Convegno di Didattica della Matematica
"Quali prospettive per la Matematica e la sua didattica"

Esperienze interattive tra laboratori SISSIS e attività in classe

di Carmelo Arena[1]

Piazza Armerina 16-19 sett. 2004

Carmelo Arena
Liceo Scientifico "Cannizzaro" - Palermo

Introduzione

Il funzionale coinvolgimento di docenti di scuole secondarie nelle SISSIS, nei vari ruoli di supervisori, docenti di insegnamenti, conduttori di laboratori di didattica e tutor per il tirocinio degli specializzandi, ha di fatto potenziato efficacemente il canale di comunicazione, tra mondo accademico e scuole pre-universitarie, relativamente ai saperi curriculari (specialistici e trasversali) e alle metodiche didattiche.

La mia contestuale attività nei due ambiti ha creato le condizioni ideali per un prezioso interscambio di esperienze di cui riporto le più significatve:

1) Rivisitazione delle curve celebri con Cabri géomètre

Lavoro realizzato in classe, risultato di un impegno sinergico tra tirocinanti e alunni di una terza scientifico

2) Analisi di alcuni fenomeni transitori

- **andamento di un liquido in condotto tra due vasi comunicanti,**
- **equilibrio termico di due corpi, comunicanti attraverso un terzo corpo, con diversa temperatura iniziale,**
- **carica e scarica di un condensatore**

Fenomeni studiati in classe e sperimentati in laboratorio di fisica e successivamente rielaborati dagli specializzandi SISSIS come applicazioni di Analisi Numerica

3) Determinazione di P con metodi statistici

Lavoro realizzato in aule SISSIS come applicazione di integrazione numerica, proposto agli studenti liceali nel corso del programma di statistica e probabilità

4) Cinematica e sezione aurea

Argomento significativo per la coesistenza armonica di molteplici aspetti scientifici, trattato sia nelle aule liceali che in quelle SISSIS.

°°°°°°°°°°°

Oggetto del mio intervento di oggi sarà la trattazione del 4° punto

CINEMATICA E SEZIONE AUREA

Una “storia” semplice,
sorprendentemente complessa

°°°°°°°°°°°

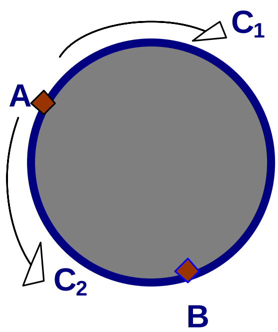
La sezione aurea è uno degli argomenti di matematica che da sempre ha affascinato gli studiosi, matematici e non, per la bellezza degli oggetti, naturali o manufatti, in cui essa è riscontrabile e stupefacenti sono gli aspetti numerici legati ad essa. Dalla “De divina proportione” di Luca Pacioli in poi, vastissima è la letteratura riguardante la sezione aurea, numerosa la varietà degli ambiti in cui essa è coinvolta, …..perfino nel gioco delle carte, vedi “*I numeri d’oro dal Partenone al bridge*”, un bell’articolo di Gaetano Corleo (Lettera Pristem).

Anche la fisica non sfugge a tale coinvolgimento, si pensi alla scienza delle vibrazioni e allo studio dei suoni.

Scopo del presente lavoro è quello di evidenziare che anche nella scienza del moto è presente la sezione aurea, infatti si dimostra che i più semplici moti, uniforme e uniformemente accelerato, sotto particolari condizioni, si intrecciano sorprendentemente con essa.

A tal fine si propone il seguente problema:

Su una pista circolare di lunghezza *L* due ciclisti partono in verso opposto dal medesimo punto A. Il primo ciclista procede con velocità costante, mentre il secondo viaggia di moto uniformemente accelerato partendo da fermo.



Sapendo che i due ciclisti si incontrano la prima volta in un punto B della pista e la seconda volta nel punto A da cui sono partiti, quant'è lungo il tratto AB percorso dal primo ciclista al momento del primo incontro?

