DUE QUESTIONI DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA

di Giuseppe Gentile[1]

Premessa

Il presente lavoro costituisce il primo risultato di un'attività di ricerca che l'autore sta svolgendo in connessione con l'esperienza di insegnante presso un Istituto Professionale. Il lavoro si compone di due parti solo apparentemente distinte e indipendenti, ma che trovano una precisa interconnessione nell'ambito di un più ampio progetto di ricerca didattica.
La prima parte è una riflessione teorica circa la possibilità e i limiti di una didattica "*scientifica*" che riesca di fatto a unificare i linguaggi e le metodologie negli studi teorici sull'insegnamento-apprendimento della matematica. Poiché la discussione su questo tema si è andata sviluppando da molto tempo a questa parte, non pretendo di aggiungere molto a quanto già acquisito su questo difficile terreno. I numerosi contributi, infatti, nel campo della didattica, hanno dato risultati molto significativi ed avanzati, senza per altro giungere a quell'obiettivo che, come già detto, dovrebbe essere l'unificazione dei linguaggi e delle metodologie. Tuttavia ho ritenuto che l'attività di ricerca "*sul campo*" che mi proponevo di attuare, richiedesse comunque una serie di precisazioni preliminari.
La seconda parte nasce direttamente dall'esperienza d'insegnamento e affronta il problema delle difficoltà indotte negli alunni da precedenti esperienze scolastiche negative. Ho chiamato tali difficoltà "ostacoli fobici" per ragioni che appariranno chiare nel corso del lavoro.

1.0 Una didattica scientifica: come e perché.

1.1 Introduzione

La domanda sulla quale si vuole riflettere in questa breve nota è: "La Didattica può essere considerata una Scienza?". Chiaramente una risposta a tale quesito presupporrebbe di sapere già cosa intendere per Scienza e ciò già costituirebbe un ostacolo non indifferente. A tal proposito, basti pensare al dibattito epistemologico in atto ed a tutte le varie idee che hanno trovato e trovano luogo al suo interno. Ma il taglio che si vuole dare a questa riflessione non è di carattere prettamente filosofico, ma piuttosto si vuole caratterizzare come un tentativo di dare una risposta concreta ad una concezione della didattica che sta purtroppo prendendo piede in alcuni ambienti scolastici. Infatti, la riflessione parte dalla esperienza fatta nelle scuole secondarie superiori e da una idea che in tale contesto ho trovato molto diffusa; quella, cioè, che la didattica lascia il tempo che trova, non tenendo conto della classe reale e non potendo pertanto trovare applicazione in alcuni contesti scolastici. La tesi che qui si vuole sostenere è che proprio questa tanto contestata asetticità è l'unica via percorribile se si vuole che la Didattica possa essere considerata Scienza.

1.2 A che serve l'astrazione?

Cosa possiamo intendere per astrazione? Non vorrei tentare di darne una definizione, ma piuttosto considerare quale possa essere lo scopo che si vuole raggiungere. In uno dei suoi scritti, Kline fa notare come:
"*anche le civiltà primitive […] dimostrarono così di conoscere il fatto che tre pecore, tre mele e tre frecce hanno molto in comune, ossia la quantità* ***tre***"[2].
Se volessimo darci un'aria romantica, potremmo dire che il cielo e gli occhi di Paul Newman hanno in comune il colore *celeste* o, se volessimo stare al passo con la tecnologia, che l'iride (non necessariamente quella di Paul Newman!) ed un CD hanno in comune la forma *circolare*.
Certamente, nello stesso momento in cui abbandoniamo la percezione sensoriale per astrarre da essa *una* caratteristica, stiamo tralasciando tutte le altre informazioni insite nella percezione stessa. Ma

[1] Istituto Professionale di Stato per i Servizi Alberghieri e Ristorativi "G. Falcone" – Giarre (CT)
e-mail: pippogentile@tin.it
[2] Morris Kline, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, p. 24.

