Alcune difficoltà con il caro vecchio Teorema di Pitagora

Prospettive per una ricerca

Aldo Scimone* – Filippo Spagnolo**

Premessa

Nell'insegnamento della geometria piana euclidea il teorema di Pitagora svolge un ruolo centrale perché non solo stabilisce una proprietà universale di cui godono tutti i triangoli rettangoli, ma anche perché rappresenta uno strumento potente di applicazione all'interno della stessa matematica o in altri ambiti scientifici come la fisica e l'astronomia.
Esso è inoltre strettamente collegato al concetto della misura delle lunghezze, indispensabile in ogni struttura geometrica, dalla geometria analitica alla geometria tensoriale e delle varietà riemanniane, inclusa la teoria della relatività generale.
L'importanza di questo teorema fu riconosciuta fin dall'antichità se, secondo l'ipotesi avanzata per la prima volta dal matematico e storico della matematica H. G. Zeuthen[1] (1839-1920) e condivisa ampiamente dagli storici della matematica, fu proprio il desiderio di giustificare e dimostrare il teorema di Pitagora che condusse i geometri greci a costruire un complesso di proposizioni concatenate l'una all'altra, risalendo fino a quelle più semplici mediante il procedimento di *analisi*, per cui poi con il procedimento inverso di *sintesi* dalle semplici proposizioni iniziali si potesse discendere, per gradi di complessità maggiore, fino al detto teorema di Pitagora. Sarebbe stato, quindi, tale teorema, proprio nella ricerca della sua giustificazione logica, a dare l'avvio, secondo Zeuthen, alla geometria razionale. L'ipotesi di Zeuthen ha avuto molta fortuna ed è stata ripresa dagli studiosi anche recentemente[2].
La dimostrazione data da Euclide nella I,47 ebbe varia fortuna nella didattica del teorema di Pitagora, ma ben presto ad essa furono preferite due altre dimostrazioni: la prima, basata sulla similitudine, si può ricavare[3] dalla VI,8 e

---

* - ** GRIM –Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, via Archirafi 34 – 90123 Palermo.
[1] H. G. Zeuthen, *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique*, Congresso internazionale dei matematici, Ginevra, 1904.
[2] P. Odifreddi, *Divertimento geometrico*, Bollati Boringhieri, 2003, p. 33.
[3] La VI,8 recita: "*Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la stessa perpendicolare divide il triangolo in due triangoli simili a tutto quanto il triangolo e tra loro*." La VI,16 afferma: "*Se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale al rettangolo compreso dai termini medi; e se il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale al rettangolo compreso dai termini medi, le quattro rette saranno proporzionali*."

dalla VI,16, che stabiliscono rispettivamente la similitudine tra un triangolo rettangolo e i due triangoli rettangoli che si ottengono da esso tracciando l'altezza relativa all'ipotenusa, e la relazione fondamentale tra quattro segmenti proporzionali; la seconda, quella più usata, sfrutta il cosiddetto I teorema di Euclide (corrispondente alla prima affermazione nel Lemma alla X,33) riguardante l'equivalenza tra il quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo e il rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

Euclide non fornisce esplicitamente queste altre due dimostrazioni del teorema di Pitagora, che d'altronde si evincono facilmente dalle proposizioni ricordate prima.

L'unica dimostrazione presentata nella I,47 è ormai scomparsa dai libri di testo scolastici, così com'è quasi scomparsa la I,48, l'inverso del teorema, che peraltro ha molte applicazioni didattiche, e che venne conosciuta molto prima della proposizione diretta, com'è testimoniato, per esempio, dalla famosa tavoletta babilonese denominata *Plimpton 322* risalente all'incirca al periodo babilonese antico (1900-1600 a.C.).

Gli autori della presente ricerca hanno in corso un monitoraggio dei libri di testo scolastici in uso in Italia nelle scuole medie superiori del 1800 e del 1900 per seguire in che modo è cambiata la scelta didattica per dimostrare il teorema di Pitagora e il suo inverso, e possibilmente le motivazioni che l'hanno prodotta. Ma già dal confronto di soli pochi testi scolastici del ventesimo secolo possiamo avere un'idea, sia pure molto approssimata, della scomparsa della dimostrazione originale euclidea dai testi scolastici per le scuole medie superiori.

