TERESA MARINO[1], ILARIA DI CHIARA[2], BENEDETTO DI PAOLA[3]

Il passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico nella scuola secondaria superiore

ABSTRACT

In un ambito storico e storico-epistemologico relativo all'affermazione del pensiero algebrico, con il presente lavoro, si tenta di delineare sinteticamente le tappe più importanti dell'evoluzione del pensiero algebrico, al fine di giustificare ed interpretare gli ostacoli e le difficoltà del processo di apprendimento odierno, evidenziate mediante l'analisi di un'esperienza didattica condotta su ragazzi di scuola superiore.

Introduzione

Un'analisi retrospettiva dello sviluppo storico dell'Algebra evidenza un lungo e difficile percorso di crescita di questa disciplina, un cammino durato diversi secoli e segnato dall'imperversare di dibattiti tra culture matematiche di popoli diversi. Una lettura attenta del quadro storico mostra infatti un decollo lento e difficoltoso dell'Algebra rispetto alla Geometria ed un difficile "rapporto" con l'Aritmetica, evidenziato dal costante sforzo di transizione da procedure computazionali a oggetti matematici.

In accordo con la tesi piagetiana di convergenza tra lo sviluppo storico e quello individuale (Garcia and Piaget, 1989) ci è sembrato interessante analizzare sperimentalmente alcune delle fasi del passaggio dal pensiero aritmetico/geometrico al pensiero algebrico, indagando sulle difficoltà incontrate dagli studenti che, secondo questa visione, possono essere molto vicine a quelle sperimentate da generazioni di matematici.

Gli studenti quando e come arrivano, se arrivano, al pensiero algebrico? Che percorso seguono per raggiungerlo? Quali sono le cause che li possono ostacolare nel pensare algebricamente? Rispondere a queste domande è certamente difficile, si richiedono parecchie riflessioni ed un'analisi approfondita dell'argomento trattato. In questo articolo ci limitiamo a considerare il problema, fissando l'attenzione alle equazioni di primo e secondo grado.

Il presente articolo, infatti, nasce da una revisione di due lavori sperimentali, sviluppati nell'ambito del progetto di tesi di laurea in Matematica presso l'Università di Palermo[4] e mirati all'analisi dei comportamenti degli studenti nella risoluzione di un test sulle equazioni di primo e secondo grado, al fine di cercare di valutare il grado di autonomia del pensiero algebrico rispetto a quello Aritmetico e Geometrico.

Analisi storica

Lo studio della storia dell'Algebra e delle relazioni di questa con le altre discipline quali la Geometria e l'Aritmetica, ad esempio, è in continua evoluzione. Tantissimi sono infatti gli storici che si occupano di analizzare lo sviluppo dell'Algebra cercando di delineare quindi un quadro di

---

[1] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo.
[2] Laureata in Matematica (2004) presso l'Università di Palermo.
[3] Studente (II anno) SISSIS "Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario" di Palermo, classe 47A (Matematica).
[4] - tesi di laurea: ANALISI SPERIMENTALE DI ALCUNE FASI DEL PASSAGGIO DAL PENSIERO ARITMETICO AL PENSIERO ALGEBRICO, Benedetto Di Paola, Relatore Prof. Teresa Marino, Palermo, 2003.
- tesi di laurea: EQUAZIONI DI PRIMO E SECONDO GRADO, Ilaria Di Chiara, Relatore Prof. Teresa Marino, Palermo, 2004.

riferimento generale ed individuando le varie tappe fondamentali per lo sviluppo del pensiero algebrico.

Questo articolo e quindi anche gli altri due scritti[3] a cui questo fa riferimento non vuole certamente essere un lavoro completo dal punto di vista storico ma soltanto un modesto apporto alla Didattica della Matematica. Questo infatti si pone come contributo agli studi che si stanno realizzando all'interno del G.R.I.M. sugli ostacoli epistemologici riguardanti il linguaggio algebrico.

In questa visione, volendo delineare un quadro storico dello sviluppo dell'Algebra e quindi del sistema simbolico usato per esprimere i concetti propri di questa disciplina, al fine di evidenziare sinteticamente le tappe più importanti dell'evoluzione del pensiero algebrico, ci siamo riferirti, in prima approssimazione, allo studioso G.H. Nesselmann, riportando, quindi, i tre stadi distinti da lui, individuati nella storia dell'Algebra[5] e abbiamo analizzato successivamente lo sviluppo delle conoscenze matematiche, relative alle equazioni di primo e secondo grado, di alcune antiche civiltà come quelle babilonesi, greche, egiziane, indiane, arabe ed europee, studiando alcuni dei problemi presenti nei diversi libri scritti nelle varie epoche storiche e giunti fino a noi grazie al lavoro di parecchi studiosi.