perché lo facciamo? C'è un vantaggio? Lo stesso Kline più avanti suggerisce quale possa essere questo vantaggio; così si esprime:
"*certo è molto più difficile meditare su astrazioni che non su oggetti concreti. Un vantaggio è però subito evidente: un guadagno in generalità. Un teorema dimostrato per un triangolo astratto si applica alla figura formata da tre bastoncini di fiammiferi, al recinto triangolare di un pezzo di terra e al triangolo formato, in ogni istante, dalla Terra, dal Sole e dalla Luna*"[3].
Ma c'è di più, io credo, di ciò che Kline afferma; l'astrazione crea nuove categorie che forniscono altrettante informazioni sui singoli oggetti delle percezioni. I tre fiammiferi o il pezzo di terra non erano un triangolo fin quando l'astrazione non ha inventato la "categoria triangolo" che prima non esisteva e non aveva ragione di esistere. Tale "creazione" ha, credo, lo scopo di sistematizzare in schemi teorici le varie conoscenze sensibili che, altrimenti, apparirebbero sfilacciate, disconnesse l'una dall'altra, frammentarie e, pertanto, non potrebbero essere organizzate in un *corpus* unico.
È per tale ragione che potremmo accettare l'idea di astrazione come quella di una deliberata perdita di informazioni in favore di un tentativo di dare una organizzazione nel caos delle conoscenze percettive.

1.3 Cosa possiamo chiamare "Progresso"?

Tentare di dare una risposta esauriente a tale domanda è una impresa tanto ardua quanto, probabilmente, priva di senso per le motivazioni che andremo a illustrare.
Intanto qui si vuole subito sgombrare il campo da ogni concezione del progresso che trascini con sé un qualche retaggio positivista; per essere più precisi, non si vuole assumere come idea di progresso quella che coincide con un accumulo continuo e progressivo di conoscenze la cui conseguenza immediata è che il futuro è un progresso rispetto al presente e quest'ultimo lo è rispetto al passato: secondo una tale concezione la linea del progresso ha lo stesso andamento di quella cronologica.
C'è un altro aspetto che, probabilmente per la sua ovvietà, a volte non viene a sufficienza messo in luce: il fatto cioè che ogni giudizio presuppone un soggetto giudicante. Questo fatto così implicito può talvolta essere causa di assolutizzazioni su ciò che può essere considerato progresso e di quei tentativi di definire il progresso in maniera onnicomprensiva e quindi statica.
Allargando il nostro orizzonte, possiamo affermare che un giudizio di valore sul progresso o meno di una idea, di una scoperta, invenzione, teoria o quant'altro vada visto come un giudizio che parte dal nostro punto di vista, secondo le nostre "categorie" ed è per questo che non dovremmo dimenticare che si tratta sempre di un giudizio relativo. Dovrebbe risultare chiaro il perché, all'interno di questa visione, appaia privo di senso il tentativo, seppur teorico, di dare un risposta esaustiva e definitiva alla domanda "cosa intendere per progresso?".
Che cosa allora può farci decidere se qualcosa è stato un progresso? La valutazione dovrebbe o potrebbe basarsi sulle possibilità offerte da un certo punto di vista rispetto ad un altro precedentemente adottato, dalle novità sia culturali che applicative che da una certa idea sono scaturite, dai benefici che una novità è stata capace di produrre all'interno di un gruppo il più grande possibile, insomma da tutte quelle innovazioni che, al vaglio del tempo, si sono rivelate benefiche per il genere umano.
È chiaro che tale giudizio è, per se stesso, non statico, ma dinamico, dipendendo fondamentalmente dal giudizio odierno; in altre parole, da quanto visto, il giudizio sul progresso o meno, può essere dato solo su fatti già accaduti, di cui è possibile valutare gli effetti, almeno nella misura in cui la nostra "cultura" li può valutare. Proprio per lo stesso motivo non è possibile, nemmeno in linea di principio, dare un giudizio analogo su fatti appartenenti al presente: possiamo avere fiducia, scommettere, ma non possiamo "in atto" attribuire il valore di progresso ad una qualunque novità odierna.

