Parametro e Variabile nelle disuguaglianze logaritmiche

Valerio Catania[1]

1. Motivazioni della nostra scelta ed aspetti epistemologici sulla funzione logaritmica

Questo lavoro nasce dall'esigenza di rendersi conto se le nozioni sulle disequazioni logaritmiche sono soltanto ridotte alla memorizzazione di regole formali appartenenti ai logaritmi.
Così vorremmo mettere in evidenza le caratteristiche della funzione logaritmica dal momento che gli studenti devono spesso affrontare troppe difficoltà quando lo studio diventa molto più deduttivo e formale.
Il nostro obiettivo è di permettere un approccio didattico il quale possa riguardare tutte le proprietà dei logaritmi, non solo secondo la loro validità formale, ma soprattutto per ciò che concerne la relazione con l'andamento della funzione logaritmica.
Così, le proprietà sui logaritmi non sono considerate in se stesse, ma poiché esse sono espressione di caratteristiche delle funzioni studiate.
Proprio per queste ragioni, gli argomenti presentati richiedono una conoscenza preliminare sul concetto di funzione, cioè, conoscere la definizione di dominio e codominio, e la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biettiva.
Inoltre, è anche importante avere a nostra disposizione il concetto di funzione inversa e le diverse classificazioni legate alla monotonia.
Le nozioni sui numeri reali sono pure utili ma non necessarie dal momento che, anche se necessarie per una giusta formalizzazione, esse sono condotte ad un livello intuitivo in questo lavoro.
Allo scopo di coinvolgere maggiormente l'attenzione degli studenti, è importante mettere in rilievo quale ruolo le funzioni logaritmiche assolvono nella vita reale.
Infatti, esse sono applicate in diverse discipline, tra le quali: biologia, astronomia, geologia, fisica, applicazioni finanziare e così via.

2. Introduzione storica sulla scoperta dei logaritmi

Allo scopo di introdurre lo studio dei logaritmi secondo un approccio didattico più corretto, è necessaria una analisi storico-epistemologica su questo argomento.
I logaritmi fanno la loro prima apparizione durante la rivoluzione scientifica: le enormi soperte nel campo dell`astronomia (keplero per esempio ne fece grande uso) e della navigazione necessitano di un robusto apparato matematico, ma soprattutto di un operatore in grado di rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli.
MICAEL STIFEL (Esslingen, 1487- Jena, 1567, Germania) puo` essere considerato il pre-inventore dei logaritmi: nella sua opera < Aritmetica Integra> (1544) per la prima volta compare il calcolo di potenze con esponente razionale e realizza uno schema, che costituisce la prima rudimentale tavola dei logaritmi in base 2.
Dopo 50 anni John Napier (Edimburgo – Scozzia 1550- 1617), prendendo spunto dagli studi effettuati da Stifal approfondisce l` idea di logaritmo, questa volta come progressione geometrica di ragione 10. Fu egli che conio` il termine logaritmo (dal greco: logon ragione, e arithmos numero) ed inoltre nella sua opera <Mirifici Logarithmorum Cononis Descriptio> del 1614 cerco` di fornire uno strumento che rendesse molto piu` veloci i calcoli degli astronomi.
HENRY BRIGGS (Waeley Wood, 1561- Oxford, 1630, Inghilterra) introdusse la base 10 e prese in considerazione le tavole logaritmiche decimali di 30000 numeri noc 14 cifre decimali in < Aritmetica Logaritmica> del 1624.
Un altro matematico che affronto` lo studio dei logaritmi fu JOBST BURGI ( Svizzera 1588). I logaritmi di Burgi si avvicinano ai nostri, pero` presentano lo svantaggio che il logaritmo di un prodotto o di un quoziente non e` la somma o la differenza dei logaritmi.
Solamente agli inizi del` 700 con Eulero i logaritmi diventano oggetto matematico adattano un linguaggio ed una notazione che per molti aspetti corrispondono a quelli usati oggi.
Eulero fu il primo ad usare la lettera e per rappresentare la base del sistema dei logaritmi naturali o neperiani. Egli inoltre nel 1747 chiarira` definitivamente la questione sui logaritmi dei numeri negativi avviatasi noc una accesa controversia tra Leibiniz e Bernoulli.
Leibiniz e i suoi sostenitori asserivano che i logaritmi dei numeri negativi devono essere interpretati come quantita` immaginarie.
Bernoulli e gli altri, invece affermavano che il logaritmo di un numero negativo era un numero reale uguale al logaritmo del corrispondente numero negativo, cioe`:

$$\log(-x) = \log(x).$$

[1] Specializzato presso la SISSIS dell'Università di Palermo nell'inidirizzo Fisico-Matematico e Informatico. Iscritto in Dottorato presso l'Università "Comenius" di Bratislava (Direttore tesi: F. Spagnolo).

