Le Trasformazioni geometriche e le nuove tecnologie: CAS e/o Geometria dinamica

Carmelo Di Stefano[1]

ABSTRACT

LO STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE È SUBITO APPARSO COME UNO DEGLI ARGOMENTI MATEMATICI PIÙ ADATTI A ESSERE TRATTATI CON L'USO DEI VARI SOFTWARE CHE SI SONO AFFERMATI NEL TEMPO. IN QUESTO LAVORO VERRANNO PRESI IN CONSIDERAZIONE DUE APPROCCI: UNO MEDIANTE UN SOFTWARE DI TIPO C.A.S. E L'ALTRO MEDIANTE I SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA. DI CIASCUNO DEI DUE VERRANNO CONSIDERATI IN DETTAGLIO I DIVERSI ASPETTI E LE RELATIVE IMPLICAZIONI DIDATTICHE.

1. Posizione del problema

Anche se con difficoltà, l'utilizzo delle nuove tecnologie nell'insegnamento della Matematica si sta affermando vieppiù. Il merito è dovuto anche agli stessi programmatori che forniscono prodotti sempre più user friendly, riducendo così il peso di quella parte indispensabile che, richiedendo diverse ore di esercitazione, spesso favorisce la naturale ritrosia dell'insegnante a usare software nei suoi curricoli. In genere i software dedicati alla matematica si suddividono in due grandi categorie: i C.A.S.[2] (adatti soprattutto ad applicazioni algebrico-analitiche) e i software di geometria dinamica (più specializzati verso temi di geometria). A queste possono aggiungersi altri software "ibridi", come i fogli elettronici o i data-base, che essendo software di tipo all-purpose, trovano delle applicazioni anche nel campo della matematica. Certamente ci sono argomenti che per essere trattati hanno bisogno solo di un particolare software, o per i quali comunque risulta immediato l'utilizzo di un tipo piuttosto che di un altro. Per esempio Excel® è molto più adatto allo studio della statistica, soprattutto dal punto di vista dei supporti grafici (istogrammi, aerogrammi, ...) e delle funzioni predefinite (media, mediana, ...), che non Derive®; analogamente, quest'ultimo è più adatto del primo allo studio di grafici di funzioni. Ci sono poi particolari strumenti, come le calcolatrici grafico-simboliche di ultima generazione, che trattano abbastanza bene diversi problemi matematici, anche perché in realtà contengono diversi software. Per esempio l'ultima calcolatrice della Texas Instruments, la Voyage 200®, ha un CAS molto simile a Derive come ambiente HOME e nello stesso tempo ha precaricate, fra le altre, le versioni per calcolatrice di Cabri® e The Geometer's Sketchpad®, per quel che riguarda la geometria dinamica, nonché un software per lo studio della statistica.

Per quegli argomenti per i quali è possibile, senza particolari acrobazie mentali o didattiche, l'approccio con più software, nasce spontanea la richiesta di stabilire quale utilizzare, a seconda del particolare approccio scelto.

Uno di questi argomenti è certamente quello delle trasformazioni geometriche.

2. Richiami teorici.

Nei curricoli di matematica dei diversi indirizzi delle scuole medie superiori italiane, ormai da qualche anno compare l'argomento delle trasformazioni geometriche, naturalmente con diversi gradi di approfondimento. Certamente per tutti gli indirizzi è prevista, almeno a livello introduttivo, lo studio delle isometrie da un punto di vista sintetico. Per indirizzi più "forti" si prevede anche lo studio, sia sintetico che analitico, di isometrie, similitudini (in particolare omotetie) e affinità. Vediamo di richiamare brevemente qualche nozione teorica, iniziando con un approccio sintetico.

---

[1] Liceo Scientifico "E. Vittorini" – Gela; Formatore A.D.T. per la Sicilia.

[2] Acronimo di Computer Algebra System

Definizione 1. Una corrispondenza biunivoca fra punti del piano o dello spazio si chiama **trasformazione geometrica**.