1.4 Analogia.

Il problema della conoscenza è uno dei temi centrali della storia dell'uomo, è stato fin dall'antica Grecia uno dei motivi di riflessione filosofica più profonda; basti pensare alla distinzione, nata

[3] Morris Kline, Op. cit., p. 40.

proprio in quell'epoca, fra `doxa` ed `episteme`, fra un sapere, cioè, fragile, destinato a mutare e pertanto non proficuo, ed uno, viceversa, immutabile, solido, fondato su basi sicure.
È proprio in quel contesto culturale che vede la luce quel modo di acquisire conoscenza che oggi chiamiamo metodo ipotetico-deduttivo e che, come tutti oggi sappiamo, è stato così prolifero di risultati non solo all'interno delle varie scienze in cui è stato usato, ma anche al di fuori di esse, costituendo una fonte di conquiste culturali, oltre che tecnologiche. Alla luce di quanto detto in precedenza, possiamo ben dire che il metodo ipotetico-deduttivo ha costituito senz'altro un progresso nella storia umana.
Tutto ciò non deve però farci dimenticare che, oltre a questo metodo di conquista scientifica, ve ne sono altri che, in un modo o nell'altro, possono essere usati: ci si riferisce, ad esempio, al metodo induttivo o all'analogia. Come il primo, anche questi due, hanno i propri vantaggi e i propri limiti. Quello che qui vorremmo analizzare un po' più da vicino è l'analogia. È chiaro che un tale metodo poco potrebbe dirci in situazioni nuove ed in cui nulla riusciremmo a trovare di analogo ad una situazione già nota, ma è pur vero che in talune circostanze esso può essere usato, almeno in linea di principio, per ottenere qualche informazione o fare qualche previsione nel momento in cui ci si voglia affacciare in un contesto nuovo.
Le "Scienze", almeno quelle che hanno una storia sufficientemente lunga, sono state passate al vaglio degli anni che ne hanno potuto sancire la validità; ma come dare un giudizio di validità nei confronti delle "nuove scienze", o di quelle che come tali si volessero caratterizzare? Certamente, il tempo non ci è favorevole, nel senso che ciò che ha consentito di accettare o respingere una teoria è stato proprio il lungo intervallo temporale, nel quale possono essere stati apprezzati vari fattori: la capacità di una teoria di spiegare la fenomenologia osservata, la sua economia nel fare ipotesi, la sua possibilità di essere applicata ad altre teorie che tramite essa assumono nuovi e inaspettati significati e, non da ultima, la sua applicabilità tecnologica. Tale percorso non è utilizzabile se si vuole *hic et nunc* dare una risposta sulla validità o meno di una teoria che voglia definirsi "scientifica": pensiamo agli esperimenti di biotecnologia, agli organismi geneticamente modificati, … e, perché no, alla didattica. In altre parole, per le "nuove scienze", si cerca o si può cercare di fare scienza sul modello di quelle accettate perché hanno portato "progresso", secondo una validazione *a posteriori* delle stesse, validazione che non può in atto essere appannaggio delle nuove.

1.5 Un approccio alla ricerca in didattica.

Tralasciando le nuove frontiere aperte dalla genetica o dagli OGM, che aprirebbero questioni etiche oltre che epistemologiche, occupiamoci senz'altro dell'argomento che qui ci interessa più da vicino, che è, appunto, la didattica. Come suggerisce il titolo di questa nota, e come già accennato in precedenza, ci proponiamo di ragionare sulla didattica per analogia con lo scopo di vedere se e in che senso la didattica può essere considerata una Scienza.
La prima domanda che si potrebbe porre è: dove cercare una analogia? Quale modello può essere utile per ritagliare su di esso la didattica? Quale metodo ha portato a così tanti strabilianti risultati e a così innumerevoli applicazioni? La risposta è stata, credo, quasi scontata: il metodo galileiano.
Se lo analizziamo, estrapolando gli aspetti per noi più interessanti, la prima cosa che dovremmo chiederci è: perché il metodo galileiano è risultato così proficuo? Cosa ha permesso a Galileo, ad esempio, di approdare all'enunciazione del Principio di Inerzia? Certo, limitandosi alle percezioni e cercando da esse di analizzare il movimento, sarebbe stato impossibile pervenire a tale risultato, arrivando necessariamente alla conclusione aristotelica della quiete come unico stato naturale. È stata la matematizzazione del movimento che ha reso possibile a Galileo tale enunciazione, nel momento stesso in cui egli ha voluto idealizzare il moto prescindendo, in un certo senso, dall'attrito che, pur presente, veniva deliberatamente trascurato (Questa matematizzazione dei fenomeni possiamo, a ben vedere, definirla senz'altro un "progresso", oggi che riusciamo a vederne chiaramente i benefici). Certo, nei vari casi concreti, bisognerà tener conto dell'attrito, ma da esso dobbiamo prescindere se miriamo ad un Principio Generale. È questo che ha portato alla fioritura delle Scienze, ed è questo che vorremmo applicare alla Didattica: per analogia! Anche qui, bisogna sempre tener conto dei fattori ambientali, del conteso classe, del "setting" insomma, ma da tutto ciò

