La visione prospettica: dal modello fisico all'astrazione matematica

Angelo Bonura

Riassunto
Si illustrano gli elementi costitutivi di un percorso interdisciplinare da affrontare seguendo le strategie proprie della "didattica per problemi". Il percorso didattico riguarda il problema della percezione prospettica e potrebbe coinvolgere la fisica, la matematica, la biologia e l'arte. La novità della proposta sta nel fatto che il problema della prospettiva viene affrontato partendo da un modello fisico dell'occhio (lente convergente) e pervenendo successivamente all'astrazione geometrica (trasformazioni prospettiche). L'equivalenza tra l'approccio fisico e quello matematico viene dimostrata mediante una procedura geometrica. Si propone, inoltre, una simulazione Excel dell'immagine di oggetti geometrici generata da una lente, evidenziando, in particolare, un'interessante applicazione relativa alla generazione di coniche

Introduzione

In un precedente lavoro[1] vengono esposte le linee programmatiche di un percorso di ricerca e sperimentazione didattica interdisciplinare che, facendo leva sulla crescita della motivazione degli allievi, punta all'incremento dei livelli d'apprendimento nelle discipline quantitative.
In breve, l'idea che sta alla base di tale percorso di ricerca è la constatazione che gli scarsi livelli d'apprendimento degli allievi nelle discipline scientifiche siano da attribuire alla diffusa sensazione che la matematica, la fisica e, più in generale, tutte le discipline quantitative, abbiano una scarsa rilevanza ai fini della propria crescita personale e professionale, contrapposta ad un insegnamento di tali discipline poco motivante, in quanto prevalentemente orientato ai contenuti piuttosto che alla risoluzione di problemi concreti e significativi.

Si ritiene che una soluzione al problema della motivazione degli allievi passi attraverso la formulazione di curriculo di studi che veda le discipline tecnico scientifiche muoversi su percorsi sì indipendenti ma con periodici momenti di interazione su argomenti rilevanti da un punto di vista formativo, da affrontare seguendo approcci di tipo problematico[2,6] e utilizzando strategie motivanti[3,4,5].

La scelta di tali argomenti deve soddisfare alcuni requisiti[6]. Essi devono, innanzitutto, riferirsi a "fatti" noti, non avulsi dalle esperienze e conoscenze degli allievi, e che appaiano comprensibili, interessanti e non insormontabili, in modo che l'allievo possa facilmente riconoscere la natura problema sentendosi stimolato a fornire delle soluzioni.
Essi, inoltre, devono fornire un ampia rete di connessioni interdisciplinari e, se possibile, prevedere approcci risolutivi alternativi.
Essi, infine, devono essere significativi per i curricula delle singole discipline coinvolte, inserendosi armonicamente in essi e offrendo lo spunto per i successivi sviluppi della disciplina.

Nel presente lavoro si illustrano gli elementi costitutivi di un percorso interdisciplinare che soddisfa tutti i requisiti richiesti ed è passibile di una trattazione che segue il modello didattico suddetto.
Il percorso didattico riguarda il problema della percezione prospettica[7] e, nella sua versione più ampia, potrebbe coinvolgere la fisica, la matematica, la biologia e l'arte.

La novità della proposta sta nel fatto che il problema della prospettiva viene affrontato in modo inusuale partendo dal un modello fisico dell'occhio umano, vale a dire una lente convergente, e pervenendo successivamente all'astrazione geometrica, ossia alle trasformazioni prospettiche, mediante una semplice procedura geometrica che dimostra l'equivalenza tra le trasformazioni indotte da una lente convergente sulle coordinate di una sorgente puntiforme e una proiezione tra punti di due piani non paralleli rispetto ad un centro proprio di proiezione.
Il lavoro è suddiviso in tre parti. Nella prima parte si richiamano le formule che permettono di trasformare le coordinate di una sorgente puntiforme, posta davanti una lente convergente, nelle coordinate della sua immagine prodotta dalla lente. Nella seconda parte si ricavano le trasformazioni che consentono di costruire l'immagine di figure piane generata da una lente e si illustra una simulazione tramite foglio elettronico dell'immagine di oggetti estesi, evidenziando, in particolare, un'applicazione riguardante la generazione di coniche come immagine di una circonferenza.
Nella terza parte si dimostra, infine, l'equivalenza tra le trasformazioni indotte da una lente convergente e una particolare trasformazione prospettica.