Indichiamo con P' il corrispondente del generico punto P mediante una trasformazione geometrica. Supponiamo nota la definizione di distanza o misura in uno spazio euclideo bidimensionale, che per un segmento AB, si indica con $\overline{AB}$.

Definizione 2. Una trasformazione geometrica τ per la quale, per ogni segmento AB si ha $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, si dice **trasformazione isometrica o una isometria**.

Definizione 3. Una trasformazione geometrica τ per la quale per ogni punto P, si ha $\tau(P) = P + \vec{\mathbf{v}}$, con $\vec{\mathbf{v}}$ vettore dato, si chiama **traslazione di vettore $\vec{\mathbf{v}}$**.

Definizione 4. Una trasformazione geometrica τ per la quale il punto medio di PP' appartiene a una retta a e $PP' \perp a$, per ogni punto $P \notin a$, si chiama **simmetria assiale** di asse la retta a.

Definizione 5. Una trasformazione geometrica τ per la quale il punto medio di PP' è il punto C, per ogni P ? C, si chiama **simmetria centrale** di centro il punto C.

Definizione 6. Una trasformazione geometrica τ per la quale l'angolo al centro della circonferenza di centro O ed estremi dell'arco P e P' misura α, per ogni P, si chiama **rotazione** di centro O e angolo α.

Consideriamo adesso altre trasformazioni non isometriche, ma ugualmente importanti.

Definizione 7. Una trasformazione geometrica τ per la quale, comunque si considerino due punti distinti P e Q del piano, si ha: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = k$, con $k > 0$, si chiama **similitudine**; la costante k si chiama **rapporto di similitudine**. Se le rette che congiungono punti corrispondenti si incontrano in un punto O, la similitudine si chiama **omotetia di centro *O***.

Definizione 8. Una trasformazione geometrica τ che a una retta fa corrispondere una retta si chiama **affinità**.

Un approccio analitico delle trasformazioni invece si ha considerando delle equazioni che forniscono le leggi della stessa trasformazione. Li presentiamo sotto forma di teoremi.

Teorema 1. Le leggi di una generica isometria sono $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = mx + ny + p \end{cases}$, con la condizione che si abbia: $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 = 1 \wedge a \cdot m + b \cdot n = 0$.

Teorema 2. La traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$ è un'isometria di leggi $\begin{cases} x' = x + v_x \\ y' = y + v_y \end{cases}$.

Teorema 3. La simmetria centrale di centro il punto $\boldsymbol{C} \equiv (\boldsymbol{x_C}, y_C)$ è un'isometria di leggi $\begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases}$.

Teorema 4. La simmetria assiale di asse la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è un'isometria di leggi $\begin{cases} x' = \dfrac{(b^2 - a^2) \cdot x - 2aby - 2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = \dfrac{-2abx - (b^2 - a^2) \cdot y - 2aby - 2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$.

Teorema 5. Le leggi di una rotazione attorno all'origine di un angolo di misura α e di verso antiorario sono: $\begin{cases} x' = x \cdot cos(a) - y \cdot sin(a) \\ y' = y \cdot cos(a) + x \cdot sin(a) \end{cases}$.

Teorema 6. Le leggi di una generica similitudine di rapporto k sono $\begin{cases} x' = k \cdot (ax + by) + c \\ y' = k \cdot (mx + ny) + p \end{cases}$, con la condizione che si abbia: $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 = 1 \wedge a \cdot m + b \cdot n = 0$.
Teorema 6. Le leggi di una **omotetia** di centro il punto $\boldsymbol{C} \equiv (\boldsymbol{x_C}, y_C)$ e rapporto il numero k sono $\begin{cases} x' = kx + (1-k) \cdot x_C \\ y' = ky + (1-k) \cdot y_C \end{cases}$, con $k \neq 0$

Teorema 7. Le leggi di una generica affinità di rapporto k sono $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = mx + ny + p \end{cases}$, con la condizione che si abbia: $k = a \times n - b \times m \neq 0$.

