

La musica, il numero, il ritmo e la struttura. Considerazioni sperimentali per l'insegnamento/apprendimento nella scuola elementare.

FRANCESCA RAGUSA

ABSTRACT

Le filosofie pitagoriche e platoniche sono fiorite su un intreccio stretto tra musica, matematica e astronomia. Fu proprio una intuizione musicale che permise a Pitagora di formulare quel legame fra matematica e natura che costituisce la scoperta più profonda e feconda della storia dell'intero pensiero umano. Oggi l'educazione strutturo-ritmica è divenuto uno strumento educativo di notevole interesse sia per migliorare l'assetto psicomotorio del bambino, che per orientare la strutturazione del suo pensiero.

Scopo della mio lavoro è quello di capire quali sono le correlazioni tra il ritmo e la matematica; e lo studio della matematica secondo una prospettiva diversa rispetto al solito apprendimento scolastico.

Mediante la sperimentazione in classe, ho avuto la possibilità di rilevare che l'apprendimento dell'educazione strutturo-ritmica favorisce nel bambino l'apprendimento dei prerequisiti che sono alla base del concetto numerico.

Le attività ritmiche fatte durante le ore di educazione musicale diventano un prerequisito fondamentale per l'apprendimento della matematica, e allo stesso modo lo studio della matematica e di tutti i suoi principi diventano prerequisiti essenziali per l'educazione musicale.

Introduzione

Perché la musica e la matematica?

La musica e la matematica hanno sempre una certa parentela l'una e l'altra richiedono un certo apprendistato, molto talento e un tocco di grazia (Frederick Pratter).

L'argomento è stato approfondito sotto un particolare aspetto che è quello logico-matematico. Scopo del presente lavoro¹ è, infatti, quello di capire quali sono le correlazioni tra il ritmo e la matematica attraverso un lavoro sperimentale in classe.

In particolare viene approfondito il concetto di educazione strutturo-ritmica che è uno strumento educativo di notevole interesse sia per migliorare l'assetto psicomotorio del bambino, che per orientare la strutturazione del suo pensiero (Cazzago, 1984).

I risultati di tutto il lavoro dimostrano che l'apprendimento dell'educazione strutturo-ritmica favorisce nel bambino l'apprendimento dei prerequisiti che sono alla base del concetto numerico. (D'Amico, 2002; Cazzago, 1984).

Le attività ritmiche fatte durante le ore di educazione musicale diventano un prerequisito fondamentale per l'apprendimento della matematica e allo stesso modo lo studio della matematica e di tutti i suoi principi diventano prerequisiti essenziali per l'educazione musicale.

Musica, Matematica e Pitagora

Pitagora oltre ad essere uno dei più importanti matematici era un compositore e un teorico musicale.

Fu proprio una intuizione musicale che permise a Pitagora di formulare quel legame fra matematica e natura che costituisce, probabilmente, la scoperta più profonda e feconda della storia dell'intero pensiero umano.

In perfetto stile scientifico, dall'osservazione e dall'esperimento Pitagora dedusse una teoria: la coincidenza di musica, matematica e natura. Più precisamente, egli suppose che ci fossero tre tipi di musica: quella strumentale propriamente detta, quella umana suonata dall'organismo, e quella mondana suonata dal cosmo. La sostanziale coincidenza delle tre musiche era responsabile da un lato dell'effetto emotivo prodotto, per letterale risonanza, dalla melodia sull'uomo, e dall'altro della possibilità di dedurre le leggi matematiche dell'universo da quelle musicali.

Poiché nelle leggi dell'armonia scoperte da Pitagora intervenivano soltanto numeri frazionari, detti anche numeri razionali, ed i rapporti armonici corrispondevano perfettamente a rapporti numerici, Pitagora enunciò la sua scoperta nella famosa massima: tutto è (numero) razionale. Essa codifica la fede nella intelligibilità matematica della natura, ed è il presupposto metafisico dell'intera impresa scientifica, di cui Pitagora è stato appunto il padre fondatore. Una scoperta tanto profonda non poteva che far ritenere Pitagora una vera e propria divinità (Giamblico, 1991).