Un modello fisico per la visione prospettica

Sappiamo che il nostro apparato visivo trasforma la geometria degli oggetti osservati restituendocene un'immagine deformata prospetticamente. Se osserviamo un quadrato inclinato rispetto all'asse ottico ci apparirà come un trapezio, con il lato più lontano più piccolo di quello più vicino all'occhio. Lo stesso accade con altre forme geometriche. Una circonferenza, ad esempio, può essere percepita come un'ellisse, una parabola o, se l'inclinazione è sufficientemente accentuata, come un ramo di iperbole.
La deformazione prospettica prodotta dall'occhio è dovuta principalmente alla presenza del cristallino che devia i raggi di luce in modo simile ad una lente convergente.
E' ragionevole, dunque, assumere che una lente convergente possa costituire un utile modello fisico per lo studio del problema della prospettiva.
Come è noto, l'immagine P' di una sorgente puntiforme P generata da una lente convergente può essere costruita con il semplice procedimento geometrico mostrato in figura 1, per il quale è sufficiente applicare due delle tre seguenti proprietà[8]:

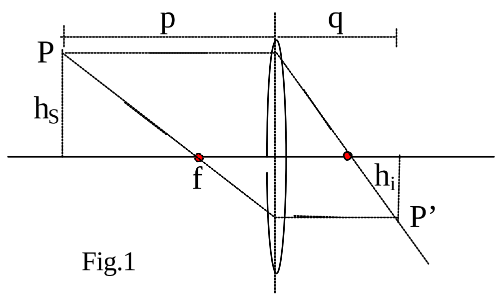


Fig.1

- i raggi uscenti dalla sorgente paralleli all'asse ottico convergono nel fuoco;
- i raggi uscenti dalla sorgente che passano per il fuoco emergono dalla lente paralleli all'asse ottico;
- i raggi uscenti dalla sorgente passanti per l'asse ottico non vengono deviati.

Indicando con p la distanza della sorgente dal centro ottico O, con q quella dell'immagine, con f la distanza focale, con h_s e h_i la distanza dall'asse ottico della sorgente e dell'immagine rispettivamente, le formule che trasformano il punto P nel punto P' possono essere ricavate a partire dalle due seguenti relazioni:

$$1/p+1/q = 1/f \qquad (1)$$
$$h_i/h_s = q/p \qquad (2)$$

che rappresentano rispettivamente la formula dei punti coniugati e quella dell'ingrandimento lineare.
Infatti, indicando con x,y,z le coordinate di P, con x',y',z' quelle di P' rispetto al sistema xyz rappresentato in figura 2, sfruttando le formule (1) e (2) si ricavano le seguenti formule di trasformazione:

$$x' = -\frac{x \cdot f}{x - f},\ y' = -\frac{y \cdot f}{x - f},\ z' = -\frac{z \cdot f}{x - f} \quad (3)$$

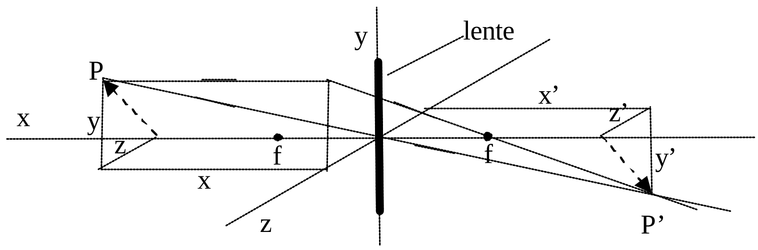
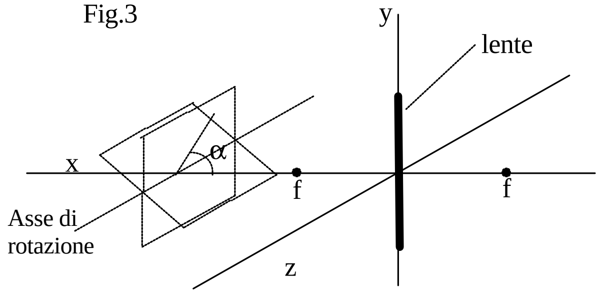


Fig.2

Immagine di figure piane

Le formule (3) precedentemente ricavate consentono di costruire algebricamente l'immagine di una qualsiasi sorgente puntiforme e di conseguenza, applicate punto per punto, di qualsiasi oggetto geometrico posto davanti la lente.

