nostro grande astronomo GIOVANNI SCHIAPARELLI.

Non mi fermo a illustrare la teoria euclidea delle proporzioni che viene ancor oggi esposta nei migliori trattati scolastici; mi limito solo a notare che ivi ha grande ufficio la proposizione affermante che *di ogni segmento rettilineo, per quanto piccolo, esiste sempre un multiplo che supera un altro segmento rettilineo assegnato*. Anche questa proposizione è di EUDOSSO, e se essa viene ricordata ancora col nome di *postulato di* ARCHIMEDE, è perché il grande geometra di Siracusa se ne giovò spesso e vi fondò il notevolissimo *metodo di esaustione*. Egli però la pone in rilievo nella prefazione dell'opera *sulla quadratura della parabola*, per notare l'importanza che essa ed altre proposizioni di EUDOSSO, che pur enuncia, hanno per il confronto e il calcolo delle aree e dei volumi.

Così, contro e a dispetto di tutti i paradossi e le antinomie, si sviluppa una teoria del continuo che preludia alla fondazione di nuove teorie aritmetiche (come quella degl'irrazionali); alle teorie algebriche e alla grandiosa invenzione del Calcolo infinitesimale.

Mi spiace che quanto ancora mi resta a dire non permette che mi soffermi sulla nozione del continuo secondo la formulazione moderna dovuta al CANTOR e al DEDEKIND. Mi limito a ricordare che il principio di continuità per la retta, nella forma datagli dal DEDEKIND, si esprime in questo modo:

«Se tutti i punti di un segmento rettilineo sono ripartiti in due insiemi tali che ogni punto del primo preceda (in uno degli ordini naturali della retta) ogni punto l'altro, allora esiste nel segmento un punto che lo divide in due parti tali che ogni punto del primo insieme è contenuto nella prima parte, e ogni punto del secondo è contenuto nella seconda parte».

Ed è importante osservare che questo principio equivale ad asserire che:

«Dato un insiemi di segmenti non maggiori di un segmento assegnato, fra tutti i segmenti che non sono minori di quelli dell'insieme dato ce n'è uno *minimo*».

Una enunciazione così precisa e così feconda di risultati manca alla matematica greca, sebbene l'esistenza del minimo sia spesso tacitamente supposta, come nella teoria degl'isoperimetri, dovuta a ZENODORNO. La matematica greca fa passare sotto silenzio, come evidenti, talune conseguenze della continuità (per es. l'intersezione di una retta con una circonferenza quando la retta ha un punto all'interno ed uno esterno alla circonferenza); altre conseguenze essa espressamente enuncia come postulati (ad es. quello di EUDOSSO). Manca inoltre alla matematica greca il concetto di numero irrazionale, che è servito modernamente alla costruzione del continuo numerico e alla trasformazione analitica della nozione di spazio.

Ma se io non posso soffermarmi ad esaminare nelle sue varie fasi e nei suoi vari aspetti la nozione del continuo matematico, mi basta ricordare la bella ed esauriente esposizione, ricca di osservazioni critiche e di vedute originali, che ne fece il collega CORRADINO MINEO in una conferenza tenuta in questa Biblioteca filosofica, e pubblicata nel *Logos* (1914). Ivi è mostrato come alla luce del continuo si risolvono, quale nebbia, le antiche antinomie; vi si danno ampie notizie dei contributi portati dal CANTOR alla teoria della continuità e n'è messa in rilievo la loro importanza matematica e filosofica.

Il MINEO prende anche in particolare esame l'ardua questione della genesi psicologica del continuo, riporta le opinioni del POINCARÈ e dell'ENRIQUES, e illustra le vedute sue proprie. Io non posso non osservare che, nonostante l'intuizione non aiuti, anzi sembri opporsi alla concezione del continuo, e in base all'intuizione riconosciuta imperfetta, in base appunto a quel tale *minimum di separabilità* che occorre per distinguere due punti vicinissimi, è proprio perché questo *minimum* non è una costante assoluta, che sorge, in virtù del processo di astrazione, quel primo stadio della nozione di compatibilità che è la *compattezza*: «tra due punti di una retta c'è un punto intermedio». Ed è poi dalla considerazione degl'insiemi compatti, per ulteriore astrazione che si arriva all'idea ultima del continuo. Ciò appare chiaramente nella costruzione del continuo numerico con l'introduzione degl'irrazionali. Sono poi in pieno accordo col MINEO che vede nella genesi del continuo non soltanto la potenza creatrice del pensiero, e però il processo di astrazione in atto, ma pur quello della storica evoluzione, e ciò credo di avere sufficientemente dimostrato.

È dunque così, per questo processo d'astrazione, che sempre si evolve, al fine di soddisfare l'ardente brama di meglio conoscere o di meglio spiegare, al fine di raggiungere una generalità sempre più grande per applicazioni sempre più vaste, che si assurge dalla nozione di grandezza numerica, è così che si afferma l'opportunità di distinguere l'una dall'altra, ma ancor più la necessità di tenerle avvinte da un solido legame, da una legge di corrispondenza. Sorge così con CARTESIO la Geometria analitica, con LEIBNIZ e NEWTON il Calcolo infinitesimale, con CANTOR e DEDEKIND la teoria degl'insiemi; si sviluppano le teorie geometriche euclidee e non-euclidee, nell'indirizzo metrico e nell'indirizzo projettivo; con GAUSS e KRONECKER le teorie aritmetiche ed algebriche, con CAUCHY, WEIERSTRASS, RIEMANN, DINI la teoria delle funzioni e delle equazioni differenziali.

E questo processo secolare del pensiero matematico in diverse direzioni, ma in perfetta unità e mirabile armonia, si elabora per fornire sempre, in ogni tempo e in ogni campo del sapere, alla Meccanica, alla Fisica, all'Astronomia, alle Scienze applicate, alle Scienze biologiche ed economiche, la potenza dei suoi mezzi, la generalità dei suoi risultati, al fine delle più svariate ed utili applicazioni.

Per quanto astratta, la Matematica non ricusa il fattore intuitivo che l'ha determinata ma ha la possibilità di tornare sempre a questo, e sia con NEWTON che con EINSTEIN, essa può dare, e dà, quella spiegazione razionale del mondo che in atto la Scienza richiede. Fondata sul continuo la Matematica è ancor meglio in grado di analizzare il discontinuo, non soltanto teorico, ma anche quello fisico, avvertito immediatamente dai sensi o in base alle più delicate esperienze: il discontinuo granulare della materia o quello dell'energia.

Noi ravvisiamo perciò nell'astrattezza della Matematica non già il veleno - *venenum in cauda* - di cui essa non muore perché non se lo inocula, ma ravvisiamo il sublime. L'astrattezza è nell'essenza della Matematica, il processo di astrazione, in atto e nell'evolversi, è il fattore determinante della sua universalità.

*

* *

Ma come mai questo processo di astrazione s'innesta nella Scienza? Qual'è il fattore che lo regola perché non sconfini oltre le leggi del pensiero? Come raggiunge la Matematica la sua certezza?

Sulla base di poche nozioni primordiali, acquisite in qualsiasi modo (*concetti primitivi*), di cui son note talune proprietà (*proposizioni primitive*), si determinano altre proprietà, s'innalza tutto un edificio. Chi lo sorregge è la Logica coi saldi pilastri di taluni suoi principi intangibili:

«Non possono affermarsi ad un tempo stesso due proposizioni fra loro contradittorie». È *il principio di non contradizione*.

«O è vera una proposizione o è vera la contradittoria». È il *principio del terzo escluso*.

Ecc.

La proposizione di forma assai comune, detta *implicazione:*

«Se p è vera, q è vera» (essendo p, q due proposizioni), o più semplicemente: «p implica q», soddisfa alla *legge del sillogismo ipotetico:*

«Se p implica q e q implica r, allora p implica r», che è la formula tipica della *deduzione*, e il cui riconoscimento è nella Logica aristotelica. Manca però a questa il principio che giustifichi l'affermazione isolata, assoluta, della conclusione quando la premessa è riconosciuta vera. È il *principio della deduzione*, riconosciuto modernamente come fondamentale, essendo quello che permette di *avanzare per tappe* (secondo la felice espressione del COUTURAT) in un ragionamento.

L'esame delle varie forme del ragionamento matematico ha invero, nei tempi moderni, condotto ad un ulteriore sviluppo della Logica classica sillogistica, rimasta chiusa nel campo ristretto delle relazioni d'inclusione dei concetti; d'altro canto il desiderio, divenuto via via più intenso, di dare espressione rigorosa ai principi fondamentali della Matematica con una formulazione logica precisa, determina un orientamento della Matematica pura verso la Logica rinnovata. Con WEIERSTRASS, CANTOR e PEANO da una parte, con BOOLE, SCHRÖDER e PEIRCE dall'altra s'inizia quella graduale fusione della Matematica e della

Logica, che doveva determinare un rivolgimento nella filosofia delle matematiche e quindi nella teoria della conoscenza.

La nuova éra è segnata dalla pubblicazione del PEANO: *Aritmetices principia, nova methodo exposita* (1889) e poi dal *Formulario matematico* (1895). Premesse le nozioni e le proposizioni fondamentali della Logica simbolica, il PEANOfonda l'Aritmetica su tre soli concetti primitivi (*zero, numero, successivo*) e su cinque proposizioni primitive. I numeri razionali sono introdotti come operatori e i numeri reali mediante una definizione per astrazione. Ai segni propri della Matematica sono aggiunti quelli della Logica (il segno di appartenenza d'inclusione, di somma logica, di prodotto logico, ecc.).

Le proposizioni e le dimostrazioni matematiche sono tradotte completamente in simboli. Si ha così un'espressione logico-formale della Matematica, che ha il pregio di mettere in rilievo tutti gli elementi che costituiscono l'ipotesi e i principî logici che conducono, per successive deduzioni, dall'ipotesi alla tesi.

Nel tempo stesso s'inizia la discussione circa la dipendenza o l'indipendenza delle proposizioni primitive, per decidere se il sistema di queste proposizioni sia riducibile o no. Si riconosce così la irriducibilità delle cinque proposizioni primitive dell'Aritmetica, stabilite dal PEANO, ma si trova pure che il sistema dei tre concetti primitivi è riducibile rispetto alle proposizioni primitive, potendosi definire lo zero mediante gli altri due. Dopo questo esame, dovuto al PADOA, è ridotto a due il numero dei concetti primitivi e a quattro quello delle proposizioni primitive.

L'Aritmetica - e, per conseguenza, l'Analisi matematica - si presenta in tal modo come lo studio di due nozioni: quella di numero naturale e quella di successivo, e perciò appare ancora come la scienza della quantità e dell'ordine, distinta dalla Logica formale, per quanto connessa a questa per numerosi ed intimi legami.

Ma si riconosceva poi che la Logica formale restringeva troppo il suo campo limitandosi al Calcolo delle proposizioni e delle classi, e che la relazione di appartenenza e d'inclusione non erano le sole relazioni suscettibili di una teoria deduttiva. Allora, accanto al Calcolo delle proposizioni e delle classi, un terzo calcolo si fonda: quello delle relazioni. Esso è dovuto a BERTRAND RUSSELL che nel 1902 ne pubblica un riassunto nella Rivista di Matematica, diretta dal PEANO, e poi l'intero svolgimento in tre grossi volumi compilati in collaborazione con WHITEHEAD, e dal titolo: *Principia mathematica,* perché in essi la Matematica è fondata *ex novo*. Ed invero l'estensione data alla Logica conduce il RUSSELL a delle conclusioni inattese e di grande importanza gnoseologica. Intanto egli osserva che il prodotto di una relazione uniforme per la sua conversa è una relazione simmetrica e transitiva. (Così per es., il prodotto della relazione uniforme «padre» è la relazione simmetrica e transitiva «fratello»). Ma il RUSSELL osserva pure che reciprocamente ogni relazione simmetrica e transitiva è il prodotto di una relazione uniforme per la sua conversa. È questo il cosiddetto *principio di astrazione logica* o, semplicemente, l'*astratto*. La relazione uniforme in parola fa corrispondere ad un elemento una classe ben determinata cui esso appartiene. Per chiarire il principio basta introdurre, come ha indicato il PADOA, la seguente definizione: Sia C una classe ed R una relazione simmetrica e transitiva fra gli elementi di C, allora, se *a* è un elemento di C, dicesi l'*astratto di a rispetto ad* R la classe degli elementi di C che sono nella relazione R con *a*. L'appartenenza a questa classe è la relazione uniforme che moltiplicata per la sua conversa dà la relazione R.

Così, se la classe C è l'insieme delle rette di un piano ed R è la relazione di parallelismo in esso, l'astratto di una retta *a* del piano, rispetto ad R, è il fascio delle rette del piano, parallele ad *a*, fascio che potremo anche indicare col nome di *direzione* di *a*.

Il RUSSELL si giova del principio dell'astratto per rendere nominali le definizioni dette *per astrazione*, che son quelle per cui l'ente definendo non è espresso direttamente per mezzo di altri enti che si presumono noti, ma invece è definita una relazione simmetrica e transitiva fra questi enti e quello da definirsi. Il RUSSELL asseconda così l'antico favore dei logici matematici per le definizioni nominali [1]) .

Ma c'è ben altro. I concetti ritenuti propri della Matematica, quelli, ad es., assunti come primitivi dal PEANO, possono anch'essi definirsi nominalmente, e quindi per mezzo di soli enti logici (classi, relazioni).

Così, ad es., chiamando *classe nulla* il campo di una relazione sempre falsa, lo *zero* è definito come la classe delle classi nulle.

Chiamando *classe singolare* ogni classe di enti x, y,... per cui si ha sempre $x=y$, il numero *uno* è definito come la classe delle classi singolari.

Così procedendo, definito il numero naturale n, e, se a è una classe di numero n, o, come suol dirsi, di n elementi, dicendo *successiva* di a la riunione di a con una classe singolare non inclusa in a, si definisce *il successivo* di n come la classe delle classi successive di quelle con n elementi.

Le proposizioni primitive del PEANO sono allora dimostrabili tutte tranne una: quella che afferma che *ogni numero ha il suo successivo*. Questa richiede che per una classe di n elementi esista *sempre* (cioè qualunque sia n) una successiva, ossia che esista un elemento distinto dagli elementi della classe. Bisogna dunque ammettere l'esistenza di classi *sempre più numerose:* ed è questo il *postulato dell'infinito*.

---

1) In proposito non posso far meglio che richiamare il recente interessantissimo articolo di F.ENRIQUES, *Sulla definizione come problema scientifico*; Periodico di Matematica, s. 4ª, v. 7°, 1927, p. 73.

Introdotto nella Logica un tale postulato, lo sviluppo deduttivo della matematica (ben inteso della Matematica pura) può effettuarsi completamente, e il RUSSELL giunge alla sorprendente conclusione che la Matematica s'identifica con la Logica.

Questo risultato è di un valore filosofico su cui molto c'è da discutere. Parrebbe che la Matematica così costruita non avesse più bisogno di alcun dato intuitivo. Ma forse i principî logici stessi ai quali fermamente crediamo, sono al di fuori dell'intuizione o non piuttosto determinati da essa?

E le stesse costruzioni logiche come possono aver luogo senza un *minimum* intuitivo [1]) ? L'esperienza non interviene pure nel postulato l'infinito quando dalla possibilità pratica del «sempre ancor uno» che non ha un termine definito, il pensiero assurge alla concezione astratta l'infinito?

La Matematica è venuta a identificarsi con la Logica, e sia pure. Ma come si è compiuto questo miracolo? Non forse portando nella Logica il concetto dell'infinito che nell'essenza della matematica?

Comunque, il risultato conseguito dal RUSSELL di costruire deduttivamente tutta la Matematica su di un solo postulato, ha una notevole portata scientifica per due ragioni principalissime:

1°. perché il grande carattere di generalità e di astrattezza che la Matematica viene così ad acquistare rivela e spiega ancor meglio la sua universalità;

2°. perché, con tale ricostruzione logica, la certezza delle conclusioni matematiche ha basi addirittura granitiche [2]) .

*
* *

Certezza di una conclusione è persuasione ferma che la conclusione si è raggiunta unicamente in seguito all'applicazione esatta e precisa di principi logici. Ma qui è naturalmente implicita l'assunzione della *certezza dei principî logici*, la quale va intesa come convincimento che i principî stessi non coinvolgano contradizioni. In altri termini, si assume come primordiale, e quindi indiscutibile, *il principio di contradizione*:

---

1) Cfr. C.MINEO, *Logica e Matematica*; Rivista di filosofia, a. III, 1911.

2) Per tali ragioni io ho dato preferenza, nel mio trattato di Analisi algebrica, all'indirizzo Russelliano, modificandolo però alquanto nella costruzione del concetto di numero. Secondo le definizioni nominali di Russell, la classe, per es., dei numeri razionali interi e quella dei numeri reali interi sono distinti dalla classe dei numeri naturali; esse però sono tra loro *isomorfe*, cioè hanno la stessa struttura rispetto alle operazioni aritmetiche. Applicando il principio d'astrazione all'*isomorfismo* io riesco a dare la nozione di numero astratto come unica concezione.

«Non è ammissibile la simultanea affermazione e negazione di una proposizione».

Come pure la certezza di alcuni altri principi logici è assunta universalmente come la base necessaria del comune ragionare. Ma tali principi su cui non si discute, non bastano per le forme superiori del ragionamento, specialmente per quelle in cui il pensiero si eleva dell'intuizione concreta e dal finito.

Nella deduzione in cui si applicano i concetti di *tutto* ed *esiste*, e propriamente quando questi si riferiscono a classi non finite - e perciò nella Matematica, che si fonda sul postulato dell'infinito - si va certamente oltre i principi logici elementari.

Invero, per le classi infinite i concetti di *tutto* ed *esiste* possono essere ricondotti rispettivamente alla congiunzione (prodotto logico) e alla disgiunzione (somma logica). Così, quand'io dico che in questa sala *tutte* le persone ascoltano, intendo dire che questa persona ascolta, quest'altra ascolta, quella infine ascolta. E quando dico che *esiste* qui un uomo calvo, intendo dire che o quest'uomo è calvo o quest'altro è calvo... o quello infine è calvo.

Ma se le classi sono infinite questa riducibilità del *tutto* e l'*esiste* alla congiunzione e alla disgiunzione non è più ammissibile, ed in siffatte illecite applicazioni si fondano, in generale, le antinomie antiche e moderne, costruite sul *tutto* e sull'*esiste.*

Come porre la deduzione transfinita al riparo dalle antinomie?

Soltanto l'intelletto, piegandosi all'esame delle forme superiori del pensiero, può scrutare le leggi e determinarle. Ma nell'assunzione di queste, al fine della loro certezza, interviene sempre un atto di fede. Noi siamo qui ai confini della conoscenza e di fronte ad un arduo problema. E come la fede determina religioni diverse, così l'esame delle forme superiori del ragionamento conduce a teorie diverse della deduzione transfinita, e tra queste modernamente sono: il *formalismo* di RUSSELL, l'*intuizionismo* di BROUWER, il *simbolismo* di HILBERT.

RUSSELL istituisce una gerarchia delle proposizioni e delle classi e risolve con essa, in modo brillante, le antinomie più famose.

BROUWER ripudia per le proposizioni esistenziali le dimostrazioni non costruttive, ma il suo idealismo al finito lo induce a restringere troppo la concezione dell'infinito, assurta ad altissime vette per l'opera secolare e feconda dei matematici.

HILBERT attende a costruire la deduzione non elementare su di una funzione che fa corrispondere ad un predicato A un oggetto determinato τA, soddisfacente al seguente *postulato del transfinito:*

«Se il predicato A conviene all'oggetto τA, esso conviene ad un oggetto qualunque»; cioè il semplice fatto che τA possiede la proprietà A implica che tutti gli oggetti posseggono questa proprietà.

Voglio spiegare tale principio con lo stesso esempio addotto da HILBERT. Il predicato A sia «incorruttibile»; allora τA è un uomo di tal grado di rettitudine che se a lui si dovesse attribuire la qualifica d'incorruttibile, si dovrebbero dire incorruttibili tutti gli uomini.

Chi dice però che esista sempre, per qualsiasi predicato A, l'oggetto τA? Noto intanto che l'introduzione della funzione trasfinita dà luogo alla possibilità di discutere il famoso *postulato di Zermelo delle infinite scelte*, postulato che non riscuote il consenso generale dei matematici. Anzi, nella conferenza che io tenni a Catania nel Congresso delle Scienze del 1923 (pubblicata negli Annali di Matematica , s. 4ª, t. I, 1923-24), dimostrai che il postulato di ZERMELO equivale a quello del transfinito, cioè l'uno implica l'altro.

Ma la questione dell'esistenza dell'oggetto τA non preoccupa affatto HILBERT. Ciò che importa - Egli afferma - è che l'introduzione del principio del transfinito fra gli altri principî della Logica non dia luogo a contradizioni. Egli ce lo garantisce dimostrando la compatibilità di tutti i principî della sua teoria della deduzione.

Sembra paradossale che si possa ottenere una tale dimostrazione se «dimostrare» vuol dire «dedurre», e quindi applicazione ripetuta di principî logici. Ma bisogna vedere che cos'è la dimostrazione nel simbolismo di HILBERT. Ce lo spiega ottimamente il WEYL nella sua dotta relazione sull'odierna gnoseologia matematica, pubblicata nel *Symposion* (1926, fasc. I).

HILBERT *formalizza* la Matematica riducendo le proposizioni a figure costituite da segni privi di significato: non si ha più conoscenza, ma *giuoco formale*, regolato da certe *convenzioni* e assomigliabile al giuoco degli scacchi. Le formule che valgono come postulati hanno, nel quadro matematico, un posto come i pezzi nella scacchiera. Delle regole determinano il passaggio da una posizione ad un'altra successiva; da una formula ne nasce un'altra che dicesi *dedotta* dalla prima. Talune formule, fissate intuitivamente, son dette *contraddittorie* come nel giuoco degli scacchi è contraddittoria ogni situazione in cui si abbiano, ad es., 10 dame dello stesso colore. Formule di diversa struttura spingono i giocatori ad arrivare ad una formula finale, mediante una giusta ed abile concatenazione di passaggi. Fin qui tutto è giuoco, niente conoscenza; ma questo giuoco nella *Metamatematica* - come la chiamava HILBERT - è fatto al fine della conoscenza, e cioé per vedere se una contradizione può presentarsi come formula finale di una dimostrazione. Da ciò la necessità, secondo HILBERT, di formalizzare insieme Logica e Matematica.