Il lavoro dello storico Nesselmann ci è sembrato di particolare interesse per il compito proposto anche se si è sottolineato il fatto che secondo studi più recenti non si possono individuare, nel percorso storico, in maniera certa, esatta, delle fasi distinte e separate che segnino lo sviluppo del pensiero algebrico. La divisione, ad esempio, tra l'Algebra retorica e quella sincopata o tra questa ultima e quella simbolica non è netta, ben definita, l'una non ha certamente soppiantato di colpo l'altra; il passaggio è stato lento e graduale.

Dai documenti in nostro possesso possiamo affermare (per ora almeno) che l'Algebra in Occidente è nata con l'antica Matematica babilonese (Maracchia, 2001) e si è costituita in maniera indipendente dalla Geometria e dall'Aritmetica con Viète e Bombelli.

La conoscenza della Matematica babilonese è relativamente recente, si basa principalmente sui lavori di Otto Neugebauer e proviene essenzialmente da tavolette di creta.

L'Algebra babilonese era perlopiù un'Algebra retorica, verbale, anche se, secondo studi più recenti, osservando, ad esempio, la tavoletta AO8862 (1800/1600 a.C.), concordemente considerata una delle più antiche ed analizzando lo scritto riportato dallo scriba, è possibile notare, in questo popolo un primo livello algebrico che ricalca, nelle formule riportate, la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (Neugebauer, 1935). Nella difficoltà di classificare i metodi risoluti babilonesi e quindi di identificarli come procedimenti algebrici anziché geometrici intuitivi, enunciati e risolti solo verbalmente, si può comunque dire che qualunque sia il tipo di soluzione, ci sia o non ci sia un sottofondo algebrico con il quale essa è stata sintetizzata, il modo di porre il problema sembra di spirito algebrico dato che da un lato esso presenta la difficoltà di determinare uno o più valori incogniti che devono verificare certe condizioni per ottenere un risultato assegnato, dall'altro in molti casi, il tipo di risoluzione segue, in parecchie tavolette, determinate operazioni ormai standardizzate che spesso non riprendono ogni volta la figura geometrica dalla quale discendono e che quindi segnano un primo passaggio da un ambiente geometrico ad uno algebrico (tav. BM 345689; tav. BM 13901, es.12; tav. BM 80209).

E' difficile, infatti, pensare che al cospetto di procedimenti sostanzialmente simili, non si sia acquisita una certa meccanicità e quindi una certa " formula" di risoluzione da applicarsi ai valori noti per ottenere quelli richiesti.

---

[5] Secondo Nesselmann, nella storia dell'Algebra, si possono individuare tre periodi (fasi) distinti:
1) **Fase retorica** (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.):un'Algebra verbale, tutta a parole, senza simboli.
2) **Fase sincopata** (da Diofanto alla fine del secolo XVI):vengono introdotte delle abbreviazioni per le incognite ma i calcoli sono eseguiti tutti in linguaggio naturale.
3) **Fase simbolica** (introdotta da Viète, 1540-1603): si usano le lettere per tutte le quantità, incognite o meno, e si "sfrutta" l'Algebra non soltanto per scoprire il valore dell'incognita, come nella seconda fase, ma per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.

“Anche gli Egiziani, come i babilonesi, enunciavano e risolvevano i quesiti in maniera del tutto verbale non spiegando né per quale motivo utilizzavano quel determinato metodo per lo svolgimento né perché esso funzionava in quel contesto” (Kline, 1991, pag.25). La Matematica egiziana si presenta ai nostri occhi sotto forma di un insieme di semplici regole non dimostrate corrispondenti a problemi che nascevano nella vita quotidiana della gente. La loro Algebra e la loro Aritmetica ci appaiono, quindi, molto limitate.

Uno degli scritti più importanti della cultura matematica egizia è certamente il papiro di Rhind (noto anche come papiro di Ahmes chiamato così in onore dello scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C.) conservato nel British Museum; papiro che tratta diversi problemi di vita quotidiana, come ad esempio la distribuzione del cibo, che si possono ricondurre a equazioni di primo grado. L'incognita veniva designata con la parola *hau* che vuol dire “mucchio”, l'addizione e la sottrazione venivano indicate con le gambe di un uomo che camminava o verso il simbolo del numero su cui si doveva operare o si allontanava da questo…

