L'astrazione matematica*
tra fantasia, conoscenza e ricadute tecnologiche

di Renato Migliorato
Dipartimento di Matematica – Università di Messina
Contrada Papardo 98166 – Messina – Email: renato.migliorato@unime.it

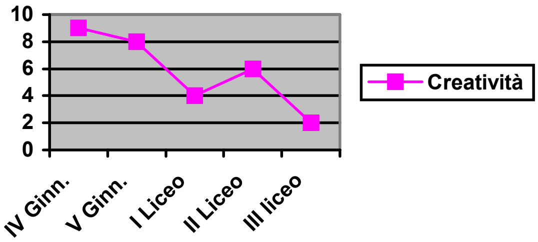
Sommario
L'autore partendo dalla domanda apparentemente banale: "*La fantasia è utile in matematica*?", sviluppa una serie di riflessioni sull'immagine della matematica che prevale tra il pubblico in generale, ma anche tra gli alunni delle scuole. Dopo una breve analisi delle origini culturali del fenomeno, suggerisce alcune idee utili al fine di mettere in luce,nei percorsi didattici, il carattere fondamentalmente creativo chiarificatore e produttivo di senso dell'astrazione matematica.

Abstract
The author departing from the apparently trivial question: "*Is useful the imagination in mathematics*?", develops a series of reflections on the image of the mathematics that generally prevails among the public, but also among the pupils of the schools. After a brief analysis of the cultural origins of the phenomenon, he suggests some useful ideas at the purpose to show, in the didactic activities, the fundamental character of the mathematical abstraction, that is creative, clarifiers and productive of sense.

1. Premessa
La riflessione che intendo proporre potrebbe partire da una domanda apparentemente semplice e quasi ovvia: "*La fantasia è utile in matematica*?". Dico ovvia (e potrei dire banale) perché ritengo scontato che qualunque addetto ai lavori non solo risponderebbe affermativamente, ma non riuscirebbe neppure a concepire un qualunque progresso in campo matematico senza un ruolo importante della fantasia. La stessa domanda, però, cessa di essere scontata e banale se invece che a matematici di professione viene rivolta ad un pubblico generico, compreso quello costituito dagli alunni delle nostre Scuole Secondarie Superiori. Argomento della riflessione è dunque l'*immagine che hanno della matematica* tutti coloro che non fanno di questa scienza l'oggetto principale della loro attività, ed assumeremo *il ruolo che viene attribuito alla fantasia* come parametro di riferimento per la valutazione di tale immagine.
Molti anni fa avevo sottoposto un questionario agli alunni di alcune scuole secondarie superiori (due licei classici, due licei scientifici, un istituto tecnico industriale) ottenendo dei risultati che molto sinteticamente sono riferiti in una pubblicazione del 1992[1], e che in forma più estesa sono ora pubblicati in forma elettronica[2] . Si trattava appunto di un test diretto a rilevare l'immagine che della matematica avevano gli alunni delle scuole considerate e l'eventuale evoluzione che tale immagine subiva nei successivi passaggi dalle prime classi alle classi superiori.
Il dato più sorprendente nei risultati di questa ricerca è che, sebbene il sapere matematico si accrescesse notevolmente, l'immagine della matematica non subiva invece progressi di sorta, ed anzi, per quanto riguarda il parametro *fantasia* (o creatività) qui considerato, si notava addirittura un regresso col passare degli anni e con il progredire dell'apprendimento.

---
* Lavoro eseguito nell'ambito dei P.R.A. dell'Università di Messina.
[1] R. MIGLIORATO: *Dall'esperienza alla formalizzazione nell'insegnamento matematico*, Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza (atti), Bologna, 1992, pp. 171-178.
[2] R. MIGLIORATO: *Immagini della matematica nella formazione scolastica*, Pubblicazione on line a cura dell'Associazione Mathesis di Messina, (http://ww2.unime.it/mathesis).

Ai fini di questa nostra riflessione interessa in modo particolare la domanda n. 6 del questionario, formulata in questi termini: *Quali di queste doti ritenete importante per far bene in matematica*? Seguivano le opzioni: creatività, pazienza, intuizione, memoria. I dati complessivi delle risposte davano i seguenti risultati: creatività 6%, pazienza 29%, intuizione 81%, memoria 23%. La somma delle percentuali è maggiore di 100 perché erano consentite più opzioni; in tal modo la bassa percentuale di opzioni per la *creatività* non può essere attribuita ad una semplice scelta di priorità ma ad una effettiva ed assoluta negazione di valore. Ancora più significativa è l'analisi dei dati disaggregati per classi. Si ha così, per es. che nei due licei classici le percentuali di opzioni positive per la creatività si distribuivano secondo il seguente grafico:



Sebbene il campione non fosse abbastanza esteso da potere trarre da esso conclusioni definitive, non sembra tuttavia che il processo di apprendimento durante i cinque anni consentisse agli studenti di acquisire una concezione della matematica più aperta verso gli aspetti creativi, nonostante che, nel liceo classico, potessero avvalersi di un corso parallelo di filosofia.
La conclusione a cui mi sembrava di poter giungere nell'immediatezza della ricerca di cui sopra era di una complessiva insufficienza della scuola nella formazione scientifica, insufficienza da colmare soprattutto con interventi sul piano metodologico e didattico. Una più attenta analisi del problema, tuttavia, mi portò nel corso degli anni successivi a ritenere riduttiva la precedente conclusione ed a pormi la domanda se non vi fossero ragioni culturali più profonde e radicate. Ciò non significa ovviamente che i meccanismi della scuola e della formazione professionale dei docenti possano rimanere estranei al problema, significa però chiedersi se anche questi non necessitino di una spiegazione in termini più generali. E' ciò che, seppure in forma estremamente sintetica, si tenterà di fare nel prossimo paragrafo.

2. Formazione scolastica e radici culturali.

Che l'emarginazione del sapere scientifico rispetto all'asse formativo della scuola non sia da ascrivere a pure e semplici inadeguatezze tecniche, legate o meno alle scelte metodologiche dei docenti, lo si può rilevare fin dalle origini di quella Riforma Gentile che, per quasi un secolo, determinò i caratteri di fondo della scuola italiana[3]. A questo proposito basta citare due brani di Gentile[4]:

> "…[La matematica è] *una scienza frammentaria che non ci fa vedere il mondo e l'uomo che ne è il centro e lo specchio; una scienza che nasce giorno per giorno per sovrapposizione di particelle nuove alle vecchie; e cresce e cresce sempre, e pur non aggredisce l'anima nostra, non ne acuisce l'occhio a penetrare sempre più addentro all'interno del reale, a girare sempre più largo con lo sguardo che cerca i margini del mondo…".*

e per l'insegnamento scientifico in generale:

> "*…non posso né ho bisogno di soffermarmi a denunciare i dannosissimi frutti che l'intrusione delle materie e degli abiti scientifici ha dato nelle scuole medie…*"

Questi giudizi tuttavia non possono essere intesi correttamente se non vengono posti in relazione con i due poli di un profondo dissidio filosofico e ideologico. Bisogna infatti tenere presente che nei

---

[3] Si limita qui il discorso sulla scuola italiana, e quindi si prende avvio dalla Riforma Gentile, solo per economia espositiva e per non estendere l'analisi oltre i limiti di tempo e di spazio consentiti per questa discussione. Non significa quindi che i fenomeni culturali analizzati siano esclusivi dell'Italia o della concezione gentiliana; vedremo anzi che così non è.
[4] Cit. in T. TOMASI, *La questione educativa nell'opera di Enriques*, in AA. VV., Federico Enriques*, approssimazione e verità*, a cura di O. POMPEO FLACCOVI, Livorno, 1982.

primi decenni del Novecento la "*visione scientifica del mondo*"[5] tendeva a identificarsi con il positivismo logico. Non può sorprendere dunque se, sul versante opposto, quello cioè dell'idealismo gentiliano (ma anche di quello crociano), la radicale critica antipositivista diventi sostanziale rifiuto della scienza come strumento conoscitivo al di là dei suoi aspetti utilitaristici. La matematica, in particolare, andava chiudendosi nell'autoreferenzialità del formalismo hilbertiano che da un lato la rendeva invulnerabile ad ogni possibile attacco, ma proprio per questo non permetteva più ulteriori processi evolutivi[6]. Una teoria formale, infatti, che si fosse dimostrata consistente e completa[7], avrebbe certo potuto essere affiancata da teorie più o meno diverse, ottenute con la sostituzione di uno o più assiomi, ma non perciò si sarebbe potuto ritenerla superata. Il giudizio di Gentile secondo cui la matematica "*cresce per accumulazione*" è certo da respingere in una visione storicizzata e aperta, ma non sarebbe certamente infondata in una visione strettamente formalista.
Se il giudizio di Gentile può essere facilmente inquadrato e spiegato all'interno di un'opposizione tra due visioni radicali, ciò non impedisce di considerarne le conseguenze sulla cultura italiana[8], quello, in particolare, di uno slittamento in senso ascientifico dell'intero asse culturale. Dico ascientifico e non antiscientifico, perché la scienza ha continuato comunque a godere di grande prestigio per via degli indiscutibili successi che ha reso possibile nel campo tecnologico. Va detto inoltre, stavolta a merito di Gentile, che al di là delle posizioni radicali assunte nel dibattito culturale, e nonostante il suo pieno sostegno ideologico al fascismo, la scienza e il suo insegnamento potettero godere, anche nel ventennio, di una sostanziale autonomia[9].
Per quanto possa sembrare paradossale, è il venir meno di questa autonomia che io ritengo si possa oggi intravedere da numerosi segnali. In verità nessuno sembra oggi mettere in discussione la libertà di ricerca e di insegnamento, libertà per altro affermate e teoricamente garantite da tutti gli ordinamenti costituzionali moderni e democratici. La questione è però molto più complessa e non può essere limitata al puro e semplice aspetto delle garanzie formali. Non è oggi pensabile alcuna seria attività scientifica che non abbia carattere professionale con tutte le relative implicazioni economiche e finanziarie. Si legge per esempio in un documento ministeriale[10] al Titolo II art. 6, che gli esperti incaricati di valutare i progetti di ricerca da finanziare dovranno considerare cinque parametri tra cui:
- risultati attesi e relativo impatto sul contesto scientifico nazionale e internazionale;
- coerenza con gli indirizzi del Programma Nazionale della Ricerca.

