MODELLI MATEMATICI E ARMONIA MUSICALE UNA PROPOSTA PER LA DIDATTICA[*]

Alessandro Sarritzu[**]

Sommario

Si propongono materiali di base per un'elaborazione didattica che abbia per oggetto la matematica come strumento di rappresentazione e di comprensione dei fenomeni musicali. Vengono esplorati gli aspetti storici e i fondamenti tecnico-scientifici relativi alle scale, all'armonia, all'espressione musicale e ai suoi rapporti con le strutture matematiche. Si conclude con una breve analisi strutturale (di tipo aritmetico e geometrico) su alcuni brani di J. S. Bach.

1. INTRODUZIONE

Uno degli ostacoli specifici più sentiti nella didattica della matematica è quello derivante dalla difficoltà di attrarre l'interesse degli alunni su una disciplina che per sé stessa appare lontana dalle esperienze quotidiane. Da ciò deriva l'importanza di evidenziare l'estrema duttilità dello strumento matematico nella modellizzazione delle più diverse situazioni del mondo reale e delle attività umane.

In questo senso la modellizzazione delle strutture musicali può avere un ruolo significativo nell'attrarre e coinvolgere l'attenzione di ragazzi di varie età e ordini scolastici. Il presente lavoro si propone come un possibile materiale di base che, con gli opportuni adattamenti didattici può essere utilizzati per diversi ordini scolastici e fasce di età.

Il sistema musicale adottato in occidente fin dai tempi molto antichi (che la tradizione fa risalire a Pitagora) è fondato su una scala che ha come propria base il rapporto tra i suoni prodotti da una corda vibrante di una certa lunghezza e la stessa corda di lunghezza dimezzata. Oggi sappiamo che con il dimezzarsi della lunghezza della corda, a parità di altre condizioni, si ottiene un suono di frequenza doppia, per cui le due forme d'onda finiscono per fondersi perfettamente costituendo la base fisica dell'armonia musicale. E' per ciò che il rapporto 2:1 viene assunto come base della scala. Precisamente le note aventi tale rapporto, prendono lo stesso nome e vengono distinte tra loro da un indice (ad esempio do_1, do_2, oppure sol_1, sol_2, ecc.).

Il problema che si pone è di suddividere questo intervallo in parti tali che

1) l'intervallo sia vicino al minimo avvertibile dall'orecchio;

2) vi siano tra le note rapporti semplici e musicalmente armonici.

Ciò che si comprese fin dall'antichità, è che l'armonia musicale è strettamente legata ai rapporti numerici che sussistono tra certe grandezze misurabili sullo strumento che produce i suoni. Tale grandezza per gli strumenti a corda è la lunghezza della corda per uno strumento a fiato può essere la lunghezza della canna, ecc... Ciò che importa è comunque l'avere compreso come l'armonia tra i suoni si genera quando le grandezze in gioco hanno tra loro dei rapporti semplici, esprimibili cioè mediante una frazione m/n come m ed n numeri interi piccoli. La spiegazione fisica apparirà più avanti quando si affronterà appunto l'aspetto fisico del suono e delle sue caratteristiche, nonché delle relative rappresentazioni matematiche.

Come già accennato sopra, la tradizione attribuisce a Pitagora[1] la formulazione della prima scala musicale. In realtà della figura reale di questo grande filosofo si sa ben poco, a causa anche della

[*] Lavoro prodotto nell'ambito del Dipartimento di Matematica dell'Università di Messina. Progetto di Ricerca d'Ateneo (PRA ordinario) in Storia, didattica ed Epistemologia della Matematica diretto dal Prof. Renato Migliorato.

[**] Via Lupardini, 89121 Reggio Calabria. Email: ale.sarri@libero.it.

[1] Pitagora di Samo, fondò a Crotone la sua scuola filosofica (ma anche religiosa e politica) quando vi si trasferì dalla Gre-

segretezza che veniva imposta ai membri della sua scuola. E’ difficile quindi separare ciò che realmente è stato da lui prodotto da quanto è stato elaborato dai suoi seguaci anche in tempi successivi. Noi tuttavia riferiamo qui ciò che gli viene attribuito dalla tradizione, rifacendoci in particolare al racconto di Giamblico[2]. Sarebbe stata una intuizione musicale che avrebbe permesso a Pitagora di formulare quel legame fra matematica e natura che costituisce, probabilmente, la scoperta più feconda della storia dell’intero pensiero umano.

Secondo Giamblico, dunque, la storia è la seguente. Un giorno Pitagora passando di fronte all’officina di un fabbro, si accorse che il suono dei martelli sulle incudini era a volte consonante, e a volte dissonante. Incuriosito, entrò nell’officina, si fece mostrare i martelli, e scoprì che quelli che risuonavano in consonanza avevano un preciso rapporto di peso. Ad esempio, se uno dei martelli pesava il doppio dell’altro, essi producevano suoni distanti un’ottava. Se invece uno dei martelli pesava una volta e mezza l’altro, essi producevano suoni distanti una quinta.

Tornato a casa, Pitagora avrebbe fatto alcuni esperimenti con nervi di bue in tensione, per vedere se qualche regola analoga valesse per i suoni generati da strumenti a corda, quali la lira. Sorprendentemente, la regola era addirittura la stessa. Ad esempio, se una delle corde aveva lunghezza doppia dell’altra, esse producevano suoni distanti un’ottava. Se invece una delle corde era lunga una volta e mezza l’altra, esse producevano suoni distanti una quinta.

