ASPETTI DIDATTICI DELLO STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE:

L'*Offerta Musicale* di J. S. Bach

di Daniela Galante

Riassunto.

Ciò che oggi è oggetto di discussione è "quale matematica insegnare" e "come insegnarla".

Col presente lavoro intendo dare un modesto contributo all'attuale dibattito mettendo in evidenza, nell'ambito dell'interdisciplinarietà, alcuni aspetti paralleli fra la matematica e la musica, perchè entrambe, nate come attività intellettuali e creative fin dalle origini della specie umana, da sempre sono in stretta relazione.

Oggetto di indagine sono le trasformazioni geometriche "scoperte" nella costruzione di incisi melodici e applicate alla popolare melodia *Frère Jacques*. Nella seconda parte viene analizzata la rigorosa applicazione delle isometrie che J. S. Bach realizza, con precisione scientifica, nell'*Offerta Musicale.*

INTRODUZIONE

Un insegnamento moderno della matematica non può assolutamente ignorare i legami che ci sono fra matematica e realtà, se non vuole ridursi a uno sterile esercizio di abilità formali destinati ad un rapidissimo oblio al di fuori delle aule scolastiche.

Si tratta dunque di insegnare a riconoscere la matematica "implicita" nelle più svariate situazioni del mondo reale; occorre abituare gli allievi a scegliere essi stessi le variabili significative per la soluzione di un determinato problema; occorre stimolarli a costruire opportuni modelli matematici e a valutare l'adeguatezza o meno di un modello alla situazione che si intende schematizzare.

Con queste considerazioni, si può dunque supporre che ci si avvii a cambiare qualcosa nell'insegnamento della matematica, non solo dal punto di vista dei contenuti, ma anche, auspicabilmente, delle metodologie didattiche.

Il tema centrale della dualità contenuto-metodologia sottintende il ruolo culturale della matematica e nel caso specifico di una sua branca come la geometria, il rinnovamento contenutistico può significare una rivisitazione alla luce degli sviluppi recenti della disciplina, delle sue applicazioni e degli aspetti interdisciplinari.

In questo senso svolgono un ruolo rilevante le trasformazioni geometriche: si pensi alle simmetrie nell'arte, nella natura e nella struttura dei cristalli e delle molecole.

Lo scopo dello studio delle trasformazioni geometriche è quello di mostrare come lo studio delle figure geometriche possa essere affrontato anche da un punto di vista diverso a quello proprio della geometria euclidea. Infatti, seguendo la proposta di Felix Klein (1849-1925) avanzata nel Programma di Erlangen del 1872, è possibile affrontare lo studio delle figure geometriche introducendo il concetto di trasformazione e individuando le loro proprietà in base agli elementi che in esse risultano invarianti. E' opportuno, tuttavia, far notare che questo nuovo metodo di studio non è antitetico a quello della geometria euclidea, bensì complementare ed anzi rispetto ad esso comprensivo e generale; com'è noto, infatti, mediante l'introduzione del concetto di gruppo di trasformazioni Klein fu in grado di fornire un quadro riunificato di tutte le geometrie costruite in precedenza.

In particolare il presente lavoro mette in risalto l'aspetto interdisciplinare dello studio delle trasformazioni geometriche con la musica.

Con questo lavoro mostro un esempio di come con l'ausilio della musica sia possibile non solo vedere le possibili applicazioni delle trasformazioni geometriche ma anche ascoltare l'effetto che possono avere su una melodia e ciò a mio avviso rende lo studio della geometria decisamente più coinvolgente.

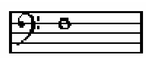
Qualcuno si chiederà come si può realizzare una lezione di questo tipo? Attualmente, è possibile realizzarla nella scuola media, nel liceo sociopsicopedagogico, e nel liceo musicale perchè in esse è presente lo studio di entrambe le discipline con una corrispondenza dei programmi. Bisogna comunque

tener conto che l'interdisciplinarietà si attua con un programma di collaborazione fra gli insegnanti che può far comprendere ai ragazzi l'unità della cultura nella diversità dei linguaggi.
Quando ascoltiamo un brano musicale la prima cosa che ci attrae è il senso di equilibrio ossia la simmetria. Quando diciamo che una figura è "simmetrica" intendiamo che possiamo applicare certe isometrie, che lasciano l'intera figura immutata mentre permuta le sue parti. In geometria euclidea si definisce una isometria come un'applicazione (biunivoca e continua) del piano in se che conserva la distanza.