3. Discussione didattica in classe

Secondo un punto di vista didattico, il logaritmo può essere introdotto secondo due approcci diversi.

1. Dopo avere dimostrato o ad ogni modo introdotto il seguente teorema:

TEOREMA: *Se a>0, a¹1 e b è positivo, a, bÎÂ$^+$-{0}, una e una sola soluzione esiste per la seguente equazione:*

$$a^x=b$$

Noi definiamo questa soluzione ***logaritmo***. Esso è indicato dalla seguente espressione:

$$x=\log_a b$$

la quale è letta come ***Logaritmo di b in base a.***

2. In un altro modo, definiamo logaritmo come l'inverso della funzione esponenziale.

Infatti partendo dalla funzione esponenzialòe $y=a^x$, facciamo osservare che essa è una funzione invertibile: decrescente se $0<a<1$; crescente se $a>1$.

Vedi grafico 1 e 2:

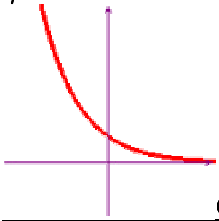


Grafico 1: *f(x) = a^x, con 0<a<1*

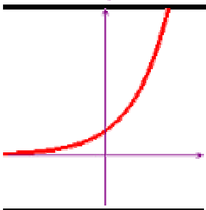


Grafico 2: *$f(x) = a^x$, con $a>1$*

Così possiamo considerare la funzione inversa: preso un valore *y*, *x* sarà l'esponente da essre dato alla base *a* per ottenere *y*. *Vedi grafico 3 e 4:*

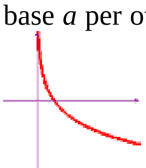


Grafico 3: *$f(x) = \log_a x$, con $0< a<1$*

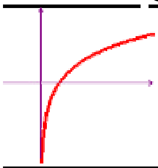


Grafico 4: *$f(x) = \log_a x$, con $a>1$*

Osservazione: Il grafico 1 simmetrico al grafico 3 rispetto alla retta $y=x$ (allo stesso modo il grafico 2 rispetto al 4). In entrambi i modi, otteniamo la seguente definizione :

DEFINIZIONE: Definiamo logaritmo in base *a* di un numero *b* l'esponente *c* che deve essere dato ad *a* per ottenere *b*:

$$c=\log_a b$$

dove *a* è chiamata ***base*** del logaritmo e ***b argomento***.

In matematica sono usate alcune basi standard, esse sono le seguenti:

- Il numero ***e***»2,718… chiamat ***numero neperiano.*** Un logaritmio in base *e* è chiamato anche ***logaritmo naturale*** e si scrive $y=\ln x$ (che sta per $\log_e x$).
- Il numero 10 è spesso usato nelle applicazioni tecniche: per esempio il *decibel* è una unità logaritmica in base 10 ed è scritto: $y=\log x$ (che sta per $\log_{10} x$).

- Il numero 2 è spesso usato in informatica. I logaritmi in questa base sono chiamati ***logaritmi duali*** e sono scritti come *y=ldx* (che sta per $\log_2 x$).

È possibile esprimere ogni logaritmo in una qualsiasi base usando la seguente fotmula di trasformazione:

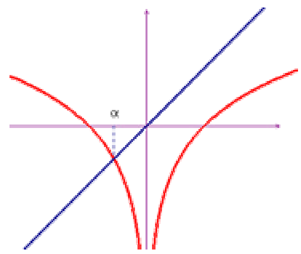
$$log_a x=log_b x/log_b a.$$

Per quanto riguarda le disequazioni logaritmiche, non esistono nè regole generali né modi specifici per risolverle. Il seguente esempio ci dà un idea su quanto appena detto:
Risolvi la disequazione x>lnú xú, cioè, x - lnú xú>0.

La precedente disequazione potrebbe essere risolta in modo grafico:

x- lnú xú>0

L'insieme delle soluzioni della disequazione è ***a*** *<x<0 È x>0.*
Il valore di ***a*** *può essere trovato soltanti co metodi numerici e Cabri, il quale ci mostra il precedente grafico, calcola x »-0,56.*



Quando proviamo a risolvere le disequazioni logaritmiche, raramente siamo capaci di ridurle alla risoluzione di una o più disequazioni elementari, usando proprietà legate alle potenze e ai logaritmi o usando particolari sostituzioni.