Immagine di quadrato
Consideriamo un quadrato disposto davanti una lente convergente, in maniera tale che l'asse ottico passi per il suo centro C. Riferendoci alla figura 3, partiamo dalla situazione in cui il quadrato è perpendicolare all'asse ottico, i suoi lati sono paralleli agli assi y e z e supponiamo che esso venga ruotato attorno ad un asse parallelo a z passante per C. Ci proponiamo di ricavare l'immagine del quadrato al variare dell'angolo α che la normale n al quadrato passante per C forma con l'asse ottico x.

Fig.3


Per farlo, tuttavia, apporteremo delle modifiche alle formule di trasformazione (3).
Innanzitutto ometteremo il segno meno nelle formule per y' e z'. Ciò è equivale ad operare una riflessione rispetto all'asse x delle immagini P' dei punti della figura geometrica. Inoltre, le coordinate x' verranno proiettate su un piano x'= costante. Applicando tali trasformazioni le (3) diventano:

$$x' = costante,\ y' = \frac{y \cdot f}{x - f},\ z' = \frac{z \cdot f}{x - f} \quad (4)$$

Nell'ambito dello studio della percezione prospettica, queste due trasformazioni sono pienamente giustificate, in quanto equivalgono (schematicamente) a due meccanismi fisiologici propri della visione. Sappiamo, infatti, che sulla retina si forma un'immagine capovolta dell'oggetto osservato: è il nostro cervello che, operando l'equivalente di un inversione di coordinate, ne restituisce un immagine diritta.
Nella visione monoculare, inoltre, quando l'oggetto osservato ha dimensioni relativamente grandi rispetto alla distanza dall'osservatore, l'occhio mette a fuoco successivamente singole porzioni dell'oggetto, modificando la curvatura del

cristallino così da regolare opportunamente la distanza focale. In questo modo l'immagine delle singole porzioni dell'oggetto si formano tutte sulla retina. Il cervello successivamente ricostruisce l'immagine dell'intero oggetto che emerge alla nostra coscienza come proiettata su un piano.
Indichiamo, pertanto, con x_0,y_0,z_0 le coordinate di un punto P_0 del quadrato perpendicolare all'asse x, con x,y,z le coordinate del punto P, corrispondente a P_0, del quadrato ruotato di α e con x', y', z' le coordinate dell'immagine P' di P.
E' facile dimostrare che le coordinate di P e quelle di P_0 sono legate dalle relazioni:

$$x = y_0 \, \mathrm{sen}\alpha + x_0, \; y = y_0 \cos\alpha, \; z = z_0 \quad (5)$$

Utilizzando le (4) e le (5) otteniamo le seguenti formule di trasformazione tra le coordinate dei punti P_0 e quelle del punto P' immagine di P, in funzione dell'angolo α:

$$x' = costante, \; y' = \frac{y_0 \cdot \cos\alpha \cdot f}{y_0 \cdot sen\alpha + x - f}, \; z' = \frac{z_0 \cdot f}{y_0 \cdot sen\alpha + x - f} \quad (6)$$

E' bene sottolineare che le formule ottenute, sebbene ricavate facendo riferimento ad un quadrato, sono applicabili a qualsiasi figura piana. Nel seguito esse verranno applicate a una circonferenza senza ulteriori precisazioni.

Utilizzando le formule (6) è possibile costruire una simulazione tramite foglio elettronico dell'immagine del quadrato al variare dell'angolo α. A scopo esemplificativo in figura 4 si riportano, per alcuni valori α, le immagini simulate di un quadrato di lato 2 (in unità di lunghezza arbitrarie) posto ad una distanza di 4 unità lunghezza dal centro di una lente con distanza focale di 2,5 unità. Al centro della figura si trova il quadrato reale. Come si può osservare per α=0 l'immagine risulta semplicemente ingrandita, mentre per $\alpha \neq 0$ l'immagine è un trapezio i cui lati paralleli all'asse z modificano la propria dimensione in maniera sempre più accentuata al crescere dell'angolo α.