Soluzione

Detti:

V_1 la velocità costante del primo ciclista;

T il tempo costante (periodo) impiegato dallo stesso per percorrere ogni giro completo;

a l'accelerazione costante del secondo ciclista,

affinchè i due percorrano lo stesso giro nello stesso tempo,
deve essere:

per il primo ciclista $L = V_1 T$

per il secondo $L = \frac{1}{2} a T^2$ da cui $a = \frac{2V_1^2}{L}$.

Indicati con x_1 e x_2 gli spazi generici percorsi dai due:

$$\begin{cases} x_1 = V_1 t \\ x_2 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2V_1^2}{L}\right) t^2 = \frac{(V_1 t)^2}{L} = \frac{x_1^2}{L} \end{cases}$$

Affinché i due ciclisti si incontrino in B deve essere $x_1 + x_2 = L$

ovvero

$$x_1 + \frac{x_1^2}{L} = L$$

pertanto

$$x_1^2 + Lx_1 - L^2 = 0$$

da cui

$$x_{1_1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}L$$

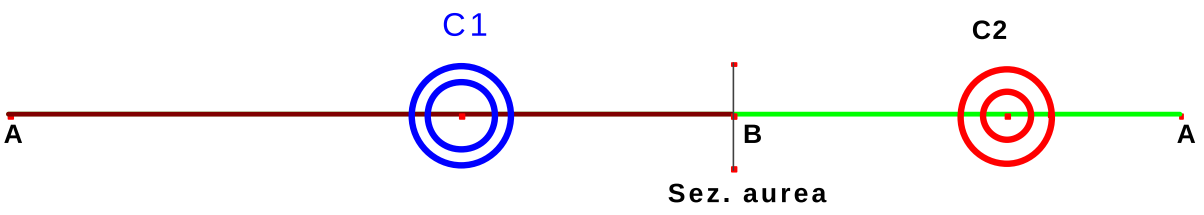
e

$$x_{1_2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}L$$

Considerata la soluzione positiva si osserva che lo spazio percorso dal primo ciclista al momento del primo incontro in B, con il secondo ciclista, è pari alla parte aurea della lunghezza L della pista, e poiché lo spazio percorso dal primo ciclista è proporzionale al tempo (viaggia di moto uniforme), anche il tempo t necessario per il primo incontro sarà la parte aurea del periodo T per percorrere un giro completo.

°°°°

Per il primo giro il problema si può semplificare visualizzando i due ciclisti che si muovono sopra un segmento pari alla circonferenza rettificata

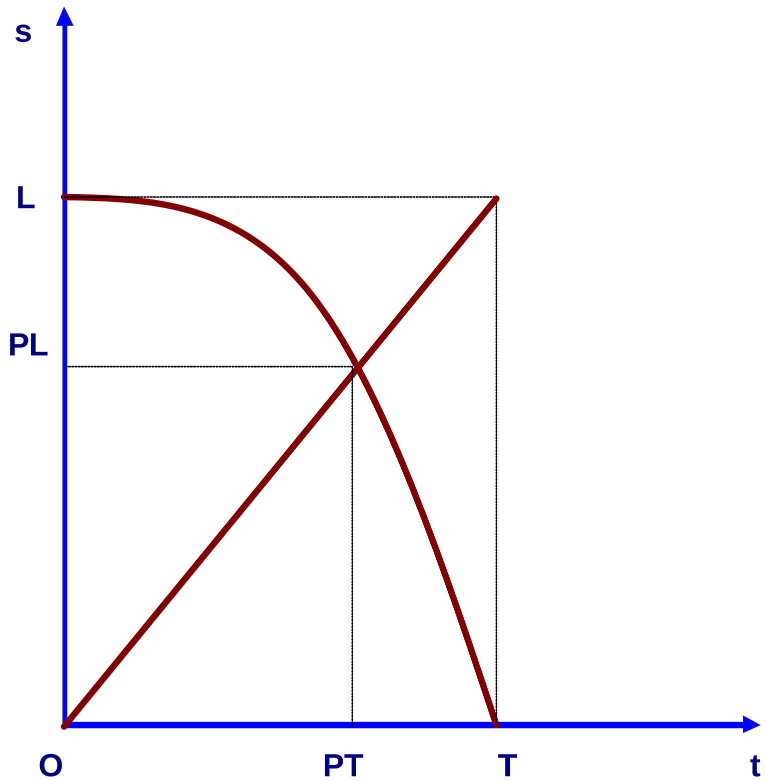


Il punto B, dove i due ciclisti si incontrano, individua la parte aurea di L, (se lo spazio percorso dal secondo è pari al quadrato dello spazio percorso dal primo fratto la lunghezza della pista.