Particolarmente interessanti, nello studio delle trasformazioni geometriche, è il concetto di elemento unito.

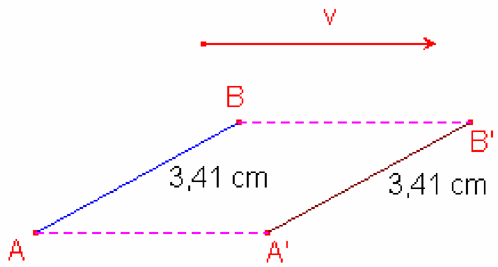
Definizione 9. In una trasformazione t una figura F (intesa come un insieme di punti) si dice **unita** se ad essa corrisponde sé stessa, ossia se $t(F) = F$.

Teorema 8.
- In una traslazione sono unite tutte le rette parallele al vettore;
- In una simmetria centrale sono uniti il centro e tutte le rette passanti per esso;
- In una simmetria assiale sono uniti l'asse di simmetria e tutte le rette perpendicolari a esso;
- In una rotazione sono uniti il centro e le circonferenze aventi in esso il loro centro.

Passiamo adesso a presentare qualche questione da trattare con i software.

3. Chi ci dice che una data trasformazione è isometrica?

Un primo problema consiste nel provare che traslazioni, simmetrie e rotazioni sono effettivamente isometrie. Usando l'approccio della geometria dinamica costruiremo un segmento e il suo corrispondente mediante la data isometria, sia per esempio una traslazione.



In questo caso, in genere si procede per passi. Costruendo un segmento AB e il suo trasformato A'B' rispetto a un generico vettore v. Quindi si misurano i due segmenti, verificandone l'isometria. Variando le dimensioni del segmento AB o del vettore v, si continuerà a verificare l'isometria. Questa è la fase della congettura, che rappresenta la caratteristica di tali software. Volendo invece dimostrare la verità del risultato, costruiremo il quadrilatero AA'B'B, dimostrando che abbiamo a che fare con un parallelogramma, il che prova appunto che AB e A'B' sono isometrici.
L'approccio mediante i CAS è invece del tutto analitico. Abbiamo perciò bisogno di definire alcune funzioni.

Distanza fra 2 punti

#1: $\mathrm{dist\_2\_pti}(xa, ya, xb, yb) := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2}$

Leggi di una traslazione

#2: $\mathrm{trasla}(x, y, vx, vy) := [x + vx, y + vy]$

Quindi calcoliamo la misura del generico AB e del relativo corrispondente.

#3: $\mathrm{dist\_2\_pti}((\mathrm{trasla}(xa, ya\cdot a, vx, v))_1, (\mathrm{trasla}(xa, ya, vx, vy))_2, (\mathrm{trasla}(xb, yb, vx, vy))_1, (\mathrm{trasla}(xb, yb, vx, vy))_2)$

#4: $\sqrt{xa^2 - 2\cdot xa\cdot xb + xb^2 + (ya - yb)^2}$

Come si vede, a parte la differente forma, il risultato #4 è del tutto simile a #1, il che dimostra quanto richiesto. Osserviamo che ciò che da Derive è visualizzato sotto forma di un indice, è immesso nella forma **trasla(xa,ya,vx,vy) sub 1** e così via. Tale comando estrae il primo elemento da un vettore. Per i dettagli sui comandi usai si rimanda all'help in linea del software oppure a [DSD]

4. Chi ci dice che le leggi sono quelle?
Nel n. 2 abbiamo presentato delle leggi sotto forma di teoremi, ma senza dimostrazione. Vogliamo vedere come possiamo ottenere alcune di esse. Per esempio le leggi di una simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $ax + by + c = 0$. Basta "tradurre" in Derive la definizione 4.

