La storia della Matematica per la didattica della Matematica. Cosa può insegnarci Archimede?

Giuseppe Gentile
Dipartimento di Matematica – Università di Messina
Contrada Papardo, Salita Sperone, 31 – 98166 Messina
E-mail: gentile@dipmat.unime.it

Sommario. L'intento di queste note è quello di mettere su uno stesso piano di interesse il lavoro del ricercatore e quello dell'insegnante di matematica, di colui cioè che volge lo sguardo in avanti, verso le frontiere della disciplina, e di colui che lo volge all'indietro, verso l'organizzazione della materia. Lo strumento utilizzato per mettere in evidenza questo aspetto è quello che fa uso della storia a fini didattici, nel tentativo di far rivivere all'alunno la problematica da cui un concetto viene fuori, con tutto il suo carico di indecisioni e ripensamenti e senza nascondere i tentativi, a prima vista strani, di trovare una soluzione ad un problema. Sono queste due tematiche, cioè la genesi dei concetti e i tentativi di risoluzione, quello centrali nel presente lavoro. A tal fine, si è partiti da un aspetto riscontrato in Archimede e ritrovato più volte ed in varie forme in diverse epoche e in diversi contesti, cioè quello della compartecipazione del momento euristico della scoperta e di quello rigoroso della dimostrazione; tale reciproco apporto dei due momenti viene messo discusso sia dal punto di vista storico che epistemologico per poi mettere in luce come tali osservazioni storico-epistemologiche consentano di fornire alcuni interessanti suggerimenti nell'ambito della didattica.

1. Come e perché la storia può essere utile alla didattica.

Nel presente lavoro si vuole tentare di confrontare la linea evolutiva del pensiero umano sul lungo periodo (filogenesi) e quella su scala individuale (ontogenesi), innestando le relative considerazioni all'interno di un ben delimitato campo di indagine; infatti, che i due percorsi abbiano dei punti in comune è stato argomento già analizzato dalla psicologia (soprattutto dalla psicologia dell'età evolutiva) e pertanto qui non si vuole ribadire un concetto già espresso; l'obiettivo del presente lavoro è invece quello di fornire un contributo nella stessa direzione, ma da un altro punto di vista, mostrando come il sorgere, l'evolversi ed il perfezionarsi di concetti e strumenti matematici abbia notevoli somiglianze sia dal punto di vista filogenetico che ontogenetico[1]. Partendo da questa ipotesi è chiaro che acquisire una informazione dal punto di vista dello sviluppo storico può fornire uno spunto nell'ambito dello sviluppo del singolo individuo e con ciò trovare la sua naturale applicazione nei processi di insegnamento-apprendimento e quindi nella didattica.
Il punto di partenza delle nostre considerazioni è costituito da alcune osservazioni tratte da ambiti e studi diversi ma che, come cercheremo di riassumere brevemente[2], hanno un denominatore comune. Cominciamo dagli studi di Piaget[3] nell'ambito della psicologia dell'età evolutiva in cui lo studioso svizzero teorizzava una linea evolutiva rappresentata da quattro periodi (senso-motorio, pre-operatorio, delle operazioni concrete, delle operazioni formali) e da quel processo di assimilazione ed accomodamento che prevedeva, tra l'altro, il formarsi di strutture *provocate* dall'esperienza e che a loro volta consentono di dare significato a quella esperienza[4].

---

[1] Qui peraltro non si vuole affermare che i due livelli siano perfettamente sovrapponibili, ma è innegabile che essi abbiano un certa somiglianza soprattutto, come cercheremo di mettere in luce, nella genesi e nella successiva sistematizzazione dei concetti e delle strategie risolutive: prendendo in prestito il linguaggio della geometria, potremmo dire che i due livelli sono simili ma non uguali.
[2] Per approfondimenti sulle tematiche di cui si tratterà vedi le relative note.
[3] Per ulteriori approfondimenti sulle tesi piagetiane si veda ad esempio il classico J. PIAGET, *L'epistemologia genetica*, Sagittari Laterza.
[4] Così ad esempio si esprime Piaget: "gli oggetti e le loro leggi non possono essere conosciuti che grazie a quelle delle nostre operazioni che sono applicate loro a questo fine e che costituiscono il quadro dello strumento d'assimilazione che permette di raggiungerli" (PIAGET, *op. cit.*, p. 115)