A prima vista possono sembrare due richieste abbastanza ragionevoli tendenti a garantire la qualità e ad impedire la dispersione di risorse su possibili ricerche di scarso valore effettuate da persone incapaci e incompetenti. Sennonché il documento in oggetto si riferisce ai progetti di ricerca di base

---

[5] Volutamente l'espressione richiama l'opera di Carnap "*La costruzione logica del mondo*" che più di ogni altra rappresenta il programma del positivismo logico (V. R. CARNAP, *La costruzione logica del mondo : pseudoproblemi nella filosofia*, a cura di Emanuele Severino - Torino - (c)1997.
[6] Ovviamente se il programma si fosse attuato nella sua interezza.
[7] Sul significato e sulla portata dei teoremi di incompletezza di Gödel, con cui ha inizio la crisi della concezione formalista, v. ad es. E.NAGEL, J. R. NEWMAN: *La prova di Godel* ,Torino , 1982; o anche G. LOLLI**:** *Incompletezza - saggio su Kurt Godel ,* Bologna, 1992.
[8] Ovviamente non soltanto di Gentile, ma questi ha in Italia un rilievo particolare in quanto autore di una riforma (sia pure già in gran parte pensata da Croce) che ha determinato la struttura fondamentale della scuola italiana quasi per un secolo. Gli atteggiamenti ostili ad una "*visione scientifica del mondo*" si ritrovano sia nel campo della cultura idealista, sia in ampi settori della cultura cattolica. Ovviamente anche in questo caso un ruolo importante nel divorzio tra "*scienza*" e "*cultura*" va attribuito alla troppo facile identificazione tra "*visione scientifica"* e positivismo. Va osservato, in ogni caso, che solo con il pontificato di Carol Wojtyla, la riabilitazione piena e ufficiale di Galileo pone fine al clima di reciproco sospetto tra scienza e fede.
[9] Questo dato non va enfatizzato né considerato come attenuante verso la dittatura che rimane comunque totalitaria. L'autonomia della scienza veniva garantita nell'atto stesso in cui essa appariva svuotata di contenuti culturali incidenti sulla visione del mondo e per ciò stesso neutralizzata; tuttavia garantiva la continuità della tradizione scientifica non solo durante il fascismo, ma anche nel successivo mezzo secolo in cui l'assetto gentiliano della scuola è rimasto pressoché immutato. Per i rapporti di G. Gentile con i matematici v. A. GEUERRAGGIO E P. NASTASI (a cura di). *Gentile e i Matematici italiani*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993.
[10] Ministero dell'Università dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca: "*Criteri e modalità procedurali per l'assegnazione delle risorse finanziarie del Fondo per gli Investimenti della Ricerca di Base*", (2001); reperibile all'indirizzo Internet: http://www.murst.it/atti/2001/dm010308.htm.