Laureata in Scienze della Formazione Primaria presso l'Università di Palermo, Dicembre 2003. Il lavoro qui presentato è l'abstract della sua tesi di laurea (luglio 2004). Relatori della tesi: Proff Filippo Spagnolo e Alessandra La Marca. La tesi completa si trova al seguente indirizzo web: <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/matdit.htm>

una relazione che ancora oggi alla base della teoria generale dell'armonia musicale.

Ritmo, struttura, musica, matematica per l'apprendimento scolastico

Apparentemente questa serie di parole non hanno un significato comune che li colleghi tra di loro, ma, dopo un'analisi dettagliata è possibile rilevare un filo conduttore che attribuisce un significato diverso ad ogni concetto ma che riporta il tutto ad un'unica finalità che è l'apprendimento.

Un principio fondamentale che a scuola bisogna sempre tenere presente è la ricerca interdisciplinare, cioè bisogna sforzarsi di avere una visione unitaria vicina al reale e al tempo stesso rispettare la specificità delle discipline lasciando che ciascuna proceda con la propria impostazione.

Un insegnamento moderno delle discipline non può assolutamente ignorare questi legami in particolare tra la matematica e la realtà.

Si tratta dunque di insegnare la matematica nelle più svariate situazioni collegata ad altre discipline come la musica, la lingua italiana legata al mondo reale per stimolare gli alunni a costruire essi stessi le variabili significative per la soluzione di problemi.

In questo modo ci avviamo a cambiare qualche cosa nello studio non solo della matematica ma di tutte le discipline perché ognuna apporta un contributo all'altra, il cambiamento deve riguardare non solo i contenuti ma anche la metodologia didattica che in questo modo diventa più motivante.

Nei paragrafi seguenti si cerca di spiegare i diversi termini mettendo in evidenza i contributi dell'educazione strutturo – ritmica.

Il concetto di struttura

I sistemi strutturali sono alla base sia delle manifestazioni ritmiche che dei meccanismi e processi mentali" (Cazzago, 1984). Non esiste alcuna azione, concreta o pensata, che prescindano da una organizzazione strutturale di entità successive. La struttura è una relazione spazio – temporale che collega in un determinato modo insieme di oggetti, battute, azioni e pensieri tra di loro.

Il concetto di struttura è indipendente dagli oggetti e dagli elementi usati; con elementi diversi è possibile costruire strutture identiche. Ad esempio una struttura sonora al tamburo (una battuta seguita da tre ravvicinate nel tempo) può essere riprodotta con forme bi e tridimensionali diverse o essere riprodotta con il movimento (es.: battuta delle mani) mantenendosi invariata nei suoi intervalli elementari..

Il concetto di ritmo

Il ritmo viene definito come "ordine nel movimento, intendendo con ciò la manifestazione dei ritorni periodici di strutture semplici o complesse e la coordinazione presente nella successione delle strutture stesse. I ritorni periodici del ritmo musicale sono molto importanti a livello percettivo perché hanno il potere di suscitare induzione motoria: la regolarità ritmica, infatti, genera movimenti che si armonizzano con il segnale percettivo" (Guerra, Giacon).

Riferendosi a ciò che interessa in questo contesto possiamo definire il ritmo come: qualsiasi organizzazione e strutturazione di fenomeni che avvengono in maniera successiva nel tempo e che si ripetono ciclicamente.

Il ritmo ricopre, dunque, un ruolo fondamentale nel campo educativo, sia come momento fortemente socializzante, sia perché favorisce il controllo delle capacità psicomotorie, costituendo il supporto iniziale per ogni attività.

Rapporto tra struttura e ritmo

Ogni ritmo, sia esso motorio, visivo od uditivo, ha una sua pregnanza strutturale.

Se sento una serie di battute ritmate (●●●● ●●●● ●●●● ●●●●...) posso identificare la cellula strutturale (●●●●) che ripetendosi ciclicamente forma il ritmo uditivo.