LA TRASLAZIONE

La *traslazione*[1] di un vettore **v** è l'applicazione t_v che ad ogni punto P del piano associa il punto $P'= t_v(P)$ tale che il segmento orientato di primo estremo P e secondo estremo P' rappresenti il vettore **v**.
In musica possiamo riconoscere delle trasformazioni geometriche. Infatti, in molte forme polifoniche come il *canone* e la *fuga* una melodia o *tema principale,* intesa come una ordinata successione di suoni aventi altezze diverse, viene prima esposta da un' unica voce (o strumento) e mediante opportune trasformazioni di seguito è affidata alle altre voci.
In pratica alcune trasformazioni della melodia utilizzate nella tecnica compositiva corrispondono proprio alla traslazione.
Prendiamo il piano (x,y) e riportiamo sull'asse x il tempo che in musica corrisponde a una successione di battiti ad intervalli costanti (quelli prodotti, per esempio, da un metronomo) e sull'asse y l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto. Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge f in modo che $y = f(x)$. Ciò premesso scegliamo come unità di misura il minuto secondo e l'abbiniamo alla figura musicale semiminima (velocità metronomica ♩ = 60) per l'asse x e il semitono[2] temperato per l'asse y; possiamo così avere una rappresentazione grafica mediante quadretti che simultaneamente indicano il valore di durata di ogni singolo suono, ossia il loro scorrere nel tempo e l'altezza assoluta di ognuno di esso riferita alla scala temperata (un quadretto rappresenta il tono).
Inoltre, nella scrittura musicale le note segnate sul pentagramma ricevono il loro nome e indicano una loro altezza assoluta grazie all'impiego delle *Chiavi*[3]*: ad esempio alla chiave di violino corrisponde la nota sol* nella seconda linea e alla chiave di basso la nota *fa* nella quarta linea.

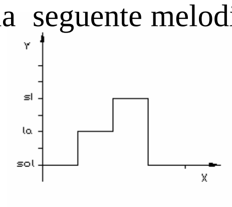
Sol
Chiave di violino o di *Sol*



Fa
Chiave di basso o di *Fa*

Di conseguenza, se poniamo come origine del nostro sistema di riferimento, cioè $y = 0$, l'altezza del suono corrispondente ad un *sol*, la seguente melodia:

può essere rappresentata da:

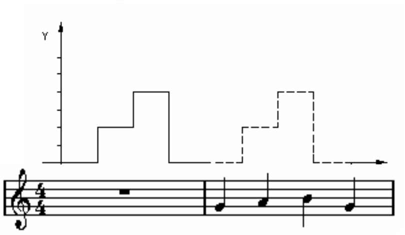


[1]Maria Dedò, Trasformazioni Geometriche, ed. Zanichelli, pag. 8.

[2]E' la distanza, fra un qualsiasi suono della scala temperata e il suo immediatamente successivo, sia in senso ascendente che discendente. Esso è l'intervallo più piccolo del nostro sistema musicale e corrisponde alla metà di un tono.

[3]Si tratta di simboli grafici che, fissando sul pentagramma la posizione di un certo suono, stabiliscono, in rapporto a questo, la posizione di tutti gli altri.

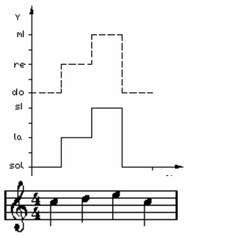
La traslazione in musica corrisponde a una tecnica compositiva adoperata da secoli per sviluppare polifonicamente una melodia.
Così la melodia già esaminata può essere:
a) traslazione rispetto all'asse *x*



— rappresentazione originale
---- rappresentazione del traslato

la melodia traslata viene eseguita dopo il momento di silenzio indicato dalla pausa che in questo caso corrisponde al valore dell'intera battuta.

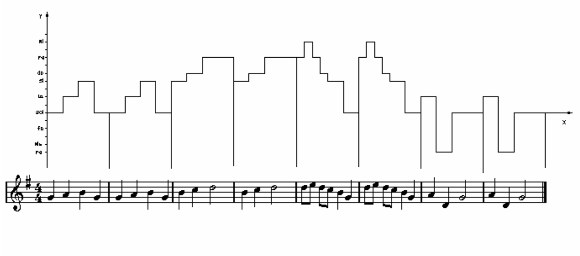
b) traslazione rispetto all'asse *y*



La melodia traslata viene eseguita una quarta sopra: ciò vuol dire che tutti i suoni sono stati innalzati di due toni e un semitono, riproducendola stessa melodia ad una altezza superiore.