Tale simbolismo è certamente suggestivo per l'intento che si vuole raggiungere, ma sembra che ai simboli si chieda troppo. La creazione è opera del pensiero; nè i simboli, nè la sola intuizione possono darci la Matematica!

E conchiudo. La Matematica, pur avendo le sue origini nell'intuizione, acquista la sua universalità e la sua certezza per opera del pensiero coi due processi dell'astrazione e della deduzione, processi che sempre si evolvono, regolati dall'intelletto nella sua incessante indagine della verità.

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. II, f. I-2, v. VII, 1933, pp. 1-9.

Evaristo Galois
nel primo centenario della sua morte

Conferenza tenuta dal Prof. MICHELE CIPOLLA
il 31 maggio 1932-X nell'Istituto Matematico della R.U. di Palermo

Oggi ricorre il primo centenario della morte di EVARISTO GALOIS, il geniale matematico francese caduto in duello, vittima del suo ardore giovanile: aveva poco più di vent'anni.

Egli nacque a Bourg-la-Reine, presso Parigi, il 25 ottobre 1811 da Nicola Gabriele e da Adelaide Maria Demante. Il padre, cultore di studi letterari e filosofici, dirigeva un pensionato presso l'Università imperiale; era stato capo del partito liberale nel periodo della restaurazione, poi nominato durante i cento giorni, sindaco di Bourg-la-Reine, tenne questa carica fino alla morte. La madre, appartenente ad una famiglia di magistrati, era stata educata al classicismo, all'ammirazione delle virtù romane, onde aveva contratto un temperamento virile, un carattere forte in cui predominavano il sentimento della giustizia e dell'onore, lo spirito di sacrificio per il pubblico bene, il disprezzo del pericolo. E tali sentimenti essa istillò nell'animo del piccolo EVARISTO alla cui prima educazione volle personalmente provvedere.

A dodici anni EVARISTO entrava nel famoso «Collegio Louis-le-Grand» di Parigi ed era ammesso a frequentare la quarta classe (corrispondente in qualche modo alla terza ginnasiale). Ma lo spirito rivoluzionario aveva invaso il Collegio e quell'anno molti allievi per ragioni disciplinari furono espulsi; GALOIS invece, ancor sotto l'influenza della rigida educazione materna, era premiato e promosso alla terza classe. Ed anche in questa, nonostante le dannose influenze che esercitavano nel suo animo le agitazioni ferventi del Collegio, otteneva dei premi specialmente per il suo buon profitto nello studio del latino e del greco e conseguiva il passaggio alla seconda classe. È in questa che cominciano a manifestarsi in lui i primi segni di indisciplina e di svogliatezza per il lavoro scolastico. La Direzione del Collegio non avrebbe voluto promuoverlo, ma poi alle insistenze del padre lo ammise per esperimento alla classe di Rettorica; ma l'esperimento ebbe esito infelice e GALOIS, nel gennaio 1826, fu costretto a ritornare in seconda. Chiese allora ed ottenne l'iscrizione al corso di Matematiche preparatorie. È in questo momento che si sviluppa in lui la passione per la Matematica, che tutto lo prende. Nel rapporto trimestrale, trovato dal DUPUY [1] negli archivi del Collegio e pubblicato assieme ad altri documenti, si legge la seguente nota:

«C'est la fureur des Mathématiques qui le domine; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maitres et se faire accabler de punitions».

Già consapevole delle sue straordinarie facoltà di assimilazione e d'iniziativa nella ricerca matematica, GALOIS si presenta agli esami di ammissione alla Scuola politecnica (tentando così di saltare due anni), non riesce, ma nel Collegio è ammesso alla classe delle Matematiche speciali (1828). Qui egli trova un valente maestro, il RICHARD, che sa apprezzarne il valore e il talento, e così ne parla in una sua nota trimestrale: *«Cet élève a une supériorité marquée sur tous ses condisciples: il ne travaille qu'aux parties supérieures des Mathématiques»*.

In quest'anno, infatti, GALOIS che ha diciassette anni appena, pubblica negli *Annales de Gergonne* il suo primo lavoro, in cui ispirandosi alla teoria di LAGRANGE sugl'irrazionali quadratici dimostra il seguente elegante teorema: *Se una delle radici d'un'equazione di grado qualunque è una frazione continua immediatamente periodica, quest'equazione avrà necessariamente un'altra radice che si ottiene dividendo l'unità negativa per la frazione continua dedotta dalla prima invertendo i termini del periodo*.

In quello stesso anno GALOIS manda all'Accademia delle Scienze di Parigi la sua prima comunicazione sulle equazioni algebriche; sembra però che il manoscritto su cui doveva riferire il CAUCHY sia andato smarrito.

Intanto nel Collegio egli trascura lo studio di tutte le altre materie e specialmente la Chimica e la Fisica, con grande disappunto dei suoi maestri. Si presenta un'altra volta agli esami di ammissione alla Scuola politecnica, ma è ancora respinto dopo una prova orale divenuta leggendaria: dicesi che GALOIS esasperato contro uno degli esaminatori che continuamente lo interrompeva dicendo di non capirlo, gli abbia lanciato (o buttato in aria?) lo strofinaccio che gli serviva per pulire la lavagna.

Era in tali disastrose condizioni d'animo quando una grave sventura lo colpiva: il padre suo, fatto segno ad atroci calunnie da una fazione politica di Bourg-la-Reine, che, capitanata dal parroco, voleva rovesciarlo

---

(1) P. DUPUY, *La vie d'Evariste Galois*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3), t. XIII, 1896, p. 256.

dalla carica di sindaco, era preso da mania di persecuzione e si uccideva asfissiandosi in un appartamento nei pressi del Collegio (2 luglio 1829).

EVARISTO ne seguì la salma fino al paese natìo e la vide calare nella fossa mentre il popolo tumultuava acclamando il sindaco morto e fischiando il curato che nel tafferuglio rimaneva ferito.

Con l'animo così profondamente turbato, dopo esami non molto brillanti, GALOIS veniva ammesso alla Scuola Normale Superiore (1830), ma anche qui egli lavora più per le questioni che gli sorgono in mente che per superare gli esami. Ed in quest'anno pubblica tre notevolissime memorie, una sulla risoluzione algebrica delle equazioni, un'altra sulla risoluzione numerica, e la terza sulla teoria dei numeri. In quest'ultima egli dà alla teoria delle congruenze numeriche di grado superiore uno sviluppo elegante e notevole introducendo nuovi enti numerici, oggi detti gl'*immaginari* di GALOIS, ed avverte che tale lavoro è parte di un'ampia memoria da lui scritta sulla teoria delle permutazioni e delle equazioni algebriche. Ed infatti egli aveva presentato l'insieme di queste ricerche all'Accademia delle Scienze nel gennaio del 1830 per concorrere al gran premio delle Matematiche. Ma il giudizio pronunziato dalla Commissione incaricata dell'esame di questa Memoria fu sfavorevole: i relatori POISSON e LACROIX la dichiararono quasi incomprensibile. GALOIS se ne accorò; egli vide il suo genio condannato ad una eterna negazione di giustizia a tutto vantaggio dei mediocri e ne attribuì la colpa al regime contro cui si addensava l'uragano. Nel luglio di quell'anno, infatti, scoppia a Parigi la rivoluzione: CARLO X è deposto ed è nominato re LUIGI FILIPPO d'Orléans.

Nel dicembre poi gravi incidenti avvengono nella Scuola Normale; il Direttore pubblica un nuovo regolamento disciplinare che gli allievi disapprovano al canto della Marsigliese; ne nascono forti polemiche che trovano eco nei giornali politici e GALOIS che è fra gli allievi più accesi contro la Direzione e il Consiglio della Scuola, viene espulso. Ora, più libero, con maggior foga si getta nel tumulto della vita politica. Erasi già iscritto alla *Società degli amici del popolo*, ora si fa nominare artigliere della guardia nazionale.

Il 9 maggio 1831 Galois partecipa con circa duecento repubblicani ad un banchetto politico, al termine del quale si fanno brindisi con carattere rivoluzionario più o meno spiccato, quando ad un tratto sorge GALOIS ed alzando un bicchiere ed un coltello aperto grida: A LUIGI FILIPPO! Vi è un attimo di sorpresa, poi erompe un tumulto di applausi ed anche di proteste. Molti per non compromettersi se la svignano, fra questi è ALESSANDRO DUMAS padre che salta da una finestra nel sottostante giardino. Gli altri escono fuori e fanno una chiassosa dimostrazione che termina con una danza attorno alla colonna di piazza Vendome. GALOIS è arrestato la sera stessa presso la madre. All'amico diletto, già suo compagno di studi AUGUSTO CHEVALIER, che si era fatto sansimoniano, così egli scrive: «Sono sotto catenaccio! Avrai inteso parlare del banchetto delle «Vendages de Bourgogne». Sono stato io a fare il gesto ... Ma non farmi una predica, perché i fumi del vino m'avevano oscurato la ragione ... ».

Dinnanzi ai giudici Galois si difende col dire che la sua invettiva contro il re presupponeva una condizione «se egli tradisce», ma intanto prende l'occasione per sciogliere un inno all'ideale repubblicano con espressioni talmente accese che lo stesso presidente deve intervenire e pregare i giudici d'indulgere in considerazione dell'età dell'accusato. E i giudici lo assolvono.

Non restò libero che un mese soltanto, perché avendo la polizia eseguita una perquisizione nella sua casa ed avendolo trovato in possesso di una carabina e di pistole e di pugnali, lo traeva un'altra volta in arresto. Passò parecchi mesi in prigione, poi, essendo malaticcio, fu inviato in una casa di cura come prigioniero sulla parola. Gli era permesso tuttavia di uscire, ma questa benevolenza gli riuscì fatale, perché venne coinvolto in un intrigo amoroso che determinò la sua miseranda fine. S'invaghì d'una donna, ma presto dovette riconoscere che essa era indegna di lui. Per liberarsene pensò di rifugiarsi a Ménilmontant presso l'amico AUGUSTO CHEVALIERche l'aveva invitato nel suo tranquillo ritiro; si disponeva infatti a partire quando (il 29 maggio 1832) si presentavano a lui un parente ed un antico fidanzato della donna e dopo una vivace discussione lo sfidavano per la mattina successiva a battersi alla pistola con uno di loro.

Presagendo la sua fine imminente, il suo pensiero fu per la Patria e per la Scienza. Quella sera stessa indirizzava una lettera «a tutti i repubblicani» riaffermando la sua fede e rammaricandosi di non potere morire per essa:

«Je meurs victime d'une infame coquette. C'est dans un misérable can-can que s'éteint ma vie. Oh! pourquoi mourir pour si peu de chose, mourir pour quelque chose d'aussi méprisable!... Adieu! j'avais bien de la vie pour le bien public. Pardon pour ceux qui m'ont tué; ils sont de bonne foi».

Scrisse pure una lettera a due amici scusandosi di non averli potuto prevenire del duello:

«Mes adversaires m'avaient sommé, sur l'honneur, de ne prévenir aucun patriote. Votre táche est bien simple: prouver que je me suis battu malgré moi, c'est-à-dire après avoir épuisé tout moyen d'accomodement... Gardez mon souvenir puisque la sort ne m'a pas donné assez de vie pour que la patrie sache mon nom...».

In fine a questa lettera egli scrisse le seguenti parole come per riassumere il suo triste destino: *«Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta».*

E al dilettissimo amico AUGUSTO CHEVALIER inviava i suoi manoscritti con una lunga lettera che è il suo ammirevole testamento matematico. In essa riassume le sue ricerche e specialmente quelle sulle equazioni algebriche e così termina:

«Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des proposition dont je n'étais pas sur; mais tout ce que j'ai écrit là (cioé nei manoscritti) *est depuis bientot un an dans ma tete, et il est trop de mon intéret de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théoremès dont je n'aurais pas la démonstration compléte. Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.* **Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gachis**. *Je t'embrasse avec effusion».*

Quanta dolorosa ironia e quanto spirito profetico in quest'ultimo brano della lettera!

La mattina appresso (cioé del 30 maggio 1832) ebbe luogo il duello; GALOIS fu gravemente colpito al ventre. Trasportato all'ospedale, vi accorreva il fratello minore, ALFREDO, che dinanzi alle disperate condizioni del ferito, non riusciva a frenare le lacrime; ma EVARISTO lo rincorava dicendo: «Vedi bene che io ho abbastanza coraggio per morire a vent'anni!».

Il giorno appresso, alle ore 10, EVARISTO GALOIS chiudeva la sua giovane e sventurata esistenza. Ma l'opera sua scientifica non è morta né morrà.

AUGUSTO CHEVALIER pubblicò la lettera di GALOIS nella *Revue encyclopédique* quattro mesi dopo la morte di lui e mandò i manoscritti all'insigne matematico JOSEPH LIOUVILLE, che però solo quattordici anni dopo si decise a pubblicarli nel suo *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. XI, a. 1846), rilevandone la straordinaria importanza.

GALOIS ebbe l'alta ed acuta visione dell'intimo, sebbene alquanto nascosto, legame tra la teoria dei gruppi di sostituzioni e la teoria delle equazioni algebriche. Ad ogni equazione senza radici multiple corrisponde un gruppo di sostituzioni sulle radici dell'equazione, oggi detto «gruppo di GALOIS», su cui si riflettono le proprietà delle radici. Galois ottenne in particolare una condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione sia risolubile per radicali.

Le idee geniali e profonde di GALOIS, sviluppate principalmente da CAMILLO JORDAN, sono riuscite molto feconde, ed oggi la teoria dell'equazioni algebriche è legata definitivamente al nome di GALOIS. E se oggi l'opera di lui ci appare come derivata dall'opera del nostro PAOLO RUFFINI (forse ignota a GALOIS) e dalle ricerche aritmetiche ed algebriche, a lui certamente note, di LAGRANGE e di GAUSS, devesi però riconoscere che l'alta e vasta concezione della teoria di GALOIS è un meraviglioso prodotto del suo ingegno forte e penetrante.

Vari tratti della vita di GALOIS non possono essere additati all'ammirazione dei giovani, ma essi sono ampiamente giustificati dalle tumultuose vicende dell'epoca, dall'ardore dei suoi vent'anni. E come la genialità della sua mente suscita la maggiore ammirazione, così il tormento dell'anima sua per un ideale di verità, di giustizia, di libertà desta la più viva simpatia, ed oggi, dopo cento anni da quella sera in cui GALOIS con mano fabbrile scriveva, riassumendo la sua vita, le parole: *Nitens lux, horrida procella, tenebris aeternis involuta*, noi possiamo dire che quella luce è ritornata a risplendere più viva, e mai potrà estinguersi. Il nome di GALOIS rimane scritto in modo indelebile nella storia della Scienza e dell'Umanità.

In GALOIS noi vediamo la Giovinezza umana, che brama marciare verso le nobili mete, che è ansiosa di ascendere ai vertici della Scienza e dell'Arte, e si sublima nello sforzo di vincere le difficoltà, la Giovinezza umana che non muore, perché dal suo stesso sacrificio risorge rinnovata e trionfante!

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. II, vol. VIII, Fasc. 1-2, 1934, pp.1-12.

Il contributo italiano alla rinascita della Matematica nel Duecento

Discorso letto dal Prof. M.Cipolla nella seduta solenne del 14 gennaio 1934-XII - presieduta da S.E.Francesco Ercole - della R.Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.

Il Duecento italiano è ricco di date memorabili non soltanto a riguardo delle lotte politiche in cui furono impegnate città e provincie d'Italia (basti ricordare che il secolo in parola s'inizia a Legnano con la sconfitta di FEDERICO BARBAROSSA e si chiude a Palermo coi Vespri); non soltanto il Duecento è memorabile nei riguardi della nostra letteratura (per l'assurgere del volgare a forma letteraria coi poeti della Scuola sicula sino ad elevarsi a vette eccelse con DANTE ALIGHIERI); ma anche perché nel Duecento la Storia delle Scienze registra un avvenimento di alta importanza: la rinascita della Matematica dopo lunghi secoli di tenebre.

La cultura scientifica durante il periodo delle invasioni barbariche era discesa ad un livello assai basso; i capolavori della Matematica greca erano caduti in oblio, salvo nei chiostri per opera di solitari studiosi, e ricorderò ISIDORO, vescovo di Siviglia, il venerabile BEDA, irlandese, ALCUINO, abate di Tours, GEBERTO, che fu poi papa SILVESTRO II; ma le loro opere matematiche sono di contenuto assai scarso e mancano di originalità.

Alla rinascita della Scienza in Occidente un'influenza assai notevole, sebbene alquanto indiretta, esercitarono gli Arabi, i quali tra il settimo e l'ottavo secolo, mentre in Europa infuriava la barbaria, riuscivano ad assoggettare la Siria (635) e la Persia, l'Egitto (641) e l'Africa settentrionale, la Spagna (711), l'India (verso la fine del 700) e la Sicilia (nell'827).

Nel 763 essi fondarono Bagdad e ne fecero una splendida città, che divenne il centro di confluenza di due grandi civiltà: la greca e l'indiana. I califfi che vollero imitare i Lagidi e gli Attalidi nella protezione delle Scienze, delle Lettere e delle Arti, incitarono gli studiosi alla traduzione e al commento delle principali opere greche e indiane; si sviluppò così una letteratura imponente in cui la Matematica tiene uno dei primi posti. La cultura araba si diffonde in Europa nel 12° e nel 13° secolo, e la regione da cui principalmente s'irradia è la Spagna dove Cordova era divenuta un centro di studi non meno importante di Bagdad.

E se nella 2ª metà del Duecento Cordova e altre città furono riconquistate dagli Spagnuoli, la diffusione della cultura non si arrestò, e va notato l'incremento che ebbe per opera di ALFONSO X, re di Castiglia, sovrano saggio e colto, astronomo, poeta e legislatore, che fece eseguire le traduzioni in latino delle principali opere arabe; che erano in buona parte traduzioni di opere greche e indiane.

Devesi però avvertire che traduzioni di opere matematiche greche direttamente in latino erano state già eseguite in Sicilia durante il periodo normanno: ricorderò la traduzione dell'*Almagesto* di TOLOMEO, fatta da ARISTIPPO, per desiderio di re RUGGIERO, e la traduzione dell'*Ottica* di TOLOMEO, dovuta l'ammiraglio EUGENIO da Palermo. ([1])

Ma già in Italia, l'alba del Duecento, era sorta la mente adatta a intendere i pregi della Matematica indiana, a svilupparne i metodi, a coordinarli e armonizzarli coi risultati raggiunti dalla Matematica greca. Nel 1202, infatti, LEONARDO BIGOLLO da Pisa pubblica la sua prima opera: il *Liber Abbaci*, che segna un'era nuova nella storia della Matematica, non solo per le novità, la ricchezza e l'importanza del contenuto, ma anche per le vedute originali che l'Autore vi profonde. Come poté compiersi questo miracolo? L'opera di LEONARDO PISANO non può completamente intendersi e valutarsi se non si esaminano le condizioni politiche, economiche e sociali del tempo in cui sorse, se non si scrutano i fattori principali che la determinarono.

Col Duecento siamo già nell'epoca gloriosa per quanto travagliata dei Comuni. FEDERICO BARBAROSSA, sconfitto a Legnano dalla Lega Lombarda (1176) ha già firmato il trattato di Costanza (1183) che restituisce ai comuni i loro privilegi. Milano, Como, Crema, Tortona ne han tratto notevoli vantaggi e risorgono a nuova floridezza. D'altra parte Venezia ha esteso ed accresciuto la sua influenza e il suo traffico nell'Oriente, ed è giunta a stabilirvi la sua supremazia inalberando nel 1204 sulle mura di Costantinopoli il gonfalone di S.Marco.

Genova, che nel X secolo era stata messa a ferro e fuoco dai Saraceni, risorta nel secolo successivo per virtù dei suoi cittadini è riuscita ad affermare la sua potenza sui mari rivaleggiando con Pisa. Anche questa città, infatti, aveva potentemente contribuito ad infrangere il dominio dei Saraceni nel Mediterraneo, scacciandoli dalla Sardegna e dalla Corsica e colpendoli persino in questa loro sede a Palermo, con un'impresa condotta con audacia e valore che si chiuse con la sconfitta della

---

(1) Cfr. C.H.HASKINS, *Studies in the History Medieval Science* (Cambridge, Harvard University Press, 1924) e C.A.GARUFI nel Bull. bibl. dell'*Arch. Stor. Sic*., a. XLVI, 1924.

flotta saracena nel nostro golfo (1603), mentre i Normanni assediavano la città dalla parte di terra. Ma, com'é noto, la nostra città resistette e solo otto anni dopo (1701) i Normanni, rinnovando l'impresa con forze maggiori, poterono occuparla. All'inizio del Duecento Pisa esercita la sua potenza nel Mediterraneo con un fiorente commercio mantenendosi buona amica della casa di Svevia, succeduta ai Normanni nel Regno di Sicilia e delle Puglie.

Non occorre che io ricordi questo periodo importante e glorioso della Storia della nostra Isola, ma in esso si erge l'alta e bella figura di un personaggio che pure contribuì notevolmente al risveglio degli studi, anche nel campo matematico: FEDERICO II, figlio di ENRICO VI e di COSTANZA NORMANNA. Non è mio compito intrattenermi su questo sovrano celebratissimo che ebbe mente e cuore d'italiano come italiano fu di nascita (era nato a Jesi). Di lui hanno scritto magistralmente studiosi nostri, e poco tempo fa il DI STEFANO, che ha trattato dell'idea imperiale di FEDERICO II. Ricorderò che questi, rimasto orfano del genitore a tre anni, fu chiamato a Palermo dalla madre per essere qui educato *more siculo*, ma pochi mesi dopo, essendo morta COSTANZA, la sua tutela assieme alla reggenza dello Stato fu assunta da papa INNOCENZO III.