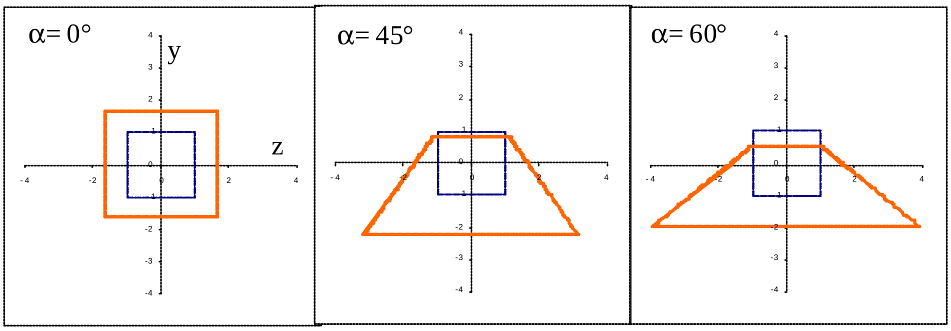


Fig.4

Immagine di una circonferenza

Più interessante è il caso della circonferenza, poiché al crescere dell'angolo d'inclinazione la sua immagine risulterà essere prima un'ellisse, poi una parabola ed infine un ramo d'iperbole.
Per rendercene conto consideriamo la circonferenza tratteggiata C_0 di figura 5. Essa è posta davanti alla lente ed

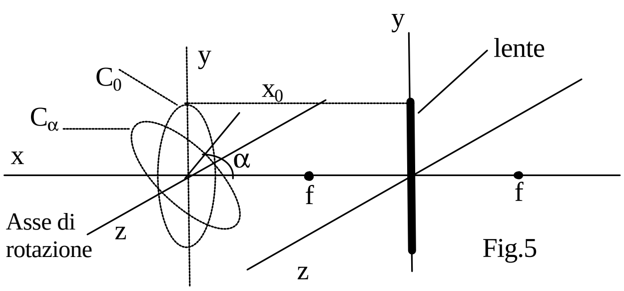


Fig.5

perpendicolare all'asse x passante per il suo centro. Supponiamo, per semplicità, che la circonferenza abbia raggio 1 e indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate dei suoi punti. L'equazione della circonferenza, riferita alla coppia di assi cartesiani xy passanti per il suo centro, sarà evidentemente:

$$y_0^2 + z_0^2 = 1 \quad (7)$$

Invertendo le (6) (esplicitandole, cioè, rispetto a x_0 e y_0) e sostituendo nella (7), otteniamo l'espressione seguente che rappresenta l'equazione dell'immagine della circonferenza C_α ruotata di un angolo α generata dalla lente:

$$y'^2(k^2-\mathrm{sen}^2\alpha) + z'^2\, k^2\cos^2\alpha - 2y' f\, \mathrm{sen}\alpha\cos\alpha - f^2\cos^2\alpha = 0 \quad (8)$$

$$\text{con } k^2 = (x_0 - f)^2$$

Confrontando la (8) con l'equazione di una conica[9] riferita al sistema di coordinate zy, con direttrice parallela all'asse z $y = y_1$, eccentricità *e* e fuoco F giacente sull'asse y:

$$(1 - e^2)\, y^2 + z^2 - 2y(y_1 e^2 - F) + F^2 - e^2 y_1^2 = 0 \quad (9)$$

si riconosce facilmente che se poniamo $e^2 = \frac{(1-k^2)tga}{k^2}$ (e pertanto fintantoché $k^2 = 1$) l'equazione (8) rappresenta una conica. In particolare, si ricavano le seguenti condizioni:

- se $\alpha = 0$ sarà $e^2 = 0$ e l'immagine è una circonferenza;
- se $k^2 = \mathrm{sen}^2\alpha$ sarà $e^2=1$ e l'immagine è un ellisse;
- se $k^2 = \mathrm{sen}^2\alpha$ sarà $e^2=1$ e l'immagine è una parabola;
- se se $k^2 \geq \mathrm{sen}^2\alpha$ sarà $e^2 \geq 1$ è l'immagine sarà un iperbole.

In figura 6 sono riportate le immagini della circonferenza C_α, ottenute tramite simulazione excel e corrispondenti a f=3,2 e $x_0 = 4$, per ciascuno quattro casi riportati sopra.