#1: $\text{punto\_medio}(xa,\ ya,\ xb,\ yb) := \left[\dfrac{xa + xb}{2},\ \dfrac{ya + yb}{2}\right]$

#2: $\text{coeff\_ang\_2\_pti}(xa,\ ya,\ xb,\ yb) := \dfrac{yb - ya}{xb - xa}$

#3: InputMode := Word

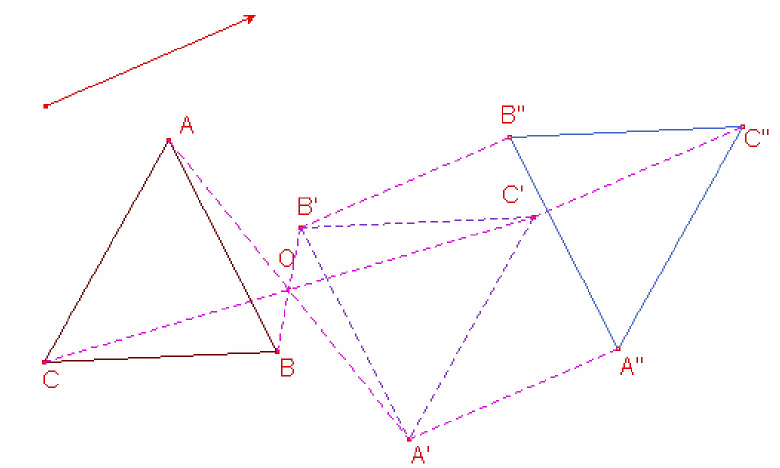
#4: $\text{SOLVE}\left(a\cdot(\text{punto\_medio}(x,\ y,\ x1,\ y1))_1 + b\cdot(\text{punto\_medio}(x,\ y,\ x1,\ y1))_2 + c = 0 \wedge -\dfrac{a}{b}\cdot\text{coeff\_ang\_2\_pti}(x,\ y,\ x1,\ y1) = -1,\ [x1,\ y1]\right)$

#5: $x1 = -\dfrac{x\cdot(a^2 - b^2) + 2\cdot a\cdot(b\cdot y + c)}{a^2 + b^2} \wedge y1 = -\dfrac{2\cdot a\cdot b\cdot x + y\cdot(b^2 - a^2) + 2\cdot b\cdot c}{a^2 + b^2} \wedge b\cdot(x1 - x) \ne 0$

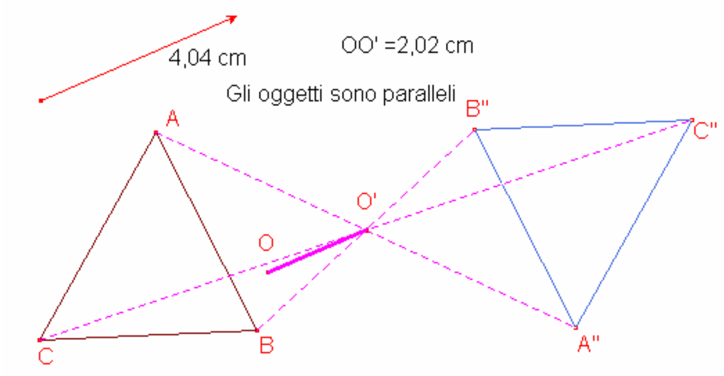
Spieghiamo le immissioni. Intanto abbiamo definito le leggi per determinare le coordinate del punto medio di un segmento dati gli estremi (#1); del coefficiente angolare di un segmento date le coordinate degli estremi (#2). Poiché vogliamo usare nomi di variabili lunghe più di un carattere abbiamo inserito il comando #3. Abbiamo poi tradotto le due condizioni che definiscono la simmetria, trovando appunto quanto voluto.
Questo approccio è tipico dei C.A.S. e non ha corrispondenza in Cabri.