Sorvolo sulla triste fanciullezza di FEDERICO, svoltasi in mezzo ad acerbe lotte politiche, ma ricorderò che la sua istruzione fu affidata a eminenti prelati italiani, ricorderò che nella nostra cattedrale nel 1209 egli sposò COSTANZA D'ARAGONA, figlia di PIETRO II, ricorderò lo splendore della sua corte che accoglieva non soltanto - come dice il Novellino - «poeti e sonatori e belli parlatori e uomini d'arte, giostratori e schermitori» ma anche il fiore dell'intelligenza nei campi svariati della cultura: letterati e filosofi, giuristi ed uomini di scienza, e fra questi anche dei matematici. ma è un peccato che, mentre si hanno notizie dei poeti che costituiscono la cosiddetta *Scuola sicula*, nulla ci sia rimasto dei matematici, tranne il nome di un maestro GIOVANNI DA PALERMO, in conseguenza di una celebre disfida che questi ebbe con LEONARDO PISANO e di cui parlerò appresso. A meno che GIOVANNI DA PALERMO non sia quello stesso che scrisse un'opera di Rettorica il cui manoscritto si conserva a Parigi, come recentemente mi ha informato il GARUFI. Chi sa se dallo studio assai desiderato di questo lavoro non possa risultare qualche notizia certa intorno alla vita e alle opere di quel nostro antico conterraneo?

In questo vetusto regal Palazzo, che accoglie la nostra Accademia, altre accademie, altre gare si tennero sette secoli or sono alla presenza di FEDERICO II e con la sua partecipazione! Poiché egli era coltissimo, scriveva e parlava in volgare e in varie altre lingue come il latino, il greco, l'arabo, il tedesco e il francese; era un gentil poeta e poetava con PIERDELLA

VIGNA e coi figli ENZO e MANFREDI; era filosofo (e son note le sue questioni filosofiche, i cosiddetti quesiti siciliani che propose ai dotti arabi), era giurista 'ed è celebre il suo *Liber augustalis*), amava le scienze e scrisse un'opera *De arte venandi cum avibus*, il cui primo libro è un trattato interessantissimo di ornitologia. Ma anche lo studio delle Matematiche lo attraeva; si sa, infatti, che leggeva con interesse il *Liber Abbaci* ed altre opere di LEONARDO PISANO, risolveva quesiti matematici e altri ne proponeva. Si narra a questo proposito che quando si recò in Terrasanta per stipulare il trattato che doveva assicurargli il possesso di Gerusalemme, propose al Sultano MALEK-EL-KAMIL, che si vantava di essere colto in ogni ramo dello scibile, una serie di quesiti non facili di algebra e di geometria. E si racconta pure che il Sultano, tutt'altro che forte in questa materia, per non sfigurare di fronte a Federico II, abbia fatto risolvere i quesiti da uno sceicco, e, poi trascritte le soluzioni di sua mano, le abbia mandate all'imperatore.

Ho voluto ricordare quest'aneddoto per rilevare che FEDERICO II contribuì non poco a promuovere lo studio della Matematica. Ovunque egli si recasse con la sua corte, a Messina, a Catania, a Lucera, ecc., mentre amava dar prova della sua magnificenza e liberalità con cacce, banchetti e divertimenti d'ogni genere, non trascurava di indire gare sui vari rami della cultura, anche nel campo matematico; così la celebre disfida, che ho già ricordato, tra GIOVANNI DA PALERMO e LEONARDO PISANO fu da lui promossa quando passò da Pisa nell'agosto del 1226. Con tutto ciò egli non trascurava le enormi cure del suo Stato ([1]).

Fra le benemerenze culturali di FEDERICO II io devo ancora aggiungere per la sua speciale importanza: la fondazione dell'Università di Napoli. Sorvolo sulle ragioni per le quali egli prescelse Napoli anziché Palermo o un'altra città. Credo invece opportuno notare che tra il 1100 o il 1200 erano già sorte in Europa parecchie Università: a Bologna nel 1119, a Parigi nel 1150, a Cambridge nel 1210, a Padova nel 1222. L'Università di Pavia contende a tutte il primato in quanto fin dal 951 era

---

(1) Non posso fermarmi sull'importanza dell'opera politica di FEDERICO II. Mi piace però riportare quel che ne dice, in conclusione, il Prof. PALADINO nella sua recentissima *Storia della Sicilia* scritta in collaborazione col Prof. LIBERTINI. «Ai tempi di FEDERICO la Sicilia e l'Italia meridionale esercitarono una funzione importante. Fu in esse che lo Svevo pose la base dell'impero. La esistenza di un forte Stato monarchico come quello creato dai Normanni e l'importanza internazionale acquistata dal Mezzogiorno con le Crociate dettero l'impressione che il Sud potesse sostenere il peso immane che gli si voleva addossare, e si credette che di là si fosse in grado di signoreggiare l'Europa occidentale ed orientale; senonché le condizioni economiche del paese non permisero che esso compisse uno sforzo tanto poderoso, e in conseguenza lo Stato decadde rapidamente. Il regno dello Svevo rimane tuttavia uno dei più gloriosi nella storia dell'isola.»

sorta in quella città una scuola giuridica, ma lo studio generale vi fu fondato assai più tardi nel 1361 dl'imperatore CARLO IV di Boemia.

Orbene, se il mecenatismo di principi amantissimi della cultura e la creazione delle Università furono fattori principali del risveglio e della diffusione degli studi matematici in Italia, elementi fondamentali ne furono l'accresciuta potenza dei nostri Comuni e l'espansione delle loro attività commerciali in Oriente. Poiché furono mercanti e contabili italiani, che viaggiando e prendendo diretto contatto coi popoli orientali, vennero a conoscenza delle loro dottrine matematiche, dei loro metodi di calcolo e li importarono nel nostro Paese.

Non pochi manoscritti matematici dell'epoca di cui ci occupiamo sono dovuti ad artieri, a contabili e contengono cognizioni attinte presso gl'Indiani e gli Arabi, e non soltanto quelle che potevano avere pratiche ed immediate applicazioni, ma anche altre d'indole elevata ed astratta, e ciò nell'intento di far conoscere e studiare tutte le nozioni apprese.

Ma fra questi mercanti e ragionieri ne occorreva uno di mente acuta e speciale attitudine per dare sviluppo alle nuove nozioni e far compiere alla Matematica un notevole passo avanti. E questo fu LEONARDO BIGOLLO, denominato anche FIBONACCI, dall'abbreviazione fi.BONACIJ, ossia figlio di BONACCIO, che si legge nei suoi manoscritti. Egli nacque a Pisa nel 1170, e fu mercante almeno durante la sua giovinezza. Nella prefazione al *Liber Abbaci* egli stesso ci dà interessanti notizie della sua vita giovanile, dei suoi primi studi, dell'entusiasmo che vi pose, dell'intento che lo spinse a pubblicare i suoi lavori matematici. Ecco quel che narra:

«Essendo stato mio padre nominato notaro dei mercanti pisani alla dogana di Bugia ([1]), chiamatomi presso di lui, mentre ero ancora ragazzo, volle che imparassi l'abbaco... Mi piacque tanto quell'arte a preferenza delle altre, e tanto mi dedicai ad essa che tutto quello che si studiava in Egitto, in Siria, in Grecia, in Sicilia e in Provenza coi metodi propri di quei paesi di commercio pei quali poi viaggiai, appresi con grande amore, ed imparai anche l'arte della disputazione. Ma pur tutto questo, e l'algoritmo e l'arco di PITAGORA, stimai quasi errore al confronto dei metodi degl'Indiani (*Sed hoc totum etiam et algorismus alque arcus pictagorae quasi errorem computavi respectu modi indorum*). Cosicché, dopo avere studiato tali metodi con grande attenzione, aggiungendovi le mie ricerche e quanto ritenni opportuno trarre da EUCLIDE, mi son dato a comporre un'opera in quindici capitoli, dove quasi tutto ho rigorosamente dimostrato, perché coloro che desiderano apprendere tale scienza, vi siano istruiti nei metodi che più eccellono in confronto agli altri, e la gente latina non ne sia più oltre tenuta lontana (*ut extra, perfecto pre ce-*

(1) Città di Berberia, nella costa africana, presso Algeri.

teris modo, hanc scientiam appetentes instruantur, et gens latina, de cetero, sicut hactenus, absque illa minime inveniatur).»

Si noti in queste parole la nobiltà del pensiero e il sentimento patrio, ma anche l'inconfutabile attestazione che LEONARDO PISANO è il primo (ed appresso vedremo anche il maggiore) degl'Italiani che contribuirono efficacemente alla rinascita della Matematica e alla diffusione dei metodi indiani in Europa.

Oltre il *Liber Abbaci*, LEONARDO scrisse per lo meno altre sei opere, delle quali ci sono pervenute una geometria teorica e pratica, intitolata *Practica Geometriae*; un'opera di Teoria dei Numeri dal titolo *Liber quadratorum*; uno scritto *De modi solvendi quaestiones avium et similium*; un altro intitolato: *Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad Geometriam vel ad utrumque pertinentium*.

Un suo trattatello destinato alla pratica commerciale, e cioé il *Libro di merchatanti, detto di minor guisa*, è andato perduto.

Come pure si ha notizia che LEONARDO scrisse un commento al X libro degli *Elementi* di EUCLIDE, ed è un peccato che di esso non ci sia rimasta alcuna traccia, perché sarebbe assai interessante conoscere il pensiero di un matematico di così acuto ingegno sulla parte più difficile degli *Elementi*, quella che fu detta *crux geometrica*, e riguarda la teoria geometrica dei radicali quadratici.

Delle opere di LEONARDO PISANO io non posso fare qui un particolare esame, ma è d'uopo che accenni a quello che contengono di nuovo e di originale.

Nel *Liber Abbaci* per la prima volta s'introduce il sistema di numerazione decimale, usato dagli Indiani. Le cifre sono appunto dette «indiane» e lo zero «*quod arabice zephirum appellatur*». LEONARDO mette in confronto questo sistema con quello usato dai Romani, al fine di mostrarne la maggiore semplicità, applicandolo alle operazioni aritmetiche; espone le prove per 9, 7, 11 di queste operazioni e dà i caratteri di divisibilità per 2, 3 ecc. sino al 13. Dopo lo studio delle frazioni sono trattate le misure e le operazioni commerciali: le regole di ripartizione e di società. Un capitolo interessantissimo è il 12°, nel quale sono sviluppate questioni varie, specialmente di Analisi indeterminata, dove, pur notandosi l'influenza dell'*Aritmetica* di DIOFANTO e di opere indiane, si rivela l'acume dell'Autore e le sue speciali doti di ricercatore. Il successivo capitolo è dedicato alla regola detta dagli Arabi «el chatyn» e conosciuta col nome datogli da LEONARDO delle «due false posizioni» (*duarum falsarum positionum regula*). Seguono i procedimenti per l'estrazione della radice quadrata e cubica con le relative applicazioni, e si giunge infine al 15° ed ultimo capitolo dedicato all'equazione pitagorica e alle equazioni di 2° grado ad un'incognita.

Qui sono applicati i principii onde l'Algebra trasse il suo nome cioé della riduzione dei termini simili e del trasporto dei termini, come il titolo stesso del capitolo mette in evidenza: *Resolutione quarundam quaestionum secundum modum algebrae et almucabalae scilicet ad appositionem et restaurationem* (1).

LEONARDO PISANO pubblicò il *Liber Abbaci* nel 1202, e stante il successo che l'opera ebbe ne pubblicò un'altra edizione nel 1228, cedendo alle insistenze di un suo amico: MICHELE SCOTTO, indovino di professione, che «veramente delle magiche frodi seppe il gioco» come DANTE lo ricorda nel XX canto dell'Inferno.

Questa seconda edizione è dedicata all'imperatore FEDERICO II che assai probabilmente conosceva l'opera nella sua prima stesura, ma certamente era edotto della fama dell'Autore, tanto che passando per Pisa nell'agosto del 1226, come ho già detto, volle invitare LEONARDO a disputare coi matematici della sua corte.

Di questa sua disputa abbiamo notizia nella *Epistula* con la quale Leonardo dedicò il suo *Liber quadratorum* «*ad magistrum Teodorum Philosophum domini Imperatoris*». Ed ecco come ne parla:

« ... *occurrens magister Iohannes panormitanus, quastionum mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem ut invenirem numerum quadratum cui quinque additis vel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur*». (Presentatosi il maestro GIOVANNI PALERMITANO, mi propose la seguente questione che si riferisce non meno alla geometria che all'aritmetica: *Trovare un numero quadrato che aumentato di 5 o diminuito di 5, dia sempre un quadrato*).

Or bene tale questione non si presenta facile nemmeno ad un matematico moderno! Tanto più che essa non ammette soluzioni nel campo dei numeri interi. Eppure LEONARDO non idugiò a rispondere a GIOVANNI PALERMITANO che il numero richiesto è il quadrato di $41/12$: esso, infatti, aggiunto a 5 dà il quadrato di $49/12$, e diminuito di 5 dà il quadrato di $31/12$.

---

(1) Siamo ancora ben lontani dal simbolismo algebrico; l'algebra è rettorica e si mantiene tale per altri due secoli; essa prima di divenire simbolica passa per lo stadio di algebra sincopata, cioé si giova di abbreviazioni. Come pure per più di due secoli si mantiene la distinsione introdotta dagli Arabi di *algebra* ed *almucabala*. Così nella *Summa* di frate LUCA PACIOLI, che è una specie di Enciclopedia matematica, stampata a Venezia nel 1494, all'inizio della parte dedicata all'algebra si legge “Gionti con l'aiuto de Dio al luogo molto desiderato: cioé alla madre di tutti li casi, ditta dal volgo la regola della cosa overo arte magiore cioé pratica speculativa, altramente chiamata algebra et almucabala in lingua arabica over caldea secondo alcuni che in la nostra sono quanto che dire *restaurationis vel oppositionis. Algebra id est restauratio. Almucabala id est oppositio*».

Ma come vi riuscì? Nel *Liber quadratorum* LEONARDO fa uno studio notevolissimo delle soluzioni di un problema più generale. Simili questioni dovevano essere comuni presso i matematici arabi e LEONARDO doveva avere già escogitato qualche metodo per risolverli.

Il WÖPCKE, matematico ed orientalista del secolo scorso, crede di avere trovato traccia di simili questioni in un lavoro sui triangoli rettangoli in numeri del matematico arabo MUHAMMED IBN AL HOSEIN dell'II° secolo, e in qualche altro scritto arabo. Altri studiosi, italiani e stranieri, hanno ricercato le fonti arabe di LEONARDO e lungamente discusso sull'argomento.

Il WÖPCKE riconosce che le opere di LEONARDO costituiscono «*Une vaste encyclopédie mathématique qui dut initier les géomètres italiens du XIII siècle à une science toute nouvelle et préparer le brillant progrès qui fit plut tard l'Algèbre en Italie*».

E il Prof. ETTORE BORTOLOTTI della R.U. di Bologna, uno dei nostri più profondi e appassionati cultori di Storia dele Matematiche, nella sua dotta memoria del 1930 sulle fonti arabe di LEONARDO PISANO giustamente osserva che «Un corpo di dottrina che raccolga tutto quanto è conosciuto sopra un determinato ramo di scienza, non può non contenere proposizioni esposte anche da altri che trattarono lo stesso soggetto». A proposito poi del *Liber quadratorum*, il BORTOLOTTI esprime il seguente giudizio, al quale io, modesto ma appassionato cultore di Teoria dei numeri, pienamente sottoscrivo:

«Il *Liber quadratorum* è l'opera in cui LEONARDO maggiormente dimostra la sua originalità di scienziato e la sua potenza creatrice, quella per cui egli fu giudicato come il maggior genio che, nella Teoria dei numeri, la storia della Matematica abbia registrato nei 13 secoli che passarono da DIOFANTO a FERMAT».

La fama di LEONARDO si diffuse rapidamente con le sue opere, che ebbero volgarizzazioni e commenti, furono ridotte in compendi, ed imitate da autori che, se non assursero a notevoli vedute originali, pure contribuirono alla ripresa degli studi matematici e alla diffusione delle nuove teorie e dei nuovi metodi di calcolo.

Tra gli epigoni di LEONARDO mi limito a ricordare un suo contemporaneo: GIOVANNI CAMPANO da Novara, che fu cappellano di papa URBANO IV.

Egli tradusse dall'arabo in latino gli *Elementi* di EUCLIDE, aggiungendovi un interessante commento in cui si legge quel postulato che egli volle porre a base di una più rigorosa deduzione di talune proposizioni aritmetiche; il postulato di CAMPANO afferma che ogni insieme di numeri interi ammette un minimo.

Debbo avvertire che con le opere di LEONARDO e dei suoi seguaci è l'Aritmetica, e particolarmente la teoria dei Numeri, che progredisce, mentre la Geometria non fa alcun notevole passo avanti. Gli *Elementi* di EUCLIDE signoreggiano sempre nei trattati di Geometria e continuano a signoreggiare, almeno pei primi libri, sino ai tempi moderni. La *Practica Geometriae* di LEONARDO è modellata, per la parte generale, sull'opera del grande geometra Alessandrino, mentre per la teoria delle corde del cerchio s'ispira all'*Almagesto* di TOLOMEO.

Dal '200 al '300 due branche della Matematica si sviluppano in modo notevole: l'Aritmetica e l'Algebra. Se a ciò, come ho detto, influirono gl'Indiani e gli Arabi, è merito dei cultori italiani di Matematica l'aver dato l'impulso scientifico che determinò il progresso che mai si è arrestato: le ricerche nel campo aritmetico ed algebrico acquistano un carattere sempre più specifico, che vorrei dire nazionale, culminando nelle scoperte e nelle opere dei nostri Matematici cinquecentisti: SCIPIONE DAL FERRO, NICOLÒ TARTAGLIA, GIROLAMO CARDANO, LODOVICO FERRARI, (ai quali si deve la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado) e RAFFAELE BOMBELLI che introdusse i numeri complessi.

L'invenzione della stampa, la diffusione di nuove opere di Matematica sebbene in gran parte ispirate agli scritti di LEONARDO PISANO, come ad es. la *Summa* di frate LUCA PACIOLI, fecero a poco a poco cadere in oblio quegli scritti, e fu merito del principe BENEDETTO BONCOMPAGNI l'averli fatto rivivere all'ammirazione degli studiosi con la pubblicazione che ne fece nel 1857.

I pregi delle opere di LEONARDO PISANO sono universalmente riconosciuti ed è motivo di giusto orgoglio per noi che nella grandiosa, imponente storia delle Matematiche di MORITZ CANTOR due interi capitoli siano dedicati all'esame e alla valutazione di quelle opere, e non vi manchino elogi ed espressioni di viva ammirazione per l'Autore. Se non che il dotto storico tedesco non è proclive a riconoscere l'influenza delle opere di LEONARDO alla rinascita della Matematica in Europa, anzi afferma:

1° che LEONARDO non fu apprezzato nemmeno dai suoi concittadini, i quali anzi gli affibiarono il nomignolo di *Bigollo* ossia *bighello* o *bighellone*;

2° che «la sua vita brillò come meteora nel solo giro di 26 anni, cioé dal 1202 al 1228» (le date delle due edizioni del *Liber Abbaci*), senza lasciar traccia, (e qui il CANTOR avanza l'ipotesi che LEONARDO sia morto in Terrasanta, durante la Crociata, al seguito dell'Imperatore FEDERICO);

3° che la diffusione della matematica indiana in Occidente non si deve a LEONARDO PISANO ma al monaco tedesco GIORDANO NEMORARIO, autore di un trattato dal titolo *Algorithmus demonstratus*.

Or bene queste affermazioni sono affatto erronee, come ha dimostrato e documentato in questi anni il Prof. ETTORE BORTOLOTTI. In primo luogo risulta da un decreto del Comune di Pisa del 1241 (pubblicato nel 1858 dal BONAINI nel Giornale storico degli Archivi toscani) quanta stima e fiducia godesse LEONARDO nella sua città, sì da meritare alti elogi ed un compenso annuo in denaro pei servigi che rendeva al Comune; vi si leggono infatti i seguenti passi:

« *... tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, ... conferuntur: ut eidem Leonardo, merito dilectiones et gratie, atque scientie sue prerogativa, in recompensatione laboris sui ...*».

E si noti che in questo decreto figura accanto al nome LEONARDO il cognome BIGOLLO: questo non poteva essere un nomignolo e tanto meno lesivo della sua dignità, se veniva introdotto in un documento che doveva essere, ed era infatti, un pubblico e solenne attestato di stima per il Nostro.

Da questo Decreto, inoltre, risulta che LEONARDO era ancor vivo nel 1241 e che perciò egli non brillò come meteora, ma visse assai più a lungo di quanto non abbia ritenuto il CANTOR, mentre poi le opere di lui brillarono per secoli!

Finalmente si hanno prove indubbie che l'*Algorithmus demonstratus* che il CANTOR attribuisce al GIORDANO - opera assai modesta, che non regge al confronto col *Liber Abbaci* - non è anteriore al trattato di LEONARDO e non è nemmeno del GIORDANO. Esso è uno dei tanti trattatelli di Aritmetica pubblicati dopo la diffusione degli scritti di LEONARDO, e precisamente è il *Tractatus magistri Gernandi de Algorismo*, attribuito nel 1870 al GIORDANO, perché trascritto in un codice dove fra l'altro erano due opuscoli del GIORDANO.

Si può dunque oggi con tutta sicurezza affermare che spetta ad un italiano il merito e all'Italia il vanto della rinascita della matematica in Occidente dopo i lunghi secoli di ignoranza e di barbarie.

Oggi l'Italia - mi piace notarlo - ha un'opera di storia delle matematiche, veramente egregia, scritta con criteri moderni e italianamente concepita; la pubblicazione di essa si è chiusa, qualche mese fa, con l'apparizione del 3° ed ultimo volume: n'è Autore il Prof. GINO LORIA, della R. Università di Genova, notissimo appassionato cultore di storia delle Matematiche. Accanto a quest'opera devono essere altresì ricordate le particolari importanti e profonde ricerche storiche dell'ENRIQUES, del BORTOLOTTI, del MARCOLONGO e di altri insigni Maestri della Scuola matematica italiana.