Anche il ritmo motorio ha una base strutturale; quando io batto le mani sul tamburello (ad esempio) mando ad effetto la medesima organizzazione delle strutture uditive conseguenti.

Allo stesso modo per tutti i tipi di ritmo (Cazzago, 1984).

Concludendo si può affermare che ogni ritmo sia esso uditivo, motorio o visivo, ha quindi una sua pregnanza strutturale.

L'educazione strutturo – ritmica

L'educazione strutturo - ritmica è uno strumento educativo di notevole interesse sia per migliorare l'assetto psicomotorio del bambino, che per orientare la strutturazione del suo pensiero.

Le strutture e i ritmi costituiscono uno dei cardini educativi fondamentali per l'organizzazione del movimento, della percezione uditiva e visiva, dello scorrere ordinato dei pensieri.

comprendere e memorizzare strutture e ritmi che abbiano un diretto legame con il vissuto psicomotorio. Non a caso, l'educazione al ritmo è alla base dell'insegnamento nel primo ciclo della scuola elementare, soprattutto nella scuola materna per favorire una idonea acquisizione degli apprendimenti di base, perché proprio alla non corretta strutturazione ritmica sono legate alcune turbe psicomotorie e conoscitive.

L'educazione ritmica, in stretto rapporto con l'educazione psicomotoria, si presenta come educazione al movimento, come educazione percettiva e come coordinazione "gesto-suono"; inizia con la sincronizzazione tra movimento e suono dei ritmi naturali e spontanei del bambino (dondolare, camminare, saltare) cercando di arricchire ciò che il fanciullo già possiede. Sviluppa inoltre il senso dell'orientamento, la lateralità, la coordinazione dinamica generale, l'organizzazione dello spazio e del tempo, il controllo respiratorio (indispensabile per l'articolazione del linguaggio), la lettura, il pensiero logico – matematico nonché la socializzazione. Quindi l'allenamento strutturo - ritmico fonda le sue basi per conquiste strutturali astratte quali le strutture matematiche, grammaticali, mentali, contribuendo all'organizzazione strutturale del pensiero.

Una successione ritmata di movimenti (ad esempio) risulta nettamente più facile da eseguire e comporta meno fatica rispetto ad una successione degli stessi eseguita però in forma non ritmata: l'esercizio ritmato regolarizza il dispendio nervoso, in questo modo l'esercizio eseguito in forma ritmata è economico. La sua utilizzazione è quindi particolarmente raccomandabile in quanto favorisce l'eliminazione delle sincinesie destabilizzanti (dovute ad un'attività volontaria mal controllata), permette l'armonia dei gesti motori, il rilassamento, elementi indispensabili per raggiungere la padronanza del proprio corpo e come già accennato per l'apprendimento della letto – scrittura e l'avvio alla strutturazione del pensiero logico – matematico: per la lettura, infatti, che è un meccanismo complesso basato sulla corrispondenza tra il simbolismo dei segni grafici con i suoni corrispondenti, il bambino deve in sostanza trasferire nel tempo una sequenza spaziale; per la scrittura, invece, il bambino deve operare in maniera inversa, cioè trasferire nello spazio grafico una sequenza temporale. L'educazione strutturo – ritmica, non va intesa come un'attività ludico aspecifica con finalità ricreativa, ma attraverso le proposte strutturo – ritmiche dobbiamo favorire nel bambino l'instaurarsi di abilità che sviluppino la sua capacità di pensare.

L'educazione strutturo ritmica risulta collegata alle seguenti conquiste ed interiorizzazioni:

- Schema corporeo e coscienza di sé;
- Orientamento e strutturazione spazio – temporale;
- Capacità di attenzione ordinata nel successivo;
- Capacità mnestiche;
- Identificazioni ed interiorizzazioni di ordini successivi non intercambiabili;
- Potenziamento dei processi di analisi e sintesi;
- Intensificazione delle capacità di simbolizzazione partendo da dati vissuti concreti;
- Capacità di apprendere materie strumentali (leggere, scrivere, far di conto ecc.)
- Prerequisiti per la conquista astratta dell'idea di tempo (Calabrese, 1974).

