

Ipotesi alla base di un curriculum di matematica

Curricolo, Sapere e saperi

Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Il presente lavoro è svolto nell'ambito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R.

Nota. Il presente testo è tratto da: Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

La pianificazione e gestione dei fenomeni didattici non avviene a caso; esse sono il risultato di complessi meccanismi attraverso i quali il “Sapere” si trasforma in “sapere da insegnare”. La direzione più attuale di riflessione in questo campo consiste nella necessità di proporre un curriculum nel quale l'obiettivo sia la formazione di allievi competenti in matematica, naturalmente tenendo conto dello sviluppo ontogenetico¹.

Una schematizzazione molto semplificata che riassume l'attività docente che parte da un Sapere e che giunge alla costruzione individuale di un sapere competente, è la seguente:



¹ Sul termine “competenza”, rimando al lungo studio (D'Amore, 2000a).

Analogamente, la creazione di un curricolo non può che seguire la stessa traccia che qui sotto schematizzo partendo dall'analogo del Sapere (che è il "curricolo auspicato") fino all'analogo del sapere competente (che qui è il "curricolo appreso"):



Le angolazioni secondo le quali si può sviluppare un curricolo di matematica sono principalmente quattro:

- quella psicologica: è l'angolazione che tende soprattutto ad evidenziare aspetti aventi a che fare con l'individualità del comportamento da parte dell'allievo
- quella antropologica: che mette al centro dell'azione didattica gli esseri umani che ne sono protagonisti, l'insegnante ed ogni singolo allievo; il concetto che la fa oggi giorno da padrone in studi di questo genere è quello di "rapporto al sapere" (Chevallard, 1991) con la conseguente necessaria "istituzionalizzazione del sapere".
- quella didattica, che sembra avere attualmente maggior peso e maggior fortuna; è complessa e comprende nel suo seno gli aspetti specifici e più generali³.
- quella epistemologica: molti docenti e molti studiosi sorvolano su di essa, senza darle il ruolo centrale che, a mio avviso, invece, merita.

Quel che segue è dunque uno sguardo sommario alla concezione epistemologica del curricolo:

	Logicismo	Formalismo	Intuizionismo	Costruttivismo
Cos'è la matematica?	Struttura logica	Gioco simbolico	Successione di atti puri di intuizione	Costruzione di concetti personali basata sull'assimilazione e l'accomodamento

² Un esempio del rapporto tra curricolo sviluppato e curricolo appreso. Siamo in III elementare; l'allievo ha capito che per eseguire le sottrazioni in colonna deve sottrarre, da destra verso sinistra ordinatamente, "il più piccolo dal più grande". E dunque, comportandosi con estrema coerenza rispetto a quel che ha appreso e, coerentemente con il compito proposto dall'insegnante, esegue:

$$\begin{array}{r}
 27- \\
 16= \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 38- \\
 15= \\
 \hline
 23
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 23- \\
 16= \\
 \hline
 13
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 89- \\
 36= \\
 \hline
 53
 \end{array}$$

³ Tra i primi: la trasposizione didattica, l'ingegneria didattica, la teoria delle situazioni, la teoria degli ostacoli. Tra i secondi: le relazioni insegnante - allievo, le problematiche dell'individualizzazione nell'azione docente, le modalità di gestione dell'azione didattica, le modalità personali specifiche di risposta di fronte alla proposta didattica.