Oggi, in quest'Italia che si rinnova in tutti i campi dell'attività umana, guidata da una mente superiore e da una volontà ferrea, nel mentre si attende a grandiose opere di costruzione nelle quali sono impegnati il lavoro umano e i grandi mezzi della tecnica, anche gl'intelletti degli studiosi sono richiamati a nuovi indirizzi, a nuove mete nei vari campi del sapere. Ma, come accanto al lavoro costruttivo v'è quello del piccone che demolisce per mettere in luce la vestigia di antiche gloriose epoche, così accanto all'opera degli studiosi che attendono a nuovi magnifici progressi, a nuove mirabili conquiste in ogni ramo della cultura, ferve pure l'opera austera e silenziosa dei dotti che negli archivi e nelle biblioteche investigano per iscoprire nuovi importanti segni del sapere dei nostri antichi!

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
fasc. 6, 7, 8, v. VII, a. XII (1934).

NOTIZIARIO

Conferenze del Prof. Michele Cipolla alla Bibl. filosofica di Palermo.

Il 2 aprile u. s., iniziando il corso post-universitario di Filosofia matematica alla Biblioteca filosofica di Palermo il Prof. Michele Cipolla parlò sul tema: La Definizione nella storia del pensiero logico *e il 9 aprile su* La Definizione secondo il pensiero matematico moderno.

Il Prof.Cipolla iniziò la prima conferenza con le parole del Voltaire - ripetute, disgraziatamente, invano nell'ultimo Congresso di filosofia -: *Se volete ragionare con me stabilite i vostri termini*. «Nel nostro caso» - dice il Prof. Cipolla - «si tratta proprio del termine *definizione. Definire la definizione* è logicamente impossibile; dobbiamo contentarci di chiarire dapprima il significato di questa parola in modo approssimativo, dicendo che *definire un concetto vuol dire darne una spiegazione mediante altri concetti che si presumono noti*; in secondo luogo dobbiamo studiare i caratteri della definizione per meglio comprenderne il significato. A questo scopo conviene procedere con metodo storico. Una definizione può essere studiata sotto due aspetti: nel momento in cui si pone (aspetto *dinamico*) o quando è posta (aspetto *statico*). Nel primo aspetto si ha di mira precipuamente alle finalità cui si vuole che la definizione risponda, sicché i caratteri della definizione vanno posti in relazione a queste finalità; nel secondo si ha particolarmente riguardo alle relazioni elementari del pensiero con le quali la definizione è stata costruita.

La definizione di un concetto, nel momento in cui si pone, ha caratteri diversi secondo la posizione che il concetto definendo ha nella conoscenza. Esso può essere *quasi ignoto*, cioè di esso si ha generalmente un'idea incompleta, imprecisa, oppure esso non è comunemente inteso allo stesso modo. In tal caso lo scopo della definizione è di fissare il concetto in modo inequivocabile perché l'intesa sia comune o possa divenir tale. Siffatte definizioni riflettono i concetti morali, psicologici, estetici, ecc. (Che cos'è la virtù, che cos'è l'anima, che cos'è il bello, che cos'è lo Stato?). A stabilire tali definizioni tende la Dialettica di Socrate, che analizza il concetto per determinarne la *estensione* (cioè la classe degli elementi che lo costituiscono) e la *comprensione* (cioè le relazioni fra questi elementi che permettono di considerare il concetto come *unità* o *indivi-*

duo). Platone, al fine di sviluppare questa concezione del suo maestro, istituì la dottrina delle idee, ma questa - come osserva Durant - è «un labirinto scoraggiante per lo studioso moderno»; Platone non ci dà il filo che Arianna diede a Teseo per non smarrirsi nel labirinto di Creta. Al filo volle provvedere Aristotele creando la logica, che ha lo scopo di indicare i mezzi per ragionare bene. Ma non tutti i filosofi, disgraziatamente si dimostrano grati ad Aristotele, perché mentre - come dice il Benn - la fatica dello Stagirita creando la Logica, «ha forse contribuito più che quella di qualsiasi altro scrittore a stimolare intellettualmente le età seguenti»; v'è chi osserva - come il Durant - che «la logica guida al giusto modo di ragionare nello stesso modo come educa un manuale di buone maniere; possiamo adoperarlo, ma difficilmente ci stimola ad elevare il nostro pensiero. Ci comportiamo, davanti alla logica come Virgilio ordinò a Dante di comportarsi verso i dannati per la loro ignavia: «non ragioniam di lor: ma guarda e passa». Io - dice il Prof. Cipolla - invece mi fermo e faccio il saluto romano!

Il Prof. Cipolla viene quindi a parlare della regola data da Aristotele per un'esatta definizione, e cioè determinandone il *genere (o classe generica)* cui appartiene il concetto, e la *specie (o differenza specifica)* che permette di differenziare il concetto dagli altri dello stesso genere. Accenna poi alle discussioni critiche cui ha dato luogo la regola aristotelica, rimanendo per maggiori dettagli agli scritti di G.Vailati ed A.Pastore sull'argomento. A riguardo della distinzione delle definizioni in *nominali e reali* (distinzione introdotta dagli scolastici con Occam), il Prof. Cipolla esamina le varie opinioni a riguardo, riportando, in ultimo, l'affermazione di B.Pascal: *On ne reconnaît en Géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom*, l'altra più recisa di Möbius: *Definitionum divisio in verbales et nominales omni caret sensu* ed ancora quella di un logico non matematico (Stuart Mill): *All definitions are of names, and of names only*.

Raggiunto questo accordo i logici ne hanno tratto delle conseguenze che costituiscono una vera novità per la storia del pensiero logico, come ampiamente e lucidamente ha esposto F.Enriques nel suo libro *Per la storia della Logica*.

Il Prof. Cipolla esamina questi sviluppi nella sua seconda conferenza. Egli parla delle necessità in una teoria deduttiva dei *concetti primitivi* (ossia non definibili o ritenuti tali) e delle *proposizioni primitive assiomi o postulati*) e s'intrattiene sull'arbitrarietà della loro scelta, sulle discussioni cui han dato luogo le questioni circa la *irriducibilità* del sistema dei concetti primitivi e delle prop. primitive, la *compatibilità* e l'*indipendenza* di queste, accennando alle soluzioni del Russel e dell'Hilbert e illustrandone con esempi tratti dalla matematica. Viene quindi a parlare dei vari tipi di definizioni esplicite:

1) definizioni per *intersezioni di classi* (il tipo di definizione aristotelica):

$$(\text{definendo}) = A \wedge B$$

Es. quadrato= rettangolo equilatero=quadrilatero equilatero ed equiangolo.

2) definizione per *riunione di classi:*

$$(\text{definendo}) = A \vee B$$

Es.: numero reale=numero razionale o numero irrazionale.

3) per *funzioni* od *operazioni speciali* di classi o altri elementi noti:

$$(\text{definendo})=f(a, b,...,c)$$

Esempi: numero composto=(numero maggiore di 1) ^ (numero maggiore di 1);

$\pi = \dfrac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}}$, π = minima radice positiva dell'equazione: sen$x$=0.

Questi tre tipi possono essere riuniti in un solo (tipo generale delle definizioni esplicite):

(definendo)=(combinazione nota di segni noti).

Il prof. Cipolla viene poi ad altro tipo di definizioni, assai comuni in matematica: *le definizioni per induzione*. Una definizione per induzione riflette ordinariamente una proprietà $P(n)$ dei numeri naturali: si assegna questa proprietà per lo zero, e supposta nota per un numero generico, si definisce la proprietà per il successivo, cioè si esprime $P(n+1)$ mediante $P(n)$.

Ad es. il *fattoriale* di *n (n!)* si definisce per induzione così:

$$0!=1, \quad (n+1)!=n! \wedge (n+1).$$

La mente abituata alla genesi dei numeri naturali non incontra difficoltà a concepire una definizione per induzione.

Il Prof. Cipolla chiude la classificazione delle definizioni parlando di quelle dette *per astrazione*. Queste - egli dice - sono una specie di *rebus*: si pretende che sia definita una proprietà $P(a)$ di un ente noto a dalla definizione di una relazione in cui interviene $P(a)$. Ordinariamente questa relazione è l'eguaglianza $P(a)=P(b)$.

L'esempio classico è la def. di *rapporto* data da Euclide: *si dice che «il rapporto della grandezza* a *alla omogenea* b» *è uguale al «rapporto della grandezza* c *e alla omogenea* d » *se, per ogni coppia di numeri naturali* m, n, *secondo che* ma $\gtreqless$ nb *si ha corrispondentemente* mc $\gtreqless$ nd.

Un più semplice esempio è quello di *direzione di una retta: si dice che due rette hanno la stessa direzione se sono parallele.*

Definizioni siffatte s'incontrano non solo in Matematica, ma in Fisica ed in altre Scienze; esse han dato luogo a lunghe discussioni.

In uno scritto del Prof. Maccaferri, pubblicato nel 1913 nei Rend. del C. Mat. di Palermo, sono indicate le principali questioni che riguardano tali definizioni, nonché le soluzioni proposte da diversi cultori di logica tra i quali particolarmente il Burali-Forti e il Russel. Una definizione per astrazione non implica, in generale, nè l'esistenza nè tanto meno l'unicità dell'ente che si vuole definire. Se la frase $P(a)=P(b)$ è definita in corrispondenza ad una relazione simmetrica e transitiva la proprietà di appartenere al campo (*classe di Russel*) di questa relazione risponde alla frase e può essere assunta come definizione di $P(a)$. Così, poiché la definizione della frase: «direzione della retta a = direzione della retta b» vuol dire «a parallela a b», viene espressa dalla relazione di parallelismo, che è simmetrica e transitiva, la direzione di una retta a può essere definita come il fascio (o la stella) delle rette parallele ad a.

In questa trasformazione (usata dal Padoa, dal Russell, ecc.) di una def. per astrazione in una definizione esplicita, domina un principio di cui il Prof. Cipolla si riserva di parlare in una prossima conferenza sull'*astraziione logica*.

Ritornando all'aspetto dinamico della definizione, il Prof. Cipolla viene in ultimo a parlare delle definizioni riguardanti concetti *ignoti*, e propriamente di concetti che son noti *sotto certe condizioni* e si vogliono definire in maniera da prescindere da queste condizioni. In tal caso si è di fronte ad un problema scientifico assai delicato, per risolvere il quale non basta lasciarsi guidare dalla logica, ma occorre mirare agli sviluppi ulteriori della scienza senza perdere di vista i risultati acquisiti. Consideriamo - dice il Prof. Cipolla - il momento in cui Raffaele Bombelli pensava di definire $\sqrt{a}$ per a negativo, e contempliamo l'immenso panorama che l'invenzione dei numeri complessi aprì alla Scienza matematica; pensiamo al momento in cui Newton era portato dalla nozione di velocità a definire la derivata di una funzione qualunque e ci si para davanti la magnifica, sublime invenzione del calcolo infinitesimale. Non tutte le definizioni di questa specie possono avere portate così vaste, ma tutte, mirano alla costruzione di concetti nuovi che abbracciano altri noti o ne estendono il significato. Sono tentato di chiamare *reali* queste definizioni, ma me ne astengo per non accrescere gli equivoci con una denominazione su cui tanto si è battagliato; io le chiamo *definizioni estensive*.

Si è detto - conclude il Prof. Cipolla - e si è ripetuto da Aristotele ad oggi, che le definizioni sono utili, ma non necessarie, perché al posto del definito si può mettere il definiente; ma si è guardato così soltanto all'economia verbale che le definizioni consentono dimenticando il fine precipuo che la mente si prefigge nel momento in cui le pone. Le definizioni estensive sono non solo utili ma veramente necessarie alla Scienza che, nel suo diuturno ed incessante cammino, tende ad allargare sempre il campo delle sue conquiste!

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s.II, vol.VII, Fasc. 9-10, 1934, pp. 206-208.

La Conferenza del Prof. M.Cipolla di chiusura al Corso di Filosofia matematica alla Biblioteca filosofica di Palermo

Il 7 maggio u. s., il Prof. Michele Cipolla chiuse il suo corso post-universitario di Filosofia Matematica presso la Biblioteca filosofica di Palermo con una conferenza sul tema: Il Problema del transfinito e la soluzione di Hilbert.

Il Prof. Cipolla esordì osservando che «il concetto dell'infinito ha dato molto filo da torcere al matematico e al logico; per buona sorte le discussioni - specialmente quelle relative ai *paradossi dell'infinito* - sono state troncate non appena precisati e chiariti gli elementi su cui si fondavano. Tali discussioni, tali paradossi appartengono ormai alla Storia e non alla Scienza».

Parla quindi il Prof. Cipolla dei vari aspetti secondo cui si presenta il concetto dell'infinito in Geometria e in Aritmetica. Accenna alla concezione di Anassagora, veramente profonda, a riguardo dello spazio; concezione che prelude a quella moderna del continuo: «Lo spazio - secondo Anassagora - non soltanto è infinito nel senso che non ha termine in nessun luogo, ma è anche infinito per così dire, internamente, in quanto si accosta ad ogni suo punto senza alcuna interruzione». Contro questa concezione, però, insorgeva la teoria atomistica propugnata da Democrito e la scuola eleata con Parmenide e Zenone. Anassagora ha pure un concetto profondo dell'infinitesimo quando asserisce che «nel piccolo non esiste un piccolissimo ma un sempre più piccolo», ed Aristotele dimostra un'acutezza moderna quando osserva che «nel continuo sono invero parti senza limiti, ma non secondo la realtà, ma secondo la possibilità». Il Prof. Cipolla mostra così come si giunge alla formulazione logica moderna del continuo, secondo Dedekind e Cantor.

Venendo alla teoria degl'insiemi infiniti, e particolarmente alla teoria di Cantor, accenna il Prof. Cipolla alla nozione d'*insiemi equivalenti* o aventi lo *stesso numero cardinale o la stessa potenza*; ed intrattiene molto piacevolmente l'uditorio sui paradossi che sorgono da queste nozioni e sulle gustose critiche e le candide ingenuità che vi hanno sopra ricamate i filosofi antifinitisti.

«Ma - dice il Prof.Cipolla - è duopo che io vi tolga alla spettacolo abbagliante dell'infinito per far rivolgere i vostri occhi a qualcosa che è il più bello e il più suggestivo prodotto dell'infinito: l'*infinitesimo*. Noi dobbiamo guardarlo non soltanto ammirati per le grandiose conquiste che ha procurate alla Scienza matematica, ma pieni di viva simpatia per le diffidenze di cui fu oggetto, per le calunnie che lo colpirono, per le torture che dovette subire, da Leibniz a Cauchy, prima della sua trionfante vittoria. Sembrava meraviglioso che l'Analisi matematica potesse svilupparsi così magnificamente sulla base d'un concetto ancora così oscuro; e l'Accademia di Berlino nel 1784, presieduta da Lagrange, bandiva un concorso a premio chiedendo di dare spiegazione di questo fatto e di stabilire i fondamenti rigorosi della nuova teoria matematica .

Com'è noto vinse il premio Simone Lhuilier che diede un metodo che in fondo è quello della ordinaria teoria dei limiti, ma nè lui nè il Carnot con le sue *Reflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal* riuscirono a convincere sulla natura dell'infinitesimo.

Questa fu precisata da Cauchy: *l'infinitesimo è una grandezza variabile, tendente a zero, cioè che può prendere valori minori di qualunque numero positivo assegnato ad arbitrio*. È la definizione che si legge nei trattati moderni; ma quanti non sospettano che in essa si compendia il lavoro di un secolo di pensiero matematico!»

Fin qui - continua il Prof. Cipolla - è l'infinito posto ai servizi della matematica, e si è sicuri che esso non lo tradirà se avrà il rispetto che gli è dovuto. Ma l'infinito si è voluto portare anche nella Logica, e quindi si son dovute stabilire le condizioni per la loro tranquilla e sicura convivenza. L'infinito interviene in Logica con la deduzione non elementare mediante il concetto di «tutto» ed «esiste». Il Prof. Cipolla richiama il metodo secondo cui è svolta dal Russell la teoria della deduzione non elementare, e poi si sofferma sul metodo di Hilbert e particolarmente sull'importanza che vi ha la *funzione transfinita* col relativo assioma del transfinito. Ricorda in proposito la conferenza che egli tenne nel Congresso delle Scienze a Catania nel 1923 (pubblicata nel t. I, s. 4ª degli Annali di Mat.), la dimostrazione ivi data dell'equivalenza dell'assioma del transfinito e del principio di Zermelo, nonché le critiche alla teoria di Hilbert.

Accenna poi agli sforzi dell'illustre matematico e logico di Gottinga per mettere la Logica e la Matematica al riparo di ogni obiezione; egli formalizza Logica e Matematica insieme riducendo le proposizioni a figure costituite da segni privi di significato; non si ha più *conoscenza*, ma *gioco formale*, regolato da certe convenzioni (*metalogica o metamatematica*); ma questo giuoco è fatto al fine della conoscenza, cioè per esaminare se una contraddizione possa presentarsi come formula finale di una dimostrazione.

«Tale simbolismo - dice il Prof. Cipolla - è certamente suggestivo per l'intento che si vuole raggiungere, ma sembrami che ai simboli si chieda troppo: nè i simboli, nè l'intuizione, da soli, possono darci la Matematica che è creazione del pensiero! Comunque, dopo un decennio di meditazione sulla risoluzione data da Hilbert al problema del transfinito debbo confessare che i miei antichi convincimenti sono alquanto scossi! Non ammettiamo noi forse, senza difficoltà, affermando la continuità della retta, che esiste sempre su questa un punto di separazione tra due classi contigue di punti della retta stessa? Ma esiste effettivamente questo punto? Non pare, perché possiamo anche supporre la retta discontinua senza cadere, con ciò, in contraddizioni! Ed allora perché non dovrei ammettere l'esistenza della funzione transfinita di Hilbert o, ciò è lo stesso, la esistenza della relazione selettiva di Zermelo? La difficoltà è questa: mentre posso immaginare il punto separatore poiché posseggo il concetto astratto di punto, e le classi contigue mi aiutano a fissarlo sulla retta con una precisione che posso supporre tanto grande quanto voglio, l'affermazione pura e semplice dell'esistenza della relazione selettiva mi è insufficiente allo scopo della definizione dell'insieme.

Tale affermazione è come quella dell'esistenza di un tesoro; a che mi giova essa se non so dove il tesoro sia nascosto, se non ho i mezzi per rintracciarlo? Ecco l'ostacolo che ancora m'impedisce di schierarmi fra i logici hilbertiani».

«Ma - conclude il Prof.Cipolla - come l'infinito e l'infinitesimo matematico, dopo secolari vicende, riuscirono a trionfare nella Scienza, così è da credere che in un avvenire più o meno lontano anche il transfinito avrà il suo assetto definitivo in Logica. Ed allora? Allora la mente sarà assillata da altri formidabili problemi! Perché è così che il pensiero vive e si eterna!»

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. II, f. 8-9, v. VIII, 1935, pp. 149-161.

Indagini antiche e nuove sui misteri dell'Aritmetica

Conferenza tenuta dal Prof. M.Cipolla nella Biblioteca filosofica di Palermo il 15 giugno 1935-XIII.

Il terzo volume dell'*Enciclopedia delle matematiche elementari* - l'opera egregia che si pubblica a cura di L.BERZOLARI e G.VIVANTI e di cui il 1° volume è apparso e il 2° è in corso di stampa - dovrà contenere un articolo sulle *Ricreazioni matematiche*. Gli illustri colleghi vollero affidarlo a me, fin da quando fu fissato il piano dell'opera, nel tempo stesso che mi commisero la compilazione dell'articolo sulla *Teoria dei numeri*, ormai apparso da vari anni.

Non v'è dubbio che l'idea di affidare ad uno stesso redattore i due articoli è nata in seguito ai molti punti di contatto che hanno fra loro i due argomenti, e ciò in base all'origine stessa e allo sviluppo storico della *Teoria dei numeri*. Basta riflettere che l'opera con la quale questa teoria fa ingresso nella storia della matematica greca, rimanendo unica per secoli e prima fonte dei moderni studi aritmetici, è l'*Aritmetica* di DIOFANTO (matematico del 3° secolo), e quest'opera si presenta come una raccolta di questioni matematiche aventi carattere di curiosità o *ricreativo*, come oggi suol dirsi, più che carattere di ricerche a fini pratici o teorici. Il ritardo col quale l'Aritmetica si sviluppa, si spiega così, ma non completamente, perché, se il pensiero degli antichi greci sembra maggiormente rivolto verso la Geometria, riconosciuta come strumento divino, non si riesce a scorgere speciali limiti alle loro speculazioni filosofiche. Un altro forte motivo di ritardo per lo sviluppo dell'Aritmetica va ricercato nel carattere eminentemente astratto di questa scienza, nelle difficoltà maggiori che presenta lo studio delle proprietà dei numeri, specialmente se la loro rappresentazione manca di semplicità come per il sistema di numerazione greca.

In seguito allo studio dell'Aritmetica di DIOFANTO, dopo gli Arabi e LEONARDO PISANO, appaiono le prime opere di Teoria dei numeri degne di tal nome, nel senso moderno, cioè, di trattati scientifici; ma prima di arrivare alle opere aritmetiche di EULERO, alla *Théorie des nombres* di LEGENDRE, alle *Disquisitiones Arithmeticae* di GAUSS appaiono nel 1612, a Lione, i *Problemes plaisans et delectables qui se fon par le nombres* di BACHET DE MEZIRIAC, nel 1694 a Parigi le *Récréations mathématiques et physiques* di OZANAM, nonché i trattati più o meno estesi sui quadrati magici, coi quali si divertirono anche matematici celebri, come LEONARO EULERO.

Per l'articolo dell'*Enciclopedia* che dovrò redigere ho avuto fra le mani, in questi giorni, alcune delle dette antiche opere di matematica ricreativa, come pure opere moderne, quella, ad es., in quattro volumi, tanto ricca e pregevole di EDUARDO LUCAS, e l'altra notissima del GHERSI. Trovo che il mio compito non è facile, poichè nelle trenta pagine di cui dispongo, non posso limitarmi ad una nuda esposizione di giuochi matematici o di curiose questioni aritmetiche, ma devo innanzitutto stabilire il loro inquadramento nelle teorie scientifiche ed esaminare con metodo critico il loro sviluppo storico. Mi auguro che la mia passione mi metta in grado di superare le difficoltà del mio compito.