Ci sembra che quanto affermato da Piaget sul piano psicologico, trovi il suo corrispettivo nelle osservazioni che, sul piano filosofico, vengono proposte dal filosofo neokantiano Cassirer; questi infatti riprende le tesi kantiane dell'esistenza delle *forme*, ma se ne discosta nel momento in cui afferma che esse non sono *a priori*, ma sono frutto di una evoluzione culturale. In effetti le geometrie non-euclidee avevano minato alla base l'assunto kantiano delle forme sintetiche a priori e Cassirer, pur tenendo fede alle tesi kantiane sull'esistenza delle forme, deve supporre che queste non siano a priori ma che per il loro formarsi l'esperienza (anche se in questo caso è una esperienza che potremmo chiamare filogenetica) giochi un ruolo primario: è in tal senso che Cassirer parla di *forme simboliche*[5].
D'altra parte ciò non può non ricordare le riflessioni che, sul piano più squisitamente matematico, sono state fatte soprattutto da Poincaré[6]: basti pensare, ad esempio, a come nella formazione del concetto di spazio, della sua euclidicità e della dimensione stessa, abbia un ruolo fondamentale proprio l'esperienza visiva, tattile e motoria del movimento, della sua invertibilità e della sua composizione[7].
La differenza fra Cassirer da una parte e Piaget e Poincaré dall'altra risiede nella scala temporale usata; mentre infatti il primo ha una visione che possiamo riferire ad un piano più dilatato nel tempo, non individuale, ma collettivo e quindi di carattere più marcatamente culturale, gli altri due parlano di esperienze individuali e attinenti anche al piano più propriamente biologico: in breve mentre Piaget e Poincaré traggono delle conclusioni su un piano ontogenetico, Cassirer arriva alle stesse idee ma su un piano filogenetico[8]. Ma il filo comune che lega teorie ed ambiti così lontani è l'aver teorizzato uno sviluppo della conoscenza che, da un piano puramente esperienziale, passa ad un successivo momento di formalizzazione di tale esperienza.
Da questo punto di vista, cioè guardando alla genesi dei concetti matematici, l'analogia fra percorso soggettivo e percorso storico ci è sembrata molto forte; molto spesso, infatti, l'uso di tecniche e strumenti matematici ha vissuto una prima fase che potremmo definire ingenua, e solo in un secondo momento si sono susseguiti i tentativi di giustificare quei procedimenti che fino a quel punto erano stati usati con una certa disinvoltura. Qui noi vogliamo dare un contributo in tale senso partendo da quanto abbiamo già messo in luce su alcuni aspetti della scienza ellenistica e di Archimede in particolare. Successivamente faremo vedere come alla stessa problematica sia intimamente legato un problema di carattere epistemologico messo in luce da Heyting all'interno della corrente intuizionista. Infine, come anticipato, cercheremo di applicare le osservazioni tratte da questi due contesti (storico ed epistemologico) in ambito didattico, trasportando le conoscenze acquisite dai percorsi storici (cioè su larga scala) alle conoscenze di quelli individuali (su piccola scala).

---

[5] Per alcuni approfondimenti sulle posizioni e le idee del filosofo tedesco vedi ad esempio E. CASSIRER, *Filosofia delle forme simboliche*, La Nuova Italia. Inoltre è da sottolineare come le tesi del filosofo neokantiano siano state riprese ed utilizzate da Panofsky in un contesto apparentemente molto lontano quale è quello della prospettiva, che viene appunto intesa da Panofsky come un prodotto culturale che desse coerenza geometrica alle rappresentazioni spaziali; a tale proposito si veda E. PANOFSKY, *La prospettiva come forma simbolica ed altri scritti*, Feltrinelli, 1961.

[6] Per ulteriori approfondimenti si può consultare ad esempio POINCARÉ, *La scienza e l'ipotesi*, Signorelli, 1963.

[7] Ad esempio così si esprime Poincaré a proposito dell'oggetto di studio della geometria: "La geometria […] non si occupa in realtà dei solidi naturali, essa ha per oggetto di studio certi solidi ideali assolutamente invariabili, che ne sono soltanto una immagine semplificata e lontanissima. La nozione di questi corpi ideali è creata completamente dal nostro spirito e l'esperienza non è che una occasione che ci determina a farla venir fuori." (POINCARÉ, *op. cit.*, pp. 53-54)

[8] In una comunicazione che il prof. Migliorato presenta in questo stesso convegno verrà presa in esame la medesima questione usando una scala temporale ancora più larga e mostrando come anche il passaggio dal *mito* alla *scienza* può essere spiegato alla luce della ipotesi già espressa di un passaggio da una fase informale e pre-scientifica, tipica della mitologia, ad una pre-formale, già all'interno della scienza ma in termini non del tutto formalizzati, ed infine formalizzata, che rappresenta la veste finale di tale processo; per maggiori dettagli su tale questione si veda MIGLIORATO, *Spiegazione e predizione. Dalla rappresentazione mitica alla rappresentazione scientifica*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 15-17 settembre 2005.