__Disequazioni elementari__: Preso un numero reale $a>0$, $a\neq 1$ ed un qualunque $b\in$ *Â* le seguenti disequazioni sono chiamate *disequazioni elementari:*

- ***log$_a$x>b***
- ***log$_a$x<b***
- ***log$_a$x³b***
- ***log$_a$x£b***

Esse sono fondamentali dal momento che le tecniche applicabili alle disequazioni logaritmiche sono basate sulla risoluzione delle precedenti disequazioni.

__3.1.Applicazioni det logaritmi nella realità__

La funzione logaritmica trova applicazione in varie discipline.
Allo scopo di dare agli studenti qualche idea su ciò, proponiamo due esempi, uno riguarda l'acustica e l'altro la geologia.
Esempio 1. In acustica, il *decibel* è usato per esprimere i levelli di pressione sonora rispetto ad un valore base.
Il decibel può essere definito come: $A_{db}=20\log(p/p_0)$, (A l'ampiezza di un acustico segnale), nel quale p è il livello di pressione che deve essere misurato e p_o è il valore base; dopo avere fissato p_0 uguale a 20 MicroPascal ($20*10^{-6}$ Pascal), qual è il livello di pressione sonora in Pascal di un segnale acustico la cui ampiezza 120 dB?

Esempio 2. Un risultato fisico, particolarmente importante a causa delle sue conseguenze nel campo della geologia, è la relazione riguardante il decadimento di un corpo radioattivo.
Se *N* è il numero di atomi contenuti in una sostanza radioattiva all'istante *t*, la relazione, secondo la quale *N* cambia, è la seguente:

$$N=N_0e^{-lt}$$

l è definita *constante di declino*. Essa è una constante di proporzionalità caratteristica per ciascuno elemento.
La relazione è illustrata nella figura sotto.
Se noi vogliamo trovare l'intervallo di tempo dopo il quale il numero iniziale di atomi si dimezza, dovremmo imporre *$N=N_0/2$ (periodo dimezzante)* e risolvere in *t*:

$$N_0/2= N_0e^{-lt}\text{ Þ } ½=e^{-lt}\text{ Þ } \text{secondo la definizione di logaritmo} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -l t= \ln(1/2) \Rightarrow -l t= -\ln(2) \Rightarrow t = \ln(2)/l.$$

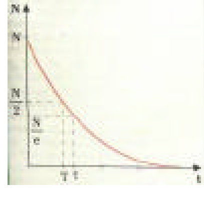


Figura: Rapresentazione del numero N di atomi non ancora decaduto, in relazione al tempo. T è il periodo dimezzante.

Esercizio: Vogliamo trovare l'età di un campione di carbone legna quando il suo 90% è già decaduto.
In questo caso, la relazione del decadimento è scritto:

$$\frac{m_t}{m_0}=e^{-l \cdot t}$$

nella quale m_t is la massa finale and m_0 qualla iniziale, cioè quando la pianta è morta.

Abbiamo:

$$\frac{m_t}{m_o}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{10}=e^{-l\cdot t}\Rightarrow -l\cdot t=\ln(1/10)\Rightarrow t=\frac{\ln 10}{l}$$

Dpo avere sostituito in l l' espressione in termini di tempo dimezzato $t_{1/2}$:

$$l=\frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

otteniamo:

$$t=t_{1/2}\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

4. Analisi a priori sulle difficoltè e gli errori degli studenti

Dopo l`analisi storica di una conoscenza, l`analisi degli errori e` una fase fondamentale per l`individuazione di un ostacolo epistemologico, poiche` attraverso la ricerca degli errori ricorrenti si possono scoprire le concezioni dallr quali essi derivano e le rappresentazioni che l`alunno si crea per la comprensione e l`assimilazione di una data conoscenza, come cioe` egli la inserisce nella sua rete di significati.

In particolare in questo paragrafo cercheremo di evidenziare la rappresentazione che gli alunni si creano sulla funzione logaritmica descrivendo gli errori ricorrenti e le cause da cui essi derivano.

Vorremmo presentare questo argomento agli studenti che frequentano il III anno del Ginnasio *"**Grosslin Gova**"* nella Rep. Slovacca.