Strutture Logico – Matematiche

L'insegnamento della matematica *"si è orientato verso l'acquisizione diretta di concetti e strutture matematiche"* (D. P. R. 104/'85). Apprendendo le strutture della matematica gli alunni entrano in possesso di un patrimonio che li renderà in grado di decontestualizzare gli apprendimenti trasferendoli in altre situazioni problematiche.

Sapere padroneggiare le strutture matematiche significa, quindi, per l'alunno poter leggere, interpretare, ipotizzare la realtà, agire operativamente su questa.

L'insegnamento di questa disciplina nella scuola elementare è stato per lungo tempo caratterizzato dalla necessità di fornire all'alunno le capacità operative indispensabili per le attività pratiche e dall'estrema importanza data allo studio pedissequo di regole e teorie astratte; la conseguenza era stata, sul piano didattico la manipolazione di formule del tutto avulse, sul piano del significato, dal vissuto dell'alunno.

Oggi si sta affermando che ciò che interessa la Matematica non è la formula, l'espressione astratta, ma la sostanza dei suoi concetti, il significato e il senso dei suoi principi, il perché dei suoi procedimenti, le ricadute nella realtà esterna, sulla organizzazione interna delle conoscenze, ben strutturata.

L'organizzazione interna delle conoscenze deve scaturire dalla interiorizzazione delle azioni esplorative concrete fruite dagli alunni, da situazioni tratte dai contesti esperienziali fondati sul vissuto e tradotti in problemi al fine di condurli ad un complesso articolato di capacità

astrazione per formulare teorie generalizzabili. Così come troviamo scritto nei programmi per la scuola elementare del 1985:

“la vasta esperienza compiuta ha però dimostrato che non è possibile giungere all’astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l’osservazione della realtà, l’attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione. [...] Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo...”

in questo processo, che si configura lungo e complesso, occorre partire da ciò che l’alunno possiede nel suo bagaglio di esperienze legate allo spazio e al tempo, alle relazioni tra se stesso e l’ambiente circostante e ad i rapporti tra sé, il mondo e la dimensione spazio – temporale (memoria episodica), per giungere ad una conoscenza del mondo e dei simboli, dei segni e dei significati che esprimono la realtà la quale, nelle loro reciproche relazioni, si organizzano in formule (memoria semantica)

Il concetto di numero dipende in gran parte dalla interiorizzazione di alcune strutture operazionali di base quali: la corrispondenza univoca, la classificazione, la seriazione, l’ordinalità, la cardinalità.

Queste strutture logico – matematiche, secondo Piaget, si costruiscono in relazione alle azioni strutturate. Egli, infatti, afferma. *“In generale tutto ciò che riguarda le relazioni tra le strutture logico - matematiche e l’azione interessa la psicologia contemporanea, poiché queste relazioni sono di natura tale da chiarire la questione sempre attuale di sapere che cosa il pensiero deve al linguaggio e che deve più profondamente alle coordinazioni dell’azione stessa”* (Calabrese, 1974).

Come scrive Cazzago *“per la conquista delle strutture logico – matematiche normalmente il bambino passa attraverso tre tappe:*

*Nella prima **FA***

*Nella successiva **VEDE** la realtà*

*Nella terza **SIMBOLIZZA** ciò che ha visto*

Prima c’è la tappa dell’azione che è seguita da quella iconica e poi da quella simbolica.” (Cazzago, 1984).

Per Dienes nell’insegnamento tradizionale si parte proprio dal simbolo, cioè la terza tappa. Si ritiene che spiegando il significato del linguaggio matematico, il bambino possa capire ciò che vuole dire il simbolo matematico e poi sia capace ad utilizzare questo simbolo, poi magari si ricorre ai sussidi audio visivi e poi agli esercizi pratici, cioè si fa tutto il contrario di ciò che si dovrebbe fare.