2. Un "caso" storico.

Il punto di partenza del nostro discorso può essere individuato in alcune recenti pubblicazioni[9] in cui, insieme al prof. Migliorato, ci siamo occupati della matematica e, più in generale, della scienza ellenistica; da tali lavori emerge chiaramente come in questo periodo Euclide e, dopo di lui ed in maniera appena diversa, Archimede siano fautori di un radicale cambiamento del quadro di riferimento all'interno di una *pratica di risoluzione di problemi* cioè di quello che Khun chiama, per definizione, *paradigma*[10].

Solo per tentare di riassumere quali siano i termini in cui ci siamo occupati di tale problematica, abbiamo individuato nel modo di procedere di Euclide un diverso punto di partenza rispetto ad una tradizione che verosimilmente può essere ricondotta a quanto si riscontra nel pensiero di Aristotele; se infatti secondo il filosofo di Stagira le premesse di una teoria che volesse definirsi scientifica dovevano essere *vere, prime, immediate, più note della conclusione, anteriori ad essa, e che siano cause di essa*[11], in Euclide tali caratteristiche vengono a mancare in almeno due momenti: il primo negli *Elementi*, dove anzi la non autoevidenza del 5° Postulato, notata fin dall'antichità e sommata alla filiazione di Euclide alla filosofia aristotelica, diede come risultato la secolare critica al postulato stesso; il secondo nell'*Ottica*, o meglio nel confronto fra l'assiomatica ivi presente e quella degli *Elementi*: se, infatti, in quest'ultima il modello geometrico è continuo, nell'*Ottica* il postulare che le rette "abbiano distanza fra loro"[12] porta ad un modello geometrico discreto[13].

Quel che si può chiaramente evidenziare è un carattere non realistico dei postulati stessi (ché altrimenti non si potrebbe spiegare, ad esempio, la diversa scelta fatta nell'*Ottica* rispetto agli *Elementi*, tanto più che le due scelte sono mutuamente contraddittorie); da ciò nasce allora la domanda: cosa può far decidere per l'accettazione di un postulato? Quel che abbiamo riscontrato in Euclide è uno spostamento in avanti del momento di validazione dei postulati stessi; se infatti secondo Aristotele le premesse dovevano essere "vere", in Euclide la validità delle premesse appare legata ai risultati che da tali postulati possono essere ricavati o, per usare un'espressione cara a Duhem[14], finalizzata a *salvare i fenomeni*. È in questo senso che nei lavori citati sono state usate le espressioni *paradigma euclideo* e *rivoluzione euclidea*.

Tale visione è ancora più accentuata in Archimede; vorremmo a tal proposito citare solo due esempi, rinviando ai già citati lavori per un approfondimento della tematica. Il primo lo possiamo trarre da *I galleggianti*: il primo libro di tale opera si apre con una premessa in cui si suppone che le linee di forza agenti su un liquido in riposo convergano al centro della Terra, mentre nel secondo lo scienziato siracusano si mette (senza peraltro nessun preavviso) nell'ipotesi che tali linee siano parallele fra di loro[15]. Il secondo è legato al cosiddetto Postulato di Eudosso-Archimede: sia nella *Quadratura della parabola*, che in *Sulla sfera e sul cilindro* e nel *Metodo*, Archimede giustifica

---

[9] R. MIGLIORATO, *La Rivoluzione Euclidea e i "Paradigmi Scientifici" nei Regni ellenistici*, Incontri Mediterranei, 11, 2005, pp. 3-24; G. GENTILE, R. MIGLIORATO, *Euclid and the scientific thought in the third century B.C.*, Ratio Mathematica, 2005, pp. 37-64 (consultabile anche sul sito www.apav.it/ratiomathematica.htm); G. GENTILE, R. MIGLIORATO, *Archimedes between tradition and innovation*, di prossima pubblicazione.