Prerequisiti:

- Conoscere il concetto di logaritmo e la sua relazione con la potenza.
- Capire cosa è una funzione esponenziale e logaritmica e conoscere le loro rappresentazioni grafiche.
- Sapere applicare tutte le regole di calcolo.
- Conoscere una disequazione logaritmica ed una esponenziale.
- Sapere trasformare una disequazione esponenziale in una logaritmica e viceversa.

TEST

Proponiamo i seguenti esercizi*:*

1. *Per quali valori a Î Â (Â è l'insieme dei numeri reali), la seguente funzione è crescente?*

$$y=\log_{\frac{a}{a-1}}(x)$$

Risolvi questo esercizio individualmente in 10 minuti.

2. *Per quali valori a Î Â (Â è l'insieme dei numeri reali), la seguente disequazione è risolta " x Î Â?*

$$y=\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1$$

Risolvi questo esercizio in gruppo in 15 minuti.

NOTA. Ciascun gruppo deve riportare nel proprio quaderno lo sviluppo dell'esercizio e preparare una discussione sulla quale, un elemento per ciascun gruppo parlerà alla lavagna.

5. Ragioni del test proposto

Le ragioni che ci hanno guidato a scegliere gli esercizi precedenti sono dovute al fatto che nella nostra esperienza didattica, gli studenti spesso devono affrontare troppi ostacoli epistemologici e concettuali nel risolvere esercizi contenenti parametri: essi non sono capaci di distinguere i differenti ruoli assolti dai parametri e variabili.

In particolare, nel primo esrcizio il paramerto assolve un ruolo più importante rispetto alla variabile dal momento che gli studenti devono risolvere considerando il valore della base logaritmica *a/(a-1),* per controllare se la funzione cresce o decresce.

Nel secondo esercizio, gli studenti sono portati a maggiore difficoltà rispetto al primo poiché essi devono ragionare sia sul parametro e sulla variabile, e al tempo stesso devono essere capaci a scoprire la relazione che lega parametro e variabile.

Tutto quanto appena detto chiarisce la ragione per cui noi consigliamo di risolvere il primo esercizio individualmente ed il secondo in gruppo.

6. Possibili risposte degli studenti sul primo esercizio

Per quanto riguarda il primo esercizio gli studenti potrebbero dare le seguenti risposte.

A_1: Lo studente è messo in difficoltà poiché sa come collegare concettualmente variabile e parametro.

A_2: Tutti trascurano il dominio appartenente alla base del logaritmo, cioè $a\neq 1$.

A_3: Lo studente suppone:

$$\log_{a/_{a-1}} x < \log_{a/_{a-1}} (x+1)$$

segue che:

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^{\log_{a/_{a-1}} x} < \left(\frac{a}{a-1}\right)^{\log_{a/_{a-1}} x(x+1)}$$

dalla definizione di logaritmo, deduce che x<x+1. Così la funzione cresce sempre $\forall\ a\in\Re$ poiché il parametro non appare nella conclusione.

<u>Osservazione</u>*: lo studente ha acquisito male la struttura di numeri reali poiché considera questi come un insieme discreto e non continuo. Inoltre, lui suppone che la variabile è il gradino di partenza cosicchè trascura la presenza del parametro.*

A_4: La base è sempre maggiore di 1. Infatti:

$$\frac{a}{a-1} > 1 \quad \text{sin}ce \;\; a > a-1$$

Così, la funzione è sempre crescente .

A_5: La funzione logaritmica è sempre crescente, così la presenza del parametro è insignificante.

<u>Osservazione</u>*: lo studente pensa erroneamente che la funzuione logaritmica è soltanto quella in base >1.*

A_6: La funzione logaritmica è sempre decrescente, così la presenza del parametro è insignificante .

<u>Osservazione</u>*: lo studente pensa erroneamente che la funzuione logaritmica è soltanto quella in base <1.*

A_7: Pensando erroneamente che la funzione logaritma è solo quella in base >1,
lo studente afferma che la funzione cresce per x>1:

$$\log_{\frac{a}{a-1}} x > o \Rightarrow x > 1$$

così deduce che la funzione non cresce sempre $\forall\ x\in\Re^+/\{0\}$.

<u>Osservazione</u>*: lo studente ha acquisito un concetto sbagliato su cosa significhi funzione crescente, così fraintende positività con crescenza.*

A_8: La funzione cresce $\Leftrightarrow$ la base cresce, cioè:

$$a+1/_a = b(a+1) > b(a) = a/_{a-1} \quad (b \quad is \quad basis) \quad \Rightarrow \quad a+1/_a > a/_{a-1}$$

lo studente risolve questa disequazione in a e scopre i valori di a per i quali secondo lui la funzione è crescente

7. Possibili risposte degli studenti sul secondo esercizio

A_1: Lo studente è messo in difficoltà poiché non sa come collegare concettualmente variabile e parametro.