Nello studio degli ostacoli epistemologici riguardanti il linguaggio algebrico e nell’analisi del binomio Aritmetica-Algebra relativamente alle equazioni, ci è sembrato di particolare interesse, per il nostro lavoro, il problema 24 di tale papiro nel quale si chiedeva quale fosse il valore del “mucchio”se il “mucchio” e un settimo del “mucchio” sono uguali a 19. Si chiedeva, quindi, di determinare la quantità incognita dell’equazione di primo grado (scritta secondo la notazione moderna) $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Il metodo di risoluzione, detto **“***regola di falsa posizione***”,** di Ahmes basato nell’attribuire all’incognita un valore probabilmente falso ed eseguire su tale valore le operazioni indicate alla sinistra del segno di uguaglianza confrontando successivamente il risultato di questa operazione con il risultato desiderato e ricorrendo all’uso di proporzioni per trovare la risposta esatta, non è altro che un metodo di risoluzione <u>puramente aritmetico</u>. Per mezzo di esso, infatti la soluzione di un’equazione veniva cercata per approssimazioni successive e non si faceva riferimento ad alcuna astrazione.

A differenza dei Babilonesi e degli Egiziani, gli studiosi greci non volevano soltanto “usare” la Matematica come strumento di calcolo, bensì cercavano sempre di giustificare le regole impiegate nei calcoli algebrici; è proprio in questo periodo che si trovano le prime “dimostrazioni”. Non si può ancora parlare di assiomatizzazione dell’Algebra, ma si tende ad una maggiore consapevolezza dei procedimenti usati (Kline, 1991).

Analizzando gli scritti greci possiamo notare uno sviluppo notevole della Geometria, ma non altrettanto del calcolo aritmetico e algebrico. Nelle loro equazioni le incognite rappresentavano segmenti, rettangoli, quadrati, cubi...grandezze geometriche. Potremmo quindi classificare questo tipo di Algebra come <u>Algebra geometrica</u>.

La miglior parte dell’opera dei matematici del periodo classico è giunta sino a noi tramite gli scritti di Euclide, nella sua opera più famosa: gli “Elementi” (tredici libri nei quali si dimostrano molte regole di calcolo). Interessante, ad esempio, è il II libro (nel quale l’autore giustifica alcuni risultati fondamentali dell’Algebra moderna utilizzando un linguaggio del tutto geometrico) ed in particolare la proposizione 6 nella quale viene risolto geometricamente un problema, che enunciato algebricamente si presenta sotto forma di equazione di secondo grado ad un’incognita con coefficienti positivi.

Secondo il pensiero dello studioso Bourbaki, i metodi geometrici utilizzati massicciamente dai Greci, e quindi in particolare da Euclide, non sono stati utili allo sviluppo autonomo dell’Algebra in quanto: “… il progresso verso il rigore va accompagnato in Euclide di una paralisi, ed in alcuni punti anche di un tornare indietro, nello sviluppo del calcolo algebrico. Il predominio della geometria <u>blocca lo svolgimento autonomo della notazione algebrica</u>, gli elementi che appaiono nei calcoli devono essere sempre rappresentati geometricamente …” (Bourbaki, 1976, pag. 75)

L’Algebra, quindi, non trovò adeguati sviluppi nell’antica Grecia se non nel periodo molto tardo grazie a Diofanto di Alessandria (250 circa d.C.) ed ad Erone (100 d.C.) che iniziarono a trattare i problemi aritmetici ed algebrici non "appoggiandosi" alla Geometria e quindi superando la concezione geometrica dell'Algebra.

Per mettere meglio in evidenza il contributo di Diofanto nell'evoluzione dell'Algebra e quindi del pensiero algebrico, può risultare utile, a nostro parere, confrontare uno dei suoi problemi con uno "uguale" di cui si conosce una soluzione più antica, per esempio, quella babilonese ed evidenziare le differenti strategie risolutive.

Il problema che si è scelto di analizzare è il seguente: *" Trovare le dimensioni di un rettangolo di area 96 e il cui semiperimetro sia 20"* (in chiave moderna : $xy=96$, $x+y=20$).

IL metodo babilonese consiste nell'operare sui numeri dati secondo i passi indicati dallo scriba:

1. Dividere per 2 il semiperimetro → $20:2=10$
2. Elevare al quadrato → $10^2=100$
3. Togliere l'area data,96, da 100 → $100-96=4$
4. Estrarre la radice quadrata
5. La lunghezza è: $10+2=12$; la larghezza è: $10-2=8$.

Ciò che si nota, leggendo la procedura descritta, è soltanto la presenza di una successione di operazioni numeriche. E' assente qualsiasi idea di calcolo su una quantità incognita .