[10] In particolare vogliamo qui precisare che, sebbene abbiamo qui mutuato il termine *paradigma* da Kuhn, l'accezione che qui si vuole dare è un po' più libera di quella riscontrabile ne *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, in particolare nel poscritto – 1969 alla seconda edizione del 1970; più precisamente, qui ci riferiremo al termine paradigma nel senso in cui appare nella prima edizione dello stesso scritto; per maggiori dettagli vedi R. MIGLIORATO, *La Rivoluzione Euclidea e i "Paradigmi Scientifici" nei Regni ellenistici*, Incontri Mediterranei, 11, 2005, p. 7.

[11] ARISTOTELE, *An. Post.*, 71 b 20-22.

[12] EUCLIDE, *Ottica*, Postulato 1.

[13] Qui si dà per scontato che un'interpretazione fisica e realistica dei "raggi" nell'*Ottica* di Euclide sia improponibile. Per maggiori dettagli vedi F. INCARDONA, *Euclide. Ottica. Immagini di una teoria della visione*, 1996; e MIGLIORATO-GENTILE, *op. cit*.

[14] P. DUHEM, *ΣΟΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ*, Annales de Philosophie Chrétienne.

[15] Per una spiegazione dei motivi che hanno portato Archimede ad una diversa scelta, vedi il paragrafo successivo; per un ulteriore approfondimento vedi MIGLIORATO-GENTILE, *op. cit*.

l'assunzione di tale lemma citando una lunga serie di risultati che tramite quel lemma è stato possibile ottenere[16].
Le caratteristiche appena accennate permettono di collocare il siracusano all'interno di quello che abbiamo chiamato "paradigma euclideo"; ma c'è un elemento in Archimede che lo fa apparire come un innovatore rispetto ad una precedente tradizione ed è di questo aspetto che ci occuperemo ora in maniera più approfondita. Infatti, per la questione di cui ci stiamo occupando, è sembrato interessante il modo con cui lo scienziato siracusano ha cercato di conciliare, affiancare e far interagire i due momenti caratteristici della sua opera: come comunicato dallo stesso Archimede ad Eratostene nella lettera introduttiva al *Metodo*, il primo momento è quello dell'euristica, della scoperta, il secondo è quello della rigorosa dimostrazione con il metodo di esaustione dei risultati già precedentemente intuiti. Particolarmente significativo, al riguardo, appare il seguente passo tratto proprio dal *Metodo*[17]:

Perciò anche di quei teoremi, dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione, intorno al cono e alla piramide, [cioè] che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide [è la terza parte] del prisma aventi la stessa base e altezza uguale, non piccola parte [del merito] va attribuita a Democrito, che per primo fece conoscere questa proprietà della figura suddetta, senza dimostrazione.

Infatti, il classico e rigoroso metodo di esaustione, dovuto con molta probabilità ad Eudosso, richiedeva che in qualche modo si conoscesse già la figura campione con cui confrontare le varie figure inscritte e circoscritte alla figura data; questa difficoltà poneva seri problemi all'uso stesso del metodo di esaustione che, se lasciato da solo, sarebbe rimasto del tutto infruttuoso. In sostanza il metodo di esaustione non è un metodo di indagine, ma solo un metodo di dimostrazione di un risultato già in qualche modo intuito, ma non ancora provato[18].
Cosa suggerisce tutto ciò ai fini del nostro discorso? Riusciamo a trovare un filo conduttore che spieghi non solo il procedere archimedeo, ma anche il procedere della matematica in genere? Possiamo trovare una chiave di lettura per spiegare il nascere, l'evolversi ed il consolidarsi dei concetti matematici?
Per tentare di rispondere a tali interrogativi, iniziamo col dire che già prima di Archimede era stata fatta una chiara distinzione tra *opinione* (*δόξα*) e *scienza* (*επιστήμη*): basti pensare alle argomentazioni di Platone (riscontrabili ad esempio nel *Menone* o nella *Repubblica*) o ai già accennati tentativi di Aristotele di ancorare le varie conoscenze a *premesse vere, prime, immediate*; il dibattito si allarga e nel contempo si va precisando proprio in epoca ellenistica dove lo scontro tra accademici (dogmatici) e stoici (scettici) verte proprio su cosa poter considerare come *sapere*. Il problema di fondo rimane comunque quello di dare stabilità, e quindi certezza, alle conoscenze. La cultura occidentale si può ritenere figlia proprio di questo tipo di approccio; noi oggi, infatti, riteniamo di aver acquisito una conoscenza solo nel momento in cui riusciamo ad inserirla in un apparato ipotetico-deduttivo capace di garantirne ai nostri occhi la validità; ora, se è vero che la stabilità dei risultati è un passo imprescindibile della scienza, è altrettanto vero che sarebbe un errore dimenticare da dove sono nate quelle conoscenze, con quante indecisioni o con quanta disinvoltura venivano usati strumenti matematici che, se sul piano formale lasciavano qualche