Prendendo spunto da un articolo di Benedetto Scimemi[4] possiamo vedere un esempio completo di traslazione lungo l'asse x attraverso la popolare melodia *Fra Martino campanaro* (ovvero *Frère Jacques*) che è formata da quattro incisi ciascno ripetuto due volte.

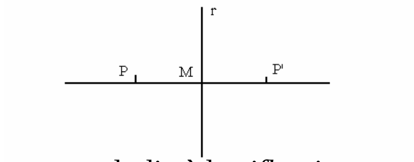
Il risultato è il seguente:



Scrittura tradizionale e grafico della melodia *Fra Martino*

LA RIFLESSIONE

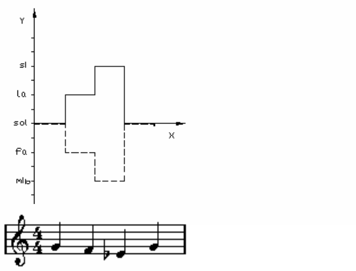
La *riflessione*[5] *in una retta r* è l'applicazione $s_r(P)$ che ad ogni punto P del piano associa il punto $P' = s_r(P)$ che appartiene alla perpendicolare a r per P e tale che r intersechi il segmento PP' nel suo punto medio; in particolare, se $P \in r$, allora $s_r(P) = P$.



Un' altra tecnica compositiva frequentemente utilizzata per sviluppare una melodia è la *riflessione*.
Osserviamo nuovamente la melodia prima esposta: 
Avremo le seguenti riflessioni:
a) riflessione rispetto all'asse *x*

[4] "Contrappunto Musicale e trasformazioni geometriche", Matematica e Cultura, atti del convegno di Venezia, 1997.

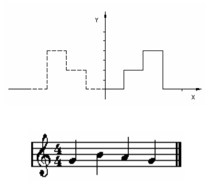
[5] Maria Dedò, op. cit., p.8.



Gli intervalli della melodia originale sono eseguiti in senso inverso: ciò vuol dire che il primo intervallo che è di un tono ascendente nella riflessione diventa un tono discendente. Per mantenere inalterata la distanza nel secondo intervallo della melodia riflessa si è dovuto alterare il mi in mi *bemolle* (*b*).

In musica questa trasformazione ha il nome di *canone per moto contrario* o *inversione* o ancora *canone a specchio* quando melodia originale e riflessa iniziano simultaneamente.

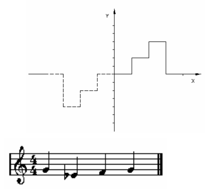
b) riflessione rispetto all'asse *y*



La melodia riflessa è costituita dalle stesse note alla stessa altezza di quella originale in una successione di suoni a ritroso: essa inizia dall'ultima nota della melodia originale per concludere con la prima.

In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado* o *canone a granchio.*

c) simmetria rispetto all'origine (composizione delle riflessione rispetto all'asse *x* e all'asse *y*)

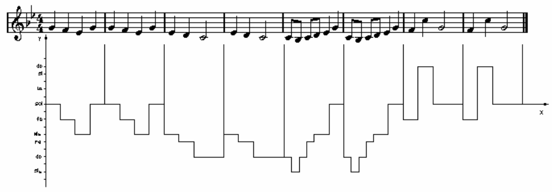


La melodia riflessa si costruisce dalla composizione simultanea delle riflessioni a)e b): in pratica si invertono gli intervalli e si procede a ritroso.

In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado dell'inverso*.

Utilizzando nuovamente la melodia *Fra Martino* ed applicando ad essa la riflessione lungo l'asse *x* otteniamo una sensazione malinconica caratteristica del modo minore che non sfuggirà a chi avrà l'occasione di ascoltarla.

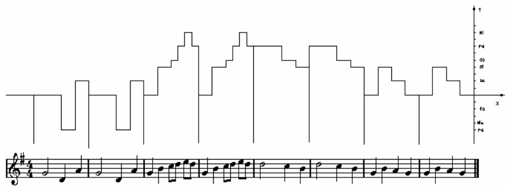
Il risultato grafico è il seguente:



Effetto della riflessione rispetto all'asse *x* su *Fra Martino*

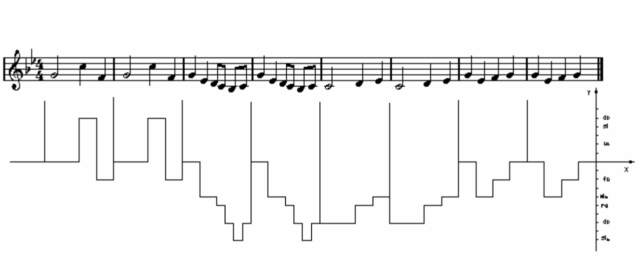
Per quanto riguarda la riflessione rispetto all'asse *y* va osservato che la melodia rovesciata ha un significato assai diverso da quello originale e in questo caso assume un carattere solenne e da marcia, rafforzato dal rapporto fra la struttura ritmica del brano e i valori di durata dei suoni della melodia; infatti, all'inizio di ogni inciso si trova la figura musicale di maggior valore (la minima o rispetto alla semiminima e questa rispetto alla croma) diversamente da quanto avviene nella melodia originale.