5. Che tipo di trasformazione è una certa composizione?

Un'altra interessante questione riguarda lo stabilire che tipo di trasformazione è il risultato della composizione di due trasformazioni note. Utilizzando Cabri, dobbiamo stabilire quali sono le caratteristiche "geometriche" di ciascuna trasformazione. Consideriamo solo quelle delle isometrie, senza giustificazione, poiché le riteniamo note o comunque non difficili da comprendere, essendo dipendenti dalla stessa definizione.
Spesso basta considerare i segmenti colleganti punti corrispondenti. Per determinare se una trasformazione è una traslazione essi devono essere isometrici e paralleli; per una simmetria centrale devono essere tutti incidenti in uno stesso punto, che è il centro; per una simmetria assiale devono essere paralleli ma non per forza isometrici. Per stabilire se abbiamo a che fare con una rotazione invece dobbiamo considerare gli assi dei detti segmenti, i quali devono essere incidenti in uno stesso punto. Se nessuna delle dette proprietà è verificata e siamo sicuri che la trasformazione è un'isometria, allora abbiamo a che fare con una antitraslazione o glissosimmetria.
Vediamo un esempio: la composizione fra una simmetria centrale e una traslazione.



Intanto costruiamo le figure, unendo i vertici corrispondenti. Adesso lavoriamo sulla prima e ultima figura.



Unendo i vertici corrispondenti abbiamo verificato che si incontrano in un punto, il che ci suggerisce di avere a che fare con una simmetria centrale. Osservando la figura ci sembra che il segmento che ha per estremi centri sia parallelo al vettore; usando l'apposito comando, Cabri risponde che la nostra impressione è corretta. Inoltre, misurando tale segmento e il vettore, congetturiamo che questo sia doppio dell'altro. Tutte queste congetture sono corrette e possiamo sia verificarle più volte con Cabri, sia dimostrarle. Per la dimostrazione usiamo l'approccio analitico.

Leggi di una simmetria centrale

#1: sim_cent(x, y, a, b) := [2·a − x, 2·b − y]

#2: $\text{trasla}((\text{sim\_cent}(x, y, a, b))_1, (\text{sim\_cent}(x, y, a, b))_2, vx, vy)$

#3: $[-x + 2\cdot a + vx, -y + 2\cdot b + vy]$

Le leggi sono di una simmetria di centro (a+vx/2,b+vy/2)

Abbiamo facilmente dimostrato il primo fatto. Vediamo di provare anche gli altri due.

#4: $\text{dist\_2\_pti}\left(a + \frac{vx}{2}, b + \frac{vy}{2}, a, b\right)$

#5: $\frac{\sqrt{(vx^2 + vy^2)}}{2}$

Questa è la metà della misura di v

#6: $\text{coeff\_ang\_2\_pti}\left(a + \frac{vx}{2}, b + \frac{vy}{2}, a, b\right)$

#7: $\frac{vy}{vx}$

#8: coeff_ang_2_pti(vx, vy, 0, 0)

#9: $\frac{vy}{vx}$

Ancora una volta, senza preoccuparci dei “conti” abbiamo dimostrato facilmente quel che Cabri ci aveva suggerito.

6. Conclusioni.

Per brevità abbiamo presentato solo alcune questioni relative alle isometrie, ma facilmente possiamo estenderle alle altre trasformazioni, nonché ad altre questioni come la determinazione degli eventuali elementi uniti di una trasformazione. Rimandiamo ai titoli in bibliografia per approfondimenti.

Crediamo di aver mostrato come rinnovare l'insegnamento della matematica, utilizzando le nuove tecnologie, senza che ciò significhi mortificazione della matematica, quanto piuttosto un suo elevamento da calcolo ripetitivo e addestrativo che troppo spesso viene spacciato per matematica.

BIBLIOGRAFIA

[DSC] Di Stefano Carmelo, *Cabri*, in 3 volumi, Ghisetti & Corvi, Milano.
[DSD] Di Stefano Carmelo, *Derive*, in 3 volumi, Ghisetti & Corvi, Milano.