Che cosa significa insegnare?	Evidenziare le strutture della matematica	Evidenziare gli aspetti sintattici di combinazione dei segni formali	Proporre catene significative di atti di intuizione	Proporre immagini e modelli sempre più adeguati di esperienze tratte dal reale
Come si apprende la matematica?	Assimilandone in qualche modo le strutture logiche	Imparando a “giocare” con i simboli e le loro combinazioni sintattiche, ma finendo con il vederne modelli (semantica)	Concatenando in maniera personale atti intuitivi puri	Assimilando e accomodando successioni di immagini e modelli
Che cosa si valuta?	La capacità di riconoscere strutture analoghe o identiche in situazioni diverse	La capacità di dominare la sintassi; la capacità di interpretare modelli	La capacità di organizzare successioni di atti puri concatenandoli	La capacità di assimilare; la capacità di accomodare; la capacità di adattamento
Come si considera l'errore?	Fatto negativo che costringe a rivedere l'organizzazione e logica delle strutture	Fatto negativo che costringe a rivedere la sintassi	Fatto negativo che denuncia un “salto” scorretto nella successione concettuale	Fatto emblematico che denuncia un malessere cognitivo che dipende da una mancata assimilazione o da uno scorretto accomodamento
Qual è il compito dell'allievo?	Adeguare la propria struttura mentale a quella logica proposta; imparare a ragionare secondo visioni strutturali	Imparare a riconoscere se certe combinazioni sintattiche sono permesse o no; se è possibile, riconoscere modelli (semantica)	Migliorare e raffinare la propria sensibilità nella creazione di atti puri di intuizione	Costruirsi personalmente concetti, nella speranza che siano, prima o poi, adeguati a quelli attesi o condivisi
Qual è il compito del docente?	Proporre ed illustrare situazioni strutturali	Insistere sulla sintassi del “linguaggio” simbolico	Predisporre esempi di sequenze di atti di intuizione che spingano all'autonomia	Creare una successione di immagini e modelli di concetti che costringano lo studente a costruirsi conoscenza
Quale metodologia usa il docente?	Esempi anche pre- disegnati da “esperti”	Esercizi anche ripetitivi; “problemi” che si risolvono applicando regole	Attività logiche	Creare successioni opportune, ciascuna delle quali porti a conflitti cognitivi

Teorie realiste e teorie pragmatiche: un contributo ad una visione epistemologica del curriculum di matematica

Nelle *teorie realiste* il significato è «una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale» (Godino, Batanero, 1994).

Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture etc. hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto sono appartenenti ad un dominio ideale; "conoscere" da un punto di vista matematico significa *scoprire* enti (pre-esistenti) e loro relazioni (pre-determinate) in tale dominio⁴. Nelle *teorie pragmatiche* le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazioni scientifica preconstituita in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminarne i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti⁵. Di fatto, gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione.

Tendenze auspicabili nel curriculum

	fare meno	fare più
nell'insegnamento	<ul style="list-style-type: none"> • lezioni frontali • lavoro affidato individualmente • lavoro senza contesto • lavoro astratto • temi tradizionali • ricorso a situazioni didattiche ... 	<ul style="list-style-type: none"> • guida alla motivazione • lavoro di gruppo • applicazioni quotidiane • motivazione • modellizzazione del e connessioni con il reale • temi attuali • ricorso a situazioni a-didattiche
nell'apprendimento	<ul style="list-style-type: none"> • memorizzazione temporanea • informazioni "chiuse" o finite • attività chiuse • esercizi di routine • simbolismo matematico • trattamento formale • ritmo uniforme ... 	<ul style="list-style-type: none"> • comprensione duratura • scoperta e ricerca • attività aperte • problemi complessi • uso di linguaggi diversi • visualizzazione • ritmo personalizzato ...
nella valutazione	<ul style="list-style-type: none"> • valutazione di algoritmi • valutazione quantitativa • valutazione di ignoranze o di mancati apprendimenti 	<ul style="list-style-type: none"> • valutazione di ragionamento • valutazione qualitativa • valutazione formativa ...

⁴ Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti o, almeno, ad esse estranee e da esse indipendenti.

⁵ Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un "gioco linguistico", dato che in esso ha un modo di 'uso' ed un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere o finisce con l'essere significativa. Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni.

Tra le funzioni per così dire “storiche” del curriculum, c’è poi quella di definire gli obiettivi dell’azione didattica. Nella sua formulazione più ingenua e diffusa, questa definizione parla degli obiettivi che lo studente deve raggiungere. Ma la critica internazionale ha radicalmente modificato questo modo d’intendere le cose, puntando l’attenzione su tre “direzioni” diverse degli obiettivi definibili all’interno del curriculum, a seconda di chi ne è il destinatario. Vediamo a mo’ di esempio, qualche indicazione in proposito.