---

[16] Ad esempio nella *Quadratura della parabola* Archimede afferma: *Anche i geometri anteriori a noi si son serviti di questo lemma: infatti se ne sono serviti per dimostrare che i cerchi stanno tra loro in ragione duplicata dei diametri, e che le sfere stanno tra loro in ragione triplicata dei diametri, e ancora che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della piramide e uguale altezza, e che qualunque cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e altezza uguale, ciò assumendo un lemma simile a quello suddetto.* (A. FRAJESE, *Opere di Archimede*, 1974, pp. 481-482).
[17] FRAJESE, *op. cit.*, p. 572.
[18] La circostanza che proprio il *Metodo* sia rimasto sconosciuto fino ai primi del Novecento, quando cioè Heiberg ne ritrovò una copia in un palinsesto di Costantinopoli, ha fatto ritenere per molto tempo che Archimede avesse voluto celare agli altri studiosi il suo metodo d'indagine. Ciò è invece un ulteriore segno della grandezza del siracusano e della sua piena coscienza delle potenzialità dell'interazione fra euristica ed esaustione.

dubbio, sono stati propulsori di tutta una serie di ricerche che successivamente sono state capaci di validarne i risultati. Quel che qui si vuole affermare è di non dimenticare l'insegnamento archimedeo: è il connubio di euristica e dimostrazione che ha dato i maggiori e più brillanti risultati. E quello di Archimede non è l'unico caso; anzi, il susseguirsi di questi due momenti è quasi una costante in tutta la storia della matematica; è proprio alla luce di questa ipotesi che possono essere viste alcune problematiche sorte all'interno della matematica (e non solo) ed altrimenti inspiegabili.
Stiamo pensando alla sistemazione del calcolo infinitesimale iniziata da Cauchy che cercava di riportare nell'alveo ipotetico-deduttivo il calcolo differenziale che si era già sviluppato in maniera che potremmo definire pre-formale: sia i metodi che Leibniz usava con molta disinvoltura che le considerazioni di Newton sulle *ultime ragioni* apparivano non giustificabili da un punto di vista formale, anche se consentivano di descrivere molto bene i fenomeni che grazie a quel calcolo si volevano investigare. Bisogna arrivare fino al secolo scorso con Robinson, grazie all'assiomatizzazione dell'analisi stessa e la conseguente creazione dell'analisi non-standard, per avere una teoria che fornisse agli "*infinitesimi leibniziani ... un proprio status logico pienamente soddisfacente*"[19].
O ancora al Bombelli che usava e considerava l'unità immaginaria *i* come un *trucco* non giustificabile sul piano formale, ma che consentiva di risolvere le equazioni di terzo grado; solo in successivamente ci si è interessati a dare una veste formale che giustificasse l'uso di quel trucco, con tutte le conseguenti teorie ed applicazioni che, come spesso accade, non solo hanno raggiunto lo scopo che si erano prefissate ma sono andate ben oltre, riuscendo a trovare applicazioni nei più svariati ed insospettabili contesti.
O infine ad un più recente libro di Stephen Hawking in cui l'astrofisico inglese si occupa del tentativo di unificazione della fisica. Descrivendo i tentativi che si stanno facendo in questa direzione e le problematiche insite in tale tipo di approccio, Hawking parla della presenza di quantità infinite che verrebbero fuori dalla equazione di Einstein $E = mc^2$ e, nel descrivere alcune teorie che stanno cercando di porre rimedio a questo problema, così si esprime[20]:

In modo piuttosto simile, quantità infinite apparentemente assurde compaiono in altre teorie parziali, ma in tutti questi casi gli infiniti possono essere cancellati per mezzo di un procedimento chiamato rinormalizzazione. Questo procedimento implica la cancellazione degli infiniti per mezzo dell'introduzione di altri infiniti. ***Benché questa tecnica sia matematicamente piuttosto dubbia, pare che in pratica funzioni****, ed è stata usata con queste teorie per fare delle predizioni che si accordano con le osservazioni con un grado di precisione straordinario.*