e non a progetti di ricerca finalizzata, ed allora può apparire strano che sotto un regime totalitario (ordinamento Gentile) tali garanzie si fondassero esclusivamente sulla selezione di docenti e ricercatori validi e che a questi venisse poi garantita libertà di ricerca[11], mentre in sistemi democratici moderni, qual è l'Italia o altri paesi europei, si pretenda di valutare il merito di progetti ancora da effettuare. E se il primo punto può creare qualche perplessità, il secondo (coerenza con gli indirizzi nazionali) dovrebbe far toccare la soglia di attenzione.
Naturalmente non si vogliono qui disconoscere le ragioni che possono spingere verso una razionalizzazione della spesa: si tratta però di capire anche quali sono i rischi e le implicazioni di una tendenza che vede il progressivo estendersi delle regole di mercato su ogni manifestazione della civiltà umana, comprese quelle culturali e ideali.
Anche qui, però io credo che non basti rilevare un tendenziale fenomeno ed eventualmente opporsi; credo invece che sia necessario capirne le ragioni culturali, oltre che sociali e politiche.
Io credo che il progressivo abbandono di espressioni del tipo "*ricerca pura*" in favore della più moderna "*ricerca di base*", se da un lato nasce come reazione ad una concezione ormai datata della ricerca scientifica come attività "*neutrale*" e "*disinteressata*", dall'altro lato costituisce una spia e contemporaneamente un veicolo di equivoci e fraintendimenti[12]. Primo fra tutti quello secondo cui la conoscenza scientifica non possa costituire un valore in sé già prima e indipendentemente delle sue potenziali ricadute tecnologiche. Paradossalmente dal rifiuto di una visione "*idealistica*" della scienza si giunge così ad esiti che sono pressoché coincidenti con quelli cui giungeva l'idealismo gentiliano, aggravati ora dall'invadenza di un mercato sempre più onnivoro e onnicomprensivo. In questo senso il rapido cambiamento dei linguaggi non è privo di significati se si pensa come nei discorsi sulla scuola diventano sempre più frequenti termini ed espressioni del tipo: *professionalità, mercato del lavoro, risorse umane, ottimizzazione, parametri di rendimento,* e mentre alla parola *istruzione* si sostituisce *formazione* (sottilmente sottinteso *professionale*), la parola *cultura* diventa sempre più rara.
Ma è solo questo? al di là delle rozze formulazioni mercantilistiche vi sono a mio avviso anche ragioni più sottili e raffinate; ragioni che sembrano scaturire, o trovare forza, da tutta una linea di tendenza della critica epistemologica post-popperiana a cui io stesso mi sento per molti aspetti vicino[13]. Ad esempio se qualcuno ponesse questioni del tipo: "*E' giusto che la collettività paghi perché pochi scienziati (matematici) puri possano divertirsi con giochini che alla maggioranza dei contribuenti non interessano*?" saremmo portati, a prima vista, a ricondurre la domanda al genere "*rozzo, demagogico ed economicistico*", se uno studioso di grande livello intellettuale come Feyerabend, non avesse posto, in qualche occasione, delle domande abbastanza simili[14] in un'ottica, però, certamente diversa. Egli infatti, attaccando a fondo le basi epistemologiche sulle quali la "scienza" pretende di porsi in posizione "*diversa*" e "*privilegiata*" rispetto ad altre forme di comprensione del mondo, negando di conseguenza che la scienza possa avere fondamenti oggettivi e stabili, è ben consapevole della difficoltà (impossibilità?) di giudicare a priori la validità di un indirizzo o di un programma di ricerca, una metodologia. Cosa può indurci, quindi, a ritenere certi criteri e certe metodologie preferibili ad altre? Se la risposta è da cercare nei successi ottenuti (successi nella capaci-

---

[11] Ovviamente finché non veniva minacciato il potere politico; ma questa è una questione ben distinta da ciò che riguarda la valutazione di merito di un progetto scientifico.
[12] L'espressione "*di base*" presuppone che la scienza non finalizzata sia la base di qualcos'altro da cui riceve valore.
[13] L'istanza fortemente sostenuta da Popper (e in modo diverso anche da Lakatos) di segnare una demarcazione netta fra ciò che si debba intendere scienza e ciò che invece va rifiutato come pseudoscienza, si dimostra fragile ed illusoria di fronte alla critica di Thomas Kuhn che al falsificazionismo contrappone l'impossibilità di stabilire un criterio di falsificazione e l'inafferrabilità del concetto stesso di fatto che si rivelerebbe sempre intriso di teoria. Ancora più drastica è la critica di Paul Feyerabend che nega ogni possibilità di stabilire criteri metodologici oggettivi e stabili per la scienza e questa verrebbe così a configurarsi come un complesso di problematiche sempre aperte e sempre in continua evoluzione. Opere fondamentali in tal senso sono (nelledizione italiana) TH. S. KUHN., La struttura delle rivoluzioni scientifiche, Pubblicazione: Einaudi, Torino, 1982. P. K. FEYERABEND, Contro il metodo : abbozzo di una teoria anarchica della conoscenza, Feltrinelli, Milano,1990. V. anche: I. LAKATOS e A. MUSGRAVE (a cura di), Critica e crescita della conoscenza, Feltrinelli, Milano, 1976.
[14] Precisamente: "Ora è presumibile che di tanti risultati, soprattutto nella più astratta delle scienze, la matematica, una gran parte sia destinata al solo diletto dei cultori, che sono pochi. Perché l'intera società dovrebbe pagare i costi per il diletto di pochi, per cose magari sublimi ma a cui non è interessata?"

tà di prevedere fenomeni altrimenti insospettabili, successi nel produrre tecnologie potenti e in grado di cambiare profondamente la vita dell'uomo) allora ci si può chiedere qual'è il senso di quelle parti della scienza che non trovano un immediato riscontro utilitaristico o predittivo, o perché il loro costo dovrebbe essere sostenuto anche da chi non ne apprezza il fascino? E se i risultati della scienza si ripercuotono in modo così fondamentale non si pone il problema di un controllo democratico?
La questione è dunque molto più complessa di quanto non sembri a prima vista. Ci limitiamo qui a dire che il controllo sugli esiti della scienza e sulla sua programmazione è non solo accettabile ma necessaria quando si tratta di ricerca tecnologica, quando ha immediate conseguenze sulla salute o sull'ambiente, quando prevede costi abnormi. Non quindi sulla scienza in generale e sul suo insegnamento di base. Ancor meno sulle scienze più teoriche e astratte come la matematica. Altrimenti significherebbe negare tutta la dinamica storica attraverso cui le diverse scienze si sono sviluppate e si sviluppano. Significherebbe dimenticare che se le più ardite realizzazioni tecnologiche del mondo contemporaneo sono oggi possibili è perché innumerevoli generazioni di matematici si sono divertiti con "*giochini*" che la maggioranza delle persone avrebbe ritenuto inutili. Ed inoltre siamo proprio certi che le modificazioni del pensiero matematico non abbiano proprio nulla da dire sulla visione generale del mondo?