L’INTERPRETAZIONE GRAFICA

Dal punto di vista grafico problema fornisce un’ interessante particolarità, infatti, se si rappresentano nello stesso piano cartesiano sOt le leggi orarie dei moti descritti dai due ciclisti, assumendo A come punto di riferimento per gli spazi e positivo il verso del moto del primo ciclista, si ha:

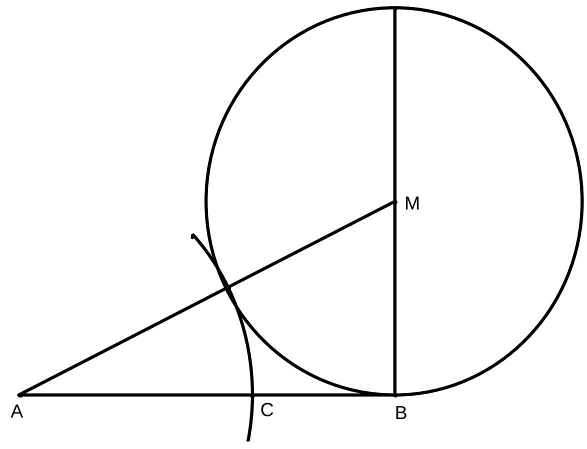
$$x_1 = V_1 t \qquad e \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2} a t^2 + L$$



La retta, rappresentante il moto uniforme, e la parabola, rappresentante il moto uniformemente accelerato, si incontrano in un punto le cui coordinate sono rispettivamente la parte aurea di L e di T.

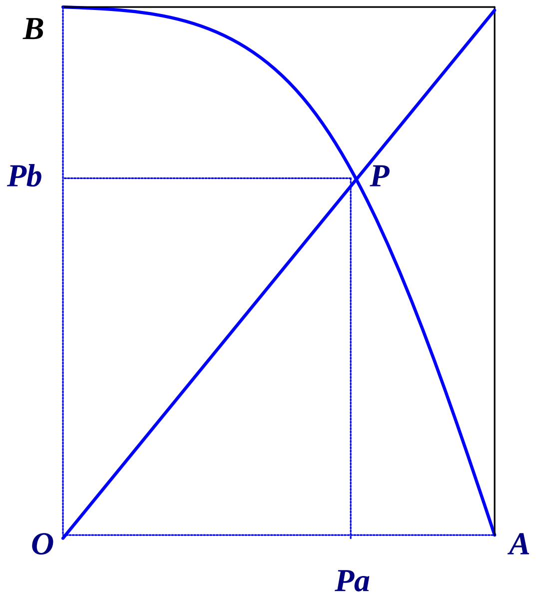
CONSEGUENZE

E'nota la costruzione grafica della parte aurea di un segmento,



ora i risultati precedentemente ottenuti consentono la risoluzione del problema seguente geometrico:

"*Dati due segmenti OA e OB, di lunghezza rispettiva a e b, determinare un procedimento grafico per determinare contestualmente la parte aurea di ciascuno di essi*".