In “*perfetto stile scientifi*co”, dall’osservazione e dall’esperimento Pitagora avrebbe indotto una teoria: la coincidenza di musica, matematica e natura. Più precisamente, avrebbe supposto che ci fossero tre tipi di musica: quella strumentale propriamente detta, quella umana suonata dall’organismo, e quella mondana suonata dal cosmo. La sostanziale coincidenza delle tre musiche era responsabile da un lato dell’effetto emotivo prodotto, per letterale risonanza, dalla melodia sull’uomo, e dall’altro della possibilità di dedurre le leggi matematiche dell’universo da quelle musicali[3].

Poiché nelle leggi dell’armonia scoperte da Pitagora intervenivano soltanto i numeri frazionari, detti anche numeri razionali, ed i rapporti armonici corrispondevano perfettamente a rapporti numerici, Pitagora avrebbe riassunto la sua scoperta nella famosa massima: *tutto è numero* (intero).

2. SISTEMI DI ACCORDATURA

Prima di affrontare più dettagliatamente il sistema musicale pitagorico è opportuno introdurre la questione in maniera leggermente più generale, al fine di comprenderne meglio il significato e i limiti.Il problema della determinazione della scala è strettamente legato alla questione dell’accordatura, ossia dell’individuazione e della fissazione degli intervalli costituiti da una scala.

Partiamo dunque dal fatto ormai accettato di considerare come fondamentale l’intervallo espresso dal rapporto 2/1. Chiamiamo dunque con lo stesso nome due note che si ottengono dimezzando la lunghezza di una corda (o, anticipando quanto si dirà più avanti, raddoppiando la frequenza del suono), distinguendole mediante un indice. Così ad es: chiamiamo Do_1 la nota che ha una certa frequenza f e Do_2 quella di frequenza $2f$. Il problema è allora quello di dividere l’intervallo 2/1 in 7 in-

---

cia, verso il 530 a.C. Tale scuola, strutturata come una setta esoterica, prosperò per una trentina d’anni, fino a che, in seguito ad una rivolta antiaristocratica, i pitagorici, che sostenevano una visione rigidamente aristocratica del governo cittadino furono perseguitati e cacciati; la scuola fu bruciata, e Pitagora fuggì a Metaponto, dove morì poco dopo.

[2] Giamblico visse tra il terzo e la fine del quarto sec. D.C. Scrisse varie opere sul pitagorismo ed in particolare una Vita di Pitagora. Anche se possiamo ritenere che egli potesse disporre di scritti che oggi sono scomparsi, non c’è dubbio che la gran parte delle notizie riportate sono di origine incerta e leggendaria.

[3] L’idea di un’armonia cosmica analoga all’armonia musicale, è fatta proprio da Platone, che nel Timeo, descrivendo la genesi dell’universo per opera di un demiurgo, suppone che l’intero cosmo venga suddiviso secondo intervalli che corrispondono alla scala musicale pitagorica. La stessa idea è all’origine dell’ *armonia delle sfere*, così presente nel paradiso di Dante, ma che si trova già alla base dello stesso sistema tolemaico.

tervalli, in modo che il Do_2 sia l'ottava nota a partire dal Do_1. E' per ciò che l'intervallo così determinato si dice intervallo di ottava.

Tale ripartizione può effettuarsi secondo due sistemi diversi:

1. Sistema partitivo;
2. Sistema divisivo.

Sistema partitivo.

Per maggiore generalità, supponiamo dapprima che l'intervallo 2/1 si debba dividere in un numero *n* qualsiasi di intervalli, per poi considerare il caso particolare in cui *n* = 7. Si decide a priori il numero *n* di intervalli (tutti rappresentati dalla stessa proporzione *x*, (o, come si dice, equalizzati) in cui ripartire l'intervallo originario 2/1. In altri termini, stabilito il numero *n* di note aventi nomi diversi, vogliamo che il rapporto tra due note successive sia *x*. Se indichiamo con

$$a^0 = Do_1, \quad a^1, \quad a^2, \quad \Lambda \quad , \quad a^n = Do_2$$

le *n* note dell'intervallo più la prima nota Do_2 dell'intervallo superore (l'ottava se le note sono sette), e supposto che siano

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad \Lambda \quad , \quad f_n$$

le rispettive frequenze, si deve avere che

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \Lambda = \frac{f_n}{f_{n-1}} = x$$

e quindi

$$x^n = \frac{f_n}{f_0} = \frac{2}{1} = 2,$$

e cioè $x = \sqrt[n]{2}$, in particolare $x = \sqrt[7]{2}$ se, come realmente avviene, si decide di dividere l'intervallo in 7 note. In questo modo però il rapporto tra due note successive sarebbe un numero irrazionale, mentre secondo l'intuizione pitagorica (ma anche per ragioni fisiche su cui si dirà più avanti), l'armonia musicale si ha quando il rapporto tra due note è una frazione con termini piccoli.