Per esempio, nella *Geometria elementare ad uso delle scuole medie superiori*, di Federigo Enriques ed Ugo Amaldi, edito da Zanichelli nel 1903 e che ha avuto la settima edizione nel 1986, viene dimostrato il teorema di Pitagora mediante il I di Euclide e l'inverso in maniera leggermente differente dalla dimostrazione originale euclidea. Negli *Elementi di Geometria* di Ugo Morin e Franca Busulini, edito dalla CEDAM nel 1960, alle pp. 165-167 si trovano le dimostrazioni del teorema di Pitagora con il I d'Euclide e del suo inverso con dimostrazione uguale a quella di Enriques-Amaldi.

Nelle *Lezioni di geometria* di Michele De Franchis e Giuseppe Bartolozzi, sia nell'edizione della Lattes del 1961 che in quella del 1968, alle pagine 148 e 149 (le stesse nelle due edizioni) vengono presentate le dimostrazioni del teorema di Pitagora mediante il I di Euclide e dell'inverso del teorema con dimostrazione uguale a quella di di Enriques-Amaldi.

A p. 139 del II volume del Libro *Matematica* di Francesco Speranza e Alba Rossi Dell'Acqua, edito da Zanichelli nel 1971, il teorema di Pitagora viene dimostrato mediante il I teorema di Euclide, ma manca sia l'enunciato sia la dimostrazione del teorema inverso.

Nel libro *La matematica nella realtà 1* di Emma Castelnuovo, Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, edito da La Nuova Italia nel 1984, a p. 217 come dimostrazione del teorema di Pitagora viene fornita quella dovuta al matematico indiano Bhaskara, che ha un impatto visivo molto immediato, ma manca l'enunciato e la dimostrazione dell'inverso.

Nel *Il nuovo pensiero geometrico* di Lodovico Cateni, Roberto Fortini e Claudio Bernardi, edito da Le Monnier nel 1987, alle pagine 142-144 vengono dimostrati il teorema di Pitagora sempre con l'ausilio del I di Euclide e l'inverso del teorema con dimostrazione uguale a quella data da di Enriques-Amaldi.

Nelle *Lezioni di Matematica: Geometria* di L. Scaglianti e L. Varagnolo, edito dalla CEDAM nel 1988, la dimostrazione del teorema di Pitagora viene data a p. 212 mediante il I di Euclide, mentre la dimostrazione dell'inverso del teorema viene data negli esercizi come complemento alle pp. 224-225 secondo lo schema di Enriques-Amaldi.

Alcune questioni iniziali

L'esame dei testi scolastici solleva alcune questioni sulla didattica del teorema di Pitagora.

- Perché è scomparsa la dimostrazione euclidea della I,47 dai libri di testo?
- Se il motivo principale della sua scomparsa è stato dovuto alla sua difficoltà, in che cosa consiste tale difficoltà?
- Se tale difficoltà consiste nel fatto che l'analisi della dimostrazione non viene esplicitata, perché non è stata presa in considerazione questa opportunità per agevolarne la comprensione?

- Essa è realmente difficile, nel senso che è difficile per un allievo seguirne le varie fasi, oppure si è confusa tale pretesa difficoltà con la "complessità" della figura che viene presentata a supporto di essa? Perché essa viene giudicata complessa?

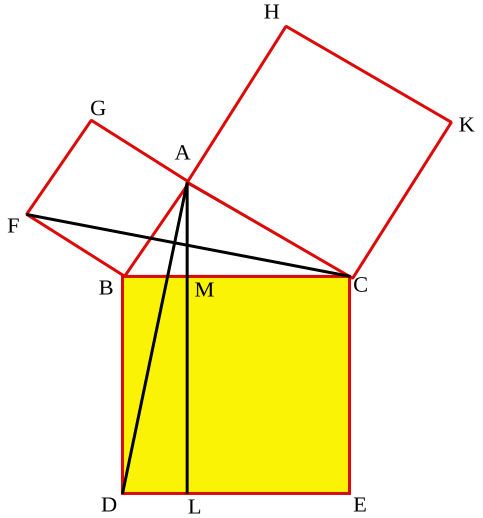


Figura per la dimostrazione della I,47

- In base a quali considerazioni didattiche sono state scelte le altre dimostrazioni?

- Per quali considerazioni didattiche il concetto di similitudine su cui si basa una delle altre dimostrazioni del teorema risulta più agevole di quello dell'equivalenza su cui si basa la dimostrazione euclidea?
- La dimostrazione basata sul I di Euclide è stata scelta perché la figura che fa da supporto è più semplice di quella che supporta la dimostrazione euclidea?
- In base a quale considerazione didattica il teorema inverso viene spesso e volentieri omesso, quando è proprio esso ad avere le maggiori applicazioni negli esercizi?
- Se gli alunni non conoscono la dimostrazione dell'inverso del teorema, sono pienamente coscienti che il teorema di Pitagora esprime una proprietà di cui godono solo i triangoli rettangoli?