In Diofanto, il problema babilonese di II grado proposto precedentemente è enunciato in termini del tutto generali: "Trovare due numeri la cui somma e il cui prodotto formino dei numeri dati" (problema 27 del Libro I dell'*Arithmetica*) e risolto a partire dallo stesso esempio numerico precedente: supponiamo che la somma dei numeri formi 20 unità , che il loro prodotto formi 96 unità, che la differenza dei numeri sia 2 "aritmes" (l'incognita): $x+y=20$; $xy=96$; $x-y=2z$.
Allora, poiché la somma dei numeri è 20 unità, se dividiamo in due parti uguali, ognuna di esse sarà 10 unità e se si aggiunge ad una parte la metà della differenza dei due numeri, 1 "aritmie", e all'altra la si sottrae, la somma dei numeri è nuovo 20 unità e la loro differenza 2 "aritmes": $x=10+z$; $y=10-z$; $xy=100-z^2$
Ma il prodotto dei numeri deve essere pari a 96 unità. Il loro prodotto è 100 unità meno 1 quadrato di "aritmie"[6] che uguagliamo a 96 unità. L'"aritmie" diviene 2 unità. Di conseguenza, il numero più grande sarà 12 unità e il più piccolo sarà 8 unità e questi numeri soddisfano la proposizione.
Come si vede la soluzione ruota attorno all'incognita ausiliaria z.
La comparsa di questa incognita ausiliaria, l'"aritmie, costituisce assieme ai simboli un vero e proprio cambiamento concettuale. Si può infatti affermare che **la storia dell'algebra comincia proprio con Diofanto**.
L'introduzione dell'incognita e di un simbolo speciale per descriverla risulta un'innovazione pari a quella dell'introduzione dello zero. Diofanto segna il passaggio dall'Algebra retorica a quella sincopata.

Il confronto fra le due differenti strategie, riscontrate nei due diversi scritti analizzati (babilonesi e Diofanto), si può dimostrare, a nostro parere, davvero utile nella fase sperimentale di una ricerca sugli ostacoli epistemologici relativi al pensiero algebrico ed in particolare nell'ipotizzare i comportamenti degli studenti nella risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado, analizzando, quindi, successivamente, le difficoltà da loro riscontrate.
L'idea di convergenza tra lo sviluppo storico e quello individuale (Garcia and Piaget, 1989) sembra, infatti, davvero centrale in questo caso: le due diverse strategie risolutive evidenziate dai Babilonesi e dai Greci, da una parte strategie aritmetiche e dall'altra algebriche, si sono infatti dimostrate molto vicine a quelle usate dagli studenti durante la sperimentazione dei due lavori di tesi della dott. Di Chiara e del dott. Di Paola.

Per quanto attiene all'Algebra indiana, in accordo con la Melisani (Melisani, 1996), il simbolismo usato dal popolo indiano, anche se rudimentale, appare sufficiente per poter classificare la loro Algebra come "quasi simbolica" e sicuramente in misura maggiore di quanto lo fosse l'Algebra sincopata di Diofanto. Questa infatti, non sembra più soltanto verbale, espressa a parole e senza l'ausilio del simbolismo, caratteristiche proprie della fase retorica (I fase di Nesselmann), ma non può neanche considerarsi del tutto appartenente alla terza fase di Nesselmann, quella simbolica,

[6] La formula: $(a+b)(a-b)= a^2-b^2$, la si desume facilmente dalla II,5 di Euclide.

in quanto “questo popolo pur sviluppando ottimi procedimenti ed avendo grande abilità e tecnica i diversi passaggi non venivano accompagnati con motivazioni o dimostrazioni” (Melisani, 1996, pag.34).

Le matematiche indiane non ebbero molta influenza diretta sull' Europa, ma sembra quasi sicuro che gli Arabi studiarono l'Aritmetica e l'Algebra indiane in via indiretta: per mezzo dei rappresentanti della scienza dei bramini, accolti nelle corti dei califfi del IX e X secolo. In quel periodo storico furono diverse le opere classiche, letterarie e scientifiche che vennero tradotte in arabo, dal sancrito e dal greco, e furono studiate dai sapienti dell'Islam.

Il grande sviluppo culturale e scientifico raggiunse uno dei suoi momenti culminanti durante il califfato di Al-Mamun (809-833) con la fondazione della “Casa del Sapere”.

Fra i tanti membri che ne fecero parte, il matematico ed astronomo Mohammed Ibn Musa al-Khowarizmi, uno studioso che scrisse più di una dozzina di opere di Astronomia e di Matematica, le più antiche delle quali erano probabilmente di derivazione indiana. Il titolo della sua opera più importante “Al-jabr w’al muqabala” ha fornito nelle lingue moderne il termine “Algebra”.