Sebbene il sistema partitivo non sia idoneo a produrre suoni armonici, conviene considerare ancora la scala partitiva perché rende più comprensibile la soluzione pitagorica e gli stessi limiti di una qualunque scala musicale. Consideriamo allora una scala partitiva di sette note. I rispettivi rapporti rispetto alla prima nota sono allora:

$$1 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^7, x^{7+1}, \ldots$$

Ma a partire dalla ottava, le note si ripetono con gli stessi nomi e quindi possiamo porre $x^0 = x^7$, $x^1 = x^8$, … , $x^n = x^{7+n}$, ottenendo così un *gruppo ciclico* rispetto alla moltiplicazione. In una scala così fatta, il rapporto tra due note successive è costante, ed inoltre dopo sette note il ciclo si chiude e si ritrova esattamente la nota di frequenza doppia. Tuttavia, musicalmente questa scala non è funzionale perché non dà luogo ad accostamenti armonici tra suoni che non siano quelli che differiscono di un'ottava.

Sistema divisivo

I valori dei singoli intervalli (cioè il rapporto tra una nota e la successiva) costituenti la scala vengono ottenuti sulla base di criteri stabiliti a priori, anche se non risultano equalizzati.

L'applicazione del sistema partitivo e di quello divisivo possono dar luogo ad un numero ipoteticamente infinito di scale, perché indefinitamente si possono variare sia il numero di intervalli equalizzati in cui dividere l'intervallo di 2:1, sia la tipologia degli intervalli costituenti la scala; possono quindi essere in teoria in numero infinito i sistemi di accordatura.

Nella pratica e soprattutto nella teoria musicale tale numero, per quanto ampio in relazione alla diversità delle culture musicali nel tempo, viene fortemente limitato da un lato dalla capacità dell'orecchio umano di percepire differenze intervallari inferiori ad una certa soglia, dall'altro dalla tendenza "normalizzatrice" della teoria musicale.

3. ACCORDATURA PITAGORICA

In questo tipo di accordature, dominante nella musica occidentale fino al XV° secolo, la misura degli intervalli costituenti la scala eptafonica viene stabilita sulla base delle proporzioni. Il principio base per ottenere tali intervalli si fonda oggi sulla legge fisica di proporzionalità indiretta fra la lunghezza *l* della corda vibrante e la frequenza *f* del suono ottenuto. Se dunque da una corda vibrante li lunghezza *l* si ottiene il suono *a* di frequenza *f*, dalla metà della stessa corda (l/2) si ottiene, a parità di altre condizioni (stessa tensione, stessa pressione dell'aria, stesso procedimento di eccitazione delle corde, ecc.), il suono *b* di frequenza *2f*; dalla terza parte delle corde (l/3) si ottiene il suono *c* di frequenza *3f*, e così via. Poiché lungo la scala eptafonica gli intervalli si susseguono ripetendosi nello stesso ordine di ottava in ottava, per delineare le caratteristiche di tale scala è sufficiente identificare gli intervalli all'interno di una sola ottava tipo. Chiameremo quindi con lo stesso nome le note che differiscono di un intervallo 2/1 (intervallo di ottava). Si può dunque, fissando la frequenza di una nota interna a questo intervallo, provare a procedere individuando le frequenze delle altre note come si è fatto per il sistema partitivo, cioè come se si trattasse di un gruppo ciclico di ordine 7, dove due note sono fra loro congrue *mod* 7 se una ha frequenza doppia dell'altra. Sappiamo già che in realtà questo ciclo non si può chiudere, tuttavia è una buona idea di riferimento.
La seguente tabella ci indica chiaramente la procedura dove con 0 si indica l'elemento identità del gruppo, mentre gli altri elementi sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, ed in particolare l'elemento 4 corrisponde all'intervallo di quinta.

Gruppo ciclico di Ordine 7	**Nome della Nota**	**Valore dell'intervallo a partire dal Do_1**	**Osservazioni**
0 = identità	Do	1	
$0+4=4$	Sol	$\frac{3}{2}$	Intervallo di quinta
$4+4=8\equiv 1(\bmod 7)$	Re	$\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$	Intervallo di un tono
$1+4=5$	La	$\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{27}{16}$	
$5+4=8\equiv 2(\bmod 7)$	Mi	$\left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{64}$	
$2+4=6$	Si	$\left(\frac{3}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{243}{128}$	
$6+4=10\equiv 3(\bmod 7)$	Fa**?**	$\left(\frac{3}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{729}{512}$	Questo valore è insoddisfacente

Nell'ultima riga si ha già un valore troppo alto e quindi troppo vicino alla nota successiva che è il sol e corrisponde all'intervallo di 3/2 (intervallo di quinta). Ed infatti si ha l'intervallo

$$\frac{3}{2}:\frac{729}{512}=\frac{256}{243}= 1,053$$

intervallo troppo piccolo rispetto al valore dell'intervallo di un tono, pari a $\frac{9}{8}$=1,125.

Per ottenere il Fa si preferisce allora partire dal Do superiore (ottava) scendendo di un intervallo di quinta, cioè di quattro toni. L'ultima riga della tabella diventa allora

$0\equiv 7(\mathrm{mod}\,7)$ $7-4=3$	Fa	$\frac{2}{1}:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$	

Anche così ovviamente il ciclo non si chiude, e si vedrà più avanti in che modo il problema viene risolto (o aggirato) in epoca moderna, ma prima vogliamo dare un ulteriore sguardo storico alla scala pitagorica.