Per l’allievo:

- potenziare la capacità di pensiero a partire da situazioni di aula nelle quali si possa: determinare o analizzare fatti, stabilire relazioni, dedurre conseguenze; potenziare le capacità di ragionamento e di azione;
- promuovere l’espressione e la comunicazione di fatti inerenti la matematica;
- riconoscere analogie, regolarità, differenze,...;
- incentivare l’uso di schemi;
- favorire la capacità di risolvere problemi di qualsiasi tipo;
- sviluppare la capacità di lavoro scientifico anche nei suoi risvolti quotidiani, artigianali, artistici,...;
- favorire la capacità di descrivere fenomeni sociali e naturali in termini di modelli matematici adeguati alle competenze ed all’età; avviare all’uso predittivo dei fenomeni, grazie alle competenze matematiche; saper usare i dati a disposizione e sapere quali dati cercare;
- favorire la capacità di congetturare, argomentare, dimostrare, definire,...

Per l’insegnante:

- fare in modo che ogni allievo partecipi attivamente alla costruzione della propria conoscenza, trattando una matematica accessibile a tutti ed interessante per ciascuno e facendo in modo che la matematica praticata a scuola cessi di essere un fattore di discriminazione;
- stimolare il lavoro cooperativo, l’azione critica, la partecipazione, la collaborazione, la discussione, la difesa delle proprie idee;
- dare il giusto rilievo agli aspetti formali della matematica, senza eccessi né in un senso né nell’altro;
- incorporare l’uso della tecnologia nel processo di insegnamento della matematica, naturalmente tenuto conto del livello dei propri studenti, data la necessità di centrare l’educazione matematica nello sviluppo delle capacità produttive e come generatrice di iniziative nella risoluzione di problemi.

Per l’amministrazione

- procurare i mezzi e le condizioni necessari affinché il compito del docente si possa realizzare raggiungendo tutti gli obiettivi;
- fare in modo che in ogni Istituto scolastico sia realmente possibile articolare l’insegnamento della matematica con i necessari strumenti pedagogici.

Il contenuto di un curriculum

Che cosa contiene un curriculum, concretamente? A nostro avviso almeno i seguenti fatti (Alsina, 2000; Goñi, 2000):

- Temi di matematica intesi come contenuti (contenuti irrinunciabili, nodi concettuali).
- Suggerimenti metodologici (es. situazioni a-didattiche).
- Indicatori attesi ed effettivi dell’evoluzione del linguaggio della matematica, da parte del docente, da parte dell’allievo.

- Usi del linguaggio della matematica in aula (discussione tra compagni, per es. per la validazione)⁶.
- Strategie e procedure: algoritmi, risoluzione di problemi; esempi di problemi.
- Diversi aspetti della comunicazione matematica come necessità di scambio: definizione, congettura, prova, argomentazione, dimostrazione...⁷
- Uso concreto della matematica nella vita reale esterna alla scuola; a questa implicita domanda, occorre dare risposta, l'abbiamo più volte affermato.
- Storia: occorre sfatare il mito che la matematica sia un prodotto stantio eterno a-temporale, ma bisogna dare invece la certezza che si tratta di una disciplina in continua evoluzione, anche ricorrendo alla sua storia, il che ha fascino notevole sulla maggior parte degli studenti e restituisce alla matematica quella umanità altrimenti perduta.

La valutazione nell'apprendimento della matematica

Durante l'incontro internazionale ICMI Study del 1991 (Grugnetti, 1994) è stata stabilita la seguente definizione internazionale, che faccio mia:

- *assessment* deve essere usato per fare riferimento ai risultati dell'insegnamento, qualche cosa che riflette le performances degli studenti, presi individualmente o in gruppo
- *evaluation* deve essere usato come l'azione che, traendo spunto dalle informazioni su tali performances, deve permettere di farsi dei giudizi circa i programmi di studio, i curricoli e l'efficacia dell'azione degli insegnanti.

Una distinzione pedagogica ha avuto fortuna, quella che concerne la distinzione tra valutazione "formativa", "sommativa" e "valutativa"⁸.