Se da un lato, però, l’Algebra araba sembra segnare un certo progresso nell’evoluzione del pensiero algebrico, da un altro punto di vista questo popolo sembrerebbe fare un grande passo indietro sia al livello dell’Aritmetica (pur conoscendo dagli Indiani i numeri negativi, li rifiutarono) che dell’Algebra. “Gli arabi non usavano né abbreviazioni né, soltanto alcuni nomi per nominare l’incognita e le sur potenze...un passo indietro, quindi, sia rispetto all’Algebra indiana che a quella di Diofanto” (Melisani, 1996, pag.34).

Essi, inoltre, influenzati dai Greci, sentivano sempre la necessità di spiegare e giustificare i procedimenti utilizzati per risolvere i problemi algebrici, ma si servivano per questo scopo, soltanto della Geometria. Come il popolo greco, infatti, essi sentivano di dover giustificare tutto geometricamente. Il predominio della Geometria, dei metodi geometrici, sembrerebbe, in questo caso, prevalere sullo svolgimento autonomo della notazione algebrica.

A testimonianza di ciò si è cercato di analizzare, in una prima approssimazione, qualche problema tra quelli proposti in alcuni testi arabi, evidenziando i procedimenti algebrici/geometrici risolutivi, ritrovati.

Considerando ad esempio, il problema: “ Un quadrato e dieci radici sono uguali a 39 unità” ed analizzando i procedimenti risolutivi riportati da Al-Khuwarizmi, si ritrovano due differenti tecniche che riportiamo (indicando con 1 la prima strategia e con 2 la seconda) al fine di mettere in evidenza come la prima risoluzione, pur corretta logicamente, non era da loro ritenuta quella risolutiva per il problema proposto e solo la seconda, quella geometrica, era considerata ottimale (oggi potremmo dire che la seconda strategia può ritenersi superflua):

1a . prendere metà delle radici → $\frac{10}{2}=5$

1b . moltiplicarle per se stessa → $5 \cdot 5 = 25$

1c . si aggiunge a queste ultime 39 → $25+39 = 64$

1d . se ne fa la radice quadrata → $\sqrt{64} = 8$

1e . a tale numero si sottrae la metà delle radici → $8-5 = 3$

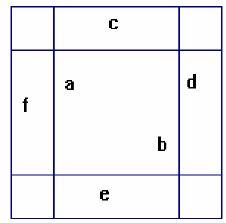
x=3 è la radice cercata .

che in notazione moderna si presenta:

$x^2 +10x =39;\ \frac{10}{2}=5;\ x^2 +10x+25=39+25;\ (x+5)^2 =64;\ x+5=8;\ x=3$

2a. Tracciare un quadrato ab per rappresentare x^2 e sui quattro lati di questo quadrato porre i rettangoli c, d, e, f ciascuno largo 2* ½ unità. Per completare il quadrato maggiore si aggiungano i quattro piccoli quadrati agli angoli, ciascuno dei quali di area di 6* ¼ unità (dunque, per completare il quadrato si devono aggiungere 4 per 6* ¼ unità, ossia 25 unità) ottenendo così un quadrato la cui area misura 39+25 unità. Il lato del quadrato maggiore deve pertanto misurare 8 unità, da cui si sottrae 2 per 2* ½ unità = 5 unità trovando così che x =3 è la soluzione dell’equazione data.

Si dimostra in tal modo che la soluzione presentata algebricamente era esatta.



Con il passare degli anni, lentamente e non senza difficoltà, la cultura superiore degli arabi finì col penetrare anche in Europa. Gli Arabi di Spagna e gli Arabi del Levante hanno in gran parte il merito di aver favorito la rinascita della cultura europea che durante tutto il periodo altomedievale (dal 400 al 1100 circa), si trovava in una situazione del tutto stagnante. In quel periodo infatti "…la civiltà europea non si preoccupò dello sviluppo della Matematica, non vi fu alcun progresso, né vi furono tentativi seri di generare nuove conoscenze. Tutti i problemi affrontati richiedevano soltanto l'uso delle quattro operazioni fra numeri interi…i calcoli venivano effettuati con l'aiuto abaco… Si utilizzava il sistema di numerazione romano, evitando lo zero di cui non si capiva il senso. Le frazioni venivano usate raramente ed i numeri irrazionali non comparivano affatto."(Melisani, 1996, pag.48).

Uno degli studiosi che si mise in luce in quel periodo fu sicuramente Leonardo Pisano, detto Fibonacci al quale si fa risalire l'uso del termine equazione (dal latino aequatio).