Platone, che certamente aveva appreso queste cose da Archita di Taranto (considerato l'ultimo dei pitagorici propriamente detti), procede in un modo leggermente diverso[4]. Nell'intervallo di ottava (cioè tra di 2/1) considera prima i due punti che si ottengono rispettivamente come media armonica e come media aritmetica. Precisamente:

$$\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{4}{3}$$

corrispondente alla nota Fa

$\frac{a_2+a_1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ corrispondente alla nota Sol

L'intervallo tra il Fa e il Sol è allora: $\frac{3}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$ corrispondente all'intervallo di un tono, quello cioè tra il primo Do e il Re immediatamente seguente. I due intervalli di quinta, rispettivamente tra il primo Do e il successivo Sol e tra il Fa e il Do superiore (ottava), sono ora entrambi di $\frac{3}{2}$ e Platone li riempie entrambi con intervalli di $\frac{9}{8}$ (cioè di un tono). Precisamente nel primo intervallo:

---

[4] "[Il demiurgo] *Cominciò a dividere così: prima tolse dal tutto una parte, dopo di questa tolse una doppia della prima, quindi una terza, una volta e mezzo più grande della seconda e il triplo della prima, poi una quarta doppia della seconda, una quinta tripla della terza, una sesta che era otto volte la prima, una settima ventisette volte più grande della prima. Dopo di ciò, riempì gli intervalli doppi e tripli, tagliando ancora dal tutto altre parti e ponendole in mezzo a questi intervalli, sicché in ciascun intervallo vi fossero due medi, ed uno superasse gli estremi e fosse superato della stessa frazione di ciascuno di essi, mentre l'altro superasse e fosse superato dallo stesso numero.* Originandosi *da questi legami nei precedenti intervalli nuovi intervalli di uno e mezzo, di uno e un terzo, e di uno e un ottavo, riempì tutti gli intervalli di uno e un terzo con l'intervallo di uno e un ottavo, lasciando una piccola parte di ciascuno di essi, in modo che l'intervallo lasciato di questa piccola parte fosse definito dai valori di un rapporto numerico, come duecentocinquantasei sta a duecentoquarantatré*". PLATONE: *Timeo*,VII, 35b-36b. Il brano sopra riportato, è un passo di una più ampia descrizione che Platone, ponendola in bocca a Timeo, fa in forma mitica, della generazione del mondo da parte di Dio. L'universo è qui visto come un immenso essere vivente di cui gli esseri terrestri, tra cui l'uomo, non sono che una parte. L'Universo stesso dunque è unione di un corpo corruttibile con un'anima incorruttibile indivisibile e immutabile. In particolare, nel brano citato, dopo avere unito l'anima e il corpo dell'Universo, facendone un'entità unica, Dio lo ripartisce secondo intervalli che corrispondono all'armonia musicale. A ciò fa riferimento Dante, per citare solo un esempio, tutte le volte che, particolarmente nel Paradiso, allude alla cosiddetta *Armonia delle sfere*. (Purg XXX, 91-93; Par I, 73-84 ; Par I, 103-105; Par VI, 124-126; Par X, 73-75 ; Par XIV, Par XV, 4-6; 118-129; Par XXXIII, v.124-126 ; Par XXIII, 103-111 ; Convivio, Tratt. 2, 13; Convivio, canzone 1) V. anche CHIARA RICHELMI: *Circulata melodia. L'armonia delle sfere nella Commedia di Dante Alighieri*. In De Musica: annuario in divenire (rivista on line a cura del Seminario Permanente di Filosofia della Musica; http://users.unimi.it/~gpiana/demus.htm), annoV, **2001**.

$$\frac{9}{8}\frac{9}{8}=\frac{81}{64} \text{ corrispondente al Mi,}$$

e nel secondo intervallo:

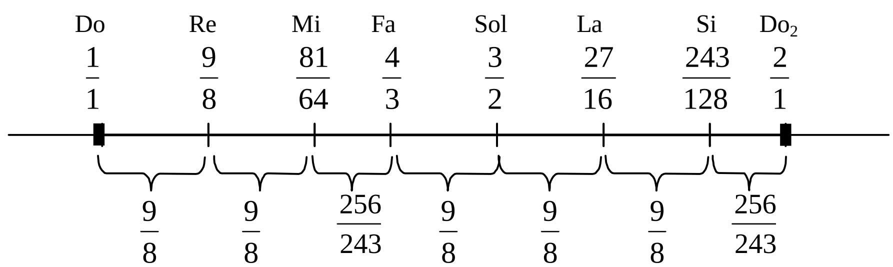
$$\frac{3}{2}\frac{9}{8}=\frac{27}{16} \text{ corrispondente al La,}$$

$$\frac{27}{16}\frac{9}{8}=\frac{243}{128} \text{ corrispondente al Si.}$$

Ora però ci si trova di fronte a due intervalli, il primo tra il Mi e il Fa, il secondo tra il Si e il Do superiore (ottava), che non corrispondono ad un tono (cioè a 9/8), infatti:[5]

$$\frac{4}{3}:\frac{81}{64}=\frac{2}{1}:\frac{243}{128}=\frac{256}{243}\ .$$

Nel grafico seguente, che illustra la scala pitagorica così come è descritta da Platone, sono indicati chiaramente gli intervalli di $\frac{9}{8}$ e quelli di $\frac{243}{128}$. Come si vede la scala risultante coincide con quella già precedentemente trovata.



L'impossibilità di far chiudere il circolo delle quinte mediante intervalli razionali semplici, è rimasto nell'antichità un problema irrisolto e irrisolvibile.
Vedremo ora invece, come si procede nella scala musicale moderna.