Quando un insegnante entra in contatto con i risultati della ricerca in Didattica della matematica, fatalmente i suoi atteggiamenti radicalmente *CAMBIANO*. L'insegnante non può più ignorare questa sua nuova competenza; vede, riconosce nel comportamento dei propri studenti in aula e nel proprio agire professionale, la conferma di quei risultati e di conseguenza la propria interpretazione delle condotte subisce una modifica:

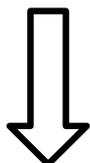
⁶ Quello del linguaggio di scambio comunicativo tra pari, è un tema importante, sempre più oggetto di studio da parte della didattica. Una situazione di validazione, nella quale un allievo che ha effettuato una costruzione personale la difende dall'attacco verbale di uno "scettico", sembra avere molta più efficacia didattica per l'intero gruppo classe che non una dotta spiegazione frontale effettuata da parte dell'insegnante (Maier, 1998).

⁷ Qui è importante notare che le forme del comunicare sono varie e molteplici, ciascuna ricca di senso e di profondità. Le ricerche mostrano che la dimostrazione in aula è figlia dell'argomentazione (Duval, 1998) e dunque è inutile o dannoso anticipare modalità che non siano condivise ed accettate, molto meglio è legare modalità comunicative alle effettive esigenze degli studenti.

⁸ La "valutazione formativa" prende in esame la realizzazione di un allievo rispetto ai suoi obiettivi cognitivi, in modo da favorirla sulla base dei risultati; vi si include, solitamente, anche una "valutazione diagnostica" nella quale sono identificate le difficoltà dell'individuo, sia per quanto concerne l'apprendimento, sia per quanto concerne le manchevolezze di comprensione; la "valutazione sommativa" misura e riassume le realizzazioni di ogni allievo in modo sistematico; essa si riduce spesso ad un aggettivo, un numero, ed è destinata non solo allo studente ed all'insegnante, ma pure all'esterno, alla famiglia, all'istituzione scolastica; la "valutazione valutativa" (che in italiano sembra una ripetizione, ma che in inglese è detta "evaluative assessment") comprende una valutazione ed un rapporto sul lavoro dell'insegnante, sulla scuola, su un manuale, sul curriculum o su un suo segmento...; quest'ultima ha storicamente almeno le quattro funzioni seguenti (Cardinet, 1983):

- effettuare un bilancio su quel che lo studente è in grado di fare ad un certo momento del processo di insegnamento - apprendimento
- guidare la successiva fase dell'apprendimento sulla base del bilancio precedente (sia per quanto concerne i contenuti, sia per quanto concerne le metodologie)
- scoprire le cause delle difficoltà dello studente
- incoraggiare il successo dello studente, allo scopo di trovare il modo per favorire la sua riuscita.

competenza acquisita, da parte del docente, sui risultati della ricerca in didattica della matematica



conseguente influenza sugli atteggiamenti degli insegnanti:

che cosa cambia?

curricolo

compiti

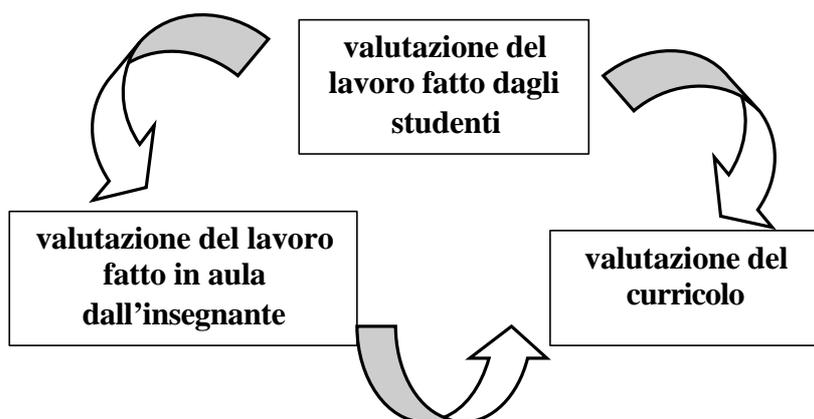
esigenze

attese

valutazione

Questa modifica riguarda la valutazione.