bisogna prescindere nel momento in cui cerchiamo una qualche generalità nei nostri discorsi: anche perché, come con Galileo, se ci si limita alle mere osservazioni, ogni situazione apparirà diversa da ogni altra non consentendo in alcun modo un minimo di astrazione e generalità. È solo in seguito, nel momento applicativo, che bisognerà rimettere in gioco il "setting", per avere una utilizzazione pratica di quanto prima conquistato per via generale.

2.0 OSTACOLI "FOBICI" NELL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

2.1 Premessa

Nella didattica della matematica vengono considerati vari tipi di ostacoli all'apprendimento[4], ostacoli che possono dipendere da:

1. Caratteristiche specifiche dei singoli alunni.
2. Difficoltà connesse all'argomento di studio.

Tra gli ostacoli di cui al punto 2, hanno ricevuto particolare attenzione, in tempi recenti, quelli che vengono chiamati "ostacoli epistemologici" e che si presentano quando l'alunno che ha già acquisito familiarità con una certa struttura, si trova a dover considerare una struttura più complessa in cui molte delle proprietà già note non sono più valide[5].

Nel caso in esame ho preso in considerazione un ostacolo che presenta aspetti del primo e del secondo tipo e che, in varia misura, si presenta con una frequenza abbastanza notevole. Si tratta di quelle difficoltà che allo stato presente si manifestano come caratteristiche negative del singolo alunno, ma che non sono dovuti a specifici ritardi intellettivi, bensì a vere e proprie fobie verso la matematica o verso parti di essa, fobie determinate generalmente da precedenti esperienze scolastiche negative.

L'esperienza che viene qui presentata, tende ad evidenziare come tali stati fobici, si presentano in connessione con termini tecnici, anche molto semplici, ma il cui uso può determinare uno stato di ansia talvolta parossistica e comunque sufficiente ad impedire un normale approccio intellettivo.

L'esperienza si svolge in una classe di un Istituto Professionale Servizi Alberghieri e Ristorativi. Gli alunni sono tutti privi di motivazione specifica verso la matematica e più in generale verso ogni forma di apprendimento teorico. Non solo hanno difficoltà ad effettuare semplici calcoli numerici, ma dimostrano spesso di non avere ben acquisito il significato e il ruolo delle stesse operazioni aritmetiche. Ancora più lontana appare la comprensione del calcolo letterale. Ci si può chiedere quindi se in queste condizioni è possibile un qualsiasi approccio al ragionamento astratto. L'occasione specifica è quella di una lezione che tende a introdurre il concetto di equazione, ma che allo stesso tempo mira a dare una prima rudimentale idea del processo di astrazione su cui si fonda tutta l'attività del "far matematica". In altri termini si vuol far vedere come un qualsiasi ragionamento, una volta astratto dal caso concreto, può essere utilizzato in un'infinità di casi analoghi con grande economia di pensiero.

2.2 L'esperienza

<u>Situazione scolastica</u>: secondo anno di un Istituto Professionale Servizi Alberghieri e Ristorativi.
<u>Scopo della lezione</u>: Capire la necessità–comodità dei sistemi di equazioni. Acquisire la capacità di applicare i sistemi di equazioni per risolvere alcune situazioni problematiche.
<u>Obiettivo finale</u>: Capire la necessità–comodità del linguaggio formale algebrico. Acquisire la capacità di usare il linguaggio algebrico nelle situazioni problematiche più diverse. Acquisire la capacità di astrazione, come passaggio dal particolare al generale.