4. La scala cromatica moderna.

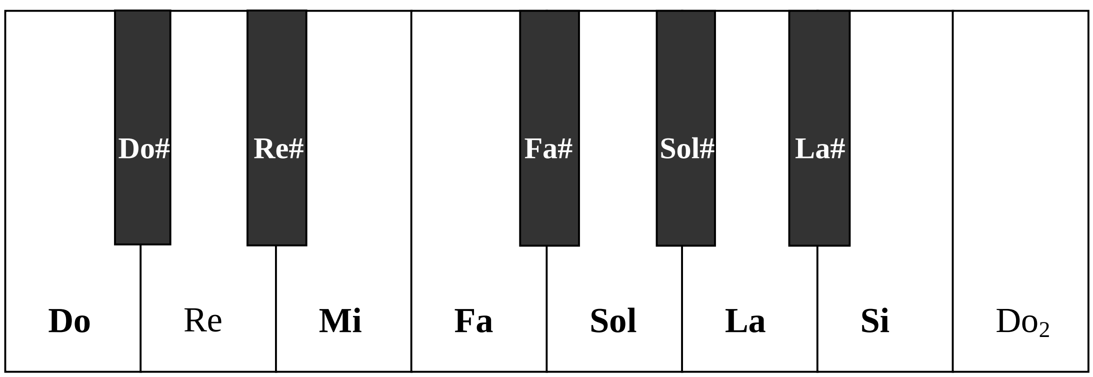
Senza soffermarci sui vari passaggi che a partire dal Rinascimento hanno portato all'adozione della moderna scala cromatica, vediamo quale risposta viene data al problema precedentemente incontrato. Come si è visto, l'intervallo di un tono è troppo elevato per consentire una chiusura del ciclo. D'altra parte la scelta di un intervallo tonale in grado di chiudere il ciclo delle quinte, contrasterebbe con la legge dell'armonia che vuole gli intervalli costituiti da rapporti razionali semplici.
Vedremo tra poco la soluzione adottata. Osserviamo intanto che nella scala pitagorica illustrata nella precedente sezione, vi sono cinque intervalli di $\frac{9}{8}$, valore che viene assunto come misura di *un tono*, e due intervalli $s=\frac{256}{243}$. Ma si può facilmente constatare che se da una nota qualsiasi, si cresce per due volte consecutive di un intervallo pari ad s, l'intervallo complessivamente ottenuto è molto vicino ad un tono, infatti

$$\frac{9}{8}:\left(\frac{256}{243}\right)^2=\frac{531441}{524288}<1+\frac{14}{1000}$$

Si può quindi decidere di assumere l'intervallo *s* come misura di un semitono.
Tornando ora al modo in cui si è costruita la prima tabella delle note, si ricorderà che arrivati al Fa, si era scartato il valore di $\frac{729}{512}$ perché troppo vicino a quello del successivo Sol. Con questo infatti rimarrebbe un intervallo di

$$\frac{3}{2}:\frac{729}{512}=\frac{256}{243}$$

cioè esattamente di un semitono. Si decide allora di chiamare Fa-diesis la nota corrispondente a $\frac{729}{512}$.
Partendo da qui e incrementando ogni volta di un tono (ed ovviamente scendendo, quando occorre, di un'ottava, per rientrare nell'intervallo di riferimento) si ottengono infine altre quattro note che verranno a riempire con semitoni, tutti gli intervalli di un tono. Si ha quindi la *scala cromatica* di dodici note, separate tra loro da un intervallo di un semitono, che formano, come nella figura che segue, la tipica tastiera a tutti nota.



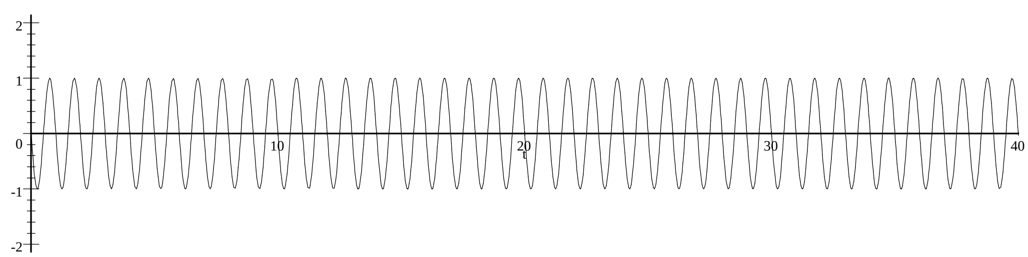
Le note indicate con il simbolo # (diesis) sono dette anche note alterate e differiscono di un semitono da quelle che le precedono. Le *Alterazioni*, dunque, sono segni grafici che posti davanti ad una nota servono a modificare verso l'alto o verso il basso l'intonazione della nota stessa. Sono in tutto cinque e vengono chiamate: diesis, bemolle, doppio diesis, doppio bemolle e bequadro. Di queste si è già visto il significato del diesis; per semplicità tralasciamo i particolari delle altre alterazioni e diciamo solo che il bemolle (*b*) abbassa la nota di un semitono ed ha quindi un effetto opposto al diesis. Per il resto si può vedere un qualunque manuale di teoria musicale.