Per un matematico tutta la Matematica è bella, ma l'Aritmetica esercita un fascino speciale e non soltanto sui matematici; ciò perché non occorre una profonda cultura per intendere le proprietà dei numeri naturali e per rimanere incuriositi di fronte al verificarsi di fatti aritmetici, che appaiono misteriosi finché non si riesca a scoprirne l'intimo congegno.

Ricordo che da ragazzo, mediante certe cartelle su cui erano segnati alcuni numeri, riuscivo a indovinare il numero pensato da un mio compagno subito dopo che questi mi aveva indicato le cartelle in cui figurava quel numero; per trovarlo consideravo il primo numero di ciascuna di queste cartelle e ne facevo la somma. Il perché lo seppi più tardi; il fondamento era l'unicità della rappresentazione di un numero come somma di potenze di 2, cioé nel sistema binario; il primo numero di ciascuna cartella era una potenza di 2, ordinatamente dalla potenza di esponente zero, ossia da 1, sino ad una potenza assegnata, ed un numero non superiore a questo limite si trovava scritto soltanto nelle cartelle dei cui primi numeri esso era la somma.

Orbene, quando una questione aritmetica colpisce un matematico, egli ne fa la sua delizia e il suo tormento, finché non riesce a risolverla. Vi sono stati tormenti che hanno deliziato gli studiosi per anni ed anni; ve ne sono che da secoli resistono a tutti gli sforzi; essi costituiscono gli attuali misteri dell'Aritmetica.

Parlerò dei più notevoli fra tutti, la cui storia è strettamente legata al meraviglioso sviluppo del pensiero matematico che tenne dietro l'invenzione del calcolo infinitesimale. Prima però mi sia concesso esprimere il mio malcontento pei meschini limiti entro cui oggi è ridotto l'insegnamento dell'Aritmetica razionale nelle nostre scuole secondarie. Tale insegnamento, soppresso dal ginnasio superiore da vari anni è oggi completamente scomparso dalla scuola classica; limitato nell'istituto magistrale alle prime nozioni sulla divisibilità, per quanto utilissimo alla preparazione culturale del futuro maestro, è generalmente innestato male nel programma di matematica, che ad un tratto si eleva all'astrattezza teorica dopo la lunga assuefazione ai metodi pratici, sicché esso vive vita triste fra lo scarso amore (se non proprio l'odio) degli allievi e il conseguente scarso entusiasmo dell'insegnante. Un qualche conforto ci dava fino a pochi anni fa il programma del liceo scientifico, che conteneva i primi elementi della Teoria dei numeri con le principali applicazioni alla divisibilità e all'analisi indeterminata di primo grado; ma queste parti sono sparite in seguito al così detto «sfrondamento» dei programmi, che si ebbe due anni or sono. È vero che tali argomenti da non pochi insegnanti erano riguardati come i più aristocratici, da trattarsi in marsina e guanti bianchi e in speciali serate di gala, ma è anche vero che a furia di rimandare tali ricevimenti si finiva col non far niente; ma i motivi di questo fatto io non posso fermarmi qui ad esaminarli. È certo che l'Aritmetica razionale non si studia nelle scuole medie; e poiché gli ordinamenti universitari attuali hanno ristretto talmente l'insegnamento dell'Analisi algebrica non vi è più posto per l'Aritmetica, ne risulta che i giovani matematici escono dall'Università senza un'adeguata cultura in Aritmetica. Alcuni avranno forse frequentato qualche speciale corso monografico di Teoria dei numeri (ed io e il collega Mignosi ci adoperiamo che tali corsi non vengano a mancare), ma ciò non basta; occorre l'allenamento opportuno ed è questo che generalmente manca perché i giovani si allenano in campi dove sanno di esser chiamati nelle prove degli esami di abilitazione o di concorso.

Questo stato di cose si manifesta in modo lampante a me che dirigo le *Esercitazioni matematiche*. Nella «Palestra» sono proposte questioni su svariati campi, inclusa l'Aritmetica. Ebbene, delle questioni aritmetiche non mi tocca quasi mai di ricevere soluzioni! Eppure io propongo questioni semplici e fra le più attraenti. Eccone una che trovai casualmente fra le mie carte e che proposi nel fasc. dello scorso marzo:

Rappresentando nel sistema decimale una potenza di 7 (ad esponente intero), la cifra delle decine è 0 o 4; per quali esponenti è 0 e per quali è 4?

Fino a questo momento nessuna soluzione. Eppure basta osservare che

$$7^2=49=50-1$$

per riconoscere che 7^4 diviso per 100 dà per resto 4 e lo stesso può quindi dirsi di 7^{4n}, sicché le potenze:

$$7^{4n},\ 7^{4n+1},\ 7^{4n+2},\ 7^{4n+3}$$

divise per 100 danno lo stesso resto che

$$7^0,\ 7^1,\ 7^2,\ 7^3$$

rispettivamente e cioé:

1, 7, 49, 43;

sicché la cifra delle decine di 7^m è *0* se *m* è della forma *4n* o *4n+1*, ed è *4* se *m* è della forma *4n+2* o *4n+3*.

Ma ora posso ben proporre un'estensione di questa proprietà, sicuro che avrò soluzioni in abbondanza:

Nella rappresentazione di a^m *nel sistema decimale quale può essere la cifra di posto k a partire dall'ultima? Indicare qualche caso particolare notevole.*

Ma è tempo che io venga ai misteri dell'Aritmetica.

I numeri perfetti. Fra tutti i misteri che primo affiora alla mia memoria (per un motivo che dirò fra breve) è quello dei numeri perfetti dispari. Esistono numeri perfetti dispari? Tutti sanno che un numero naturale dicesi *perfetto* se è la somma dei suoi divisori puri (come ad es. $6=3+2+1$).

EUCLIDE nel libro *9°* dei suoi *Elementi* mostra che i numeri della forma $2^{p-1}(2^p-1)$ sono perfetti purché 2^p-1 sia primo (e per questo occorre, ma non basta, che *p* stesso sia un numero primo). Venti secoli dopo, EULERO dimostrava che non vi sono numeri perfetti pari oltre quelli della forma di EUCLIDE. Gli antichi matematici greci conoscevano quattro numeri perfetti pari: quelli corrispondenti ai valori *2, 3, 5, 7* di *p*; ai tempi di EULERO se ne conoscevano altri quattro: quelli dati dai valori: *13, 17, 19, 31* di *p*. Con grande fatica ne sono stati scoperti altri quattro: il nono da SEELHOFF (nel 1886), il decimo e l'undicesimo da POWERS (nel 1911) e il dodicesimo da FAUQUEMBERGUE (nel 1920); essi corrispondono ai valori *61, 89, 107, 127*. Anzi il numero $2^{127}-1$ è il più grande numero primo finora conosciuto; esso ha la bellezza di *39* cifre!

Ci sono altri numeri primi della forma 2^p-1 e quindi altri numeri perfetti pari oltre i *12* che conosciamo? Chi sa? Più importante - per lo sviluppo delle teorie aritmetiche - sarebbe se si potesse dimostrare che la serie dei detti numeri è finita oppure che è infinita. Ma questa è una sfinge che aspetta il suo Edipo, come l'altra dell'inesistenza dei numeri perfetti dispari. Nel 1886 STERN dimostrò che non esistono numeri perfetti dispari della forma *4n+3*; fu un passo avanti, ma è rimasto l'unico passo sicuro e notevole, se si prescinde dal risultato di CATALAN che *un numero perfetto dispari, se esiste, è composto di almeno 26 fattori primi differenti, ed è quindi formato di almeno 45 cifre.*

Ciò conferma quanto aveva osservato il buon padre MERSENNE: che i numeri perfetti nella serie naturale sono molto rari, forse per indicare che la perfezione non è di questo mondo!

Ma non sono mancate le presunte dimostrazioni dell'inesistenza di numeri perfetti dispari; quella del CARVALLO, apparsa nei *Comptes rendus* del 1871 (vol. 81), che fu rilevata insufficiente dal MANSION; un'altra, apparsa nel *Periodico di Matematiche* 32 anni or sono, fu quasi immediatamente criticata ivi stesso da chi vi parla, il quale s'era dimenticato della cosa, tanti anni ohimè sono passati, se non fosse sopraggiunto, proprio in questi giorni, a ricordarglielo l'inatteso volume di MAURICE LECAT: *Erreurs des Mathématiciens*, interessante e preziosa raccolta di cantonate prese da Matematici grandi e piccoli, dalla origine ai giorni nostri, con le indicazioni bibliografiche delle correzioni. Avendo riscontrato il mio nome fra i giudici, son corso a cercarlo fra gl'imputati, sicuro di trovarlo!

-Lei è senza peccato? - mi domandò una volta il prof. F.SEVERI, commissario con me in un concorso, mentre riferivo sui lavori di un concorrente. Risposi subito che mi ritenevo il più nero dei peccatori!

Tuttavia nell'elenco dei colpevoli, compilato dal LECAT, non ho trovato il mio nome! Eppure sarei felicissimo se fossi stato anch'io chiamato alla sbarra: avrei avuto l'onore di trovarmi assieme ad ABEL, a papà EULERO, al sommo GAUSS e a tanti altri matematici insigni.

Non mi trovo nell'elenco forse perché l'egregio Autore ha voluto risparmiare i matematici viventi: i morti si consolano leggendo nell'al di là tutte le incognite! Ad ogni buon fine, mi propongo di scrivere a Mr. LECAT perché non mi dimentichi almeno quando sarò morto!

I numeri primi della ciclotomia. Il mistero dei numeri primi della forma $2^m -1$, me ne richiama un altro analogo: quello dei numeri primi della forma $2^{2^n}+1$, la cui importanza è ancora maggiore: tutti sanno, infatti, per un bellissimo risultato dovuto a GAUSS, che la circonferenza è divisibile, con la riga e il compasso, in un numero primo p di parti uguali allora e solo quando p è della forma $2^{2^n}+1$.

Ebbene non si conoscono che cinque soli numeri primi di questa forma: quelli che corrispondono ai valori di n da 0 a 4.

FERMAT, che fu matematico valente, ma anche frettoloso nelle conclusioni, affermò (pur dichiarando di non averne la dimostrazione) che ogni numero della detta forma è primo; ma tale affermazione fu contraddetta da EULERO che trovò composto il sesto numero della detta serie ($2^{2^5}+1=641.6700417$). Come pure furono riconosciutiu composti i numeri corrispondenti ai valori: 6, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38 di n. I due ultimi numeri hanno più di venti milioni di cifre! Pur tuttavia SEELHOFF ha riconosciuto che il primo è divisibile per $2^{39} \cdot 5+1$ e il secondo per $2^{41} \cdot 3+1$. Quanta pazienza e fatica spese invano per trovare il sesto numero primo della ciclotomia! Se pure esiste! Ma anche quando lo si riesca a trovare, sarebbe un improbo sforzo, d'importanza quasi nulla, perché non ci sarà un Giobbe che effettuerà, col metodo di GAUSS, la divisione della circonferenza nel corrispondente numero di parti uguali, se, per far ciò, relativamente al quinto numero della ciclotomia, il prof. HERMES impiegò dieci anni della sua vita!

Un risultato teorico di qualche importanza in merito ai suddetti numeri primi, fu indicato da E. LUCAS e da altri: *Perché il numero p, eguale a* $2^{2^n}+1$*, sia primo occorre e basta che sia divisore del numero*:

$$3^{\frac{p-1}{2}}+1.$$

Si può qui al 3 sostituire il 10 e allora il calcolo della potenza si potrà eseguire subito, scrivendo dopo l'unità $\frac{p-1}{2}$ zeri (ottenendo un numero rispettabilissimo anche per piccoli valori di n); comunque la divisione può compiersi prendendo i successivi resti delle potenze di 3 (o di 10) secondo il divisore p. In un secolo come il nostro in cui la tecnica ha risorse meravigliose, non dev'essere difficile ideare una macchina che permetta di fare entro breve tempo una tale divisione. Lancio l'idea agl'inventori! Chi sa se nei prossimi anni, in qualche mostra delle invenzioni, non vedremo una tale macchina accanto all'uomo d'acciaio che ad una data ora ci sveglia, illumina la camera e ci porta il caffè a letto! Però, in tal caso, se io dovessi scegliere tra l'acquisto dell'una o dell'altra macchina, vi dico con franchezza che acquisterei l'uomo sveglia, perché ad un matematico come me poco o nulla importa sapere se vi sia qualche altro numero primo ciclotomico oltre i cinque conosciuti, mentre interessa assai sapere (e questo nessun congegno me lo dirà) se la serie di tali numeri sia finita o infinita, perché un tale risultato non potrà essere raggiunto se non in seguito ad ulteriori sviluppi di teorie, e solo allora potrà dirsi che la Matematica abbia realizzato, in questo campo, un effettivo progresso!

La storia delle scienze ce ne dà continuo ammaestramento. Un esempio luminoso ci vien dato dal problema d'esistenza d'infiniti numeri primi di una data forma lineare $Mx+N$, ossia appartenenti alla progressione aritmetica che s'inizia con N ed ha per ragione M.

È chiaro che affinché una tale progressione contenga numeri primi è necessario che M ed N siano primi tra loro; ma tale condizione è sufficiente?

Per talune progressioni particolari, come pei numeri della forma $4x+3$ ed anche per quelli della forma $4x+1$ e $8x+5$, è facile o per lo meno non difficile riconoscerlo senza uscire dal campo proprio dell'Aritmetica. Ma la dimostrazione dell'esistenza di un numero primo (e, per conseguenza, d'infiniti numeri primi) di una data forma lineare qualunque $Mx+N$, essendo M ed N primi tra loro, ha dato molto filo da torcere ai Matematici, dal LEGENDRE che nel 1808 enunciò la proposizione e tentò di dimostrarla senza riuscirvi, al DIRICHLET che nel 1837 ne diede una dimostrazione ineccepibile, ma tremenda per le lunghe e delicate argomentazioni. Queste si fondono sulla teoria delle funzioni di variabili complesse e sullo studio di talune serie di funzioni che oggi prendono appunto il nome di *serie* di DIRICHLET. Tale studio, notevolmente sviluppato in questi ultimi anni, è riuscito prezioso per le indagini relative a svariate questioni di Teoria dei numeri, e in particolare alla teoria dei numeri primi e delle funzioni aritmetiche, ond'è che a buon diritto il DIRICHLET va riguardato come il fondatore della Teoria analitica e asintotica dei numeri, oggi uno dei campi più belli ed elevati dell'Analisi matematica!

Nei riguardi della teoria dei numeri primi e delle funzioni aritmetiche tante cose avrei ancora da dire, ma non mi è possibile nei limiti di una conferenza; tuttavia non voglio chiudere quest'argomento senza far cenno ad un mistero già svelato e ad un altro che è da svelare sui numeri primi.

Nel 1845 il BERTRAND poneva a base di alcune sue ricerche di teoria dei gruppi la seguente prop. : *Per* $x \geq 7$ *c'è sempre un numero primo che risulta compreso tra* $\frac{x}{2}$ *escluso e* $x-2$ *incluso*. Egli non dimostrava questa proprietà ma si limitava a verificarla mediante le tavole dei numeri primi. Orbene la dimostrazione ne fu data alcuni anni dopo dal matematico russo TSCHEBYSCHEF. Oggi dalle ricerche sulla totalità dei numeri primi che non superano un limite assegnato emerge questo fatto: *Il numero dei numeri primi compresi tra* x *e* $2x$ *diverge con* x.

La proposizione di BERTRAND sarebbe una immediata conseguenza di quest'altra, enunciata da GOLDBACH in una lettera indirizzata ad EULERO nel 1742: *Ogni numero pari è somma di due numeri primi (l'unità compresa tra questi)*; ma tale affermazione che appare di un'estrema semplicità ed è stata, entro certi limiti, controllata mediante le tavole dei numeri primi, resiste agli sforzi dei matematici, fra i quali sono da segnalarsi gl'inglesi HARDY e LITTLEWOOD pei loro risultati di carattere asintotico. Una lucida esposizione di questi risultati si può leggere nella magnifica opera in tre volumi: *Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie*, pubblicata otto anni or sono dall'infaticabile ed appassionato cultore di Teoria dei numeri: EDMUND LANDAU. Per la dimostrazione della proposizione del BERTRAND e le moderne ricerche sulla teoria dei numeri primi che non superano un limite assegnato mi piace ricordare anche l'estesa monografia del mio indimenticabile maestro GABRIELE TORELLI (premiata dalla R.Acc. delle sc. fis. e mat. di Napoli, e pubblicata nel 1902 negli Atti della Acc. stessa), nonché i due volumi del *Lehrbuch* *der Primzahlen* del LANDAU, che seguirono di sette anni la monografia del TORELLI.

L'Analisi indeterminata e l'ultimo teorema di Fermat. Altre belle ricerche ed altri profondi misteri riguardano l'Analisi indeterminata, che, come dissi in principio, si sviluppa con l'Aritmetica di DIOFANTO. Un gruppo d'interessanti questioni si collegano ai sistemi di numeri pitagorici, cioé agl'interi che verificano l'equazione $x^2+y^2=z^2$, la cui soluzione trovasi in DIOFANTO.

La questione di trovare un triangolo rettangolo i cui lati siano numeri interi e tali inoltre che l'ipotenusa sia un quadrato e così pure la somma dei cateti, fu proposta da FERMAT nella sua 2ª osservazione alla questione 24ª del libro 6° di DIOFANTO. Egli ne ricondusse la risoluzione a quella (in numeri interi) dell'equazione:

$$2x^4-y^4=z^2$$

assegnando anche un procedimento mediante il quale da una soluzione qualunque (per es. da $x=y=z=1$) se ne ottengono altre due. EULERO mostrò come le soluzioni di quest'ultima siano legate alla risoluzione delle due equazioni

$$x^4-2y^4=z^2 \quad , \quad x^4+8y^4=z^2 \, ,$$

ma un procedimento sistematico per la risoluzione avvicendata delle tre equazioni fu dato da LAGRANGE. Formule di ricorrenza per la risoluzione della prima furono indicate da V.A.LEBESGUE, ma esse hanno l'incoveniente di non dare soluzioni primitive.

A tali questioni sui triangoli di FERMAT fu richiamata la mia attenzione nel 1917 da GINO LORIA che nel curare l'edizione delle opere del TORRICELLI aveva trovato, fra i vari problemi proposti dal grande faentino, quello di *determinare un triangolo di* FERMAT *tale che la somma dell'ipotenusa e del cateto maggiore sia pure un quadrato*.

Il dott. PROMPT, un appassionato studioso di Aritmetica, ma non propriamente un matematico, chiedeva una soluzione di questo problema di TORRICELLI e la voleva proprio da me! Confesso che l'impegno mi sembrò superiore alle mie forze, avendo incontrato difficoltà veramente scoraggianti; ma la diva Urania che, come tutti sanno, è la Musa che ispira i matematici, volle venire in mio soccorso ispirandomi il perfezionamento delle formule di LEBESGUE; perfezionamento che mi condusse alla risoluzione completa ed autonoma di ciascuna delle tre equazioni anzidette ed anche a dimostrare l'esistenza d'infiniti *triangoli* *torricelliani*. Quando comunicai questo risultato al dott. PROMPT, promettendogli d'inviargli, appena pubblicato, il lavoro che speravo di completare indicando il triangolo torricelliano di minima ipotenusa, l'ottimo dottore mi scriveva una lettera entusiastica, dicendomi che mi voleva bene «come chi, avendo superato il 16° lustro, può voler bene ad un giovane» (adesso ahimè non lo sono più!). Ne fui molto lusingato, ed essendo riuscito ad ordinare i triangoli di FERMAT secondo i valori crescenti dell'ipotenusa, trovai che il primo ad essere torricelliano era il 12°: la sua ipotenusa è data da un numero di sole 165 cifre! Ma il piego indirizzato al dott. PROMPT e contenente il mio lavoro mi veniva restituito dalla posta con sopra scritto: *deceduto*!

E vengo ora al più grande e al più tormentoso fra tutti i misteri dell'Aritmetica: l'*ultimo teorema* di FERMAT.

Era naturale che i matematici passassero dallo studio dell'equazione pitagorica a quello dell'equazione analoga $x^n+y^n=z^n$ per $n>2$ e si proponessero la sua risoluzione in numeri interi non nulli. Orbene, FERMAT, commentando la questione 8^a del libro II di DIOFANTO, affermava che per $n>2$ l'equazione non ammette soluzioni intere non nulle; anzi egli si rammaricava che il margine del testo fosse insufficiente per contenerne la dimostrazione. È questo il cosiddetto *ultimo o grande teorema di* FERMAT. Essendo vero il teorema per $n=4$ (FRENICLE), bastava dimostrarlo per n primo dispari. Ma la dimostrazione non si è avuta che per valori particolari di n: per $n=3$ (EULERO), $n=5$ (DIRICHLET), $n=7$ (LAMÉ e LEBESGUE); per $n\leq 100$ la dimostrazione fu data dal KUMMER e per $n\leq 7000$ dal DICKSON; ma finora non è apparsa alcuna dimostrazione esatta per un qualsiasi n. Invece le dimostarzioni errate sono state moltissime: il LECAT, nella Raccolta che ho citato, ne annovera 51, ma l'elenco non è completo! Fra gli autori di queste dimostrazioni erronee vi sono anche matematici di grande fama, come il KUMMER (1857) e il LINDEMANN (1901). La dimostrazione di quest'ultimo fu annunziata da una rivista italiana con queste entusiastiche parole: «il vincitore di π ha vinto l'ultimo teorema di FERMAT!» Ma il LINDEMANN si affrettò poco dopo a smentire la vittoria!