Grazie all’osservazione diretta dei bambini ci si rende conto che la maggior parte delle difficoltà dei bambini ad acquisire i concetti matematici come ad esempio i simboli numerici, è dovuta proprio all’incapacità di interiorizzare relazioni strutturali fra elementi concreti.

La difficoltà di mantenere sul piano cosciente una serie ordinata di elementi numerici (1...2...3...4... ordinalità numerica) impedisce al bambino con difficoltà di assegnare a ciascun numero il suo posto nella scala numerica.

In questo modo non potrà essere appresa la cardinalità numerica, cioè il numero che indica la quantità di oggetti contenuti in un insieme finito.

L’educazione strutturo – ritmica favorisce nel bambino l’apprendimento dei prerequisiti che sono alla base del concetto numerico.

In ogni proposta strutturo – ritmica ci sono inferenze di corrispondenza biunivoca, classificazione, ordinalità e cardinalità; in tutto questo comunque c’è un vantaggio educativo e cioè che il bambino vive e sente concretamente ciò che fa, avendo maggiori possibilità di interiorizzazione.

Per quanto riguarda l’acquisizione di queste abilità numeriche tra gli studiosi esiste un generale accordo e cioè: i bambini possiedono abilità implicite, relative ai numeri, ben prima di imparare ad utilizzare i numeri nel contesto scolastico, Wynn (1998) afferma che la comprensione dei numeri è intrinseca alla struttura della nostra mente ed è pertanto innata. Inoltre, viene affermato che il conteggio costituisce il prerequisito fondamentale dell’apprendimento matematico, intendendo per conteggio non la ripetizione mnemonica come se fosse una filastrocca dei numeri che i bambini imparano molto presto, ma perché questa attività si configuri come un vero e proprio processo logico di conteggio, e si ponga quindi alla base dello sviluppo delle successive abilità di calcolo, è necessario che il bambino rispetti i principi del conteggio definiti da Gelman e Gallistel (1978) (D’amico, 2002), quali:

- Il principio dell’ordine stabile (il conteggio richiede una sequenza in un ordine fisso);
- Il principio uno a uno (ad ogni oggetto corrisponde una sola etichetta numerica);
- Il principio di cardinalità (l’ultimo numero contato corrisponde al numero totale di oggetti contati);
- Il principio di irrilevanza dell’ordine (gli oggetti possono essere contati in qualunque ordine);
- Il principio di astrazione (qualunque cosa può essere contata).

possiamo creare una orchestrina ritmica a cui si richiedono esecuzioni strutturo – ritmiche di gruppo dove è necessario identificare con precisione aritmetica le sequenze ritmico – strumentali.

La Sperimentazione

Ipotesi sperimentale

La parte iniziale della mia tesi ha messo in evidenza che esistono delle *correlazioni tra lingua naturale, ritmo e matematica*.

Come afferma lo studioso Cazzago l'educazione al ritmo costituisce uno dei cardini educativi fondamentale per l'organizzazione dei movimenti, della percezione uditiva e visiva, dello scorrere ordinato dei pensieri.

“Non esiste alcuna azione, concreta o pensata, che prescindendo da una organizzazione strutturale di entità successive”.

Gli apprendimenti scolastici sono influenzati dalle correlazioni che si vengono a creare tra i vari elementi.

Per quanto riguarda l'apprendimento delle scrittura e della lettura, abbiamo già visto nel capitolo precedente, si fonda sull'esperienza della successione ritmica che aiuta ad organizzare in modo ordinato i grafemi in quanto li allinea alla percezione reversibile di sequenze ordinate.

Lo stesso vale per l'apprendimento dei simboli matematici. Come abbiamo già accennato, la corrispondenza biunivoca, la classificazione, la seriazione, l'ordinalità e la cardinalità numerica che costituiscono le tappe dello sviluppo del concetto numerico, hanno la loro genesi nell'idea di successione ritmica.