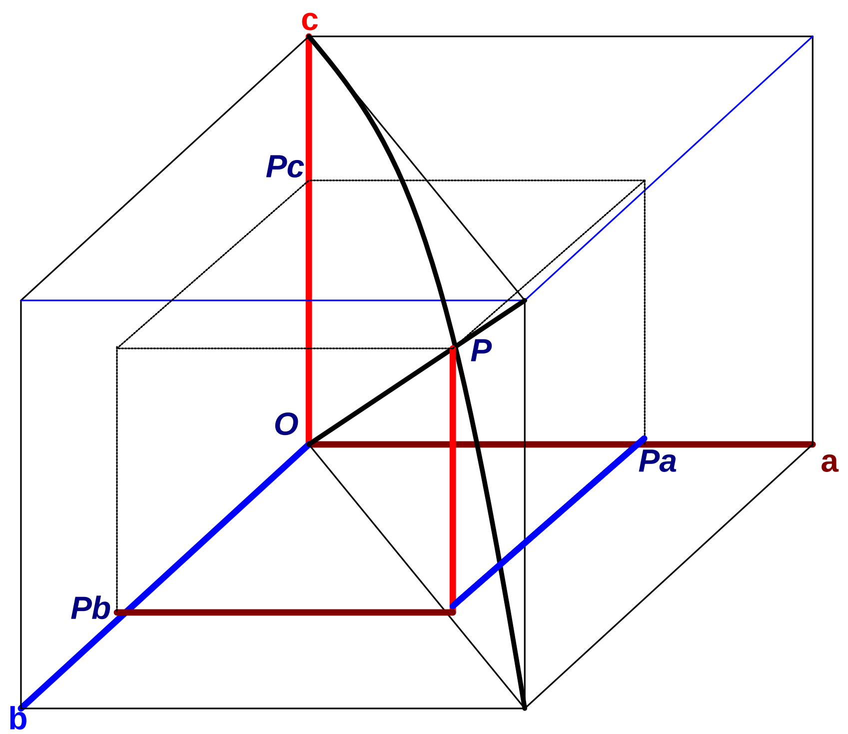


Costruzione

Nel rettangolo di lati a e b si inscriva l'arco di parabola avente il vertice coincidente con uno dei vertici del rettangolo e passante per il vertice opposto, si tracci la diagonale passante per gli altri due vertici del rettangolo, essa incontrerà l'arco di parabola in un punto P.

Le proiezioni di P sui lati del rettangolo individueranno la parte aurea di ciascuno di essi.

La costruzione è estensibile anche a tre segmenti



ALTRE CONSIDERAZIONI

Se i due ciclisti continuano a correre, oltre il primo giro, con le stesse modalità:

- **Dove si incontreranno successivamente?**
- **Si incontreranno altre volte nel punto di partenza A?**

°°°°

Là dove si incontreranno deve verificarsi la condizione:

$x_1 + x_2 = L,\ 2L,\ 3L\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$ **in generale** $x_1 + x_2 = kL$ **con** $k \in N$.

Per le considerazioni fatte precedentemente deve verificarsi:

$$x_1 + \frac{x_1^2}{L} = kL \qquad \text{da cui} \qquad x_1^2 + Lx_1 - kL^2 = 0$$

Le soluzioni sono

$$x_{1_1} = \frac{-1-\sqrt{1+4k}}{2}L \qquad \text{e} \qquad x_{12} = \frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}L\,. \qquad (*)$$

Considerando la positiva delle due soluzioni, si osserva che la quantità 1 + 4*k*, al variare di $k \in N$ genera una progressione aritmetica di numeri dispari di ragione 4 e può essere quadrato perfetto di un numero (ovviamente) dispari se è verificata la condizione:

$$1 + 4k = (2n + 1)^2 \qquad \text{con} \quad n \in N$$

da ciò segue $k = n^2 + n.$

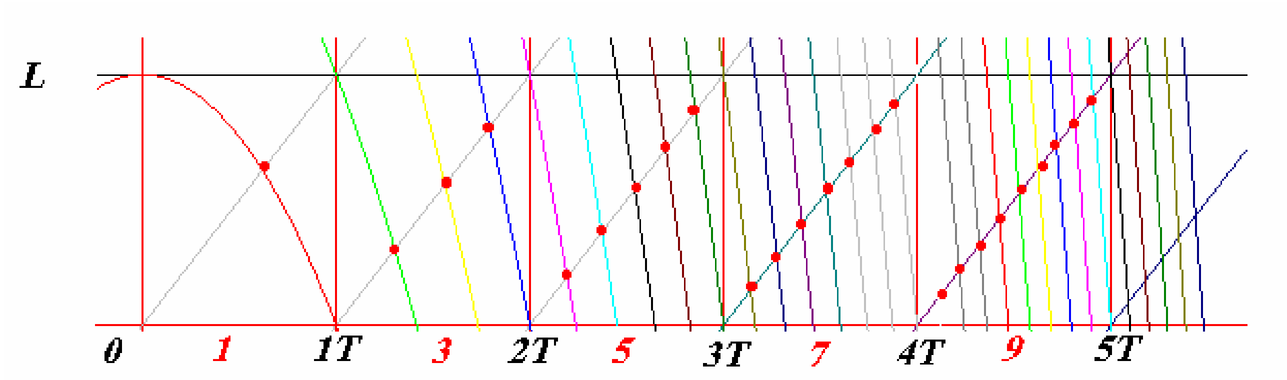
ovvero $k=n(n+1)$ ***prodotto di due interi consecutivi.***