A_2: Tutti trascurano il dominio appartenente alla base del logaritmo, cioè $a\neq -1$.

A_3: Lo studente potrebbe affermare che la base del logaritmo è sempre <1, poichè:

$$a < a + 1 \,?\; \frac{a}{a+1} < 1$$

allo stesso tempo cerca i valori di a per i quali:

$$\frac{a}{a+1} > 0$$

così dopo avere trovato questi valori di a, cioè $a<-1$ e $a>0$, risolverebbe la disequazione nel modo seguente:

$$\log_{a/_{a+1}} (x^2 + 2) > \log_{a/_{a+1}} \frac{a}{a+1}$$

ma la base del logaritmo è sempre minore di 1, così si avrebbe:

$$x^2 + 2 < \frac{a}{a+1} \Rightarrow x^2 < \frac{a}{a+1} - 2 < 0$$

ciò è impossibile dal momento che la base è minore di 1 e quindi la disequazione non è mai soddisfatta.

A_4: Lo studente prima risolverebbe la disequazione, cioè:

$$\log_{a/_{a+1}}(x^2+2)>1=\log_{a/_{a+1}}(\frac{a}{a+1})\Rightarrow x^2+2>\frac{a}{a+1}\Rightarrow.....\ \Rightarrow x^2>-\left(\frac{a+2}{a+1}\right)$$

a questo punto non è più capace di continuare.

A_5: Lo studente prima risolverebbe la disequazione, cioè

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1=\log_{\frac{a}{a+1}}(\frac{a}{a+1})\Rightarrow x^2+2>\frac{a}{a+1}\Rightarrow.....\ \Rightarrow x^2>-\left(\frac{a+2}{a+1}\right)$$

ma poiché la disequazione deve essre soddisfatta $\forall x\in\Re$, segue che:

$$-\left(\frac{a+2}{a+1}\right)>o\quad\Rightarrow -2<a<-1$$

A_6: Lo studente prima risolverebbe la disequazione, senza studiare in quali casi $0<a/(a+1)<1$ or $a/(a+1)>1$, cioè:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1=\log_{\frac{a}{a+1}}(\frac{a}{a+1})\Rightarrow x^2+2>\frac{a}{a+1}\Rightarrow.....\ \Rightarrow x^2>-\left(\frac{a+2}{a+1}\right)$$

ma poiché la disequazione deve essere soddisfatta $\forall x\in\Re$, segue che:

$$-\left(\frac{a+2}{a+1}\right)<o\quad\Rightarrow\quad a<-2,\quad a>-1$$

A_7: Poiché $a<a+1$, $\forall a\in\Re \Rightarrow$ la base del logaritmo è sempre minore di 1, così la funzione logaritmica decresce e non è sempre maggiore di 1 $\forall x\in\Re$.

A_8: A prescindere dal valore della base, la funzione logaritmica non è sempre maggiore di 1 $\forall x\in\Re$.

Osservazione: In A_6 e A_7, lo studente pensa che l'andamento della funzione logaritmica è sempre standard a prescindere dal suo argomento.

A_9: $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1=\log_{\frac{a}{a+1}}(\frac{a}{a+1})\Rightarrow x^2>\frac{a}{a+1}-2$

ma *a/(a+1)*<1 poichè $a<a+1$ $\forall a\in\Re$, segue che:

$$\underline{\frac{a}{a+1}-2<o\Rightarrow x^2>\frac{a}{a+1}-2\quad \forall a\in R\quad and\quad \forall x\in R}$$

così la disequazione è sempre soddisfatta $\forall a\in\Re$ e $\forall x\in\Re$.

8. Analisi aposteriori qualitativa

Il fine dell'analisi a posteriori consiste nel constatare e nell'invalidare le ipotesi previste nell'analisi aposteriori e nel mettere in luce le strategie e le rappresentazioni provenienti dalle risposte degli studenti.

Note sulla classe: La classe è costitutita da 31 studenti. Il test è stato realizzato a prima ora di lezione.
Nella classe c'erano 11 ragazzi e 20 ragazze. Per quanto riguarda il secondo esercizio i ragazzi erano ragruppati in 8 gruppi. I studenti non si sentivano a loro agio in presenza della videocamera.