H1: Se ci sono delle correlazioni tra lingua naturale, ritmo e matematica allora l'educazione strutturo-ritmiche nell'apprendimento della matematica in opportune condizioni sperimentali ne viene avvantaggiato.

Questa ipotesi è più specifica e risponde maggiormente al mio lavoro di ricerca e sperimentazione.

Con la mia attività o cercato di capire quali sono le implicazioni di un'educazione strutturo-ritmiche che influenzano l'apprendimento della matematica nell'alunno della scuola elementare, e che favoriscono la **reversibilità del pensiero** (riuscire a tenere presente sul piano cosciente più entità per volta) **la flessibilità** (l'adattamento alle situazioni nuove), **l'originalità** (soluzioni problematiche divergenti ed efficaci).

Campione di ricerca

La ricerca è stata rivolta ad un totale di 109 bambini.

Ad ogni alunno è stato somministrato un test semi-strutturato il cui scopo era quello di verificare quali sono le implicazioni dell'educazione strutturo-ritmiche nell'apprendimento della matematica.

La metodologia

Il fine della ricerca è quello di verificare quali sono le implicazioni dell'educazione strutturo-ritmiche nell'apprendimento della matematica.

Per questo motivo si è realizzato un test che propone una serie di item proprio con questo scopo.

Conclusioni

Scopo di tutto il lavoro è quello di capire quali sono le correlazioni tra il ritmo e la matematica; e lo studio della matematica secondo una prospettiva diversa rispetto al solito apprendimento scolastico.

La ricerca ho voluto mettere in evidenza i legami tra le due discipline e sperimentare un aspetto; quello dell'apprendimento dei numeri naturali nella prospettiva dell'educazione strutturo – ritmica.

Mediante la sperimentazione in classe, come già è stato evidenziato, si è avuta la possibilità di rilevare che l'apprendimento dell'educazione strutturo - ritmica è uno strumento educativo di notevole interesse per orientare la strutturazione del pensiero e favorire nel bambino l'apprendimento dei prerequisiti che sono alla base del concetto numerico.

Le attività ritmiche fatte durante le ore di educazione musicale diventano un prerequisito fondamentale per l'apprendimento della matematica, e allo stesso modo lo studio della matematica e di tutti i suoi principi diventano prerequisiti essenziali per l'educazione musicale.

PROBLEMI APERTI

- Dopo aver verificato il legame tra musica e matematica, bisognerebbe verificare cosa fa' la scuola per creare un ambiente adatto ad operare in questo senso.
- Abbiamo verificato il legame tra la musica e la matematica, ma qual è la consapevolezza da parte degli alunni?
- Quali metodologie sono adatte per un apprendimento della matematica senza automatismi e rendendola più “divertente”, creativa e stimolante per gli alunni?
- Matematica, musica educazione strutturo-ritmica, come vivono gli insegnanti una nuova prospettiva di studio della matematica abbinata all'educazione musicale? Considerazioni, interventi, riflessioni.
- Cosa si fa a scuola per operare l'interdisciplinarietà delle materie?