Del resto appare già abbastanza chiaro di come le ragioni di Feierabend siano ben diverse da quelle mercantilistiche predominanti. Egli infatti, proteso verso una democratizzazione forse un po' troppo ingenua ed ottimistica dell'impresa scientifica, rivolge la sua critica in modo non meno radicale agli interessi economici che condizionano l'organizzazione, gli indirizzi e l'attività delle istituzioni scientifiche..

3. Dal caos delle percezioni alla razionalità della comprensione.

Il miglior modo, io credo, per costruire percorsi didattici pedagogicamente[15] in grado di restituire i caratteri più significativi della matematica, è quello di penetrarne il nucleo profondo e di metterlo il più possibile a nudo, spogliarlo quindi dei suoi aspetti accidentali e di tutto ciò che può apparire complicato. Non si tratta ovviamente di rinunciare all'apprendimento di una certa quantità di tecniche e di abilità, ma di isolare il nucleo concettuale di ogni problematica per fare apparire il vero carattere dei processi di astrazione che è quello di rendere semplici e intelligibili situazioni per sé caotiche e non viceversa.
Nel breve spazio che mi resta non penso certamente di delineare percorsi didattici concreti; proporrò invece alcuni spunti di riflessione che ritengo possano essere utili alla loro ideazione.
Partirei da un racconto di uno dei più significativi rappresentanti della letteratura fantastica del Novecento: lo scrittore argentino Jorge Luis Borges, citando in particolare un suo racconto che mi sembra cogliere in modo emblematico il nodo centrale dei processi di razionalizzazione matematica. Il protagonista, narrante in prima persona, è ossessionato dalla ricerca di certe *tigri azzurre*[16] di cui ha sentito parlare, ma di cui non è riuscito trovare traccia in nessuna parte del mondo. E' ossessionato al punto da sognarle di notte: sono di uno strano azzurro "*che può essere visto soltanto nel sogno*". Quando un giorno ha notizia che una *tigre azzurra* è stata vista presso uno sperduto villaggio nel cuore dell'India, vi si reca, ma trova gli abitanti reticenti e forse spaventati. Sembra soprattutto che vogliano tenerlo lontano da una collina che ritengono sacra e inviolabile. E' su questa collina che il Nostro si reca segretamente una notte, e vi scopre in una crepa del terreno dei piccoli di-

[15] Il lettore mi scusi se faccio ancora riferimento al concetto di *educazione* e non a quello apparentemente più liberale di *formazione* oggi reso quasi obbligatorio. Il fatto è che io non credo alla possibilità di una crescita intellettuale che sia davvero libera da condizionamenti culturali. Non si può certo rinunciare al linguaggio e alla scrittura, né alle regole del vivere comune. Nessuno può scegliersi la civiltà e la cultura in cui nascere. Se la scuola rinuncia ad educare, lo faranno le grandi agenzie pubblicitarie e della comunicazione.
[16] "*Tigri azzurre*" è appunto il titolo del racconto apparso in Italia in BORGES: *venticinque Agosto 1983 e altri racconti*, Modadori, 1990.

schetti azzurri. Non c'è dubbio: hanno lo stesso colore del sogno, anche se non sono gli animali che egli credeva. Ed è qui che ha inizio la sua avventura allucinante, perché quegli strani oggetti non rispettano le leggi del numero:

> "*…Ne estrassi un primo pugno, e sentii che ne rimanevano ancora due o tre. Una sorta di solletico, una leggerissima agitazione diede calore alla mia mano. Aprendola vidi che i dischi erano trenta o quaranta. Io avrei giurato che non fossero più di dieci. Li lasciai sul tavolo e cercai gli altri. Non ebbi bisogno di contarli per verificare che si erano moltiplicati. Li raccolsi in un unico mucchio e tentai di contarli uno per uno. La semplice operazione risultò impossibile. Guardavo fisso uno qualunque di essi, lo prendevo tra il pollice e l'indice, e quando era solo, erano molti. Mi accertai di non avere la febbre, e feci la prova molte volte. L'osceno miracolo si ripeteva. Sentii freddo ai piedi e al basso ventre, e mi tremavano le ginocchia.* [...] *Naturalmente le quattro operazioni di sommare, sottrarre, moltiplicare o dividere erano impossibili. Le pietre si sottraevano all'aritmetica e al calcolo delle probabilità. Quaranta dischi potevano, divisi, dare nove; i nove divisi a loro volta, potevano essere trecento*".

