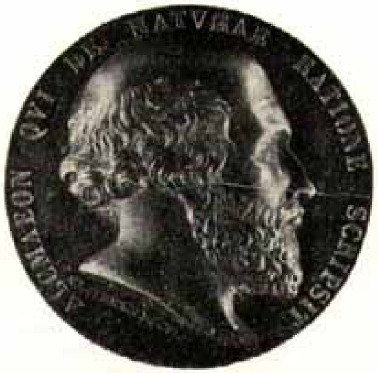
Argomentare e congetturare attraverso la teoria elementare dei numeri

Aldo Scimone



Alcmeone di Crotone

(da una illustrazione Parigina)

"Delle cose visibili e delle invisibili solo gli dèi hanno conoscenza certa ($\sigma\alpha\phi\eta\nu\varepsilon\iota\alpha$); gli uomini possono soltanto congetturare."

Alcmeone (VI sec. A.C.)

G.R.I.M.
Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche
Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo
aldo.scimone@libero.it
Web-site: http://math.unipa.it/~grim/.

Indicazioni programmatiche sul Nucleo di processo: argomentare e congetturare

(Dal documento Matematica 2001- U.M.I.)

Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)

Il nucleo di processo “argomentare e congetturare” caratterizza le attività che preparano alla dimostrazione, ossia a una delle attività che contraddistinguono il pensiero matematico maturo, quale sarà acquisito negli anni successivi della scuola secondaria superiore.

Competenze specifiche

Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l’osservazione;
Produrre semplici congetture;
Verificare le congetture prodotte **testandole su casi particolari;**
Validare le congetture prodotte, sia **empiricamente**, sia mediante argomentazioni, sia **ricorrendo a eventuali controesempi;**
Descrivere oggetti matematici anche in modo carente o sovrabbondante, con riferimento alle caratteristiche ed alle proprietà osservate;
Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni.

Dal Documento Matematica 2003 U.M.I.

ARGOMENTARE, CONGETTURARE, DIMOSTRARE

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	Storia

Con un problema la classe si sveglia!

Per abituare gli allievi ad argomentare e congetturare è necessario proporre problemi.

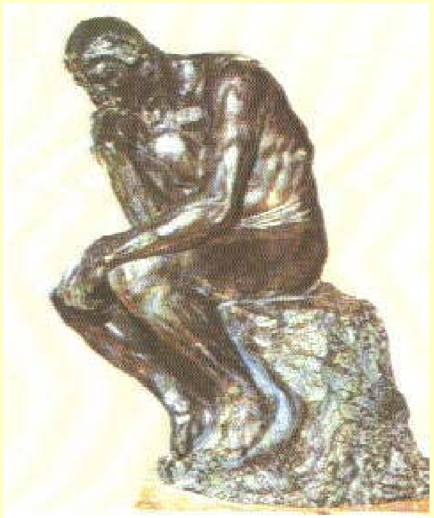
Si formano spontaneamente piccoli gruppi di lavoro, alcuni studenti sono concentrati al massimo, si scambiano idee, si riempiono le pagine dei quaderni di calcoli e di disegni, si grida alla vittoria, **si argomenta e si congettura anche ad alta voce**, ci si illumina o ci si rabbuia, ma ciò che di importante accade è che viene a crearsi un'atmosfera di ricerca, di invenzione, di sfida salutare per giungere alla soluzione.
Insomma, **nella classe si riproduce in maniera *plurivoca* quella che è l'attività solitaria del matematico impegnato nel risolvere un problema.**

Una delle attività principali del Matematico

Argomentazione

Configurazione → Relazione → Dimostrazione

Congettura



Il ruolo della Teoria dei numeri per argomentare e congetturare

Harold Davenport (1907-1969)

Aritmetica superiore
Zanichelli, 1994.

"La teoria dei numeri è generalmente considerata la "più pura" branca della matematica pura. Sono certamente molto poche le sue dirette applicazioni ad altre scienze, ma con queste ultime tuttavia condivide un aspetto, ossia l'ispirazione che si può trarre dalla sperimentazione, che in questo caso consiste nel mettere alla prova teoremi che potrebbero essere veri in generale, mediante esempi numerici. Tale sperimentazione, pur necessaria al progresso di ogni parte della matematica, ha svolto nello sviluppo della teoria dei numeri un ruolo più importante che altrove; e ciò poiché in altri rami della matematica l'evidenza che ne deriva è troppo spesso frammentaria e fuorviante."