Pertanto, in corrispondenza di tali valori di k , la (*) fornisce valori interi di *L* e quindi i due ciclisti si incontreranno in A (ciò avviene per ogni multiplo del periodo T).

Per altri valori di $k \neq n^2 + n$ i due ciclisti si incontreranno in punti diversi da A e il numero di questi incontri è sempre più elevato visto che il secondo ciclista viaggia con velocità sempre crescente.

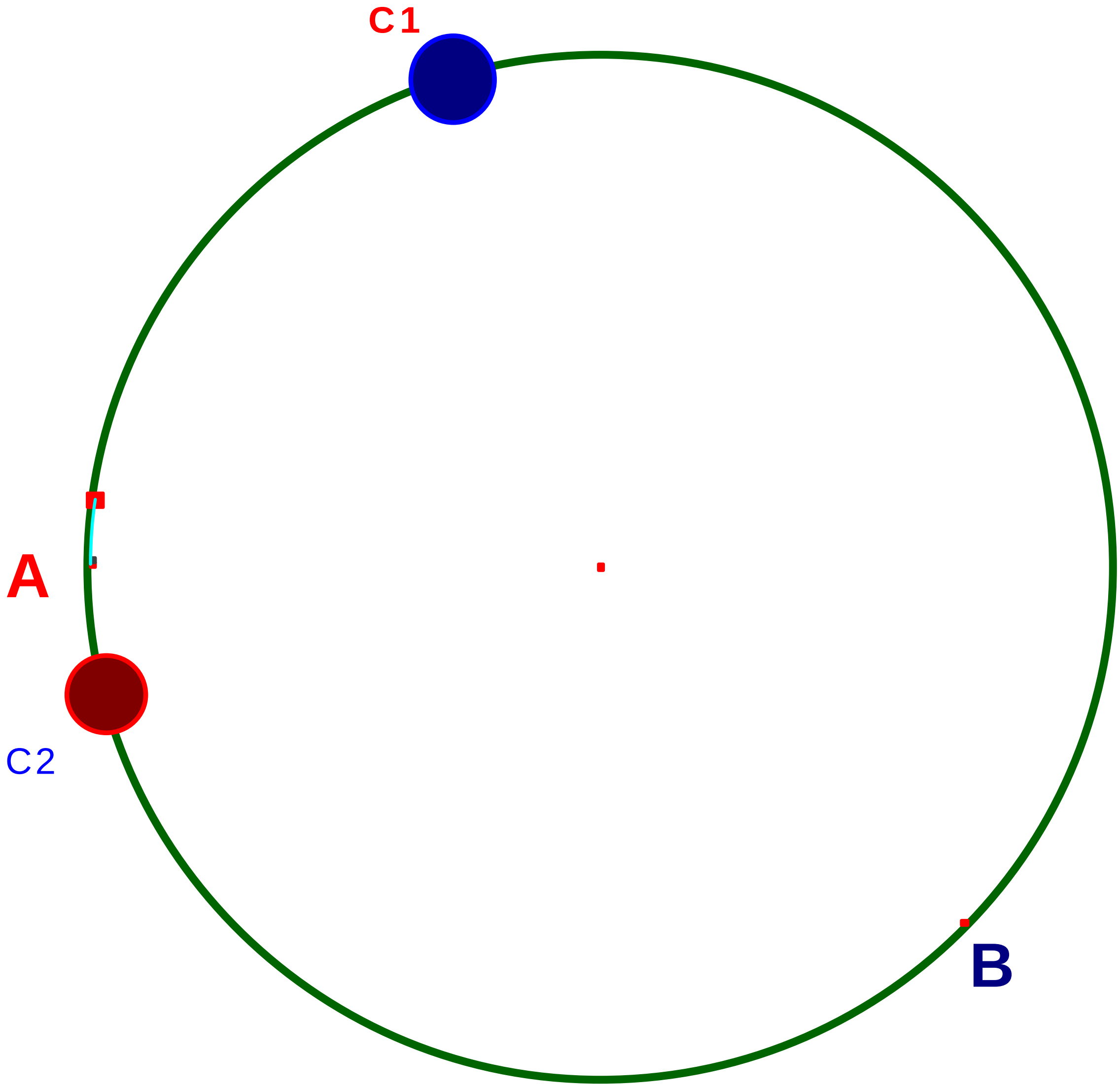
Si verifica che il numero degli incontri intermedi che avvengono in punti diversi da A segue la successione dei numeri dispari: 1, 3, 5, 7, 9,……altra sorpresa!