Lo scandalo non è solo del protagonista, dell'uomo civilizzato. E' un indigeno a dire:

> *"Meglio una pallottola in petto che una tigre azzurra in mano*",

ed ancora

> "[...] *Ora sono molte, ma possono cambiare. Hanno la forma della luna quando è piena e quel colore azzurro che è permesso vedere solo nei sogni. I padri dei nostri padri non mentivano quando parlavano del loro potere*".

L'atteggiamento degli indigeni è dunque di sgomento, di superstizioso terrore, ma è ancora il protagonista, uomo appartenente alla nostra civiltà e alla nostra cultura, ad esprimere l'angoscia che il mondo reale possa non rispondere alla razionalità matematica:

> "*Se mi dicessero che ci sono unicorni sulla luna, io accetterei o respingerei questa notizia o sospenderei il giudizio, ma potrei immaginarli. Invece, se mi dicessero che sulla luna sei o sette unicorni possono essere tre, io affermerei a priori che il fatto è impossibile. Chi ha capito che tre più uno fa quattro non fa la prova con monete, con dadi, con i pezzi degli scacchi o con le matite. Lo capisce e basta. Non può concepire un'altra cifra.* [...] *A me, Alexander Craige, era toccato in sorte di scoprire, fra tutti gli uomini della terra, gli unici oggetti che contraddicono quella legge essenziale della mente umana. All'inizio avevo sofferto il timore di essere pazzo; col tempo credo che avrei preferito essere pazzo, poiché la mia allucinazione personale importerebbe meno della prova che nell'universo è contenuto il disordine. Se tre più uno possono essere due o possono essere quattordici, la ragione è una follia"*.

Già! Come ci sentiremmo se non potessimo più credere nella costanza del numero? Se pensassimo che due più due un giorno fa quattro, un altro giorno sette? Se non potessimo contare le dita della nostra mano o le persone che ci sono care? Se temessimo che il loro numero può continuamente cambiare senza che si aggiunga o si sottragga qualcosa? Sarebbe il caos primordiale delle pure sensazioni: quel caos entro cui la mente umana mette ordine con le proprie astratte creazioni: i concetti, le categorie. Una di queste creazioni è il numero, un'altra è lo spazio, altre sono le categorie di tempo, di sostanza, di causalità, ecc…

La stessa sequenzialità che è alla base del pensiero logico-sillogistico o analitico, non è che una forma particolare di organizzazione del pensiero, a cui si può contrapporre una forma di pensiero "*globale*". E' per ciò che qualcuno si chiede, oggi, se nell'era della televisione e della comunicazione per immagini[17], sia lecito continuare a imporre nella scuola e nelle istituzioni culturali il modello sequenziale come modello privilegiato. Ora è chiaro che non esiste un modello di organizzazione del pensiero che sia in sé quello "*Buono*", ma è altrettanto vero che tutto il nostro millenario patrimonio culturale è costruito sul modello sequenziale, ed ove questo venisse meno, qualunque altro modello dovrebbe quanto meno ricominciare il suo cammino se non *dall'età della pietra* sicuramente da livelli abbastanza elementari. La stessa tecnologia su cui è oggi fondata la comunicazioni per immagini perderebbe di colpo le proprie basi, con conseguenze difficilmente prevedibili.

---

[17] Il passaggio dalla *forma mentale* o *brainframe* sequenziale, a quello globale o televisivo è stato moltoacutamente studiato da Derrik De Kerkov che associa il sorgere della forma sequenziale all'invenzione dell'alfabetico fonetico completo di vocali nell'antica Grecia. Per approfondire l'argomento V. D. De Kerkov, *Brainframes*, Baskerville, Bologna, 1996.

Bisogna ancora dire che se il pensiero razionale sequenziale ha visto la sua più compiuta realizzazione in quella civiltà che, affondando nella Grecia di Pitagora e di Aristotele le sue radici, indichiamo oggi come civiltà occidentale, tuttavia il processo di astrazione è l'imprescindibile passaggio di ogni civilizzazione umana. Non a caso, per esempio, una delle più invocate divinità Indù è proprio quel Ganapati o Genesha, che significa "*il signore delle Categorie*" cioè di "*Tutto ciò che può essere contato o compreso (il gana)*", o anche "*Il principio di tutte le classificazioni attraverso cui le relazioni tra ordini diversi di cose, tra il macrocosmo e il microcosmo, possono essere comprese, è chiamato Signore-delle-categorie (Ganapati)*"[18].

Facciamo ora un piccolo passo avanti, presentando qualche esempio che sia paradigmatico di come l'astrazione creativa svolga il proprio fondamentale ruolo nella crescita della matematica. Inizieremo da un problema che ha il pregio di non richiedere alcuna conoscenza tecnica.