In base ai dati storici in nostro possesso, oggi siamo in grado di poter affermare che a partire dal secolo XIII le scoperte più importanti che si fecero in Matematica si ebbero principalmente nel campo dell'Aritmetica e dell'Algebra: molti studiosi infatti dedicarono sempre maggiore interesse a queste materie, cercando di approfondire i loro studi. In questi scritti, chiamati "trattati d'abaco", l'Algebra aveva una base aritmetica piuttosto che geometrica e molte delle questioni affrontate venivano risolte con l'ausilio delle equazioni. Un classico trattato d'abaco è il "Trattato d'Algibra" scritto alla fine del XIV sec. da un anonimo fiorentino. Un testo non elementare nel quale vengono trattati molti argomenti mercantili (che caratterizzano questo tipo di lavori) proposti non soltanto per una finalità pratica, bensì affrontati in maniera più complessa ed astratta. Franci e Pancanti (Franci, Pancati,1988), due studiosi contemporanei, ritengono che quest'opera sia uno dei migliori trattati d'abaco medievali e del Rinascimento che essi abbiano esaminato. In particolare segnalano che "…i capitoli finali dedicati all'Algebra … sono fondamentali nella ricostruzione della storia di questa disciplina nei secoli XIII e XIV…"(Franci, Pancati,1988, pag.6).

Ciò che si era costruita, comunque, sino al 500, era un'Algebra lenta e poco precisa: i simboli più comunemente usati nei testi di Algebra erano frutto di abbreviazioni di parole comuni, di "pezzi" di vocaboli che nominavano l'incognita del problema.

Le richieste sempre crescenti della scienza, portarono, però, negli anni, gli studiosi ad apportare molte variazioni; i matematici si sentirono sempre più stimolati ad usare una notazione simbolica che fornisse loro più velocità e precisione e cominciarono così a capire la "potenza" del simbolismo per l'Algebra. "Nella costruzione del linguaggio algebrico il cambiamento più significativo fu introdotto con il simbolismo di Viète" (Melisani, 1996, pag.59). Egli, cosi come anche Bombelli, non usavano il simbolismo per indicare soltanto l'incognita ma ricorrevano alle lettere anche per visualizzare termini generici che occorreva esprimere.

Il loro "nuovo" linguaggio non era stato creato per risolvere soltanto problemi di calcolo algebrico ma veniva applicato per provare diverse regole generali.

L'Algebra entra in questo modo nella fase simbolica.

Un aspetto che riteniamo utile sottolineare, trattando lo sviluppo dell'Algebra e quindi del linguaggio simbolico al fine di, ripetiamo, interpretare gli ostacoli e le difficoltà del processo di apprendimento odierno relativamente al pensiero algebrico e alle sue interazioni con quello aritmetico e quello geometrico, è la <u>continua tendenza</u>, nei vari scritti, <u>alla generalizzazione</u> dei problemi affrontati.

Facendo infatti un parallelismo tra il "Liber Quadratorum" di Pisano, il "Trattato d'Algibra" dell' anonimo fiorentino ed "L'Algebra" di Bombelli si riscontra una sempre maggiore consapevolezza della necessita di generalizzare tutti i processi di risoluzione ricreati e la possibilità quindi di applicare le tecniche di risoluzione ad una diversità di casi specifici.
L'Algebra, quindi, come studio di tipi generali di problemi: tutto ciò che si può applicare al caso generale lo si può utilizzare per infiniti casi particolari.
Se da un lato l'Algebra veniva considerata come un'"Aritmetica universale" cioè una disciplina capace di esprimere in maniera più generale tutte le regole valide per le operazioni aritmetiche, dall'altro, si cercava di liberarla, di sganciarla da questo "vincolo" rendendola meno limitata.
Secondo questa visione, la variabile, concetto fondamentale per il pensiero algebrico, non poteva più essere considerata come un numero generalizzato; bisognava "svuotarla" di ogni significato esterno! Come il resto del percorso evolutivo però, anche questa fase è stata molto lenta e difficoltosa.

L'Algebra, una volta liberata da ogni semantica esterna, ha proseguito il suo cammino verso la creazione di oggetti matematici sempre più astratti, nel filone della cosiddetta matematica pura, che nasce a metà del secolo scorso.

"Sicuramente si è molto lontani dalla visione della Matematica come ancella delle scienze naturali: ora appare solo regina delle proprie costruzioni." (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994, pag.21).