5. *Perché l'armonia richiede rapporti semplici?*

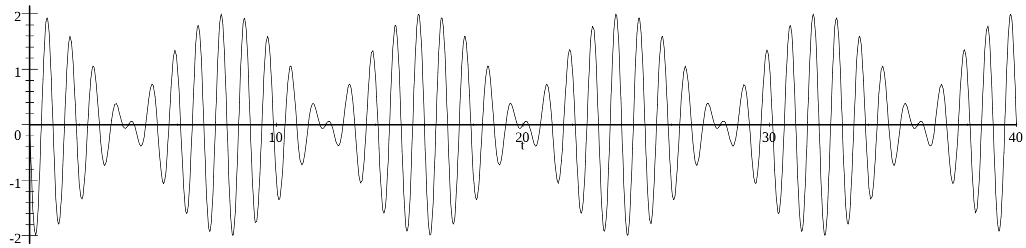
Sebbene la spiegazione completa di tutti i possibili accostamenti che all'orecchio risultano armonici può essere notevolmente complessa, il principio fondamentale dell'armonia si può spiegare con molta semplicità. Basta infatti considerare le equazione di due onde le cui frequenze stiano in un determinato rapporto, costruirne il grafico mediante uno dei tanti prodotti software in commercio, ed infine costruire con lo stesso sistema il grafico dell'onda risultante dalla loro sovrapposizione.

Siano rispettivamente f ed $\frac{m}{n} f$, le frequenze delle due onde componenti. I rispettivi periodi staranno allora nel rapporto inverso, cioè se p è il periodo della prima onda, quello della seconda è $\frac{n}{m} p$.
Ne segue che se ad un certo istante *t* le due onde sono in fase, esse torneranno ad esserlo dopo che la prima ha compiuto *n* periodi e conseguentemente la seconda ne avrà compiuto *m*. La frequenza dell'onda risultante sarà allora pari a *nf*. Già da qui si evince che se il rapporto delle frequenze è irrazionale, il suono risultante non avrà più una periodicità esatta, ma anche nel caso di rapporti razionali i cui termini siano molto alti non darà luogo ad una periodicità facilmente percepibile dall'orecchio. Naturalmente le cose si complicano se si analizza cosa avviene all'interno di ciascun periodo dell'onda risultante. Se infatti supponiamo che le due componenti siano sinusoidali, all'interno di ciascun periodo si avranno punti in cui le onde componenti, avendo lo stesso segno si sommano, altri in cui avendo segni contrari si elidono, dando luogo complessivamente ad una serie di oscillazioni con andamento più o meno irregolare, ma il cui inviluppo può presentare delle regolarità evidenti. Non è difficile, a questo punto, mettere in relazione la percezione altamente gradevole dei suoni armonici, con la regolarità delle onde risultanti. Naturalmente la sovrapposizione di suoni ha luogo fisicamente solo quando i suoni sono contemporanei, mentre nel caso di note che si succedono, è la mente ad elaborare il confronto di un suono in atto con la memoria di uno ascoltato immediatamente prima.
Qui di seguito sono rappresentati i grafici di alcune funzioni d'onda particolarmente significativi.
Il primo illustra l'onda di equazione $f(t) = sen(-2\pi t)$, che assumeremo come onda di riferimento. I tre grafici successivi illustrano le funzioni $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{m}{n}\pi t\right)$ ottenute sovrapponendo all'onda di riferimento quella che si ottiene incrementando la frequenza secondo un rapporto razionale pari a $\frac{m}{n}$. L'ultimo grafico, visibilmente irregolare, illustra invece il caso in cui si sovrappone un'onda la cui frequenza sta con quella di riferimento secondo il rapporto irrazionale $\sqrt{2}$.

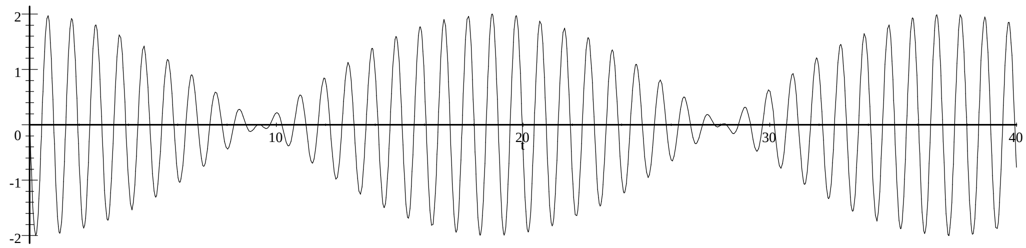
1. $f(t) = sen(-2\pi t)$



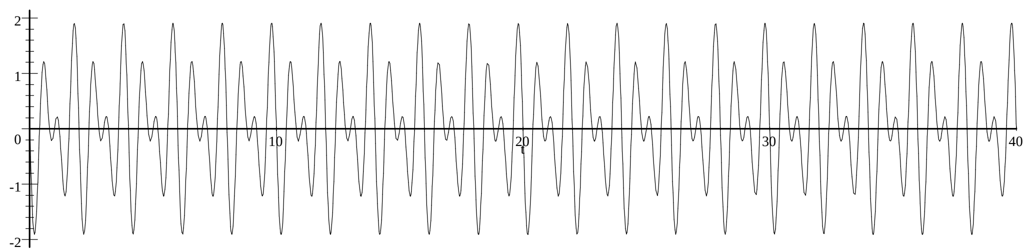
2. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{9}{8}\pi t\right)$ (intervallo di un tono).