Le ricerche del KUMMER, se non culminarono nella sospirata dimostrazione, furono di grande importanza per lo sviluppo dell'Aritmetica nei corpi algebrici, tanto che l'Accademia di Parigi nel 1857 volle conferire all'autore il gran premio delle Matematiche, che essa doveva assegnare fin dal 1853 a chi avrebbe dimostrato vero o falso il famoso teorema. Ma un premio c'é ancor oggi e fu istituito nel 1907 dall'Università di Gottinga: è il premio WOLFSKEL di 100000 marchi. Quanti matematici vorrebbero avere questa consolazione!

Intanto nel 1909 WIEFERICH dimostrava che *se per un numero primo* p *l'equazione* $x^p+y^p=z^p$ *è possibile in numeri interi non nulli allora* p *deve verificare la congruenza:*

$$2^{p-1}=1 \qquad \text{(mod. } p^2\text{).}$$

Un tale numero *p* si cercava da tempo. L'Accademia di Gottinga attribuiva a WIEFERICH 100 marchi sugl'interessi della fondazione WOLFSKEL; ma nel 1913 MEISSER trovava che il numero primo 1093 verifica la congruenza suddetta, sicché poteva sperarsi che per un tal numero primo l'equazione di FERMAT avesse soluzioni; ma ecco che interviene MIRIMANOFF a dimostrare che dev'essere verificata anche la congruenza

$$3^{p-1}=1 \qquad \text{(mod. } p^2\text{).}$$

Ed allora? Allora si è sempre nel dubbio, pur riconoscendosi sempre più che le condizioni cui deve verificare un numero primo *p* perché possa non esser vera l'asserzione di FERMAT, sono molto forti. Il seguente bel teorema di VANDIVER rafforza tale opinione:

Se per un numero primo p *l'equazione di* FERMAT *è soddisfatta da tre numeri interi primi tra loro* x, y, z, *allora* x^p-x, y^p-y, z^p-z, *dovranno essere divisibili per* p^3.

Il MORDELL, autore di una interessante monografia sull'ultimo teorema di FERMAT, opina che questo forse potrebbe ricevere un po' di luce dallo studio di una proposizione analoga affermata pure dal FERMAT:

L'equazione

$$y^3=x^2+2$$

non ammette che una sola soluzione in numeri interi positivi (x=5, y=3).

Era il FERMAT in possesso di un procedimento dal quale potesse dedurre siffatte asserzioni? Il MORDELL ha dimostrato, nei *Proceedings* della Società Matematica di Londra del 1919, che *un'equazione della forma*

$$y^3=x^2+k$$

con k intero positivo o negativo non può avere che un numero finito di soluzioni. Egli indica altre equazioni per le quali si ha un risultato analogo il cui particolare interesse non può sfuggire a nessuno.

E termino. Termino coll'osservare che l'Aritmetica - che GAUSS proclamò la regina delle Matematiche - ha fedeli ed affezionati amici (anche tra i profani) più che non si creda, e i suoi progressi, se pur sembrano lenti alla nostra ansietà di apprendere, son sempre continui ed ammirevoli.

Il matematico indiano SRINIVA RAMANUJAN, morto 15 anni or sono, aveva una sbalorditiva familiarità con la Teoria dei numeri. Si racconta che trovandosi in Inghilterra fu visitato un giorno dall'HARDY, il quale, per stuzzicarne la valentia aritmetica, ebbe a dirgli che per recarsi da lui si era servito di un'automobile portante il numero 1729 e che questo numero non gli sembrava dotato di speciali privilegi. -Tutt'altro- rispose il RAMANUJAN - il 1729 è un numero interessantissimo, perché è il più piccolo numero che si possa esprimere come somma di due cubi in due modi diversi (1^3+12^3e 10^3+9^3).

Ora io, chiudendo con questo aneddoto di estremo amore per le proprietà dei numeri auguro a tutti i presenti, affinché resti loro il ricordo di questa conferenza sugli attuali misteri dell'Aritmetica, che vengano a possedere una magnifica berlina portante nella targa qualche numero privilegiato, come ad es. il 12° numero perfetto o il valore dell'ipotenusa del primo numero torricelliano; ma più fervidamente auguro a tutti i presenti che quanto prima possano partecipare, in perfetta salute corporea e piena giocondità di spirito, ad un solenne ed aerodinamico simposio, al fine di celebrare la vittoria riportata finalmente sull'ultimo teorema di FERMAT o sul postulato di GOLDBACH, dopo però di avere assistito in questa Biblioteca filosofica - alla presenza, beninteso, del suo grande animatote: il Dott. AMATO - ad una conferenza (che certamente non sarà tenuta da me) intorno ai nuovi formidabili misteri che, frattanto, saranno sorti in Aritmetica per la delizia e il tormento dei nostri nepoti!

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
s. II, f. I, v. X, 1937, pp. 1-10.

Nulla e zero

Conferenza tenuta dal Prof. M.CIPOLLA *nella Biblioteca filosofica di Palermo il 12 ottobre 1936 - XIV.*

La più recente mia collaborazione all'*Enciclopedia italiana*, edita dall'Istituto G. Treccani, riguarda la voce *zero*. Mi sono state concesse due colonne e queste non possono dirsi troppe se si riflette alle esigenze di una grande enciclopedia, dove ogni vocabolo va esaminato, sia pur compediosamente, in tutti i suoi diversi aspetti: storico, scientifico, bibliografico, ecc.

Tale articolo mi è servito di spunto a quanto sto per dire all'inclito uditorio di questa Biblioteca, limitando l'argomento al suo contenuto centrale, cioè riguardando lo zero nel suo aspetto più comune. Vi farò quindi grazia di tante peregrine cose su cui aggirasi il mio articolo enciclopedico; come pure, nel quadro stesso impostomi, dovrò sorvolare sulle questioni specifiche.

Il mio proposito, innanzi tutto, è di mostrare in quali rapporti logici si trovi lo zero col nulla, di esaminare poi le ragioni per le quali lo zero si presenti molto tardi nella scienza numerale, come esso infine da semplice segno, assunto per mera comodità grafica, venga ad acquistare e finisca per affermarsi e divenire sempre più utile e prezioso, anzi addirittura necessario, allo sviluppo delle scienze matematiche.

Il concetto di zero si presenta come l'astratto delle classi *nulle*, ossia *vuote di elementi*. Esso è il termine che adoperiamo per rispondere alla domanda: *Quanti oggetti?* nel caso in cui la *classe* o *collezione* di oggetti alla quale si fa riferimento, sia priva di oggetti. Lo zero, dunque, designa un particolare aspetto dell'*estensione* di una classe quando si astrae dalla *comprensione* di questa.

Dicendo ad es.:

«triangolo equilatero, non equiangolo»
«numero primo compreso tra 8 e 10»

denotiamo due classi diverse nella comprensione, ma eguali nell'estensione. Tali considerazioni hanno condotto in Logica al concetto di «nulla», in Aritmetica al concetto di «zero».

Il concetto di nulla è vecchio quanto l'umanità e questa ha dovuto sempre e dovunque constatare del nulla la presenza impalpabile e piangerne talvolta tristi conseguenze; ma le sue prerogative, nel senso che c'interessa, sono state prese in considerazione nell'età moderna con la fondazione della Logica simbolica.

LEIBNIZ studiò il nulla, denotandolo con la lettera *N* (iniziale di *nihil*); BOOLE usò per esso il segno «*0*» dello zero (nonostante i due concetti siano distinti); PEANO si giovò del simbolo #, in contrapposto al simbolo **£** (che adoperò nei due sensi di «vero» e «tutto»), facendo rilevare che già nella 2ª metà del 1700 il RICHERI nel suo «*Algebrae philosophicae in usum artis inveniendi specimen primum*» usa il segno **(** per denotare il nulla in opposizione ad **"** (*universum*).

Il segno **#** di PEANO è pure adoperato da RUSSELL nei suoi *Principia Mathematica*.

È definibile il nulla?

Nei sistemi logici di PEANO e di RUSSELL il nulla è definito. PEANO lo riduce alla nozione di *classe*, alla relazione di *appartenenza* di un oggetto ad una classe e all'operazione che converte in classe un'implicazione formale. Egli scrive infatti:

= *x] (a[Cls.***2***a. x[a)*   Df.

L'implicazione in parentesi equivale alla proposizione:

«*x* appartiene ad ogni classe»,

quindi il nulla è definito come la classe degli oggetti che hanno tutte le proprietà.

Introducendo la classe *~a* opposta ad una classe *a*, per un *x* di # dev'essere verificata la condizione *x[a* assieme l'altra *x[~ a*, e poiché ciò è un assurdo (per la stessa definizione di classe opposta ad altra), ne risulta che la definizione precedente dà luogo alla conseguenza:

= *a ~ a*,

cioè l'intersezione di una classe con la opposta è il nulla. Altre facili conseguenze sono le seguenti:

$$a \cup \Lambda = a \,,\quad a \cap \Lambda = \Lambda \,.$$

Si noti l'analogia tra queste due ultime prop. con quelle aritmetiche dello *0* rispetto alla somma e al prodotto (*a+0=a, a·0=0*, quando *a* è un numero qualunque). Ma l'analogia non sempre sussiste perché mentre ad es. si ha:

$$a \cup b = \Lambda \,.\!=.\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda \,,$$

non è vero che: $a+b=0$ vuol dire: $a=0$ e $b=0$, a meno che non si resti nel campo dei numeri assoluti.

Il RUSSELL fonda la teoria del nulla su altre basi. Mentre in PEANO il calcolo delle classi è fuso con quello delle proposizioni, in RUSSELL è questo che precede, servendo di base alla teoria delle classi. Il nulla viene introdotto con la considerazione delle funzioni proposizionali sempre false (di una variabile reale). Tali funzioni sono tutte formalmente equivalenti e perciò determinano una stessa classe: il *nulla*. Poiché la funzione proposizionale:

$$x \neq x$$

è sempre falsa, si ha la seguente definizione del nulla:

$$\Lambda = x \ni (x \neq x).$$

In un modo o nell'altro il nulla è definito come classe; è legittimo quindi considerarne la classe opposta: ~ # che è il famoso *tutto*, indicato col simbolo **£**. Esso è lo spauracchio dei Logici. PEANO lo accolse nel Form. I, lo bandì dal Form. III, tornò ad accoglierlo nel Form. IV, lo respinse definitivamente nel V. Perché?

Perché il «tutto» è una terribile insidia ai fondamenti della logica, con le antinomie che esso può generare. Il RUSSELL scoperse le ragioni profonde di questo fatto e ne indicò il rimedio istituendo una gerarchia fra le proposizioni. Sarebbe lungo parlarne; potrò dire così *grosso modo* che il «tutto» genera le antinomie perché è *ambiguo nel tipo*, potendo esso riferirsi a individui o classi d'individui o classi di classi d'individui ecc.; per evitare le antinomie non devesi uscire da ciascuno di questi tipi. Insomma bisogna trattare il «tutto» in Logica coi guanti gialli come si fa coll' «infinito» in Matematica.

Anche il «nulla» è ambiguo nel tipo, ma esso è innocuo appunto per la sua vacuità. Vacuo ma non sterile, perché esso genera lo zero che ha tanta importanza.

Lo «zero» può definirsi con RUSSELL come la classe delle classi nulle. È questo il punto di partenza della trattazione russelliana dell'Aritmetica; trattazione che interessa particolarmente il Logico. Ciò perché con essa si dimostra che tutta l'Aritmetica, anzi tutta l'analisi matematica, può fondarsi su concetti e principi di pertinenza esclusiva della Logica; purché fra i principi s'includa quello dell'infinito, che ha un carattere suo proprio, in cui è riposta l'essenza stessa della Matematica. La dimostrazione di ciò, per quanto s'incardini nella definizione dello zero e del numero naturale ci allontanerebbe troppo dall'argomento.

Mi preme invece fare rilevare che non occorre definire lo zero per fondare l'Aritmetica. Peano mostrò che basta assumerlo come primitivo assieme ad altri due (quello di numero e di successivo) e postulare su di essi cinque opportune proprietà per costruire tutto l'edificio aritmetico. Fu questo un bel passo verso la riduzione al minimo dei concetti e delle proposizioni primordiali della Matematica, riduzione che culmina con l'accennata teoria del RUSSELL, la quale fa restare ammirati Logici e Matematici.

I Matematici però si fanno domande, in merito allo zero, che interessano più particolrmente gli storici della Scienza. *Può farsi un'Aritmetica senza lo zero?* Può farsi; anzi può farsi un'Aritmetica senza numeri! Se riduciamo infatti la concezione concreta di numero naturale ai suoi primi elementi, non troviamo altro che classi coordinabili di oggetti; l'Aritmetica nel suo stadio più basso non è che una serie di operazioni semplici fra classi di oggetti che possano coordinarsi, ossia mettersi in corrispondenza *uno ad uno*: è l'Aritmetica dei popoli primitivi. Nasce il numero con l'impronta che la coordinabilità lascia nel nostro spirito quando si astrae dalla natura degli oggetti. L'oggetto in tale astrazione diventa un *quid* unico, inscindibile: la cosiddetta unità (la monade dei filosofi greci); il numero è un complesso di unità. È così che dice Euclide nel 7° libro dei suoi *Elementi*: mon<ß èstin, xadºn ,xaston t√n ∏nton ,n légetai aridmòß dè tò èx mon<dvn sugxe&menon pl‰yoß. E LEIBNIZ, nei suoi scritti filosofici, non si esprime diversamente: «*Abstractum autem ab uno est* **Unitas**, *ipsumque totum abstractum ex unitatibus seu totalitas dicitur* **Numerus**».

Questa è pure la concezione di G.CANTOR, il quale anzi, attraverso alla coordinabilità delle classi si eleva dalla concezione del numero finito a quella del transfinito.

Ora in tali vedute lo zero sfugge come numero e sfugge anche l'«uno» per EUCLIDE. Occorreva un'astrazione molto fina per fare includere lo zero fra i numeri. Difatti lo zero manca nelle matematiche dei popoli antichi; la numerazione egiziana, la greca, la romana non hanno nè segno nè vocabolo speciale per lo zero; eppure la matematica greca toccò alti fastigi!

Nella *Sintassi matematica*, celebre opera del matematico ed astronomo alessandrino CLAUDIO TOLOMEO (del 2° sec. dell'e.v.) -opera conosciuta oggi col nome di *Almagesto* per una corruzione araba della parola greca meg&ste (la maggiore)-è usato un segno che rassomiglia a quello ordinario dello zero, tanto che fu da taluni considerato per tale, perché esso indica che nella misura in gradi di un angolo mancano i minuti primi e secondi. Ma questo segno non è altro che un *omicron*, sormontato da una virgoletta a mo'di accento o spirito, e ciò fa credere che il segno stesso altro non sia che l'*omicron* iniziale della voce greca oΩdén (niente) e la virgoletta che lo sovrasta serva ad avvertire che non si tratta dell'*omicron* numerico che ha il valore di 70.

I greci avevano un sistema alquanto complicato di numerazione. Ai tempi di ARCHIMEDE si adoperavano le 27 lettere minuscole dell'alfabeto ionico e cioé le 24 comuni e le tre cadute in disuso:

Ϛ (st&gma) = 6, Ϟ (xòppa) = 90, ϡ (samp&) = 900. Con α, β, ... fino al θ si rappresentavano tutti i numeri da 1 a 9, da ι al Ϟ i multipli di 10, da 10 a 90, da ρ al ϡ i multipli di 100 da 100 a 900.

Come si vede, la base di questo sistema è il dieci. Le prime nove lettere furono chiamate *pitmeni* (πυθμεν = cifra significativa), così α era il pitmene di ι (=10), di ρ (=100); β il pitmene di χ (=20), di σ =200; ecc.

Per scrivere i numeri intermedi si faceva uso della regola additiva, disponendo i segni da sinistra a destra per ordine decrescente di valore (prima, cioè, le centinaia, poi le decine e infine le unità). Così: ρια = 111 e talvolta $\overline{\rho\iota\alpha}$, ponendo una lineetta al di sopra, per indicare che il gruppo delle lettere rappresenta un numero. Per ottenere i multipli di 1000 sino a 900000 si premetteva un indice in basso e a sinistra delle dette 27 lettere: ͵α = 1000, ͵β = 2000 ecc. Talvolta (EUTOCIO, DIOFANTO) invece dell'indice si usò la lettera Μ o la sillaba M^{υ} per indicare le miriadi, ponendo il numero delle miriadi prima di questi segni o al di sopra della lettera Μ, così in luogo di

͵ρ ͵ια = 100 mila +10 mila + 1 + 110001
= 10 miriadi + 1 miriade + 1

si scrisse:

ιαΜα ed anche $\overset{\iota\alpha}{M}\alpha$.

ARCHIMEDE indicò il metodo per continuare, cioé stabilì denominazioni e regole al fine di poter considerare numeri molto grandi, e scrisse in proposito un curioso opuscolo, il cui titolo ψαμμ&τηß è volto, nelle traduzioni latine, in *Arenarius* o *De numero arenae*. ARCHIMEDE volle dimostrare la falsità dell'opinione, allora molto diffusa, che il numero dei grani di sabbia sparsi sulla terra fosse così grande da non potersi calcolare.

Applicando principi aritmetici, geometrici ed astronomici il grande siracusano trovò invece che non solo questo numero è calcolabile, ma lo è anche quello dei grani di sabbia che potrebbero riempire una sfera concentrica alla terra e giungente alle stelle fisse: tale numero sarebbe inferiore a 10^{63}.

Tale conclusione doveva certo recare grande meraviglia in quell'epoca se lo stesso Autore rivolgendosi a GELONE, figlio del re JERONE di Siracusa, così esprimevasi: «Io penso, o GELONE, che queste cose sembreranno poco credibili a quelli che non sono versati nelle Matematiche; ma risultano ora dimostrate per chi coltiva queste scienze e le applica a conoscere le distanze e le grandezze della terra, del sole, della luna e del mondo intero.

Con questo celebre opuscolo, dunque, il grande Geometra nostro, nonostante la complessità della numerazione greca priva di zero, riusciva a richiamare l'attenzione degli studiosi verso l'infinitamente grande, con quella genialità con la quale, in base al metodo di esaustione, l'aveva indirizzata verso l'infinitamente piccolo.

Tuttavia l'avere dimostrato la sufficienza del sistema di numerazione in uso per la rappresentazione di numeri astronomici non spiega completamente il perché ARCHIMEDE o altri grandi matematici dell'epoca non si proposero una semplificazione del sistema in parola. Forse perché l'idea di una semplificazione, se pure balenò, s'infranse l'urto della tradizione. D'altra parte lo spirito greco era troppo assorbito dalle speculazioni geometriche per soffermarsi l'Aritmetica, che allora aveva quasi esclusivamente carattere pratico. Devono passare quattro secoli dopo la morte di ARCHIMEDE perché sorga un'opera che rifletta lo studio dei numeri: è l'*Aritmetica* di DIOFANTO, o più espressivamente le *Questioni aritmetiche*, poiché il suo titolo originale è tà'Ariθmhtixà. E quest'opera sorge mentre sta per spegnersi l'amore per la Scienza: è come l'ultimo guizzo, breve ma valido, di una lampada cui l'olio viene a mancare. Essa resta isolata per secoli nella Matematica; deve passare un millennio perché sorga un'opera di uno splendore più abbagliante: questa è il risultato della rinascita della cultura aritmetica greca, rinnovata ed illeggiadrita dai metodi indiani, e fecondata dal genio latino: intendo parlare del LIBER ABBACI di LEONARDO PISANO.

È gran merito degli Indiani e degli Arabi l'avere coltivato la Scienza in un'epoca in cui la barbarie infuriava in Europa. Nei riguardi dell'aritmetica gl'indiani furono favoriti da una felicissima scelta del sistema di numerazione, tanto felice che in quasi due millenni l'umanità non è riuscita a trovare nulla di meglio da sostituire a tale sistema ormai adoperato in tutto il mondo. Esso è decimale come il sistema greco, ma le cifre sono soltanto dieci, nove significative per rappresentare i numeri (naturali) da uno a nove ed una insignificativa «lo zero» che denota assenza di unità e serve per potere scrivere qualsiasi numero, sulla base di una regola convenzionale semplicissima, e cioé supponendo che *in un allineamento di cifre, ciascuna di queste abbia il suo valore o un valore dieci, cento, mille . . . volte più grande secondo che essa occupa il primo, il secondo, il terzo . . . posto, da destra verso sinistra*.

Con questa regola e con l'uso dello zero qualsiasi numero può scriversi in una sola maniera. Anche nella numerazione greca c'é l'unicità della rappresentazione, ma è la regola additiva che vi presiede, e poiché lo zero è il numero indifferente della somma, esso è automaticamente escluso; per contrario ha un gioco importante nella numerazione indiana che, come ho detto, è fondata sul valore posizionale e progressivo delle cifre.

L'uso di un segno per lo zero appare nell'India verso il 500 d.C.; esso ha la forma di un cerchietto, talvolta pieno ma forse casualmente; il suo nome in sanscrito è *sunya* (=vuoto). Pare che il sistema di numerazione indiana sia venuto a conoscenza degli Arabi nell'8° secolo, e precisamente quando giunse a Baghdad un'ambasciata indiana portante libri matematici ed astronomici scritti in sanscrito, che furono tosto tradotti in arabo. Ma il primo tratttato di calcolo indiano fu scritto dal matematico arabo AL-KHUWARISMI verso la metà del secolo 9°; se ne conserva una traduzione latina, fatta verso il 1130, da ABELARDO DI BATH, col titolo *Algoritmi de numero indorum*; e ben presto la parola *algoritmus* (o *algorismus*) fu adoperata per indicare il metodo di calcolo degl'indiani.

In Italia e in Europa questo metodo si diffuse, come poc'anzi ho accennato, mercè il *Liber Abbaci* di LEONARDO da Pisa che apparve nel 1202 e fu seguito da molti trattatelli elementari e aventi un carattere più pratico. Perché il *Liber Abbaci* non è soltanto un'opera di divulgazione, ma contiene le ricerche personali dell'autore, che furono numerose e feconde. Esso e le altre opere di LEONARDO costituiscono - come dice il WÖPCKE, matematico ed orientalista del secolo scorso -«*une vaste encyclopédie mathématique qui dût iuitier les géomètrés italiens du XIII siècle à une science toute nouvelle et préparer les brillants progrès qui fit plus tard l'Algèbre en Italie*.»