Viene riportato, nel modo più fedele possibile, lo svolgimento della discussione in classe. Nel seguito S indicherà lo sperimentatore, mentre A, B, C, … indicheranno gli allievi.

---

[4] A questo proposito si può vedere ad esempio : F. SPAGNOLO, *Insegnare la matematica nella scuola secondaria*. La Nuova Italia, 2000.
[5] Per una più precisa definizione v. F. SPAGNOLO, Op. *Cit*.

S: Oggi non voglio stancarvi, anche perché siamo al ritorno dalle vacanze di Natale; ma prima che finisca l'ora dovete risolvermi un problemino (… dopo alcune rimostranze …) non si tratta in effetti di un problema, diciamo un piccolo quesito[6]. Visto che voi siete in un Istituto Alberghiero potrebbe un giorno o l'altro capitarvi di avere a che fare con un albergo o un bar, no? Il quesito è questo: in un albergo ci sono solo stanze doppie e quadruple; sappiamo che ci sono in totale 60 stanze e 170 posti letto. Vorrei sapere quante sono le stanze doppie e quante le quadruple!
A: (dopo 2 secondi) 30 doppie e 30 quadruple! Fanno 60 stanze!
S: Hai ragione sulle stanze, ma i posti letto sono 170?
B: No, sono … 60 più … 120 … sono 180!!
S: E allora non va bene. Comunque scriviamo alla lavagna la proposta di A. Riprovate ancora.
C: Sono 50 doppie e 10 quadruple!
S: Hai controllato bene che i posti letto fossero 170?
C: (sconsolato) è vero … sono 140 …
S: Scriviamo anche questa proposta alla lavagna.
D: Bisogna aumentare le quadruple, perché altrimenti non ci si arriva a 170.
B: E allora sono 40 doppie e 20 quadruple!
S: Scriviamo anche questa alla lavagna; e adesso controllate che sia corretto.
D: No … viene 160.
(dopo un po' di riflessione)
D: Sono 35 doppie e 25 quadruple; perché 35 doppie fanno 70 posti letto e 25 quadruple fanno 100 posti letto: totale 170!!
S: Ok! Siete stati bravi! Ci avete messo un po', ma alla fine ci siete riusciti.
(dopo alcuni secondi di meritata euforia)
S: Ora che avete risolto questo problema vi sfido a risolverne un altro.
B: Va bene!
S: In un bar vengono offerte delle colazioni a 2€ e a 4€. Una mattina arrivano al bar 70 clienti che scelgono fra queste due proposte. L'incasso è di 170€. Vorrei sapere quanti clienti hanno scelto la colazione da 2€ e quanti quella da 4€.
(dopo pochi secondi)
E: Ma … professore … è lo stesso problema di prima …
S: In che senso? Prima c'era un albergo con le stanze, ora c'è un bar. Che vorresti dire?
E: Si, è vero, ma i numeri sono sempre quelli! I clienti che scelgono la colazione da 2€ sono 35 e gli altri sono 25; viene o non viene 170 il totale!?
S: Diciamo che hai proprio ragione! Avete capito tutti cosa ha fatto E? Non ha risolto da capo il problema: si è soltanto accorto che, anche se il *problema* era diverso, il ragionamento usato per risolverlo era lo stesso e quindi non valeva la pena rifare di nuovo i tentativi che avevate fatto prima.
B: Ora che ci ho fatto caso …
S: Adesso sono sicuro che saprete risolvere immediatamente anche questo problema. In una fattoria ci sono polli e conigli. So che in totale ci sono 60 animali e 170 zampe. Quanti sono i polli e quanti i conigli?
Coro unanime: 35 polli e 25 conigli!!
(dopo altri secondi di meritata euforia)
S: Vedete, ragazzi, stamattina avete imparato che situazioni problematiche apparentemente diverse possono avere qualcosa in comune; nel caso di stamattina, siete riusciti a vedere che in fondo non ha importanza che si parli di alberghi, di bar o di fattorie, ma per risolvere quei particolari problemi bisogna solo valutare i legami numerici; ora vorrei, insieme a voi, scrivere in un linguaggio matematico proprio questi legami numerici.
(qualcuno sbuffa)[7]
S: Nel caso dell'ultimo problema, indichiamo con p il numero di polli e con c il numero di conigli. Come faccio a scrivere che ci sono in totale 60 animali?
B: $p + c = 60$.
S: Bene. Adesso vorrei sapere come faccio a scrivere che ci sono 170 zampe.
(attimi di silenzio)