Soprattutto di quest'ultimo passo ci preme sottolineare la straordinaria somiglianza con la già citata lettera di Archimede: cambiano gli attori, le epoche, i contesti, le problematiche, ma rimane inalterata la volontà di spingersi oltre, usando metodi non del tutto soddisfacenti sul piano formale, ma pienamente soddisfacenti sul piano pratico. Probabilmente stiamo solo aspettando il Cauchy del nostro tempo! Forse, sotto questo aspetto, Archimede ha raggiunto un livello superiore rispetto agli altri studiosi da noi qui citati, avendo mostrato una piena coscienza della coesistenza, del significato e della necessità dei due momenti, quello della scoperta e quello della dimostrazione.
Nel prossimo paragrafo aggiungeremo un ulteriore elemento di analisi, cercando di confrontare queste considerazioni tratte dalla storia con un'osservazione a nostro avviso illuminante tratta dall'ambito epistemologico e che sarà l'oggetto del prossimo paragrafo.

[19] M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, v. II, p. 1416 (il capitolo da cui è tratta la citazione è a cura di Alberto Conte).
[20] S. HAWKING, *Dal big bang ai buchi neri. Breve storia del tempo*, Biblioteca Universale Rizzoli, 1995, p. 180.

3. Un “caso” epistemologico.
L’ambito in cui ci muoveremo in questo paragrafo è quello della matematica intuizionista, ed in particolare alcune osservazioni di Heyting relativamente alla posizione intuizionista nei confronti dell’assiomatica. Crediamo sia necessario fare un breve accenno alle problematiche che erano centrali all’inizio del secolo scorso, almeno per inquadrare le motivazioni storiche che hanno contrapposto formalisti ed intuizionisti.
All’inizio del XIX secolo, come è ben noto, il mondo matematico cercava di venire fuori da quella che è passata alla storia come crisi dei fondamenti nata soprattutto con la comparsa delle antinomie all’interno della teoria degli insiemi sulle cui basi si reggeva, in quel momento, l’interno edificio matematico. Non è questa la sede per discutere i vari approcci portati avanti con l’intento di dirimere la questione, ma vorremmo quantomeno accennare a quelli che, per il nostro discorso, sono più significativi[21].
In primo luogo il tentativo di Hilbert (e della corrente formalista che da lui prese corpo) che vedeva la causa del sorgere delle antinomie nell’aspetto semantico della matematica; in sostanza, secondo il matematico tedesco, per evitare le antinomie bisognava spogliare i termini matematici dei loro significati mantenendone solo l’aspetto sintattico: in altre parole bisognava considerare la matematica esclusivamente come un linguaggio[22].
In secondo luogo, ed in contrapposizione al formalismo nasce, a partire dalle idee di Brower sviluppate successivamente da Heyting, l’approccio intuizionista; contrariamente al formalismo, qui un fatto matematico viene considerato come alinguistico e lo scopo del linguaggio è solo quello di ricordare e riferire ad altri una certa costruzione mentale; in altre parole bisogna fare distinzione tra matematica e linguaggio matematico, poiché quest’ultimo non è capace di creare da sé oggetti matematici. Tali osservazioni, dovute principalmente a Brower, vanno a confluire in una osservazione sull’assiomatica. Su questo punto infatti Heyting propone una doppia valenza dell’uso dell’assiomatica: da una parte esiste una funzione dell’assiomatica che possiamo definire *creativa*, dall’altra ne esiste una che potremmo chiamare *descrittiva*. Heyting accetta per l’assiomatica solo la sua funzione descrittiva, ma non può accettare, alla luce del punto di vista intuizionista, la sua funzione costituiva.
Consideriamo ad esempio l’assiomatica dei numeri naturali di Peano; essa formalizza una pratica millenaria sui numeri naturali e viene giudicata (a ragione) una buona assiomatizzazione dei numeri naturali; perché? La risposta che solitamente viene fornita è che al suo interno è possibile ritrovare e dimostrare proprietà **già** note dei numeri naturali. In altre parole, il giudizio su una assiomatica, la validazione dei suoi postulati viene riposta nel più o meno alto grado di rispondenza rispetto ad una precedente (e pertanto pre-formale) pratica. Ma, a ben vedere, senza quella pratica quale sarebbe stato il parametro in base al quale giudicare *buona* l’assiomatica di Peano? Non è forse la stessa problematica cui abbiamo fatto cenno a proposito di Euclide e di Archimede? Non si tratta anche in questo caso di “salvare il fenomeno” della pratica aritmetica? Credo che la risposta non sia poi molto diversa da quella che Archimede propone più volte nei confronti dell’accettazione o meno del Postulato che porta il suo nome: permette di dare fondamento logico ad un pratica pre-esistente e pre-formale che ha portato a notevoli risultati e che pertanto ha avuto successo.
L’osservazione ha una straordinaria somiglianza con l’ipotesi da noi già avanzata a proposito del periodo ellenistico in cui il nuovo “paradigma euclideo” avrebbe avuto lo scopo di “salvare i fenomeni”, consentendo di costruire dei “modelli” all’interno dei quali fosse possibile ritrovare (ma con un diverso grado di certezza e su basi solide) risultati **già** scoperti: è alla luce di questa ipotesi che in Euclide si può leggere negli *Elementi* il tentativo di salvare la precedente pratica geometrica, e nell’*Ottica* il tentativo di creare un modello della visione (dando origine a quella che oggi si chiama ottica geometrica); così come in Archimede si può trovare un tale punto di vista nei