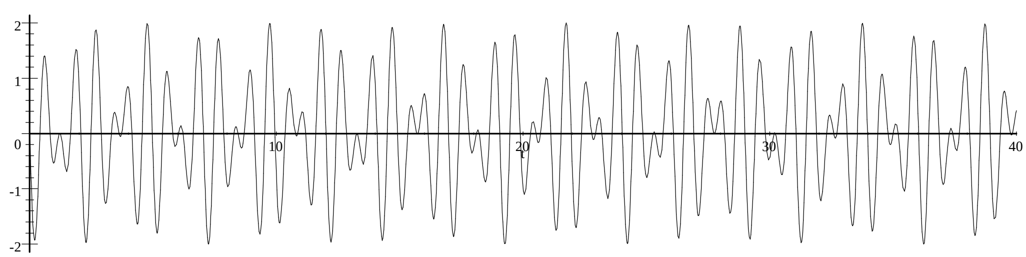
3. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{256}{243}\pi t\right)$ (intervallo di un semitono).



4. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{3}{2}\pi t\right)$ (intervallo di quinta).



5. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\sqrt{2}\pi t\right)$ intervallo irrazionale.

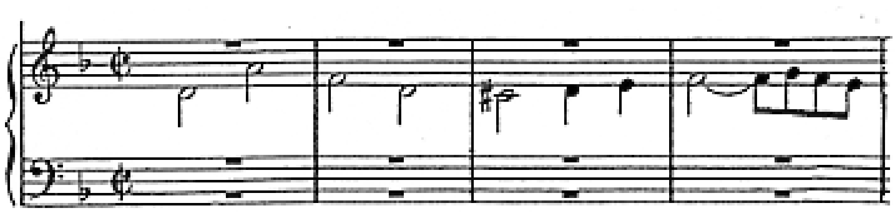


Dal punto di vista didattico può essere utile, partire dalla costruzione dei grafici[6], per cercare poi di spiegare, in termini matematici, le ragioni delle regolarità e delle irregolarità.

[6] In questo caso i grafici sono stati ottenuti con *Maple*, ma può essere utilizzato qualunque altro programma del genere tra quelli in commercio.

6. Il caso di J. S. BACH

La terza parte della mia ricerca è dedicata alla musica del periodo Barocco, più precisamente alla musica di Johann Sebastian Bach, poiché è quella che meglio si presta ad un' analisi strutturale. Bach infatti concepisce la composizione musicale come una costruzione perfettamente razionale, rispondente ad una precisa e rigorosa struttura logico-matematica in cui aritmetica e geometria sono elementi costitutivi essenziali.
Tale costruzione aritmetico-geometrica si intreccia e talvolta si fonde con la simbologia numerologica e cabalistica a cui Bach si affida spesso per glorificare Dio. Poiché quest' ultimo aspetto potrebbe sembrare marginale (almeno dal punto di vista matematico) rispetto a quello più specificamente strutturale, mi limiterò a riportare solo qualche esempio.
Andiamo ad analizzare il primo *contrapunctus* tratto da "*l' arte della fuga*", una delle sue ultime opere, scritta con l'intento di diventare un 'opera non solo destinata all'esecuzione ma che facesse soprattutto da compendio di teoria musicale.
Il tema di questa prima fuga è costituito da 12 note, dove il numero 12 allude ad una pluralità di significati mistici e religiosi.



12 = numero della Chiesa = numero degli Apostoli fedeli più Cristo = (nell' Antico Testamento) 12 generazioni, 12 tribù. Nell' Apocalisse 144000 (12 al quadrato per mille) è il numero dei redenti.
Questa prima fuga è formata da una prima sezione di 78 battute e da una seconda di 48, il che corrisponde alla proporzione della sezione aurea
Un notevole esempio di simbologia cabalistica si ha alla fine dell'ultima fuga dove il musicista si firma con le quattro note corrispondenti alle lettere del suo nome[7].

Ma Bach, in realtà, non si limitò a "firmare" in questo modo la sua ultima fuga, egli completò e sviluppò quelle prime note in modo da ottenere un tema di 14 note che rappresentava il nome ghematrico

[7] Ricordiamo che in alcune notazioni (anche moderne, ma soprattutto in quelle più antiche, le note venivano rappresentate con lettere dell'alfabeto. Facendo corrispondere la lettera A alla nota La, si ha la corrispondenza delle lettere A, B, C, D,… rispettivamente con le note La, Si, Do, Re, …

di Bach. La Ghematria è una tecnica cabalistica molto usata nelle sue composizioni che consiste nel sommare i numeri corrispondenti alle lettere.

$$\begin{array}{ccccccccc} B & & A & & C & & H & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 & + & 1 & + & 3 & + & 8 & = & 14 \end{array}$$

Inoltre l'inverso di 14 è 41 che per "*curiosa*" coincidenza corrisponde alla ghematria del nome intero di Johann Sebastian Bach.

Passiamo adesso ad un'analisi strutturale dell'opera di Bach, ma, dato l'elevatissimo numero delle sue composizioni ne prenderemo in esame solo due. La scelta ricade ovviamente sulle fughe per la loro perfezione stilistica e formale.
La prima, tratta dal "*Clavicembalo Ben Temperato*" è la fuga n.16 a quattro voci in sol minore. Inizia con la presentazione di una figura ritmico-melodica della durata di poche battute e dalla chiara fisionomia che viene detta *soggetto* (parte evidenziata in giallo nella Fig. 1). La sua esposizione che, all'inizio della fuga, viene assegnata ad una sola voce coincide con il silenzio delle altre tre. Alla fine della seconda battuta vi è *l'imitazione del soggetto* che prende il nome di *risposta* (evidenziata in rosa nella stessa figura). Quest'ultima avviene una quinta sopra la tonica (nota da cui nasce la scala) ed è di tipo tonale, cioè, modificata di qualche intervallo.