Rappresentazione grafica



Analisi numerica

k	$\frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}$	n° giri intermedi
1	0,618033989	1
2	1	
3	1,302775638	
4	1,561552813	3
5	1,791287847	
6	2	
7	2,192582404	
8	2,372281323	
9	2,541381265	5
10	2,701562119	
11	2,854101966	
12	3	
13	3,140054945	
14	3,274917218	
15	3,405124838	
16	3,531128874	7
17	3,653311931	
18	3,772001873	
19	3,887482194	
20	4	
21	4,109772229	



Il Cabri consente la simulazione del problema con la relativa animazione.

Interpretazione grafica delle soluzioni negative

Dell'equazione

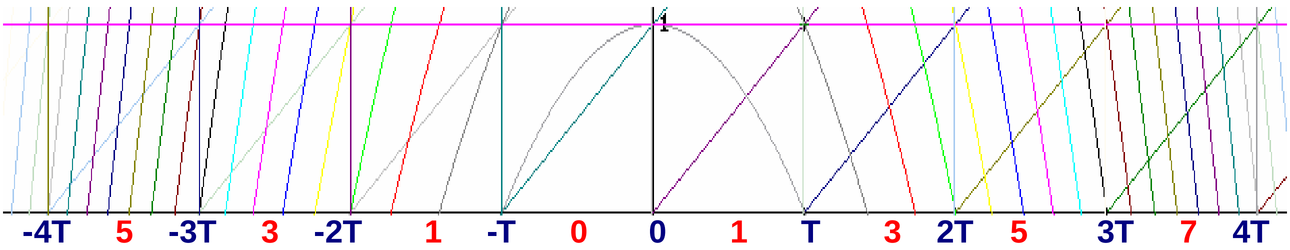
$$x_1^2 + Lx_1 - kL^2 = 0$$

è stata considerata soltanto la soluzione positiva $x_{12} = \dfrac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}L$ **,**

qual' è il significato fisico e geometrico della soluzione negativa

$$x_{12} = \frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}L \quad ?$$

la risposta si ottiene dall'analisi del grafico precedente, per valori di t < 0



si osserva che per t<0 i due ciclisti viaggiano nello stesso verso, per ogni periodo T si incontrano in A e gli incontri intermedi seguono la stessa legge determinata per t>o.

Conclusioni

L'argomento, proponibile agli studenti di una terza classe secondaria superiore, offre una grande varietà di spunti didattici e in diversi ambiti, infatti al "fatto" fisico, si intrecciano, in modo coerente e convergente, cinematica, sezione aurea, geometria analitica, calcolo numerico e. . . altro, fornendo del problema una visione unitaria e armonica.

L'utilizzo dello strumento informatico arricchisce la trattazione con la chiara e veloce rappresentazione degli aspetti grafici, numerici e dinamici.

Piazza Armerina 17 settembre 2004