Questioni più generali

1) In che modo gli alunni si approcciano a una dimostrazione matematica?
2) Che cosa essi ritengono "facile" o "difficile" in una dimostrazione?
3) Se ad essi viene presentata innanzitutto l'idea fondamentale su cui si basa una dimostrazione, ciò può condurli più velocemente e con minore fatica alla meta?
4) Gli alunni si fanno condizionare dalla figura che fa da supporto a una dimostrazione per deciderne il grado di comprensione?
5) Gli alunni ritengono più comprensibile una dimostrazione condotta esclusivamente con un registro geometrico oppure con un registro algebrico?

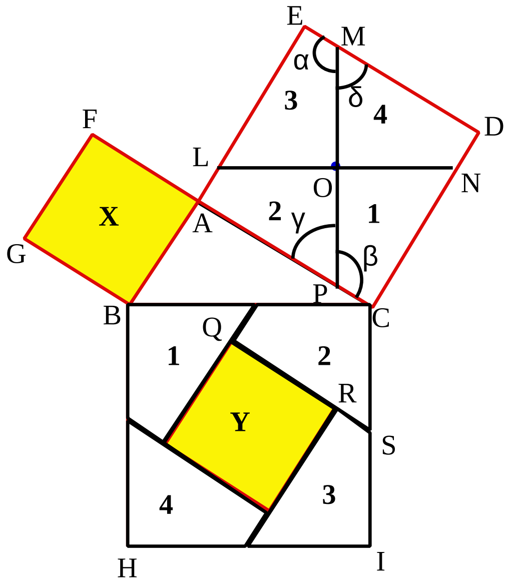
Un primo test

Gli autori prima di dare corso a una ricerca metodica sulle questioni di cui sopra, hanno voluto condurre un primo test sulla "difficoltà" della dimostrazione del teorema diretto di Pitagora in maniera informale senza specificare che cosa si dovesse intendere con tale attributo, in modo che gli alunni interessati fossero liberi di valutare personalmente in che cosa consistessero per loro le difficoltà. Gli alunni che hanno preso parte al test sono stati 132, di età compresa tra i 14 e i 16 anni. Sono state presentate tre dimostrazioni del teorema diretto di Pitagora, la prima dovuta[4] nel 1873 al matematico dilettante inglese Henry Perigal, che a prima vista possiede un'evidenza molto forte, perché le varie parti in cui sono divisi i quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo vengono assemblati in modo da formare il quadrato costruito sull'ipotenusa, anche se è sempre necessario dimostrare l'equivalenza delle varie parti di questa specie di puzzle.
La seconda dimostrazione è stata scelta perché ha un marcato registro algebrico ed è dovuta a James Abram Garfield (1831-1881), che fu il ventesimo Presidente americano. Essa venne pubblicata nella rivista *The Mathematical Gazette* nel

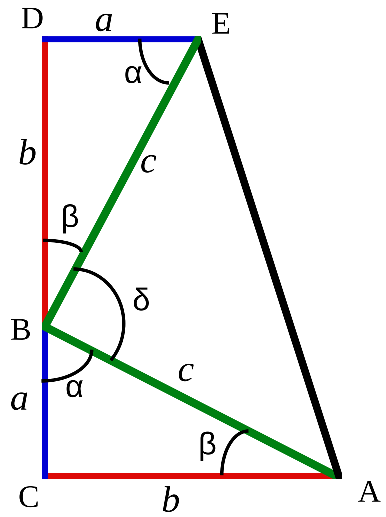
---

[4] H. Perigal, *On Geometric Dissections and Transformations*, Messenger Math. 2, 1873, 103-106.

1882, un anno dopo la morte di Garfield. La terza dimostrazione era quella originale euclidea.



La dimostrazione di Perigal



La dimostrazione di Garfield

La domanda posta agli studenti è stata la seguente:

Leggi attentamente le seguenti dimostrazioni del teorema di Pitagora. Quale di esse ti sembra la meno difficile? Esponi le tue argomentazioni.