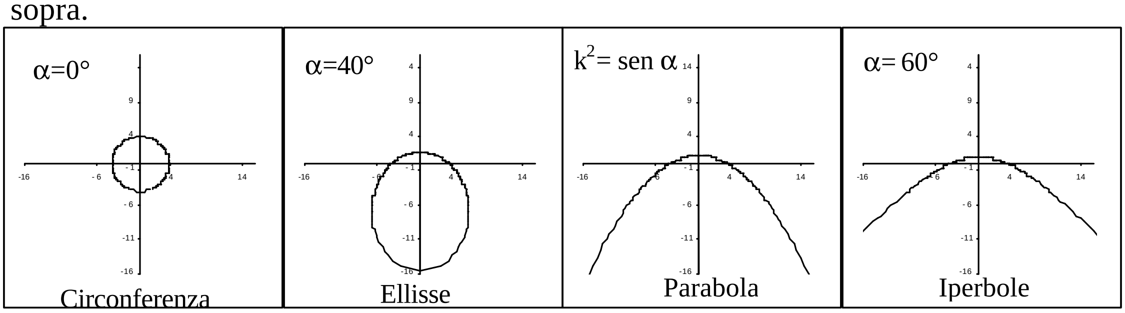


Fig.6

Equivalenza tra trasformazioni generate da una lente convergente e trasformazioni prospettiche[10]

Dimostreremo, adesso, che la trasformazione indotta da un lente convergente su una sorgente puntiforme è equivalente ad una trasformazione prospettica, ossia una proiezione dei punti di un piano Π su un piano perpendicolare Π' rispetto ad centro proprio C. L'asserto può essere dimostrato analiticamente, ricavando le formule relative alle trasformazioni prospettiche e confrontandole con le (6) relative alla trasformazione generata da una lente. Qui preferiamo seguire un procedimento geometrico, più semplice e certamente più efficace da un punto di vista didattico. Consideriamo a tal fine la figura 7 in cui è stata costruita geometricamente l'immagine P' di una sorgente puntiforme P generata da una lente disposta lungo l'asse z. Ai fini della dimostrazione è conveniente supporre che P' e P giacciano su due piani diversi ma coincidenti, che indicheremo rispettivamente con Π’ e Π. Ribaltiamo il piano Π’ di 90° attorno all’asse z, così da generare la configurazione rappresentata in figura 8, in cui abbiamo introdotto la terna di assi cartesiani x,y,z.

Fig.7

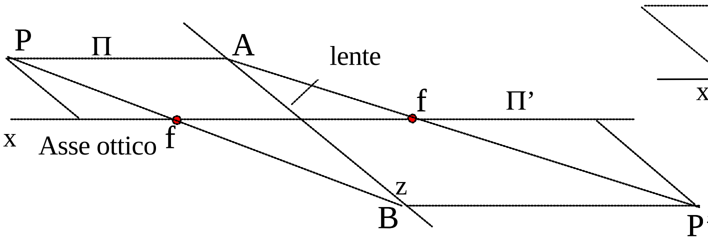
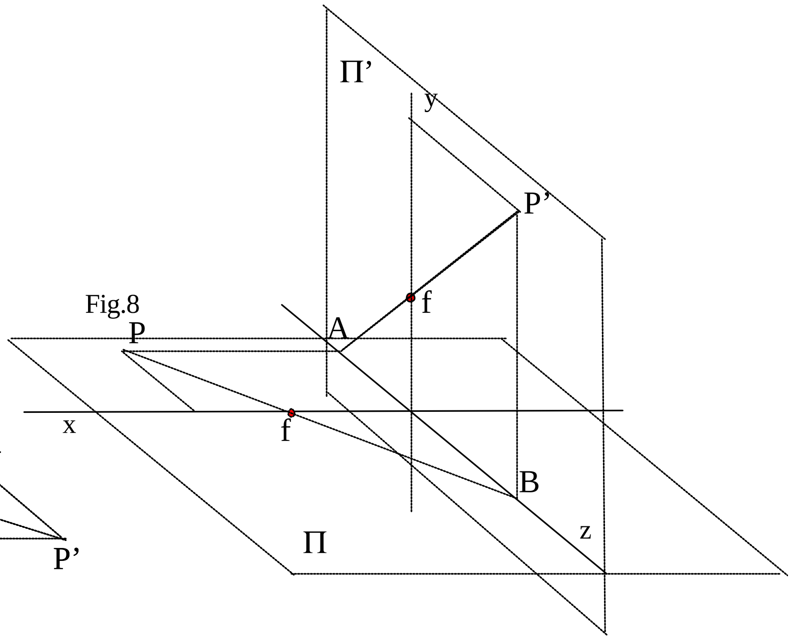
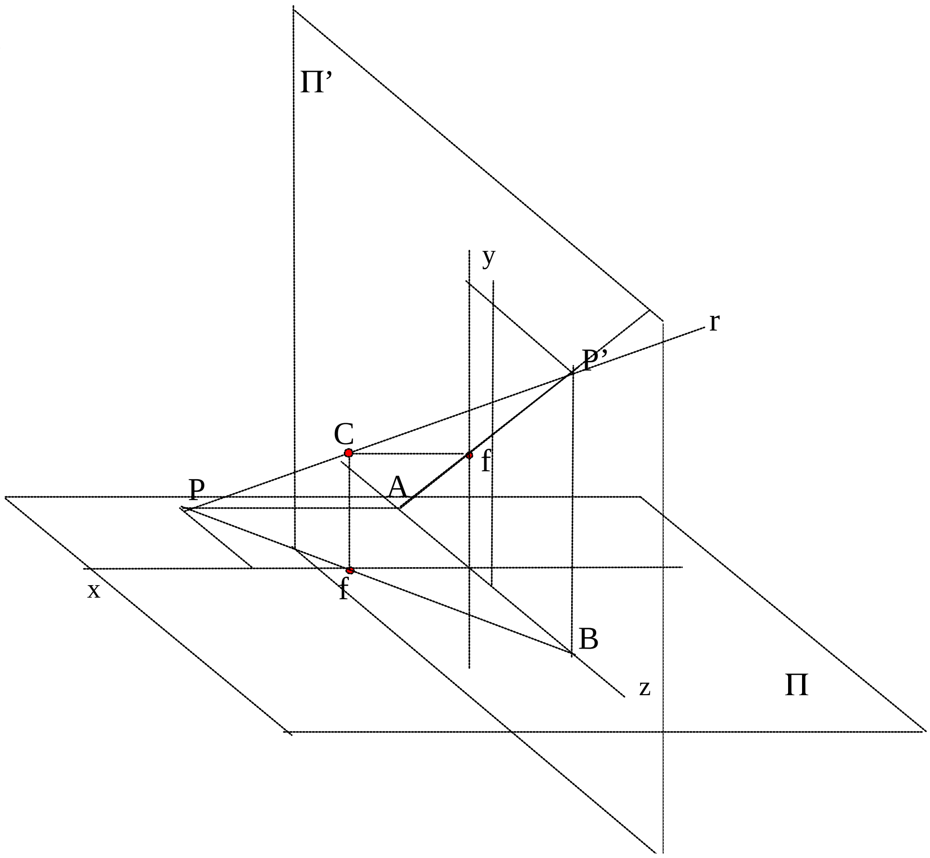