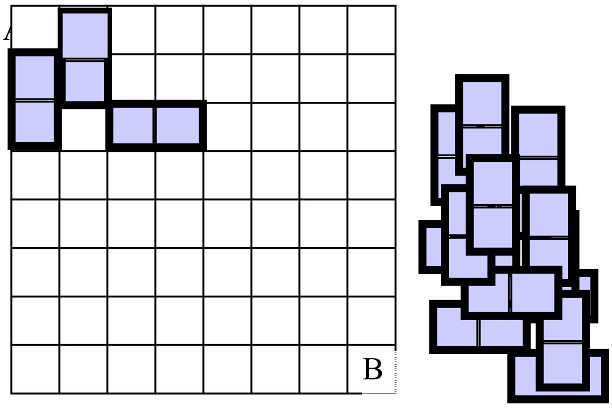


Fig. 1

Sia data una tabella quadrata di $8 \times 8 = 64$ caselle e 31 pezzi di domino (Fig. 1) ognuno dei quali può ricoprire esattamente 2 caselle affiancate in senso orizzontale o verticale.
Disponendo tutti i 31 pezzi sulla tabella, verranno coperte 62 delle 64 caselle, lasciandone quindi esattamente due libere. Si chiede di disporre, se è possibile, i 31 pezzi di domino in maniera tale che restino libere due caselle diametralmente opposte. Per es. quelle indicate in figura con le lettere A e B.

Si potrebbe pensare di risolvere il problema per tentativi, provando a porre i pezzi di domino in vari modi sulle caselle. Ma quanti tentativi diversi occorre fare prima di poter affermare, ad es. che il problema non ha soluzione?

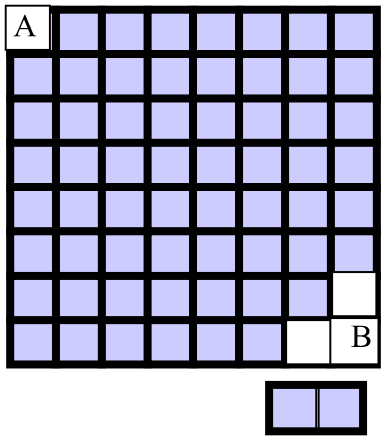


Fig. 2

In Fig. 2 si può vedere un tipico tentativo fallito perché, arrivati alla fine, per collocare l'ultimo pezzo bisognerebbe necessariamente coprire B.

Ci si può rendere conto con facilità che il numero di tentativi è altissimo e non è neppure semplice da calcolare. Anzi è un numero talmente alto che qualunque computer dovrebbe impiegare un tempo enorme per compiere tutti i tentativi possibili. Provando manualmente, d'altra parte, si crea dopo poco tempo una tale situazione di CAOS per cui non si riesce a tenere il conto delle prove già effettuate e di come bisogna procedere oltre. Cosa avverrebbe allora se la tabella anziché 10**D**10 fosse di 100**D**100?

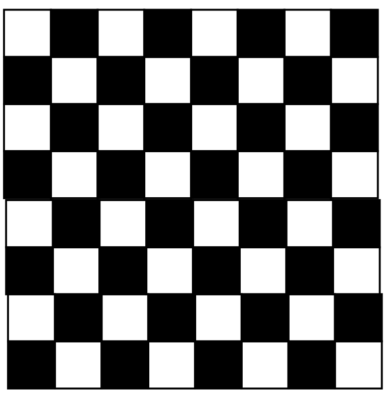


Fig. 3

Ma non è questo il modo di lavorare del matematico. Seguiamone il pensiero a partire dalle prime associazioni di idee. La prima osservazione possibile è che la tabella considerata somiglia ad una scacchiera, dove però le caselle sono tutte bianche anziché di due colori. Proviamo allora a colorarla come in Fig. 3. Si osserverà subito che le caselle A e B sono necessariamen-

[18] v. http://www.compulink.co.uk/~ganesh/ganesha.htm.

te dello stesso colore. Ora ogni pezzo di domino, in qualunque modo venga disposto, dovendo coprire due caselle affiancate, ne coprirà una bianca ed una nera; in totale resteranno coperte 31 caselle bianche e altrettante nere. Ne segue che le due caselle rimaste scoperte dovranno essere anch'esse una bianca e una nera; per ciò non possono essere in alcun modo le caselle A e B perché queste sono dello stesso colore. Il problema è immediatamente risolto in senso negativo. Cos'è successo?
Veniamo al punto cruciale: il colore, di cui ci siamo serviti nella dimostrazione, è qualcosa di assolutamente estraneo al problema, esso viene introdotto attraverso un puro atto di fantasia. Non è neppure essenziale che si pensi in termini di colore, ciò che interviene realmente è qualcosa di più astratto: è la partizione delle caselle in due classi disposte a scacchiera. Basta questo semplice atto creativo perché l'originario caos ci appaia improvvisamente comprensibile e la dimostrazione immediata. Dimostrazione che è, per altro, estensibile al caso di tabelle $n \times n$ per ogni n pari comunque grande.
Facciamo ora un passo ulteriore. Stavolta nel pieno della "*vera*" storia della matematica. Com'è ben noto i numeri complessi nascono da un problema relativo alle equazioni di terzo grado. Data un'equazione del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

Si sa che essa ha sempre almeno una soluzione nel campo reale; tuttavia restando sempre nel campo reale la formula risolutiva