LEONARDO PISANO è stato giudicato il maggior genio che, nella Teoria dei Numeri, la storia della Matematica registri nei 13 secoli che decorsero da DIOFANTO a FERMAT.

LEONARDO PISANO latinizzò il vocabolo «sifr» usato dagli Arabi per lo zero in corrispondenza al sanscrito «sunya», con la parola *zephirum*
e dalle forme medievali italiane *zefiro* e *zeuero* nacque il vocabolo *zero,* che già figura in un manoscritto del 1491.

Devo però avvertire che avendo alcuni autori latinizzato in cifra l'arabo «sifr», la parola «cifra» fu adoperata anche (per es. da MASSIMO PLANUDE nel 1330) per designare lo zero, ma poi finì per indicare un segno numerico in generale.

Fin qui lo zero si presenta come un simbolo utile ai fini della rappresentazione dei numeri, un segno per la comodità grafica; non si appalesa ancora come numero nè tanto meno come elemento necessario alla scienza matematica. Però si comincia anche ad operare con esso come si opera coi numeri; è vero che bisogna fissare bene le sue prerogative perché possa nella società numerale vivere in buona armonia con tutti e non recar danno a nessuno, ma l'idea di riguardarlo come numero al pari degli altri comincia a farsi strada.

Ed oggi in cui il concetto di numero si è andato talmente allargando che la sua primitiva significazione di «moltitudine di unità» è scomparsa e per richiamarla bisogna ricorrere ad un aggettivo («naturale» o «intero»), oggi in cui sono considerati, come numeri, enti di non importa quale natura, purché per essi siano definite le operazioni le cui proprietà formali sono quelle stesse delle quattro operazioni fondamentali sui numeri naturali, sarebbe un fuori luogo, direi quasi un assurdo, non considerare lo zero come un numero.

Ma c'è di più. Nella Matematica moderna lo zero è un concetto scientificamente necessario. Togliete lo zero e distruggete il concetto di corpo numerico che è così fecondo. Sopprimete lo zero per es. dal corpo dei reali (assoluti o relativi) ed avrete distrutto il continuo, una delle più belle concezioni della matematica moderna, da cui è sorta la più mirabile, la più sublime delle invenzioni matematiche: il *Calcolo infinitesimale*.

Se poi assurgete a concezioni più ampie di quelle di corpo numerico, ai cosiddetti *campi d'integrità*, secondo le più recenti teorie, potrete assistere ad uno strano fenomeno, affatto sconosciuto nell'aritmetica ordinaria: lo zero può spezzarsi in due o più fattori, tutti diversi da zero; e vi si para davanti tutto un nuovo mondo che è ancora da esplorare.

Convenite allora con me che lo zero - questo figlio tardivo del nulla - non solo è necessario, ma di un valore inestimabile allo sviluppo incessante della scienza matematica!

Un matematico, dunque, si esprimerebbe erroneamente e tradirebbe la sua scienza se giudicando di persona o cosa che nulla vale dicesse che «vale uno zero». Voi mi fareste se mai un grazioso complimento, giudicando così questo mio panegirico su «nulla e zero». Se volete essere veramente precisi, dite invece di queste mie chiacchere come disse il leggiadro poeta di Lesbia a riguardo dei brontolii dei vecchi troppo severi:

omnes unius aestimemus assis!

ESERCITAZIONI MATEMATICHE
f. I-IV, v. XI, 1938, pp. 1-19

Mistica dei numeri
Aritmetica magica e satanica

Conferenza tenuta dal Prof. Michele Cipolla nella Biblioteca filosofica di Palermo il 25 aprile 1938 - XVI.

Forse qualcuno che non mi conosce, apprendendo il titolo di questa conferenza avrà potuto credere che io sia dedito alle scienze occulte, e sarà rimasto sorpreso se, venuto qui, non mi ha visto comparire con la barba fluente e l'aspetto enigmatico di un alchimista od astrologo medievale. Ma è più probabile, credo, che alcuni abbiano pensato che io sia stato preso dalla malinconia di consultare i vecchi scartafacci di qualche matematico stregone e sia venuto a svelare i misteri dell'Aritmetica e magari far conoscere qualche regola cabalistica, infallibile per vincere al lotto e perciò degna di pubblicazione nell'apposita rubrica dei giornali cittadini! Niente di tutto questo.

Debbo però confessare che una qualche curiosità di esaminare siffatti libri l'ho avuta; aggiungo subito però che tutte le rare volte in cui ho potuto soddisfare tale curiosità sono rimasto completamente deluso!

Parecchi anni or sono, a Catania, sfogliando il catalogo di una libreriua antiquaria di quella città, appresi che era in vendita una copia dell'opera di GIROLAMO CARDANO sull'arte d'invocare i demoni, ma non potei esaminarla perché quando mi decisi di recarmi in quella libreria, c'era stato già uno più curioso e sollecito di me che l'aveva acquistata. Ma più che il contenuto del libro m'interessava sapere se ne fosse autore quello stesso CARDANO, medico e matematico cinquecentista di grande fama, che aveva scritto l'*Ars Magna sive de regulis algebraicis*, dove per la prima volta si pubblicava la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, una delle maggiori glorie della Scuola matematica italiana. Speravo in cuor mio che si trattasse di un altro autore o che il libro di occultismo fosse apocrifo; purtroppo consultando una biografia del CARDANO apprendevo che egli era stato anche stregone ed aveva pagato con la prigione le sue stregonerie. Ogni dubbio cade poi leggendo quest'impressionante ritratto che egli fa di se stesso:

«Io ho ricevuto dalla Natura uno spirito filosofico ed inclinato alle «scienze, sono ingegnoso, accessibile, elegante, voluttuoso, allegro, pio, «amico della verità, appassionato per la meditazione, intraprendente, «desideroso d'imparare, dotato di talento inventivo, pieno di dottrina, «avido di cognizioni mediche, entusiasta per il meraviglioso, astuto, «furbo, ingannatore, satirico, esercitato nelle arti occulte; sobrio, labo-«rioso, noncurante, ciarliero, detrattore della religione, vendicativo, invi-«dioso, triste, finto, perfido, mago, in preda a mille contrarietà, lascivo, «dotato della facoltà d'indovinare, geloso, rozzo, calunniatore, officioso «ed incostante, a cagione del contrasto che vi è tra la mia natura e i miei «costumi».

Dopo questa confessione e con tali alternative fra le qualità buone e le peggiori che possano albergare nell'animo umano, si è condotti a dire, a giustificazione del CARDANO, le parole di SENECA: *Nullum unquam magnum ingenium sine mixtura dementiae*. E poiché il CARDANO non finì sul rogo, vuol dire che furono riconosciute in lui virtù eroiche tali da far velo alle qualità non commendevoli. Il CARDANO, infatti, restituito alla libertà, dopo di aver promesso di non insegnare più negli stati della Chiesa, si ridusse a Roma a fare il medico, e ivi salì a tale fama, per la grande valentia, da conquistare il favore del papa, che volle assegnargli una lauta pensione; di questa egli godette fino alla morte (1576).

Ma se non è l'Aritmetica degli stregoni e dei cabalisti, qual è dunque, allora, mi chiederete, l'argomento di codeste vostre ciance?
Ecco: l'Aritmetica magica e satanica costituisce un capitolo della cosiddetta *Matematica ricreativa*, alla quale sono state dedicate da parte di matematici antichi e moderni, anche fra quelli di maggior fama, numerosi interessanti studi ed anche opere di grossa mole.

La Matematica ricreativa tratta di questioni che destano interesse e curiosità per il loro carattere giocoso o di passatempo, a base di nozioni matematiche ordinariamente elementari. È perciò che tali questioni possono essere comprese facilmente e dilettare anche coloro che non hanno una elevata coltura matematica. Il carattere giocoso o di passatempo di siffatte questioni non le rende d'importanza didattica minore delle altre, anzi esse servono utilmente al maestro che ama istruire dilettando. Non mancano nemmeno di valore scientifico, anzi molte fra esse sono state di stimolo all'istituzione di nuovi metodi d'indagine, altre han dato origine a nuove, importanti teorie matematiche.

Nei primi albori della scienza matematica presso tutti i popoli sono appunto le questioni di carattere ricreativo che danno lo spunto e l'impulso alla ricerca, spesso meglio che le questioni pratiche di carattere utilitario. Del resto è nello spirito stesso della Scienza di non preoccuparsi delle eventuali, possibili applicazioni.

Un'idea rimasta isolata per un tempo anche assai lungo, può divenire in seguito assai feconda. Si domanda BERANGER:

Combiens de temps une pensée
vierge obscure, attend son époux?

L'idea potrà anche impallidire col volgere degli anni, ma nel giorno delle nozze essa rivivrà, fiorirà e potrà dare molti e buoni frutti.

«I geometri della Grecia - osserva il LUCAS - chiamati a torto «geometri, perché non misuravano la terra se non a passi da peripatetici, «tagliando per traverso una radice ben rotonda ed appuntita per studiare «la forma e le proprietà della sezione (una sezione conica) credevan forse «che i loro studi, più di 20 secoli più tardi, dovessero servire a KEPLERO «per formulare le leggi del movimento dei pianeti, a NEWTON per «porre quelle dell'attrazione universale, a LAPLACE per scrivere la «meccanica celeste e l'esposizione del sistema dell'universo?»

Ma veniamo alla Matematica ricreativa. Che ne pensano i filosofi dei giuochi matematici? Mi limito al pensiero di LEIBNIZ:

«Gli uomini non sono mai così ingegnosi quanto nell'invenzione dei «giuochi; lo spirito si trova a suo agio ... Dopo i giuochi che dipendono «unicamente dai numeri vengono i giuochi dove entra la situazione ... «Dopo i giuochi dove non entrano che i numeri e la situazione, verrebbe- «ro quelli dove entra il movimento ... Il principale difetto di molti dotti è «di non dilettarsi che a discorsi vani e ribattuti, mentre v'è un così bel «campo per esercitare lo spirito ... I giuochi tanto di destrezza che di «azzardo forniscono di che aumentare considerevolmente le scienze «utili. Vi è persino negli svaghi dei ragazzi ciò che potrebbe fermare «l'attenzione del più grande matematico».

«È da augurarsi - dice inoltre il LEIBNIZ - che si tengano corsi di giuochi trattati matematicamente».

Ora a me non risulta che corsi di tal genere siano stati mai istituiti in Italia, almeno nella forma desiderata dal LEIBNIZ, cioé con una trattazione matematica; ho soltanto notizia di un corso di Ricreazioni matematiche, tenuto tempo addietro in Germania dal Prof. EDMUND LANDAU. Mi spiace di non sapere nulla più di questo corso, che sarà riuscito certamente degno della fama dell'eminente matematico, spentosi nel febbraio scorso a Berlino nel pieno fervore della sua bella attività scientifica.

Ma se mancano corsi del genere, non mancano libri che trattino di matematica ricreativa. In Italia abbiamo quello del GHERSI (editore Höpli), pervenuto alla 3ª edizione, in Germania s'è pubblicato quello dell'AHRENS (Lipsia 1901), in Inghilterra l'opera in tre volumi del ROUSE-BALL, tradotta in varie lingue, in Francia l'opera in quattro volumi del LUCAS; a Bruxelles nel 1930 se n'è pubblicata una assai ricca, dovuta al matematico belga KRAITCHIK, il quale dirige una rivista mensile: *Sphinx*, che si occupa esclusivamente di matematica ricreativa. Non mancano infine periodici aventi rubriche dedicate a tali questioni. In Italia abbiamo il *Sapere*, la magnifica rivista di divulgazione scientifica, edita dall'Höpli. Tali opere e rubriche, però, rispondono veramente poco al desiderio leibniziano di una trattazione matematica dei giuochi; esse in genere sono pubblicate per il gran pubblico, che vuole divertirsi senza torturarsi il cervello per comprendere delle spiegazioni matematiche; è riservato proprio ai matematici di trovare da loro stessi le spiegazioni; già perché si crede che sia questo il loro vero diletto, tanto più grande quanto più difficile è la spiegazione. Questa gente privilegiata vive e s'inebria dei suoi stessi tormenti intellettuali!

Comunico infine, a conclusione della parte bibliografica dell'argomento, che nel III volume, in preparazione, dell'*Enciclopedia delle Matematiche elementari*, diretta dai Proff. LUIGI BERZOLARI e GIULIO VIVANTI, della quale da pochi giorni è apparsa la 2ª parte del II volume, sarà pubblicato un ampio articolo sulle ricreazioni matematiche: esso per desiderio dei due egregi Colleghi, sarà redatto *immerite sed amore* da chi vi parla. Tale articolo ha dato lo spunto a questa chiaccherata limitatamente all'Aritmetica magica e satanica.

L'Aritmetica magica ci porta in paesi incantati dove tutto è bello e la sorpresa assai piacevole. L'Aritmetica satanica è quella che potrebbe essere imposta dantescamente, come pena infernale, in qualche apposita bolgia, ai matematici non meritevoli del perdono di Dio: la pena di risolvere quesiti di una difficoltà fantastica. Ma non occorre esagerare troppo! Secondo taluni tutta la matematica è diabolica. Madama di Sévigné, ad esempio, non poteva fermare lo sguardo su di una pagina di algebra senza esser presa dal terrore ossessionante di vedere Satanasso ([1])! Se Madama di Sévigné fosse vissuta in questi tempi e avesse potuto ascoltare qualche mia lezione di Algebra all'Università o la presente conferenza sarebbe certamente guarita del suo male nervoso!...

Ma io non posso parlare dell'Aritmetica magica e della satanica senza fermarmi un po' sull'Aritmetica mistica con la quale esse sono in qualche modo connesse. Dico «fermarmi un poco» perché sulla mistica dei numeri si è scritto tanto e son note tante cose, che non voglio annoiare l'uditorio.

Sembra che al «numero» sia assegnato nel mondo un compito molto elevato; a giudizio di PLATONE il numero governa il mondo; dal numero dipende l'avvenire di un popolo: «il numero fa la forza» - ha detto MUSSOLINI.

---

[1]) Si legga il brillante articolo di F.SEVERI: *L'ora della Matematica*, nell'Almanacco dei Visacci del 1938 (Ed. Vallecchi, Firenze).

Ma fra tutta l'immensa, plurinfinita schiera numerale quelli che primeggiano e dominano sono i numeri interi, i quali provengono direttamente da Dio, secondo l'affermazione di uno dei maggiori algebristi moderni, LEOPOLDO KRONECKER:

«*Die Ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*» (I numeri interi li ha fatti il buon Dio, tutto il resto è opera dell'uomo). Vero è che oggi i logici matematici son riusciti a definire niminalmente gl'interi con l'uso esclusivo di elementi della logica pura; ma la logica pura è la più diretta emanazione del pensiero che è il pù gran dono di Dio.

Analizzando i numeri interi il LEIBNIZ trovò che qualunque numero può derivarsi dallo zero e dall'unità, non solo, ma anche essere rappresentato mediante due soli simboli, quello di zero (*0*) e quello di uno (*1*), facendo uso dello stesso principio posizionale delle cifre, che ci è noto per il sistema decimale.

Si ha, in tal modo, la nota numerazione binaria, nella quale LEIBNIZ credette di vedere l'immagine della creazione. Egli pensò che l'*1* potesse rappresentare Dio e lo *0* il nulla, e che l'Essere supremo avesse tratti tutti gli esseri nella stessa guisa come dallo zero e dall'uno si traggono tutti i numeri. Tale concezione piacque così al LEIBNIZ che volle comunicarla al padre gesuita GRIMALDI che si trovava in Cina ed era presidente di quel tribunale di Matematica, sperando che egli potesse, con tale concezione, convertire al Cristianesimo quell'imperatore, molto amante delle scienze.

Quest'aneddoto è riferito dal LAPLACE con qualche punta d'ironia per LEIBNIZ, ritenendo questi forviato da pregiudizi infantili; ma se noi ammiriamo l'ingegno dell'Autore del sistema dei mondi dobbiamo rendere i massimi onori al fondatore del Calcolo infinitesimale, quel Calcolo, giustamente detto sublime, che vive e trionfa sempre, e dobbiamo rendere infinite grazie a Dio che ha permesso ai Matematici di fissare, tra lo zero e l'uno, il continuo, che è il simbolo della divina, ininterrotta ed eterna potenza creatrice.

La mistica del *3* è ricchissima. Il *3* si trova venerato fin dai primi albori della civiltà di tutti i popoli, dagl'Indiani con la loro Trimurtì (Brahma, Visnù e Siva) agli Egizi con la Triade (Osiride, Iside ed Oro), ai Greci pei quali eran tre gli dei maggiori: Giove, Nettuno, Plutone, tre le dee più potenti: Giunone, Minerva, Venere, tre le Parche, tre le Furie, tre le Grazie, tre le Arpie, tre le Gorgoni, tre le Sibille, tre i giudici degl'inferi; Cerbero ha tre teste, Gerione tre corpi.

Pitagora vide nel *3* l'armonia perfetta, e comunemente anche oggi il *3* è detto il numero perfetto; ciò però è contro la terminologia dei matematici greci che vige ancora, per cui un numero è detto *perfetto* quando è uguale alla somma dei suoi divisori. Il più piccolo numero perfetto è *6*

$= 1 + 2 + 3$. Fino ad oggi son noti *12* numeri perfetti, il maggiore è $2^{126} (2^{127}-1)$: un numero che ha più di *750* cifre!

Non occorre dire quale sia il valore mistico del *3* presso i Cristiani.

«Io distruggerò il tempio - disse Gesù -e lo riedificherò in tre giorni».

Un giorno i Farisei Gli dissero: - «Maestro, noi desideriamo da te un prodigio nel cielo». E Gesù rispose: - «Questa generazione perversa domanda un segno e non le sarà dato che quello del profeta Giona, perché come Giona fu *3* giorni e *3* notti nel ventre della balena, così il figlio dell'uomo sarà tre giorni e tre notti nel seno della terra».

Sorvolo sull'uso del *3* nei misteri della magìa e delle società segrete, preferisco intrattenermi su qualche recente aneddoto che testimonia la predilezione sempre viva per il numero della perfetta armonia.

Il Prof. FEDERIGO ENRIQUES, l'illustre matematico e filosofo che tutti conosciamo ed ammiriamo, volle una volta onorare di una sua conferenza il Circolo Matematico di Catania. In quell'occasione io e diversi Colleghi con una eletta rappresentanza di quella scuola matematica accompagnammo il Maestro ad un giro dell'Etna; ci fermammo nella graziosa Randazzo, dove gustammo dei magnifici cannoli, resi gelati dal frizzante zeffiro etneo. Naturalmente non mancarono i brindisi, ed un collega, dopo avere accennato al curioso gioco che aveva avuto il *3* negli avvenimenti di quell'anno, finì brindando al Maestro con questi alati versi:

Tre son le Grazie e sol tre volte a me
lice alle dee libar, chè più si vieta;
Alle Muse che son tre volte tre,
nove volte libar deve il poeta.
A te, Maestro, unito all'alto coro,
dodici volte libo e più ti onoro!

Vorrete naturalmente sapere se il matematico poeta dopo tutte queste libazioni, fatte in omaggio al *3* e ai suoi multipli, finì col prendere una sbornia. Ad onore del vero: no, perché libava a sorsettini!

Un'altra volta lo stesso ebbe l'occasione di accompagnare due professoresse che desideravano acquistare un lume per il loro tavolo da studio. La scelta fu limitata fra diversi candelabri di ferro battuto e il matematico consigliava l'acquisto di un lume a due lampade, che poteva simboleggiare l'armonica dualità delle due acquirenti, sorelle gemelle, ma la sua ragione non valse; la preferenza fu per il lume a tre lampade. Vinse il 3, e il matematico che vide poi il lume acceso, si accese di estro poetico e scrisse l'epigramma che, per gentile concessione dell'autore, vi comunico:

Tre luci son: tre fiamme. Sole ed insieme
ardon sì belle; ma qual mai di più?
Ardono eguali, poi che in esse freme
la stessa occulta e magica virtù.

Come si vede anche il poeta fu preso dal misticismo e vide l'unità in quel trino: la corrente elettrica che animava egualmente le tre lampade.

Qualcuno può sorprendersi nel sentire che fra i matematici, la cui freddezza è proverbiale, ci sian di quelli che si accendono di entusiasmo poetico.

Ebbene, non è da sorprendersi, perché le matematiche richiedono tanta immaginazione quanta ne richiede la poesia. È SOFIA KOWALEWSKI che lo afferma e bisogna credere a quella mente eletta che fu così cara al WEIERSTRASS. Questo grande Maestro doveva sentir correre per le sue vene il fremito della poesia se potè asserire che il perfetto matematico è sempre un po' poeta!

Ma torniamo alla mistica dei numeri. Non meno del *3* è stato venerato presso tutti i popoli, fin dai primordi della loro civiltà il numero *7*. Negli antichi palazzi assiri,dietro l'harem s'innalzava una torre o una piramide a *7* piani, tutti di colore diverso, essendo ciascun colore sacro a uno dei sette corpi celesti: il bianco a Venere, il nero a Saturno, il rosso a Giove, il turchino a Mercurio, il vermiglio a Marte, l'argento alla Luna, l'oro al Sole.

I popoli siro-arabi prestavano i loro giuramenti solenni tra sette pietre aerolitiche, dette *pietre sacre* o *betili* e le iscrizioni cuneiformi parlano delle sette pietre nere del tempio caldeo di Ereth. Sette betili sorgevano nella valle di Mina per la quale passavano gli Arabi nei loro pellegrinaggi; Maometto dispose che se ne lasciassero solo tre, facendo però obbligo ai pellegrini di gettare *7* ciottoli dinnanzi a ciascuna pietra. L'inferno di Maometto è diviso in *7* piani, il paradiso in *7* cieli, popolati dalle uri, vergini aventi tutte le più belle doti; ciascuna ha *70* abiti, *70* tende, *7000* schiave, ecc.

Anche nell'antica Grecia era dato un posto importante al *7*: eran *7* i saggi, *7* le meraviglie dell'universo, *7* le fanciulle che gli Ateniesi mandavano ogni anno al Minotauro come pasto straordinario.