Il risultato grafico è il seguente:



Effetto della riflessione rispetto all'asse *y* su *Fra Martino*

Infine, la riflessione rispetto all'origine modifica profondamente la melodia originale. Per mantenere inalterati gli intervalli il modo maggiore è diventato minore e la melodia assume un carattere introspettivo e intimistico evidenziato dall'andamento della successione dei suoni che procede prima verso le note gravi e poi verso il punto d'origine, esattamente l'inverso della melodia originale.



Effetto della simmetria rispetto all'origine su *Fra Martino*

LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NELL' "OFFERTA MUSICALE" DI JOHANN SEBASTIAN BACH (1685-1750)

Le Opere create da J. S. Bach durante l'ultimo decennio della sua vita si distinguono per la straordinaria concentrazione con la quale egli esplora una volta per tutte le potenzialità della tecnica e della forma dello stile del contrappunto, con un risultato di perfezione e di ricchezza del disegno polifonico ineguale in tutta la storia della musica.

Fra le opere di questo periodo l' *Offerta Musicale* è la più attraente e ricca di colori. Essa deve la sua nascita ad una delle rare occasioni di riconoscimento onorifico nella vita di Bach. Nel Maggio 1747, durante l'occasione di una visita a suo figlio Carl Philipp Emanuel a Potsdam, egli fu ospite d'onore del Re di Prussia Federico II, più tardi chiamato il Grande, che lo trattò con stima e attenzione. Su richiesta dello stesso Bach, il Re, che era un musicista competente e un flautusta di talento, gli affidò un tema da sviluppare contrappuntisticamente in uno dei pianoforti di corte. Qualche mese dopo la visita, Bach inviò una copia della sua *Offerta Musicale* all'illustre mecenate. Essa comprende una *fuga* (*ricercar*[6] *) a tre voci, una fuga* a sei voci , due *canoni* ed un *trio* composti su un unico tema il *Tema Regium*:

con la sua melodia incisiva, magnificamente rotonda, con il suo ritmo energico offre delle potenzialità eccellenti, come *canto dato*, per la costruzione del controsoggetto e delle opportunità illimitate per le variazioni, ed è in questo senso che Bach principalmente lo esplora.

L'opera è di natura teorico-scientifica e quindi senza una specifica destinazione strumentale[7](così come l'*arte della fuga*).

In essa troviamo una rigorosa applicazione delle trasformazioni geometriche e l'analisi non è artificiosa in quanto Bach si è servito intenzionalmente di esse nella stesura dell'opera. Infatti, nell'applicare il suo ingegno ai problemi ardui come quelli posti dallo sviluppo del *Tema Regium* lo fece nello spirito dei maestri fiamminghi del XV°e XVI° sec. che avevano un genere di tecnica e una disciplina compositiva fortemente logico-creativa. Il risultato è matematico e musicale, un fluire di eventi rigorosamente controllati dove con l'immaginazione e l'inventiva la composizione è sempre espressiva e originale, dove il *Tema Regium*, sempre presente è il denominatore comune di una varietà caleidoscopica di forme.

"Canon à 4"*: *Traslazione lungo l'asse x* e *y Originale: BWV 1079,7

Questo è un cerchio a quattro parti scritto con un contrappunto quadruplo. Nell'originale risultano due chiavi posizionate all'inizio del pentagramma; nella prassi esecutiva la chiave di violino è riferita alle tre voci acute mentre la chiave di basso indica la voce grave.

Il *Tema Regium*, opportunamente modificato con l'aggiunta delle note di passaggio e i cambi di valore di durata, è eseguito nelle prime otto battute[8] dalla voce più acuta (nella realizzazione proposta è affidata al violino I).

---

[6] Il termine ricercar, presente nell'edizione originale, è attribuito alle due fughe a 3 ed a 6 parti.

[7] Nella edizione che prendiamo in esame viene indicata una delle possibili scelte per la prassi esecutiva.