BIBLIOGRAFIA

- **Babbitt M.** (1960), "Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants", *The Musical Quarterly* 46, No.2.
- **Babbitt M.** (1961), "Set Structure as a Compositional Determinants", *Journal of Music Theory* 5, No.1.
- **Bach J. S.**(1952), *Musikalisches Opfer Londra*, Ed. Bosey & Hawkes.
- **Barthes**, *Elementi di semiologia*, Ed. Einaudi
- **Basso A.** (1985), *L'età di Bach e di Haendel*, Storia Della Musica a cura della Società Italiana di Musicologia Torino, E.D.T.
- **Calabrese L.** (1974), *L'apprendimento motorio fra i 5 e i 10 anni*, Roma, Amando Armando.
- **Carner M.** (1983), *Alban Berg: The Man and Work*, Holmes and Meier Pub.
- **Cazzago P.** (1984), *Psicomotricità e spazio – tempo, strutture e ritmi*, Brescia, Editrice la Scuola.
- **Chailley J.**(1982), *Nombres et symboles dans le langage de la musique*, Firmin-Didot, Paris.
- **Coxeter, Harold Scott Macdonald** (1961), *Introduction to geometry*, London, John Wiley.
- **D'Amico A.**(2002), *Lettura scrittura calcolo, processi cognitivi e disturbi dell'apprendimento*, Modica, Edizioni Carlo amore.
- **Emmer M.** (1998), *Matematica e Cultura*, Milano, Adelphi, 1994 Atti del Convegno di Venezia, 1997, Milano, Springer.
- **Forste A.**(1983), *The structure of Atonal Music*, Yale University Press.
- **Franchi G.** (1990), *La matematica nella scuola elementare*, Brescia, La Scuola.
- **Furinghetti F.** (1990), *Matematica oggi, dalle idee alla scuola*, Mondadori, Genova.
- **Furtwängler W.**, *Dialoghi sulla Musica*, Ed. Curci, Milano
- **Furtwängler W.**, *Scritti sulla Musica*, E. Ansermet, Ed. Curci, Milano
- **Garzantina della Musica** (1999), Ed. Garzanti, Genova,
- **Giamblico** (1991), *Vita di Pitagora* (Bur classici greci e latini), Rizzoli.
- **Grattan-Guinness** (1996), *Mozart 18, Beethoven 32: Hidden Shadows of Integers in Classical Music*, History of Mathematics: States of the Art, Academic Press.
- **Hofstadter Douglas R.** (1994), *Godel, Escher, Bach: un' Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi.
- **Iannis Xenakis** (1985), *Musica – Architettura*, Milano, Spirali Edizioni.
- **"I Programmi Didattici per la Scuola Primaria"** (1985), in *M.P.I., Decreto de presidente della Repubblica 12 febbraio 1985 n°104 pubblicato nel supplemento ordinario alla "Gazzetta Ufficiale" n°76 del 29 marzo 1985*, Roma, Istituto poligrafico e Zecca dello Stato, 29-42
- **Karolyi Otto** (1969), *La grammatica della musica*, Torino, Einaudi.
- LA NUOVA ENCICLOPEDIA DELLA MUSICA GARZANTI, Milano, Garzanti Editore, 1993
- **Lostia M.**, *Musica e Psicologia*, Ed. Franco Angeli
- **Messiaen O.** (1944), *Technique de mon langage musical*, Alphonse Leduc, Paris.
- **Messiaen O.**, *Traité de rythme, de couleur et d'ornithologie*, 7 tomi, Alphonse Leduc, Paris.
- **Mogon S.**(1985), *Obiettivo scuola idee ed itinerari didattici, classe prima. Parte Seconda*, Bergamo, Istituto italiano Edizioni Atlas.
- **Nattiez**, *Il Discorso Musicale*, Ed. Einaudi
- **Nattiez**, *Musicologia Generale e Semiologica*, Ed. EDT
- **Odifreddi P.**, La Stampa, giovedì 7 maggio 1998, La matematica dell'armonia.
- **Petter G.** (2002), *La mente efficiente, le condizioni che ostacolano o favoriscono l'attività del pensiero*, Prato, Giunti.
- **Rameau J. Ph.**(1967), *Complete Theoretical writings*, ed R. Jacobi, facsimile delle edizioni originali, the American Institute of Musicology.
- **Romano A.**, *Musica e Psiche*, Ed. Bollati-Boringhieri
- **Rossi L.** (1977), *Teoria Musicale*, Bergamo, Edizioni Carrara.
- **Samuel C.** (1990), *Permanences d'Olivier O Messiaen (Dialogues et commentaires)*, Actes Sud.
- **Spagnolo F.** (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, Firenze, La Nuova Italia .
- UTET – Dizionario Enciclopedico (voce: Linguaggio)
- **Van Houten K. and Kasbergen M.** (1985), *Bach en het getal. Een onderzoek naar de getallensymboliek en de Esoterische Achtergronden hiervan in het werk van Johann Sebastian Bach*. Zutphen.