8.1 Note sul primo esercizio

La maggior parte degli studenti è stata in grado di risolvere questo esercizio. Essi si sono resi conto che la presenza del parametro era il gradino fondamentale allo scopo di analizzare l'andamento della funzione logaritmica.
Essi non sono stati messi in difficoltà dalla presenza della variabile poiché si sono concentrati correttamente solo a scoprire il valore acquisito dalla base *a/(a-1)* della funzione logaritmica afffinchè la funzione possa essere crescente.
Malgrado ciò, abbiamo riscontrato alcuni errori che avevamo previsto nella nostra analisi apriori, per es. alcuni studenti hanno trascurato il dominio appartenente alla base del logaritmo, cioè $a^1 1$.
Inoltre abbiamo trovato errori che non ci aspettavamo, per esempio alcuni ragazzi non sono capaci a risolvere disequazioni razionali cosicchè alcuni non sono riusciti a completare l'esercizio; alcuni hanno supposto scorrettamente che la funzione logaritmica è sempre crescente (o decrescente) a prescindere dal valore acquisito dalla base.

8.2 Note sul secondo esercizio

Al contrario del primo, nel secondo, tutti gli studenti hanno avuto grandi difficoltà.

Così come noi ci aspettavamo nella nostra analisi apriori, gli studenti non sono stati in grado a legare concettualmente variabile e parametro.
Molti di loro non hanno riflettuto sull'andamento e le proprietà della funzione logaritmica poiché nelle loro concezioni, il logaritmo in questo caso è soltanto un operatore matematico finalizzato alla risoluzione delle disequazioni.
Infatti, senza avere considerato il valore assunto dalla base *a/(a+1)*, alcuni gruppi hanno prima risolto la disequazione in modo meccanico e continuando in questo procedimento essi non sono riusciti a raggiungere una conclusione.
Così come nel primo esercizio, alcuni gruppi hanno trascurato il dominio della base del logaritmo, cioè a^{1} -1.
Alcuni gruppi non si sono resi conto che l'argomento del logaritmo, x^2+2, è sempre positivo e così hanno risolto la disequazione $x^2+2>0$ (qualcuno anche scorrettamente).
Un gruppo ha risolto l'esercizio secondo un approccio logico che è assolutamente scoordinato e inconcludente. Proprio quest'ultimo non è stato capace di applicare le proprietà dei logaritmi.

9. Analisi aposteriori quantitativa

Nelle seguenti due tabelle illustriamo le strategie (scorrette) seguite dagli studenti durante lo svolgimento del test.
Segnamo con 1 la strategia seguita e con 0 il viceversa.

Tabella sul secondo esercizio[2]

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	**A10**	**A11**
G1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
G2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	**0**	**0**
G3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	**0**	**0**
G4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	**1**	**0**
G5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**
G6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
G7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**0**
G8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**

10. Conclusioni

Questo progetto è stato molto significante per averci messo a conoscenza su alcuni aspetti di apprendimento sul concetto di logaritmo, visto sia come operatore che come funzione.
Abbiamo osservato direttamente gli studenti mentre svolgevano gli esercizi da
noi proposti.
Il test ci ha permesso di raccogliere i risultati, i quali, dopo l'analisi quantitativa, ci hanno dato importanti informazioni per verificare l'attendibilità delle nostre aspettative.
Abbiamo avuto così l'opportunità di potere analizzare le rappresentazioni concettuali e le strategie organizzative degli studenti.
Il metodo della ricerca e della sperimentazione educativa, infatti, ci permette di approcciarci alle conoscenze degli studenti in una dimensione critica, allo scopo di scoprire soluzioni didattiche e pedagogiche per cercare di risolvere problematiche emergenti dagli studenti.
In fine, dobbiamo sottolineare che questo progetto è stato per noi un momento di riflessione didattica e cooperazione con gli insegnanti slovacchi per mettere a confronto le nostre competenze al fine di migliorare la nostra pratica di insegnamento.

[2] **Legenda**:
G_i = gruppo *i*
A_i = risposte previste, *i* =1-9
$\mathbf{A}_i$ **=** nuove risposte date dagli studenti, *i* =10-12. In particolare intendiamo le seguenti risposte:
A_{10}= Lo studente non si rende conto immediatamente che l'argomento del logaritmo è sempre positivo.
A_{11}=l'esercizio è svolto secondo un approccio logico che è assolutamente scoordinato e inconcludente. Inoltre gli studenti non sono capaci di applicare le proprietà dei logaritmi