La prima traslazione lungo l'asse *x* si realizza proprio all'ottava battuta; infatti, nel secondo pentagramma il violino II ripete le stesse note con gli stessi valori di durata e alla stessa altezza proposte dal violino I mentre questi procede in un contrappunto rigorosamente rispettoso dell'armonia classica derivata dalla relazione fra i suoni stabilita dal sistema *ben temperato*. La seconda traslazione lungo l'asse *x* avviene alla quindicesima battuta dove il violino III, nel terzo pentagramma, ripete la melodia iniziale mentre le due voci superiori si sovrappongono contrappuntisticamente con un disegno melodico-ritmico assai più articolato di prima. Dopo le due traslazioni lungo l'asse *x* di sette battute ciascuna alla ventiduesima battuta avviene l'ultima traslazione che è simultaneamente lungo l'asse *x* ed *y* perché la melodia non solo è spostata nel tempo ma anche nell'altezza. Infatti il violoncello, indicato nel quarto pentagramma, espone la melodia iniziale con le stesse note e gli stessi valori di durata ma due ottave sotto. Alla ventinovesima battuta il violoncello ha concluso la sua esposizione e il *Tema Regium* ritorna al violino I per dare inizio ad una ripetizione del canone che è detto *infinito* o *perpetuo* perché il gioco imitativo può essere riproposto senza conclusione: questo aspetto è messo in evidenza dallo stesso Bach con il simbolo di ritornello posizionato alla fine della composizione nel manoscritto originale. Nella realizzazione presa in esame il violino II ripete il tema alla battuta 36, il violino III alla battuta 43 e il violoncello alla battuta 50.

"Canon à 2" (Quaerendo invenietis): riflessione rispetto all'asse x Originale: BWV 1079,6
In questo canone Bach indica il numero delle voci e la modalità di realizzazione esecutiva. Infatti, accanto alla chiave di Do posta sulla terza linea (chiamata chiave di contralto) si trova la chiave di Fa rovesciata; quindi la prima voce procede normalmente mentre la seconda voce e costruita con la tecnica dell'inversione. Se il lettore mette la musica originale al rovescio e legge da destra a sinistra troverà le note esatte con cui la parte imitativa deve essere costruita. Nel gioco compositivo, Bach non indica l'entrata della seconda voce e coinvolge il lettore-esecutore con l'espressione *Se cerchi troverai*; solo un esperto, come era Federico il Grande, dall'analisi dettagliata del disegno melodico riesce a individuare nella quarta battuta l'entrata della seconda voce per moto contrario mentre una variante del *Tema Regium* è esposto nelle prime sette misure. La maniera antica di scrivere il canone, il gioco di pazienza adoperato da Bach è evidenziato dall'uso delle chiavi antiche.
Il contrasto timbrico suggerito dalle due chiavi del testo originale, nella realizzazione presa in esame è affidato alla Viola per la prima voce e al Violoncello per la parte imitativa.
Questo canone non solo è un esempio concreto della applicazione rigorosa della riflessione ma nella sua "miniatura" è un modello di originalità, di equilibrio e di espressione affascinante.

BIBLIOGRAFIA

COXETER, HAROLD SCOTT MACDONALD, Introduction to geometry, London, John Wiley, 1961
WEYL, HERMANN, Symmetry, Princeton, U.S.A., Princeton University Press, 1952
DEDO', MARIA, Trasformazioni geometriche, Bologna, Zanichelli, 1996
FURINGHETTI, FULVIA, Matematica oggi, dalle idee alla scuola, Genova, Mondadori, 1990
ROSSI, LUIGI, Teoria Musicale, Bergamo, Edizioni Carrara, 1977
LA NUOVA ENCICLOPEDIA DELLA MUSICA GARZANTI, Milano, Garzanti Editore, 1993
KAROLYI, OTTO, La grammatica della musica, Torino, Einaudi, 1969
HOFSTADTER, DOUGLAS R.,Godel, Escher, Bach, Milano, Adelphi, 1994
EMMER, MICHELE, Matematica e Cultura, Atti del Convegno di Venezia, 1997,MI., Springer, 1998
BASSO,ALBERTO, L'età di Bach e di Haendel, Storia Della Musica a cura dellaS.I.M.,Torino, edt '85
JOHANN SEBASTIAN BACH, Musikalisches Opfer, Londra, ed. Bosey & Hawkes, 1952

---

[8] Per battuta o misura si intende lo spazio di pentagramma racchiuso fra due stanghette verticali. All'interno si trovano note e/o pause per un valore di durata complessivo pari all'indicazione di tempo stabilita all'inizio del brano: in questo caso la somma dei valori è pari a 4/4.