Analisi sperimentale

Come già precedentemente detto nell'introduzione, il presente articolo nasce da una revisione di due lavori sperimentali, svolti nell'ambito del progetto di tesi di laurea in Matematica presso l'Università di Palermo[3] e funzionali all'analisi dei comportamenti degli studenti nella risoluzione di un test, creato ad hoc per cercare di indagare e quindi valutare il grado di autonomia del pensiero algebrico rispetto a quello aritmetico e geometrico. Nelle due tesi analizzate si presentano infatti, come strumento di investigazione per lo studio proposto, due test nei quali i quesiti sono formulati in contesti differenti (denominati geometrico, algebrico e aritmetico/naturale-quotidiano) e quindi espressi secondo differenti linguaggi: alcuni in linguaggio naturale, altri in linguaggio propriamente algebrico.

Scopo di tale scelta è quello di cercare di verificare, in una prima approssimazione, se il contesto in cui il quesito è presentato è un elemento decisivo o no nell'atto risolutivo e quindi se uno studente, risolvendo un particolare quesito tra quelli proposti, userà una procedura piuttosto che un'altra, perché vincolato mentalmente dal contesto in cui il quesito gli è stato presentato.

L'essere vincolati mentalmente a delle specifiche tipologie di situazioni può infatti risultare un ostacolo per la libera espressione del pensiero in generale e quindi, in particolare, del pensiero algebrico. Secondo uno studio recente (Bednzar, Radford, Janvier, Lepage, 1992), infatti, le strategie spontanee adottate da uno studente per la risoluzione di un problema si riflettono sulle differenti rappresentazioni del problema.

La metodologia di studio seguita nell'analisi sperimentale nelle due tesi analizzate è la stessa (costruzione del test, analisi a-priori dei quesiti proposti nel test, sperimentazione in classe[7], analisi quantitativa dei dati); nel lavoro condotto dalla dott. Di Chiara è stato introdotto in più, oltre all'uso del test, un post-test, impiegato nell'interpretazione dei risultati evidenziati precedentemente dal test.

Perché la scelta di uno strumento come il post-test ?

---

[7] La sperimentazione della tesi della dott. Di Chiara si e svolta presso il Liceo Scientifico "Mauro Picone" di Lercara Freddi. Sono stati coinvolti 116 studenti (77 nelle seconde classi e 39 nelle terze classi).
La sperimentazione della tesi del dott. Di Paola si e svolta presso tre scuole di Palermo: Liceo Classico "Garibaldi", Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Istituto Tecnico Commerciale "Pareto". Sono stati coinvolti 148 studenti (71 nelle prime classi, 47 nelle seconde classi e 30 nelle terze classi).

Il lavoro della dott. Di Chiara può essere considerato, in un certo senso, come una naturale evoluzione della tesi del dott. Di Paola: dopo il lavoro condotto in classe dal dott. Di Paola e alla luce dei risultati evidenziati nell'analisi sperimentale si è sentita l'esigenza di approfondire ulteriormente lo studio proposto, creando uno strumento investigativo più "profondo", al fine di evitare possibili interferenze di pensiero e dare, quindi, maggiore enfasi alle interpretazioni dei comportamenti adottati dagli studenti nel test.

Uno strumento investigativo come quello di un post-test può essere a nostro parere uno strumento interessante in questo tipo di analisi in quanto può facilitare una valutazione sul grado di consapevolezza della metodologia usata dallo studente nella risoluzione del quesito proposto e, sembra per certi versi, più "sicuro" rispetto alla valutazione di una autoanalisi richiesta allo studente durante la risoluzione del test (metodologia adottata nel lavoro del dott. Di Paola).

La scelta delle classi è stata effettuata allo scopo di verificare una differenza di verbalizzazione tra gli studenti, al fine di valutare se un determinato comportamento tende a scomparire o a perdurare nel tempo.

La ricerca condotta ha permesso di evidenziare dei risultati a nostro parere interessanti: dall'analisi parallela dei dati raccolti nei due lavori di tesi analizzati, si è potuto infatti tracciare un quadro generale della situazione studiata con l'intenzione di descrivere il comportamento degli studenti, evidenziato nelle due differenti sperimentazioni condotte.

Dall'analisi dei dati raccolti si evince un diverso comportamento degli allievi secondo la struttura logica di un problema: **in un ambiente strettamente algebrico**, i ragazzi del Liceo Scientifico[8] si mostrano più disinvolti e più abili riuscendo quindi a risolvere, ad esempio, un'equazione algebrica loro proposta in maniera del tutto autonoma. <u>Il sapere mostrato dagli studenti non appare però un sapere algebrico consapevole, ma solo superficiale</u>. Se fosse un sapere consapevole il pensiero algebrico sarebbe dovuto venir fuori anche nella risoluzione di altri quesiti proposti nei test secondo una formulazione non propriamente algebrica (quesiti espressi in un contesto geometrico, aritmetico/quotidiano). Una situazione particolare, quindi, che mostra come al Liceo Scientifico, pur avendo una serie di algoritmi e strategie mirate al pensiero algebrico, lo studente non raggiunge il pensiero algebrico ma si ferma ad uno stadio intermedio: quello che è stato chiamato <u>pensiero pre-algebrico</u>. Lo stesso non si può affermare per gli studenti del Liceo Classico e dell'Istituto Tecnico Commerciale[9]. Se, infatti, da una parte, i ragazzi del Liceo Classico mostrano poca dimestichezza con il linguaggio formalizzato e quindi non riescono a lavorare in maniera disinvolta su un problema espresso in linguaggio algebrico, dall'altro lato, i ragazzi dell'Istituto Tecnico Commerciale riescono ad affrontare il problema seguendo una strategia algebrica ma non avendo una forte consapevolezza delle potenzialità del linguaggio si limitano a "sfruttare" l'Algebra.