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

sembra cadere in difetto quando

$$\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\,.$$

Raffaele Bombelli, già nel sedicesimo secolo, teorizza un modo originale (e fantasioso) per giungere alla soluzione anche in questo caso. Consiste nel definire un'entità fittizia *i*, o *unità immaginaria* tale che ^{2} . Lo stesso Bombelli si rende ben conto dell'arbitrarietà dell'operazione, è consapevole che il nuovo oggetto definito è qualcosa di assolutamente estraneo al problema, un oggetto di fantasia con cui operare uno stratagemma. Tuttavia funzionava bene ed era utile allo scopo.
Si è dunque partiti da una situazione incomprensibile, oscura, e pertanto *caotica*. C'è un'equazione che è sempre risolubile, ne conosce perfino una formula risolutiva, eppure questa in certi casi cade in difetto o non se ne comprende il significato. C'è una creazione della fantasia: i numeri *immaginari* o *complessi*, che danno significato alla formula risolutiva anche nei casi prima incomprensibili. Il problema non solo è risolto ma ora è visto sotto una luce nuova: l'equazione, di soluzioni ne ha sempre tre, di cui due possono essere complesse coniugate.
Ma la storia stavolta non si ferma qui perché i numeri complessi, una volta creati vanno al di là del problema da cui sono nati e assumono vita autonoma. Cito qui, solo a titolo di esempio, la rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Gauss, il teorema fondamentale dell'algebra, la teoria analitica dei numeri, la rappresentazione mediante numeri complessi di grandezze fisiche, ecc…
E veniamo ora ad un terzo (e per noi ultimo) caso paradigmatico. La teoria dei numeri, cioè la teoria dei soli numeri interi, ha, come ben sappiamo, un'origine antichissima che possiamo senz'altro far risalire almeno a Pitagora. Alcuni problemi, quali quelli sui numeri primi, possiamo farli risalire ad Euclide. Non c'è teoria apparentemente così semplice ma allo stesso tempo così difficile come la teoria dei numeri che ha impegnato nella storia grandi menti come quelle di Fermat, Eulero e Gauss. Eppure la maggior parte delle problematiche e dei risultati ottenuti in questa disciplina è apparsa sempre lontana da qualunque possibilità applicativa. In epoca moderna, quasi tutta la fisica e la tecnologia si è sviluppata in connessione con strumenti matematici che, come l'analisi infinitesimale, richiedono di essere sviluppati almeno nel campo dei numeri reali. Cosa mai possono dirmi i numeri primi o i numeri quadrati, con la loro indivisibilità, quando comunque li posso dividere o estrarne la radice quadrata nel campo reale? E la funzioni di Eulero-Gaus? E il teorema di Eulero? E così via…Siamo proprio nel campo di quei *giochini* che hanno divertito generazioni di matematici. Un inutile trastullo su cui non si può e non si deve investire il denaro pubblico? Forse!

Poi viene improvvisa l'era dei calcolatori che lavorano solo su quantità discrete. Hanno una velocità incredibile e possono controllare sistemi combinatori di grandi dimensioni. La combinatoria entra nella tecnologia e con essa i risultati prodotti nei secoli sulla teoria dei numeri. Uno è molto importante in particolare: il sistema crittografico a doppia chiave asimmetrica, fondato sul teorema di Eulero e su proprietà dei numeri primi. Grazie ad esso possiamo comunicare con tranquillità sulla rete il numero della carta di credito senza il timore che venga intercettato; su di esso possiamo affermare che si fonda quella che oggi si chiama *New economy*.
Potremmo continuare per esempio con la storia della critica al quinto postulato di Euclide, una disputa protratta per secoli su un problema così apparentemente lontano dalla realtà e che improvvisamente sfocia tra il Diciannovesimo e il Ventesimo secolo in una nuova e sconvolgente rivoluzione scientifica. Ma come promesso chiudo qui la mia brevissima lista di esempi emblematici.

4. Conclusione.

Come si sarà già capito, è meglio a questo punto non trarre alcuna conclusione. Personalmente credo che il tema affrontato sia molto più complesso di quanto non si sia potuto delineare in poche pagine. È bene quindi non fermare qui la riflessione, nella speranza che da questi pochi spunti possa derivare un più ampio studio e una più completa elaborazione. Come ho già precisato non c'è in queste pagine alcun cenno a possibili percorsi didattici o concreti suggerimenti metodologici. Voglio ora aggiungere che questa mia scelta non è dovuta solo a motivi di spazio. Il fatto è che non credo alle *metodologie* come insieme normativo ben definito o come "*ricettario*" sempre valido. Certo i percorsi didattici, i percorsi educativi (o devo dire formativi?) sono indubbiamente necessari, ad essi bisogna pur giungere, ma come momento di sintesi che parte da premesse e da riflessioni non generiche e non superficiali. Non dimenticando per altro che i percorsi didattici vanno articolati e differenziati a seconda dei contesti, dell'età, delle diverse realtà scolastiche, mentre le premesse culturali e le finalità non possono che guardare ad un blocco unitario di problematiche.