•Semplicità dell’enunciato di molti problemi e congetture

Esempi:

1) Può la somma di due quadrati essere un quadrato?

2) Può la somma di due cubi essere un cubo? Può la somma di due quarte potenze essere una quarta potenza? In generale, può la somma di due potenze *n*-esime essere una potenza *n*-esima?

3) Quali numeri sono somme di due quadrati?

4) Un numero pari è sempre esprimibile come somma di due numeri primi?

5) Esistono infiniti numeri primi gemelli, cioè, numeri primi che differiscono di 2, come 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31?

Esempi di problemi

1. Dati due numeri interi *a* e *b*, qual è il più piccolo valore positivo che si può ottenere mediante una combinazione lineare di *a* e *b*, cioè, sommando un multiplo di *a* a un multiplo di *b*?

Per affrontare il problema *sperimentalmente*, un primo passo potrebbe consistere nel considerare i numeri ottenuti dalla formula

$$ax + by$$

quando si sostituiscono a x e y tutti i possibili valori interi. Supponiamo, per esempio, che sia $a = 42$ e $b = 30$. Allora, dietro consiglio dell'insegnante, un alunno potrebbe cominciare a considerare alcuni valori dell'espressione $42x + 30y$, come i seguenti:

y \ x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
– 3	– 216	– 174	– 132	– 90	– 48	– 6	36
– 2	–186	– 144	– 102	– 60	– 18	24	66
– 1	– 156	– 114	– 72	– 30	12	54	96
0	– 126	– 84	– 42	0	42	84	126
1	– 96	– 54	– 12	30	72	114	156
2	– 66	– 24	18	60	102	144	186
3	– 36	6	48	90	132	174	216

Una prima semplice osservazione è che ogni numero della tabella è divisibile per 6, ma ciò è banale, perché, essendo 42 e 30 divisibili per 6, ogni numero della forma $42x + 30y = 6\,(7x + 5y)$è un multiplo di 6. Più in generale, è chiaro che ogni numero della forma $ax + by$ è divisibile per (a, b).

Una seconda osservazione, alquanto più sorprendente, è che il massimo comun divisore di 42 e 30, cioè 6, compare nella tabella.

Ciò può indurre l'allievo a domandarsi se tale circostanza sia fortuita oppure se segnali una proprietà fondamentale. Ulteriori valori di $42x + 30y$ possono condurlo a congetturare che la soluzione al problema propostogli sia proprio la seguente affermazione:

Il più piccolo valore positivo di *ax* + *by* è dato dal massimo comun divisore di *a* e *b*.

Dopo, viene il momento di dimostrare se tale affermazione sia vera o errata (è vera), ma in questa fase potrebbe anche il docente suggerire un possibile approccio dimostrativo (ve ne sono molti, ma didatticamente interessante mi sembra quello basato sull'algoritmo euclideo delle divisioni successive per determinare il MCD tra due numeri).

2. Quali numeri possono essere scritti come somma di due quadrati?

$\mathbf{5 = 2^2 + 1_2}$ $\mathbf{10 = 3^2 + 1^2}$ $\mathbf{65 = 7^2 + 4^2}$

Se consideriamo 19 notiamo che nessuna delle differenze:

$19 - 1^2 = 18$ $19 - 2^2 = 15$ $19 - 3^2 = 10$ $19 - 4^2 = 3$

è un quadrato. Anche in questo caso si potrebbe cominciare con una tavola di valori e cercare delle forme da cui trarre ispirazione:

$\mathbf{1 = 1^2 + 0^2}$	11 NO	21 NO	31 NO	$\mathbf{41 = 4^2 + 5^2}$
$\mathbf{2 = 1^2 + 1^2}$	12 NO	22 NO	$\mathbf{32 = 4^2 + 4^2}$	42 NO
3 NO	$\mathbf{13 = 2^2 + 3^2}$	23 NO	33 NO	43 NO
$\mathbf{4 = 0^2 + 2^2}$	14 NO	24 NO	$\mathbf{34 = 3^2 + 5^2}$	44 NO
$\mathbf{5 = 1^2 + 2^2}$	15 NO	25 NO	35 NO	$\mathbf{45 = 3^2 + 6^2}$
6 NO	$\mathbf{16 = 0^2 + 4^2}$	$\mathbf{26 = 1^2 + 5^2}$	$\mathbf{36 = 0^2 + 6^2}$	46 NO
7 NO	$\mathbf{17 = 1^2 + 4^2}$	27 NO	$\mathbf{37 = 1^2 + 6^2}$	47 NO
$\mathbf{8 = 2^2 + 2^2}$	$\mathbf{18 = 3^2 + 3^2}$	28 NO	38 NO	48 NO
$\mathbf{9 = 0^2 + 3^2}$	19 NO	$\mathbf{29 = 2^2 + 5^2}$	39 NO	$\mathbf{49 = 0^2 + 7^2}$
$\mathbf{10 = 1^2 + 3^2}$	$\mathbf{20 = 2^2 + 4^2}$	30 NO	$\mathbf{40 = 2^2 + 6^2}$	$\mathbf{50 = 5^2 + 5^2}$

Dalla tabella si possono ricavare due liste:

Numeri somma di due quadrati	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.
Numeri non somma di due quadrati	3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38,39, 42, 43, 44, 46, 47, 48.

Dopo un'attenta osservazione si può constatare che molti dei numeri che hanno la forma $1 + 4k$ sono somma di due quadrati, ma con delle eccezioni, come 21 o 33. Però, se osserviamo solo i numeri primi, allora ci accorgiamo che **tutti** quelli della forma $1 + 4k$ (a meno del 2) sono somma di due quadrati.

Primi somma di due quadrati	2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197, 229.
Primi non somma di due quadrati	3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107, 127, 131, 151, 163, 167, 179, 191, 199, 211, 223, 227.

Ebbene, risultano tutti i primi della forma 1 + 4*k* (ad eccezione di 2) sempre somma di due quadrati, mentre non lo sono tutti quelli della forma 3 + 4*h*?

È valida questa congettura?

SI!

Essa, dimostrata, in realtà costituisce uno dei teoremi più belli e importanti di tutta la teoria dei numeri:

Ogni numero primo *p* che sia 2 o della forma 1 + 4*k* può essere espresso come somma di due quadrati.

Ma questo è solo l'inizio!

Infatti, la dimostrazione della congettura richiede alcuni strumenti teorici che sono fuori della portata di uno studente, ma in questo caso **ciò che risulta importante didatticamente è condurre l’allievo a saper riconoscere la forma dei primi che sono somma di due quadrati attraverso l’osservazione e l’esame di una tabella di valori, e questo non è poco!**

Perché, quindi, la teoria dei numeri può aiutare la ricerca didattica sull'argomentare e il congetturare?

I motivi sono diversi, come:

•Possibilità di creare più facilmente situazioni *adidattiche* (nel quadro teorico della Teoria delle situazioni di G. Brousseau) anche attraverso esempi storici di congetture e problemi aperti;

•Possibilità di organizzare l'attività didattica in classe nella forma di un laboratorio matematico, dato il carattere *sperimentale* della disciplina;

•Possibilità di testare la propria congettura in maniera diretta attraverso il calcolo numerico;

•Possibilità di confrontarsi in maniera più rapida con altri gruppi di lavoro o con altre persone che lavorano allo stesso argomento;

•Possibilità di produrre più facilmente dei controesempi.

In Italia già da alcuni anni vengono messe in atto ricerche in didattica della Matematica che sfruttano tali potenzialità della Teoria dei numeri. I risultati sono stati incoraggianti, per cui si spera che sempre più docenti di qualsiasi tipo di scuola possano cominciare a sfruttare il vasto campo di questa disciplina che, nelle parole del grande Gauss è e rimarrà sempre

La Regina della Matematica

Bibliografia

Nastasi P. - Scimone A., *Da Euclide a Goldbach. Storie di Uomini e Numeri*, Sigma Edizioni, Palermo, 2001.

Silverman H. Joseph, *A Friendly Introduction to Number Theory*, Prentice Hall, 2001.