A Roma, nella città dei sette colli, era pure particolarmente stimato il *7*. Si riteneva per es. che il fiume Stige facesse *7* volte il giro dell'inferno, e Virgilio divise questo in *7* gironi. Cicerone nel sogno di Scipione dice: «Non vi è quasi niente di cui il *7* non sia il nodo».

È presso gli Ebrei e poi pressso i Cristiani che il *7* acquista uno spiccato carattere religioso. Dio creò il mondo in *7* giorni e si riposò nel 7° giorno. Si parla nella Bibbia delle *7* vacche grasse e delle *7* vacche magre, delle *7* piaghe d'Egitto; nel tempio ardeva un candeliere a *7* braccia; *7* sono i salmi della penitenza.

I pani che Gesù benedisse e si moltiplicarono assieme ai pesci erano sette, e quando la moltitudine se ne fu sfamata restarono avanzi per sette panieri.

L'apostolo Pietro chiese a Gesù: «Maestro, quando mio fratello avrà peccato contro di me, quante volte dovrò perdonarlo»? E Gesù rispose: «Io non ti dico fino a sette volte, ma sino a *70* volte *7*». Ciò vuol dire: sempre.

La Chiesa cristiana enumera *7* peccati mortali, *7* sacramenti, *7* doni dello Spirito Santo, *7* dolori di Maria. Dalla Pasqua alla Pentecoste decorrono *7* settimane.

Passando a numeri più alti la mistica cede alla superstizione e alla cabala. Presso i Romani il *13* di ogni mese era giorno di malaugurio ad eccezione dei mesi di marzo, luglio, agosto ed ottobre, nei quali il giorno più disgraziato seguiva gli Idi, ossia era il *16* del mese.

Non occorre ricordare lo sciocco pregiudizio che di *13* persone a tavola una è destinata a morire entro l'anno. V'è tanta gente che ha un sacro terrore per il *13*. Si narra di un tale, ammalato di *triacaidecamania* che, arrotato da una carrozza e soccorso da alcune persone, tra cui era un questurino con la giubba costellata di lucidi bottoni, sia stato sollecito a contare quei bottoni e, poiché il loro numero non era *13* nè multiplo di *13*, abbia esclamato:

- Meno male! L'ho scampata bella. - E si lasciò trasportare, pieno di fiducia all'ospedale, dove morì!

Non vorrei parlare del *17* che nella cabala è il numero della disgrazia, ma non posso trattenermi dal citare qualcuna delle graziose trovate che si riferiscono a questo numero. Esso è stato fatale a Napoleone III, il quale nacque nel 1808 e $1 + 8 + 0 + 8 = 17$; sposò Eugenia di Montijo nel 1853 e $1 + 8 + 5 + 3 = 17$; Eugenia era nata nel 1826 e $1 + 8 + 2 + 6 = 17$. Diciassette anni dopo questo matrimonio Napoleone si arrendeva a Sédan e cadeva il secondo impero francese.

Quando i posteri si occuperanno di me (mi auguro di no), qualche sfaccendato farà forse delle analoghe scoperte e dirà che anche a me il *17* è stato fatale; difatti io son nato nel 1880 e $1 + 8 + 8 + 0 = 17$ e precisamente il 28 ottobre (notate: nell'annuale a ritroso della marcia su Roma) e la mia *17ª* conferenza alla Biblioteca filosofica l'ho fatta nell'a. 1938 e $1938 = 114 \cdot 17$.

Dove il misticismo si confonde con la superstizione è specialmente in certe disposizioni in quadro di alcuni numeri interi, che furono dette dapprima *tavole mistiche* e poi *quadrati magici*. È con questi, può dirsi, che s'inizi l'*Aritmetica magica*, fondata essenzialmente sull'addizione.

Per *quadrato magico* di ordine n o, semplicemente, di n (n intero) si suole intendere un quadrato diviso in n^2 caselle quadrate, eguali, in ciascuna delle quali sia collocato un numero, in maniera che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna e diagonale sia sempre la stessa (la cosidetta *costante magica*). Per brevità parlerò dei quadrati magici ordinari, dove i numeri delle caselle sono i primi n^2 numeri interi a partire da *1*.

La costante mlagica di un tale quadrato di n è $n(n^2 +1)/2$.

Essi erano noti verso il 1000 agl'Indiani e agli Arabi, che li consideravano come dotati di virtù misteriose, e li usavano come talismani od amuleti contro il malocchio, la peste ed altre malattie. Pare sia stato MOSCHOPOULOS, nel 1420, a farli conoscere in Europa, e furono in voga nel Medio Evo presso gli astrologhi che cercarono di spiegarne le proprietà per mezzo degli astri. Così per CORNELIO AGRIPPA (1486-1535) in *De occulta philosophiae libri tres* (Anvers 1531, Köln 1533) il quadrato magico di *1* simboleggia l'eternità; l'inesistenza del quadrato magico di *2*, cioè con *4* caselle, indica l'imperfezione dei quattro elementi: aria, acqua, terra e fuoco; i *7* quadrati magici degli ordini da *3* a *9* rappresentano i sette pianeti allora conosciuti.

Fin da ragazzi abbiamo imparato a costruire un quadrato magico di *3*. Sono *7* i quadrati magici di *3*, e si ottrengono tutti da un solo per rotazione attorno al centro o per ribaltamento; eccone uno:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

I quadrati magici di *4* sono *880* e furono tutti determinati da FRÉNICLE [1]). Sono stati più recentemente studiati e classificati dal Dottor PROMPT [2]). Di essi voglio ricordarne uno che pare sia il più antico, ma in ogni modo è il più celebre, perché figura in una incisione in rame del 1514, dovuta ad ALBERTO DÜRER, intitolata *Melencolia*:

[1]) Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris, a. 1676, a. 1693.

[2]) *Recherches analytiques sur les carres magiques*, Paris 1917.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

La data dell'incisione figura nelle due caselle centrali dell'ultima riga. L'incisione è un celebre grottesco, che ispirò a TEOFILO GAUTHIER i seguenti versi:

> Sans ordre autour de lui mille objets sont épars;
> ce sont des attributs de sciences et d'arts,
> la regle et le marteaux, la sphère emblématique,
> le sablier, la cloche et la table mystique.
> . . . .
> Une chauve-souris qui d'un donjon s'envole
> porte écrit sur son aile ouverte en banderolle:
> MÉLANCOLIE.

Veramente il pipistrello porta scritto sull'ala aperta: *Melencolia* con evidente errore ortografico, e la stessa tavola mistica presenta un errore grossolano: v'è un *2* al posto del *9*, cosicchè il *2* figura due volte, ciò che altera in modo banale il misticismo, per così dire, della tavola. Il Dürer era non solo un valente pittore, incisore ed architetto, ma anche un buon matematico; pare sia stato allievo di SCIPIONE DAL FERRO a Bologna. Ed allora come si spiega quello errore? Io me lo spiego in modo semplicissimo: è stato fatto ad arte, come l'errore ortografico, per significare maggiormente il disordine, la noncuranza, l'indolenza propria delle persone malinconiche! Un secolo dopo, e precisamente nel 1612, si pubblicava a Lione l'opera di BACHET: *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, in cui si dava una regola grafica, detta delle terrazze, per costruire un quadrato magico d'ordine dispari qualunque. Nel 1693 il problema stesso era risolto per un numero pari di caselle da FRÉNICLE.

Ecco come si può costruire un quadrato magico di *4*: si scrivono nel quadrato diviso in *16* caselle i numeri da *1* a *16* incominciando dalla prima riga (inferiore o superiore) e poi passando successivamente alle altre. I numeri situati ai vertici del quadrato si lasciano al loro posto, e così pure i numeri delle quattro caselle di centro; ciascuno poi degli otto numeri rimanenti si scambia col suo simmetrico rispetto al centro del quadrato:

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Il quadrato che figura nell'incisione del Dürer si ottiene da questo per simmetria rispetto alle mediane.

Questo metodo si può estendere facilmente per la costruzione dei quadrati magici d'ordine multiplo di *4*; per quelli il cui ordine è il doppio di un numero dispari sono stati escogitati vari metodi, non però tanto semplici.

Fra le varie pubblicazioni che succedettero a quelle di FRÉNICLE vanno notate il *Traité des quarrés sublimes* di POIGNARD (Bruxelles, 1704), il *De quadratis magicis* di LEONARDO EULERO e l'opera di VIOLLE (1838) che porta questo titolo suggestivo: *Traité complet des carrés magiques pairs et impairs, simples et composés, à bordures, compatrtiments, chassis, équerre, etc. suivi d'une traité des cubes magiques*.

Non si creda che sul conto dei quadrati magici sia stata detta l'ultima parola. Il problema di maggior interesse per il matematico è di trovare un procedimento che dia tutti i quadrati magici di dato ordine. Studi in questo senso sono stati fatti dal MAILLET che ha posto a fondamento di una teoria generale dei quadrati magici la teoria delle sostituzioni su n elementi [1]) e dal MARGOSSIAN che, estendendo un elegante metodo di costruzione dovuto ad ARNOUX [2]) pei quadrati magici di ordine primo, dà un metodo generale, valido per qualsiasi ordine. Ma si ottengono così tutti i quadrati magici di dato ordine? E come si esprime la funzione di n che dà il numero dei quadrati magici d'ordine n? Il suo valore cresce con n in modo fantastico, ma con quale legge?

Come se questi formidabili interrogativi non bastassero, i Matematici si sono proposti di trovare quadrati di più profonda magìa, per es. i cosiddetti quadrati *panmagici* e i *satanici*.

I primi sono quelli in cui non solo sono *magiche* (cioé hanno per somma la costante magica) le righe, le colonne e le diagonali, ma anche le coppie di linee parallele alle diagonali e *complementari* (cioé di ordine

---

1) Mém. Acad. sc. Toulouse, s. 9, v. 6, a. 1894, p. 258; Quat. Iourn. v. 27, a. 1895.

2) G.ARNOUX: *Arithmétique grafique; Les Espaces arithmétiques hypermagiques* (Paris 1894).

k ed *n-k*). Si può dimostrare che esistono sempre quadrati panmagici di ordine *n* dispari, non multiplo di *3*; non è esclusa l'esistenza di quadrati panmagici di ordine pari o multiplo di *3*, ma non esiste alcun quadrato panmagico di ordine *3* o *6*. È stata trovata l'espressione generale dei quadrati panmagici di *4*, dei quali eccone uno:

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

È chiamato *satanico* un quadrato magico che resta tale sostituendo ai numeri una loro potenza di grado assegnato *k*. Per *k=2, 3, ...* essi sono detti *bimagici*, *trimagici*, ecc.

Un metodo ingegnoso per costruire quadrati bimagici è stato dato dal TARRY[1]) ; ma non posso parlarne per mancanza di tempo, come non posso dare un semplice esempio di quadrati bimagici perché ne esistono solo per ordini maggiori di *6*.

La costruzione dei quadrati satanici è collegata ad una spinosa questione: determinare due diversi sistemi di numeri interi tali che la somma dei termini del primo sia eguale a quella del secondo, e l'eguaglianza delle somme resti ove ai numeri si sostituiscano i loro quadrati, i loro cubi, ecc., sino ad un certo grado *k*. Tali sistemi si potrebbero dire *satanici al* k^{imo} *grado*; ma io non voglio la paternità di tale nomenclatura; li chiamerò *equitotali sino al grado k*.

Ed ora due domande:

Esistono sistemi equitotali sino al grado k, per ogni k assegnato, comunque grande?

Come si possono trovare due sistemi equitotali sino al grado k?

Quando ebbi conoscenza delle risposte a queste due domande ne fui talmente impressionato che per alcuni giorni non parlai di altro ai matematici che incontravo. Feci come un'inchiesta per conoscere l'opinione comune. Le risposte furono quasi tutte invariabilmente queste. Alla prima domanda: - Se pure esistono sistemi equitotali sino ad un certo grado *k*, com'è evidente per *k=1*, sembra impossibile che ve ne siano per un *k* assunto grande a piacere. Alla seconda domanda poi tutti si dimostrarono convinti della difficoltà di escogitare un procedimento per la

---

1) *Ass. franç. pour l'Avancement des Sciences, 1905.*

costruzione di sistemi equitotali sino ad un grado k assegnato, comunque grande.

Immaginate allora la sorpresa di tutti nel sentire che non solo esistono sempre tali sistemi, ma se ne possono costruire quanti se ne vogliono con un procedimento così facile da potersi insegnare ai ragazzi del ginnasio, se non proprio a quelli delle scuole elementari!

La sorprendente soluzione fu fatta conoscere da BARBETTE al Congresso di Grenoble del 1925 dell'*Association française pour l'avancement des Sciences*. Io non ho il bene di conoscere personalmente il BARBETTE, che sarà certo un matematico, oltre che colto, assai simpatico, ma il suo nome mi richiama l'aspetto di un personaggio dalla barbetta nera, a punta, dagli occhi sfavillanti e dal sorriso enigmatico.

Ecco la soluzione che il BARBETTE dà dell'enigma :

Considerati due diversi sistemi numerici dello stesso numero di termini, le cui somme siano eguali, per ottenere due sistemi equitotali sino al 2° grado, basta aggregare ai termini dell'uno quelli dell'altro addizionati ad uno stesso numero fisso diverso da zero. Partendo dai sistemi ottenuti con lo stesso procedimento si ricavano due sistemi equitotali sino al 3° grado; e così via.

Lo stesso BARBETTE commenta così la regola: *C'est un fait qui tient véritablement de la magie; c'est un tour de passe-passe!...*

Se si parte, ad es., dai sistemi equitotali sino al primo grado:

$$(3,\ 4),\ (2,\ 5),$$

prendendo per numero fisso *-3*, si hanno i due sistemi equitotali sino al 2° grado:

$$(3,\ 4,\ -1,\ 2), \qquad (2,\ 5,\ 0,\ 1)$$

o anche

$$(3,\ 4,\ -1), \qquad\qquad (5,\ 0,\ 1);$$

partendo da questi ed usando lo stesso numero fisso od un altro, si ottengono sistemi equitotali sino al 3°grado, e così via.

Se si parte dai due sistemi equitotali sino al 1° grado

$$(4,\ 5), \qquad (1,\ 2,\ 6),$$

aggregando lo zero al primo sistema (poiché occorre pareggiare il numero dei termini) e applicando la regola di BARBETTE due volte successivamente coll'assumere ogni volta per numero fisso *-3*, si arriva alla identità, analoga alla precedente:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$

che secondo alcuni è collegata al misterioso *numero nuziale* di cui parla PLATONE nell'8° libro della *Republica*.

Ma è necessario che io venga alla fine. E finisco con una storiella di Aritmetica che potrebbe essere detta, ora più propriamente, satanica perché v'interviene Satana in persona. L'ho tratta da un vecchio libro, ma l'ho modificata in qualche punto per renderla più attraente.

Un contadino doveva recarsi in città per pagare le tasse; ma non ha che la metà della somma che dovrebbe pagare, e si dispera invocando Satana.

Alla terza invocazione, Satana gli appare.

- Mi hai chiamato: che vuoi?

Il contadino rimane interdetto, ma poi l'invitante sogghigno del suo interlocutore, gli rivela il motivo della sua disperazione.

- Oh! - dice quello - ti tolgo io da ogni imbarazzo, se mi ascolti.

- Certo - risponde il contadino, per quanto malsicuro.

- Ebbene, vedi tu quel ponte laggiù?

- È proprio quello che devo passare per andare all'esattoria.

- E allora; stai a sentire: questa tasca dove tu tieni i denari (e Satana toccò la tasca col suo dito maledetto) gonfierà ogni volta che tu passi il ponte, in un senso o nell'altro, e verrà a riempirsi di denari in quantità doppia di quella che ogni volta vi si trova.

- Ad ogni passaggio del ponte?

- Proprio, come ti ho detto; non ti piace?

- Si - rispose il contadino, pensando che col fare la spola sul ponte si sarebbe arricchito.

- E allora d'accordo - dice Satana - Ma io desidero un piccolo compenso per il mio consiglio; mi darai soltanto *32* denari ad ogni passaggio del ponte.

Il contadino annuisce, e Satana aggiunge:

- Però io non posso venire a prendere questi *32* denari, perché ho molto da fare all'inferno; tu me li getterai ogni volta dal ponte. Ed una cosa ti dico: non ti fermare a contare i denari che si trovano nella tasca ogni volta che gonfia; io non potrò tollerare tale atto di sfiducia alla mia potenza. E così dicendo disparve.

Il contadino si affretta a raggiungere il ponte, e appena è all'altro capo oh meraviglia! la sua tasca è ben gonfia di denari, sì che può cavarne *32* e buttarli giù dal ponte per contentare Satana. Fatto ciò, torna indietro, tutto contento e, ripassato il ponte, trova la tasca rigonfiata e butta giù altri *32* denari; ripassa ancora il ponte e giù altri *32* denari, e così continua, finché dopo avere gettati ancora una volta dal ponte *32* denari si accorge che la tasca è rimasta vuota. Allora rifà di corsa il ponte, la tasca resta sgonfia e vuota. Il disgraziato non pensava che il doppio di zero è zero. Dopo tanti altri vani tenattivi, vinto dalla disperazione si buttava lui dal ponte!

Qui finisce la storiella; ma incomincia la Matematica. Quanti denari aveva in principio il contadino? Per il profano sarebbe questa una domanda satanica; per il matematico un semplice scherzo. Denotando con x

il numero dei denari, egli trova che dopo n passaggi del ponte, il contadino resta con

(1) $$2^n x - 2^5 (2^n - 1) \text{ denari.}$$

Questo numero è zero per

$$x = 2^{5-n} (2^n - 1)$$

e il secondo membro è intero soltanto per

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

e in corrispondenza

$$x = 16, 24, 28, 30, 31.$$

Poichè, stando al racconto, il contadino potè buttare il denaro a Satana più di tre volte, egli aveva in principio 30 denari o 31.

Si noti che l'espressione (1) può scriversi così:

$$x + (2^n - 1) (x - 32),$$

e perciò essa è sempre uguale ad x se $x=32$, è maggiore di x e crescente con n per $x>32$, mentre è minore di x e decrescente per $x<32$; sicchè se il contadino avesse avuto in tasca almeno 32 denari, si sarebbe arricchito; possedendone di meno, doveva rovinarsi, come si rovinò.

Il problema è divertente, ma quanto istruttivo! Esso mette magnificamente in rilievo la potenza del calcolo algebrico, che dà tutto, anche quello che non si chiede.

L'Algèbre - dice D'ALEMBERT - *est généreuse, elle donne souvent plus qu'on ne lui demande*.

È con simili questioni attraenti che si è svolta la scienza dei numeri. Uscita dalla mistica platoniana, essa brilla nei tà Ariθhmetixà di DIOFANTO ALESSANDRINO, nei problemi enunciati in versi dell'*Antologia palatina*, nel *Liber abaci* di LEONARDO PISANO, nelle ricerche di FERMAT e di EULERO, ed assurge ai più alti fastigi con GAUSS ed altri grandi matematici moderni.

Alle questioni attraenti è legato il successo dell'insegnamento della Matematica. Non bisogna dimenticarlo. Gli antichi ci furono in ciò sommi maestri.

Era più lieta
Urania un dì quando le Grazie a lei
il gran peplo fregiavan.

EULERO e tanti altri matematici hanno amato ed apprezzato al di sopra delle altre le questioni puramente curiose e dilettevoli.

«La loro natura intellettuale - dice il BERTRAND - non è diversa da «quella che si riscontra nelle più belle scoperte di fisica matematica o di «meccanica. Effusione della stessa luce, esse son nate dagli stessi principi «e mettono in moto le stesse facolté; non si potrebbero proscrivere o «diminuire le une senza indebolire e compromettere le altre. La Scienza «non può essere suddivisa».

È anche questa l'opinione dei moderni pensatori matematici. Il problema di mantenere l'unità della Scienza è uno dei maggiori problemi da cui dipendono le sorti della cultura.

Ciò che affascina nella Scienza, ciò che può dirsi vi sia di magico in essa è quello che scaturisce, semplice e limpido, dal suo carattere di universalità: è ciò che si afferma e rimane più a lungo nel perpetuo divenire della Scienza. I veri e grandi maghi della Scienza sono coloro che attendono a sviluppare tale carattere di universalità e ad applicarlo per il maggior beneficio degli uomini. La Scienza dei numeri che dagl'interi creati da Dio è ascesa alla concezione degli infiniti e degli infinitesimi del Calcolo sublime, ha bene questo carattere di universalità; unitela alla tecnica e avrete i più grandi prodigi. Gli eletti che dalla volontà divina sono chiamati a compierli appartengono all'umanità intera.

Oggi l'Italia e il mondo celebrano l'annuale della nascita del maggiore dei maghi della Scienza: GUGLIELMO MARCONI. È per il grande genio di Lui che oggi il naufrago, affidando alle onde ultra corte l'S.O.S., sa che il suo grido di soccorso va in tutto il mondo, a tutti gli uomini, sa che ora è l'intera umanità il suo prossimo. È per questo grande Genio che lo Statista, il Condottiero può, in momenti decisivi, far sentire la sua voce, il suo pensiero, il suo mònito a tutto il suo popolo, ma anche a tutti i popoli Egli sa che così la sua parola può affratellare e riuscire anche a salvare la pace del mondo.

Si deve al genio immortale di GUGLIELMO MARCONI, che fu pure animato da alta, cattolica Fede, se oggi la voce del Sommo Pastore, chiamante tutti all'unico Ovile e benedicente, può raggiungere gli estremi lembi della terra.

La Scienza, è vero, non potrà darci mai l'ultimo perché, in quanto essa è un'emanazione dello spirito umano che aspira incessantemente a congiungersi al suo Creatore; vi sarà sempre una parete - ha detto MUSSOLINI - su cui sta scritto in caratteri luminosi: DIO. È a questa parete che noi oggi rivolgiamo gli occhi ringraziando la Divina Bontà di avere fatto nascere in Italia un così grande benefattore dell'umanità; oggi alla Somma Sapienza chiediamo riverenti ed umili, di concederci di poter leggere ancora, sulle altre pareti, vergate da mano italiana, le soluzioni di altre numerose incognite.

INDICE DEI NOMI