[6] È da sottolineare la quasi unanime riluttanza nei confronti della parola "problema"; se si usa un sinonimo, quale può essere "quesito" (magari con l'aggiunta della sfida tra chi propone e chi ascolta) l'effetto è notevolmente diverso: aumenta l'attenzione e, soprattutto, gli alunni non si sentono già battuti in partenza.

[7] Come già sottolineato nella nota 1, si nota una certa riluttanza verso alcuni vocaboli o verso alcune frasi; qui il voler smettere di "giocare" per "fare matematica", è vissuto quasi come una violenza, una non-necessità della quale non si percepisce l'importanza.

S: Proviamo a contare quante sono le zampe dei polli.
C: Ma non sappiamo quanti sono i polli …
S: Il numero non lo sappiamo infatti, tanto è vero che abbiamo deciso di indicare questo numero con p. Facciamo un esempio: se i polli fossero 10, quante zampe ci sarebbero?
C: 20.
S: E se fossero 30?
D: 60?
S: E se sono p?
B: p alla seconda.
S: Se fosse come dici tu, con 10 polli ci sarebbero 100 zampe, o sbaglio?
B: è vero …
D: Sono p per 2!!
S: Possiamo allora scrivere che sono 2p?
C: Si.
S: Adesso cerchiamo di scrivere quante sono le zampe dei conigli.
B: Sono 4c.
S: E allora come facciamo a scrivere che le zampe sono in totale 160?
D: 2p + 4c = 160.
S: Abbiamo scritto due equazioni che rappresentano i legami numerici che erano presenti nel problema dei polli e dei conigli. Se avessimo voluto scrivere i legami presenti nel primo problema, saremmo arrivati alla stessa cosa?
B: Non avremmo usato p e c.
S: Beh, noi abbiamo usato p e c perché ci facevano comodo, ma se avessimo chiamato polli e conigli con altre lettere cambiava qualcosa?
C: No.
S: Quindi nel primo problema potremmo chiamare con p il numero di doppie e con c il numero di quadruple.
B: Si.
S: Che equazioni scriveremmo?
D: Le stesse.
S: E nel secondo problema?
C: Le stesse.
S: Questo è il bello! Per quanto possa essere diverso il problema in questi casi, le equazioni che si ottengono sono le stesse; del resto avevate già notato che, in fondo, il *problema* era lo stesso, no?

3.0 Conclusione

Quella che qui viene tratta è da considerarsi solo una conclusione provvisoria, un primo risultato di una ricerca in corso che prevede quindi ulteriori tappe.
Da una prima analisi del protocollo precedentemente riportato si evince innanzitutto che la capacità di produrre processi di astrazione non è in sé assente, ma affiora con facilità se opportunamente stimolata. Vi è però una condizione perché ciò si verifichi, ed è che non vengano usati termini già noti agli alunni come termini “matematici” o anche solo “scolastici”. Questa condizione, soddisfatta nel dialogo sopra riportato, si è in seguito dimostrata essenziale. Infatti si è potuto osservare che ogni minimo cenno di reintroduzione di termini formali provoca un immediato regresso nella capacità di affrontare il problema posto.
Tutto ciò conferma quanto ipotizzato in premessa, anche se occorre ampliare le esperienze e portare più a fondo l’analisi al fine di fare emergere possibili percorsi di recupero.

BIBLIOGRAFIA

1. KLINE Morris, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli.
2. MIGLIORATO Renato, *L’astrazione matematica tra fantasia, conoscenza e ricadute tecnologiche*, in corso di stampa sugli Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Seiano di Vico Equense, 3-6 novembre 2003.
3. SPAGNOLO Filippo, Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, La Nuova Italia.