[21] Per approfondimenti vedi GENTILE, *Il formalismo e le altre risposte alla crisi dei fondamenti. Complementi alle lezioni di Epistemologia della Matematica*, pubblicazione on line all’indirizzo ww2.unime.it/alefzero.
[22] Sulle implicazioni di carattere filosofico di tale punto di vista, nonché sulle conseguenze dei teoremi di Gödel che di fatto decretarono la fine del sogno formalista di dimostrare la coerenza assoluta dell’aritmetica vedi GENTILE, *op. cit.*

Galleggianti dove nel primo libro Archimede rende conto della sfericità del superficie del mare, mentre nel secondo si occupa del galleggiamento di solidi di varie forme (ma in particolare del paraboloide di rotazione), creando un modello per lo studio del galleggiamento di alcuni corpi dando così origine a quella che oggi si chiama idrostatica[23]. Ma è alla luce della stessa ipotesi che possiamo spiegare il criterio di giudizio nei confronti di una certa assiomatica.
Tornando ad Heyting, la sua osservazione viene corroborata da un'altra che spiega il suo rifiuto della funzione costitutiva dell'assiomatica. L'esempio è quello della teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel; cosa formalizza, infatti, la teoria ZF? Se tenta di formalizzare l'insiemistica preformale allora è contraddittoria, se invece non formalizza la ZF, cosa formalizza? C'è il rischio che si tratti di una teoria **vuota**? I dubbi, a ben vedere, nascono dall'assunto (implicito in Heyting) che l'assiomatica debba avere solo una funzione descrittiva e pertanto che essa, volendo usare il nostro linguaggio, *debba salvare qualcosa*.
A noi pare che la domanda sia sempre la stessa che ci siamo già posti in altro contesto, con altri attori, in diversi periodi storici e relativamente ad altre problematiche: *il formale formalizza il pre-formale, ma senza il pre-formale cosa formalizza il formale*?

4. Ripercussioni didattiche e conclusioni.

A questo punto del nostro discorso sembra che le applicazioni sul piano didattico siano quasi ovvie; abbiamo infatti visto come i concetti matematici (e non solo) abbiano una genesi su un piano pre-formale e che solo in un secondo momento essi vengono inseriti in un apparato formale che dia loro una veste universale e pertanto controllabile: tutto ciò, s'intende ad un livello filogenetico (storico-epistemologico). Quel che ora faremo è trarne qualche breve suggerimento riportando queste riflessioni su di un piano ontogenetico e quindi spendibili nella didattica. In altre parole, quanto detto a proposito del passaggio dal pre-formale al formale, sia dal punto di vista storico che da quello epistemologico, quali ricadute ha sul piano dei processi di insegnamento-apprendimento? Quale quadro di riferimento ci evidenzia? Che suggerimenti ci fornisce?
Dietro l'insegnamento di Archimede, che da tale prospettiva appare il più significativo, appare quantomeno sensato prevedere una fase di indagine di una situazione problematica all'interno della quale gli alunni si pongano i problemi che sono stati gli stessi affrontati *storicamente* dalla matematica, lasciando la più ampia scelta nella fase risolutiva: è solo in un secondo momento, quello del consolidamento delle conoscenze che il momento formale deve essere inserito, ma non come una inutile forzatura (che non verrebbe mai compresa dall'alunno), ma come una riconosciuta necessità; quella stessa necessità che abbiamo rilevato in Archimede, che abbiamo ritrovato in svariati contesti storici ed anche, a livello epistemologico, nelle argomentazioni di Heyting[24].
In fondo è questo che Archimede ci ha lasciato in eredità e che noi dobbiamo imparare a non dimenticare: valorizzare il momento euristico, ma farlo sempre seguire dal momento formale perché il primo è la *sostanza* del secondo ed il secondo è la *garanzia* del primo.
Storia, epistemologia e didattica sono così qui poste su uno stesso livello ed accomunate dalla stessa problematica, quella di intrecciare organicamente e significativamente il momento della scoperta e quello del suo consolidamento. La risposta a tale problematica inerente l'interazione dei due momenti è stata la stessa in tutti e tre i casi; i due momenti sono ugualmente importanti: il primo per avviare un'indagine su una certa problematica (ciò che poi dà anche significato al secondo), quest'ultimo per dare garanzia e stabilità ai risultati ottenuti dal primo. Dimenticare o relegare in secondo ordine il primo non consentirebbe di comprendere appieno le problematiche che il successivo momento formale cerca di consolidare; non valorizzare il momento formale, d'altro