Fig.8



Così come rappresentato in figura 9, consideriamo la retta r passante per i punti P e P’. La proiezione di r su Π è la retta passante per P e B che contiene il punto f giacente sull’asse x, analogamente la proiezione di r su Π’ contiene il punto f giacente su y. Alla retta r deve, dunque, appartenere il punto C di coordinate x = f, y = f, z=0. Ripetendo la dimostrazione per una qualsiasi altra coppia di punti Q e Q’ (dove Q è una sorgente puntiforme e Q’ la sua immagine generata dalla lente) troveremmo che la retta che congiunge i due punti (supposti appartenere ai due piani perpendicolari Π e Π’) contiene il punto C. Il punto C rappresenta pertanto il centro di proiezione dei punti di due piani perpendicolari Π e Π’ e ciò dimostra che la trasformazione generata da una lente convergente è assimilabile ad una trasformazione prospettica.

Fig.9



Bibliografia

1) Bonura A., Russo L. , *Didattica scientifica per problemi. Una sperimentazione interdisciplinare sui modelli lineari,* “Quaderni di Ricerca in Didattica”, n13, 2003.
2) Dewey J., *Esperienza ed Educazione*, La Nuova Italia, Firenze 1970.
3) Gliss J., *L’apprendimento attivo*, Armando Editore, Roma 2000
4) Petracchi G., *Motivazione e Insegnamento*, La Scuola, Brescia, 1990.
5) Cohen E., *Organizzare i gruppi cooperativi*, Erickson, Trento 1999B. F.
6) Jones et al. *Didattica per problemi reali,* Erickson, Trento 1999
7) Pucci A., *Dalla prospettiva alla geometria proiettiva*, “Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 10, 2001
8) Bonura A., *Introduzione alla fisica*, modulo D, Paravia, Torino 2002
9) Ferrauto R., *Il problema geometrico e la geometria analitica,* ed. Dante Alighieri, Venezia 1976.
10) Docci M., Migliari R. - *Scienza della Rappresentazione: Fondamenti e Applicazioni della Geometria Descrittiva*, Ed. La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1992.