- la valutazione del lavoro fatto dallo studente:
l'insegnante informato dei risultati della ricerca in didattica guarda con occhio diverso, più analitico, critico, osservativo, al lavoro di costruzione della conoscenza di ciascuno dei propri allievi; perfino la valutazione più banale, intesa come misurazione di conoscenza, come "voto" da dare allo studente sulla base di risultato ed impegno, ne risente parecchio;
- la valutazione del proprio lavoro fatto in aula:
conformemente ai risultati di apprendimento ottenuti dai propri allievi, l'insegnante informato dei risultati della ricerca in didattica è in grado di analizzare criticamente il proprio operato all'interno dell'aula, ridisegnando le proprie strategie metodologiche e le proprie scelte;
- la valutazione del curricolo:
l'insegnante informato della ricerca in didattica è in grado di ripensare allo sviluppo curricolare in ogni suo aspetto, facendosi carico in prima persona di una critica a tale sviluppo e creando condizioni costruttive opportune per una seria e talvolta profonda modifica.



Perché si valuta e che cosa si valuta ?

- Si valuta per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica)⁹.
- Si valuta per prendere decisioni circa l'ambiente di classe. In un'ipotesi costruttivista, è dato per certo che l'implicazione personale è il primo passo verso la costruzione di una conoscenza, verso l'apprendimento; dunque valutare se questo è stato raggiunto è un passo di straordinaria importanza. Ne deriva di conseguenza che l'ambiente dominante in aula è fondamentale. Ne risulta che è importante che vi sia, per così dire, in prima istanza, fiducia nell'azione dell'insegnante¹⁰.
- Si valuta per comunicare agli allievi quel che è importante. Gli allievi sono capaci di, ed anzi assai abili nel, riconoscere quel che l'insegnante implicitamente considera come importante; per esempio, se di fronte ad un lavoro scritto l'insegnante rivede il processo seguito dall'allievo solo quando la risposta finale data non è corretta per trovare l'errore, implicitamente sta insegnando che il processo è di secondaria importanza rispetto al risultato (cioè al prodotto).
- Si valuta per dare un voto.
È l'ultima delle ragioni per le quali valutare, ma certo la più diffusa. Gli allievi devono invece avere ben chiaro che *valutare* non è sinonimo di *dare un voto*. Quando si dà un voto, si deve tenere presente che:
 - è possibile l'uso di diversi strumenti e tecniche;
 - è possibile che il lavoro dell'allievo sia diverso da quello usuale, quando egli sa che tale lavoro serve per ricevere un voto; e tuttavia gli allievi devono sapere preventivamente che un certo lavoro che stanno per eseguire sarà oggetto di votazione;
 - occorre usare sempre un sistema di votazione che tenga in conto tanto il processo quanto il prodotto.

Come si valuta

Elenco qui di seguito rapidamente alcuni dei metodi e criteri di valutazione in matematica attualmente più in uso e più conosciuti tra gli insegnanti. Partiamo con la valutazione tesa a “dare un voto”, nel senso di “orientare lo studente verso una maggior consapevolezza e profondità del suo apprendimento”.

- Osservare e chiedere spiegazioni:
mentre l'allievo sta realizzando qualche attività a carattere matematico, lo si valuta osservandolo e chiedendogli spiegazioni su ciò che sta facendo; ciò non solo dà all'insegnante informazioni sulle abilità, ma anche sui processi mentali messi in atto, sugli atteggiamenti e le idee¹¹.

⁹ A partire dai dati che si sono raccolti grazie ad osservazioni nell'aula (fatti che descrivono gli allievi durante il loro lavoro matematico) e grazie all'analisi dei risultati dei compiti (intesi in generale: i “classici” scritti o orali, ma anche altre attività), si possono identificare punti forti e punti deboli dei singoli allievi (questo dipende in gran parte dal tipo di strumento di valutazione che si adotta) e così decidere di conseguenza per le scelte relative alla trasposizione didattica e per una determinata ingegneria didattica, adeguate alle necessità dei singoli componenti il gruppo classe.