A causa forse di un numero minore di ore di Matematica negli indirizzi tecnici ed umanistici, il linguaggio algebrico non viene visto dai ragazzi come un modo di espressione ed un linguaggio da usare abitualmente in Matematica. Questi, infatti, avranno affinato la loro intuizione e iniziato a fare qualche passo avanti sulla via dell'astrazione ma sicuramente non posseggono il pensiero algebrico in maniera consapevole.

In un ambiente aritmetico/quotidiano: al Liceo Classico si presenta negli studenti, anche in questo caso, una forte difficoltà all'uso del pensiero algebrico: <u>il pensiero aritmetico è fortemente radicato in loro</u> e difficilmente passano in maniera autonoma a considerare il problema seguendo una strategia algebrica. Ciò conferma che il <u>pensiero aritmetico è stato il primo ad essere appreso e rimane un pensiero forte</u>. Relativamente all'Istituto Tecnico Commerciale, i ragazzi rispetto ai loro coetanei del Liceo Classico mostrano sì una maggior abilità nel tradurre il linguaggio naturale in un linguaggio formalizzato, ma evidenziano spesso delle difficoltà dal punto di vista del metodo.

Infine si è osservato che gli allievi del Liceo Scientifico, posti di fronte ad un problema espresso in linguaggio naturale, lo affrontano inizialmente con strategie prettamente aritmetiche, soprattutto se non sono richiesti parecchi conti; utilizzano invece il pensiero algebrico, mettendo in formula il problema, ogni qualvolta il quesito presenta laboriosi tentativi di calcolo. Questo atteggiamento

[8] Liceo scientifico "Mauro Picone" di Lercara Freddi e Liceo scientifico "Galileo Galilei" di Palermo.
[9] Liceo Classico "Garibaldi" di Palermo, Istituto Tecnico Commerciale "Pareto" di Palermo

potrebbe far pensare che il pensiero algebrico è esistente in maniera non consapevole e matura avvalorando quindi ciò che si era osservato precedentemente analizzando l'ambiente algebrico.

Bibliografia

- Arzarello F., Bazzini L., e Chiappini G., (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- Bednzar N., Radford L., Janvier B., Lepage A., (1992), *Arithmetical and algebraic thinking in problem solving*, Proc. PME XVI, Durham N.H., Vol. I
- Bourbaki N., (1976), *Elementos de historia de las Matematicas*, Madrid.
  Ed. orig.: *Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann*, (1969), Paris
- Di Chiara Ilaria, (2004*), Equazioni di primo e secondo grado* (tesi di laurea), Palermo.
- Di Paola Benedetto, (2003), *Analisi sperimentale di alcune fasi del passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico* (tesi di laurea), Palermo.
- Franci R., Pancati M., *Introduzione di "Il Trattato d'Algibra".* In Anonimo, pag. I- XXIX, 1988.
- Garcia R., Piaget J.. (1989), *Psychogenesis and the history of scienze*, Columbia Univ. Press, New York.
- Kline M., (1991), *Storia del pensiero matematico.* Vol. I, Vol. II, Enaudi Editore, Torino.
- Loria G., (1929), *Storia delle matematiche* Vol I, Torino.
- Maracchia S, articolo tratto da: *Progetto Alice 2001*, N.5 Vol II
- Melisani, E., (1992), *Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione.* Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. 3, Palermo, Italia, pp. 65 – 86. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm .
- Melisani, E., (1996), *Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni*. Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. *6,* Palermo, pp. 26 - 77. – ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm.
- Marino T., Spagnolo F., (1996), *Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica.* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19B (2), pag.130-152.
- Nesselmann G.H., (1843), *Essez der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutch*, Berlin.
- Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte* (MKT),I; 1935
- Spagnolo, F., (1998), *Il ruolo della storia delle matematiche nella ricerca in didattica,* Storia e ricerca in didattica.