I risultati della scelta da parte degli alunni sono stati i seguenti: ben il **57%** hanno scelto come meno difficile la dimostrazione di **Garfield**, il **32%** quella di **Perigal** e solo l'**11%** quella di Euclide. Le motivazioni della scelta sono state varie. Ne riportiamo integralmente alcune.

- La seconda [Garfield] perché è la più concisa ma allo stesso tempo la più completa.
- La terza dimostrazione [Euclide] è la più facile perché nella prima dimostrazione [Perigal] anche se vi sono i due quadrati costruiti sui cateti non corrisponde alla vera dimostrazione (?!). Nella II non vi sono i quadrati costruiti sui cateti.
- È quella che mi convince di più [Euclide], poiché rispecchia di più il mio concetto di Teorema di Pitagora. Inoltre gli angoli della dimostrazione effettivamente coincidono (?!).
- La più semplice è la prima dimostrazione [Perigal] perché è più chiara e poi arriva alla conclusione in modo diretto.
- [Perigal] perché mi rappresenta la migliore spiegazione del teorema di Pitagora avendo fatto più passaggi (?!).

Questi risultati hanno motivato ancora di più il senso della ricerca che intendiamo iniziare, perché è evidente che di fronte alla dimostrazione originale di Euclide c'è, volendo usare un termine psicologico, un certo “malessere”. Ebbene, è nostro desiderio conoscere le motivazioni di tale malessere per trovare una giusticazione a scelte didattiche che altrimenti hanno il carattere dell'arbitrarietà assoluta.

Bibliografia

Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays, 13th ed.* New York: Dover, 1987, pp. 87-88.

Brodie, S. E. "The Pythagorean Theorem Is Equivalent to the Parallel Postulate." http://www.cut-the-knot.com/triangle/pythpar/PTimpliesPP.html.

Dixon, R. "The Theorem of Pythagoras." §4.1 in *Mathographics.* New York: Dover, 1991pp. 92-95.

Dudeney, H. E. *Amusements in Mathematics.* New York: Dover, 1958, p. 32.

Dunham, W. "Euclid's Proof of the Pythagorean Theorem." Ch. 2 in *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics.* New York: Wiley, 1990.

Friedrichs, K. O. *From Pythagoras to Einstein.* Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1965.

Gardner, M. "The Pythagorean Theorem." Ch. 16 in *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American.* Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984, pp. 152-162.

Loomis, E. S. *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of "Proofs," 2nd ed.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

Machover, M. "Euler's Theorem Implies the Pythagorean Proposition." *Amer. Math. Monthly* 103, 1996, p. 351.

Ogilvy, C. S. *Excursions in Mathematics.* New York: Dover, 1994, p. 52.

Pappas, T. "The Pythagorean Theorem," "A Twist to the Pythagorean Theorem," and "The Pythagorean Theorem and President Garfield." *The Joy of Mathematics.* San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989, pp. 4, 30, e 200-201.

Parthasarathy, K. R. "An *n*-Dimensional Pythagoras Theorem." *Math. Scientist* 3, 1873, 1978, 137-140.

Perigal, H. "On Geometric Dissections and Transformations." *Messenger Math.* 2, pp. 103-106.

Project Mathematics. "The Theorem of Pythagoras." Videotape. http://www.projectmathematics.com/pythag.htm.

Shanks, D. *Solved and Unsolved Problems in Number Theory, 4th ed.* New York: Chelsea, 1993, pp. 123-127.

Steinhaus, H. *Mathematical Snapshots, 3rd ed.* New York: Dover, 1999.

Talbot, R. F. "Generalizations of Pythagoras' Theorem in *n* Dimensions." *Math. Scientist* 12, 1987, 117-121.

Tietze, H. *Famous Problems of Mathematics: Solved and Unsolved Mathematics Problems from Antiquity to Modern Times.* New York: Graylock Press, 1965, p. 19.

Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* London: Penguin, 1991, pp. 202-207.

Yancey, B. F. and Calderhead, J. A. "New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem." *Amer. Math. Monthly* 3, 1896, 65-67, 110-113, 169-171, and 299-300.

Yancey, B. F. and Calderhead, J. A. "New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem." *Amer. Math. Monthly* 4, 1897, 11-12, 79-81, 168-170, 250-251, and 267-269.

Yancey, B. F. and Calderhead, J. A. "New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem." *Amer. Math. Monthly* 5, 1898, 73-74.

Yancey, B. F. and Calderhead, J. A. "New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem." *Amer. Math. Monthly* 6, 1899, 33-34 and 69-71.