Fig.1

Ciò che qui si deve notare è come la parte evidenziata in rosa si ottiene sostanzialmente per traslazione della parte segnata in giallo (con qualche variazione minima la cui spiegazione sarebbe qui fuori luogo[8]). Tale traslazione è in effetti composta da una traslazione verticale (tonale) e da una traslazione orizzontale (temporale).
Complessivamente il soggetto viene ripetuto da parte di tutte le quattro voci (parti colorate in verde nella fig..2). Alla fine di questa prima parte, vi è l'elaborazione che conduce dopo alcune progressioni armoniche alla replica del *soggetto* in un'altra tonalità, in questo caso nella tonalità di Si bemolle maggiore (parti in blu nella stessa Fig. 2).
Si arriva così agli *stretti*, che coincidono con l'ultima parte della fuga (V. Fig. 3). È la fase questa più interessante; la sua particolarità sta nel fatto che ogni entrata del soggetto deve cominciare prima che quella precedente sia conclusa. Intrecciandosi così le voci che espongono lo stesso tema (in tre colori diversi nella fig. 3) si avverte una sensazione ritmica particolare, che non confonde l'ascoltatore il quale rimane affascinato dalla bellezza armonica.

[8] Diciamo solo che una traslazione verticale che riproduce esattamente la sequenza delle note, è detta *reale*. Quella che, come in questo caso modifica leggermente qualche intervallo, è detta tonale.

Il secondo esempio è un “*canone*” tratto dall’*Offerta Musicale*. Vi è una prima sequenza di nove battute. Successivamente le stesse sequenze vengono nuovamente eseguite in ordine inverso, cioè partendo dalla fine e procedendo verso l’inizio e scambiano la prima riga con la seconda (contrappunto reversibile). Detto altrimenti la parte su sfondo azzurro (Fig. 4) è ottenuta con una riflessione orizzontale di quella su sfondo verde e, analogamente, la parte su sfondo rosa è ottenuta per riflessione orizzontale di quella su sfondo viola.

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Questi pochi cenni servono soltanto a dare un'idea della costruzione formale a cui può essere una struttura musicale, e di come tale struttura può seguire precise trasformazioni che sono suscettibili di una rappresentazione geometrica o aritmetica. Naturalmente la complessità può presentarsi ancora più elevata se si tiene conto contemporaneamente delle corrispondenze geometriche ora osservate e delle necessarie consonanze armoniche traducibili, come si è già visto, mediante rapporti aritmetici.
Volutamente non vengono qui tratte conclusioni proprio perché, come si è già annunciato, questo vuole essere un materiale di base che può essere più o meno arricchito, ma che soprattutto dovrebbe trovare il suo sbocco naturale in una serie di rielaborazioni mirate alle diverse situazioni didattiche. E' proprio, e soltanto, in tali sedi che si possono trarre delle conclusioni.

BIBLIOGRAFIA

L. AZZARONI, *Canone infinito: Lineamenti di teorìa della musica*, Clueb, Bologna 1997.

J. S. BACH, *L'arte della fuga*.

J. S. BACH, *Il clavicembalo ben temperato, Vol. I*.

J. S. BACH, *L'offerta musicale*.

C. B. BOYER, *Stona della matematica*, Milano, 1990.

A. FROVA, *Fisica nella Musica*, Zanichelli, Bologna, 1999.

D. R. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach: un' Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi 1990.

M. KLINE, *Storia del Pensiero Matematico,* 2 volumi, Einaudi Torino 1991.

P. ODIFREDDI, *Pitagora: la matematica dell' armonia*, pubblicazione elettronica, Dipart. di Mat. Università di Roma3, http: / / www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/ scuola / pitagora.htm.

R. MIGLIORATO, *Modelli matematici, predittività e progresso scientifico: un caso storico esemplare*, Atti del Convegno "L'insegnamento della matematica nel quadro delle riforme", S. Cesarea Terme - 2003. (pubbl. elettr. in *Matematicamente* http://www.matematicamente.it/attisantacesarea/index.htm).

S. PINTACUDA, *Acustica Musicale*, Edizioni Curci, Milano Luglio 1991.

PLATONE, *Timeo*.

P. RIGHINI, *Accordature e accordatori*, Berben Edizioni musicali, Ancona 1979.

F. ROMANO, *Architetture della musica occidentale*, I.S.N.P. Edizioni, Reggio Calabria, 1996.

T. D. ROSSING, *The Science of Sound*, Addison - Wesly, New York 1990.

B. SCIMEMI, *Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche*, in Atti. del Convegno "Matematica e Cultura" Venezia, 1997, suppl. a "Lettera Matematica Prislem" n°27 - 28 - pp. 77 - 86.

M. TIMPANARO CARDINI (a cura di), Pitagorici: *testimonianze e frammenti, Fasc.I (Pitagora, Cercope, Petrone…) e Fasc. II (Ippocrate di Chio, Filolao, Archita e Pitagorici minori)*, Firenze 1962.