[23] Si noti che le chiglie delle navi hanno la forma studiata con particolare approfondimento da Archimede, il che conforta l'ipotesi che il modello non era fine a se stesso ma che lo scienziato siracusano potesse avere in vista anche la possibile applicazione anche in ambito militare.
[24] Per un punto di vista su una scala temporale ancora più larga, in cui viene trattato il passaggio dal *mito* alla *scienza*, si veda il già citato articolo R. MIGLIORATO, *Spiegazione e predizione* ….

canto, lascerebbe il momento della scoperta in uno stato di fragilità. Da questo punto di vista si trovano accomunati sia il ricercatore che l'insegnante di matematica: entrambi hanno lo scopo di indagare (o stimolare ad indagare) una problematica, servendosi dei metodi più svariati, audaci e a prima vista non giustificabili, in breve non ancora formalizzabili all'interno dell'apparato già esistente; ma entrambi devono far seguire questa prima fase dalla dimostrazione rigorosa, come necessario ordinamento e garanzia dell'euristica, come momento di consolidamento delle conoscenze e che dia loro lo status di "scienza", per evitare il rischio che queste, lasciate a se stesse, ci facciano ritornare al "mito".

BIBLIOGRAFIA

[1] E. CASSIRER, *Filosofia delle forme simboliche*, La Nuova Italia.

[2] P. DUHEM, *ΣΟΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ*, Annales de Philosophie Chrétienne, VI, pp. 113-139, 277-302, 352-377, 482, 512, 561-592.

[3] A. FRAJESE, *Opere di Archimede*, UTET, 1974.

[4] G. GENTILE, *Il formalismo e le altre risposte alla crisi dei fondamenti. Complementi alle lezioni di Epistemologia della Matematica*, pubblicazione on line tra i materiali didattici sul sito ww2.unime.it/alefzero.

[5] G. GENTILE, R. MIGLIORATO, *Euclid and the scientific thought in the third century B.C.*, Ratio Mathematica, 2005, pp. 37-64 (on line sul sito www.apav.it/ratiomathematica.htm).

[6] G. GENTILE, R. MIGLIORATO, *Archimedes between tradition and innovation*, di prossima pubblicazione.

[7] S. HAWKING, *Dal big bang ai buchi neri. Breve storia del tempo*, Biblioteca Universale Rizzoli, 1995.

[8] F. INCARDONA, *Euclide. Ottica. Immagini di una teoria della visione*, Di Renzo, 1996.

[9] M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1991.

[10] T. KUHN, *The structure of scientific revolution*, International Encyclopaedia of Unified Science and The University of Chicago Press, Chicago and London, 1962; second edition, with the "Postscript – 1969", 1970.

[11] R. MIGLIORATO, *La Rivoluzione Euclidea e i "Paradigmi Scientifici" nei Regni ellenistici*, Incontri Mediterranei, 11, 2005, pp. 3-24.

[12] R. MIGLIORATO, *Spiegazione e predizione. Dalla rappresentazione mitica alla rappresentazione scientifica*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 15-17 settembre 2005 (on line sul sito math.unipa.it/~grim/convaicmgrim_05.htm).

[13] E. PANOFSKY, *La prospettiva come forma simbolica ed altri scritti*, Feltrinelli, 1961.

[14] J. PIAGET, *L'epistemologia genetica*, Sagittari Laterza, 2000.

[15] H. POINCARÉ, *La scienza e l'ipotesi*, Signorelli, 1963.