¹⁰ Domande come: Gli allievi si rendono conto che all'insegnante piace insegnare matematica?, La risoluzione dei problemi e la scoperta sono parte fondamentale delle abitudini di classe?, Gli allievi hanno l'opportunità di esplorare e di sperimentare senza ricevere una votazione?, Si tiene in considerazione qualche cosa in più che non la sola risposta corretta?,... assumono importanza strategica nella formazione del corretto ambiente.

¹¹ Esempio di una efficace attività messa in pratica in una I media in Italia ed in una classe di VI grado in Colombia, per valutare le modalità di ragionamento di ciascun allievo (le sollecitazioni erano solo orali). Stimolo: «Sappiamo che la somma di 5 numeri diversi di 2 cifre è minore di 100. Consideriamo ciascuna delle seguenti affermazione ed analizziamo se ciascuna di esse è necessariamente vera, necessariamente falsa o solo possibilmente tali:

1. Tutti i 5 numeri sono minori di 20
2. Uno dei 5 numeri è maggiore di 60
3. Se 4 dei 5 numeri sono maggiori di 20 e il quinto è minore di 20
4. Se 2 dei 5 numeri sono minori di 20, almeno uno è maggiore di 20

- Raccogliere dati valorativi dati dagli allievi attraverso attività diverse scritte: inventari, costruzione di cartelle, interventi sui quaderni, su manifesti ecc. Tutto ciò dà informazioni su quel che ogni singolo allievo pensa nei riguardi della matematica, di come si sente quando lavora in matematica, di quali strumenti mette in atto nel fare matematica¹².

Si può anche procedere in modo più diretto con domande opportune, cui però gli allievi devono rispondere per iscritto, domande come: Che impressione ti ha dato il problema appena lo hai letto?, Ti ha interessato?, Come ti senti quando devi lavorare su un problema? E come con esercizi che coinvolgono numeri decimali?, Hai sentito qualche volta la necessità di abbandonare il lavoro, mentre stavi risolvendo un problema?, Per risolvere questo problema, preferisci lavorare da solo o in gruppo?¹³.

- Dar valore al lavoro matematico degli allievi privilegiando il processo più che il prodotto (risultato), dando punti (voti) a ciascuno dei passi nel processo di risoluzione dei problemi, una volta stabilito e reso palese lo strumento valorativo. Così, nel dare valore ai processi, possiamo valutare le differenti strategie che usano gli allievi per risolvere un esercizio; possiamo conoscere il grado di comprensione chiedendo loro che spieghino il proprio ragionamento per iscritto o oralmente, e confrontando il proprio processo con quello di un compagno¹⁴.

- La discussione in aula.

Tale tecnica didattica, grazie agli studi di Bartolini Bussi (1989a, b; 1991a, b), si è rivelata efficacissima in aula, tanto che oggi è modalità piuttosto diffusa; essa si presta bene, però, anche per la valutazione dei singoli studenti. Nei loro interventi, gli studenti che accettano ruoli attivi nella discussione in aula, difendono principi ed idee, rivelandoli dunque apertamente e rendendo piuttosto facile la loro individuazione da parte dell'insegnante¹⁵.

Se i 5 numeri sono diversi, allora la somma dei 5 numeri è maggiore o uguale a 60».

¹² Per esempio, sono strumento formidabile a questo proposito i TEPs (D'Amore, Maier, 2002): essi si sono rivelati, a detta degli stessi insegnanti che li hanno dapprima conosciuti e poi utilizzati, degli strumenti formidabili per la valutazione.

¹³ Altro lavoro che si presta alla valutazione, molto diffuso nei Paesi di lingua spagnola (dunque Spagna ed America Latina) sono gli *informes* (di solito adeguati a studenti di scuola secondaria); si tratta di quanto segue. Ogni giorno, all'inizio dell'ora di matematica, l'insegnante affida ad uno studente della classe la responsabilità di tenere una sorta di diario commentato di quel che succederà durante l'ora che sta iniziando, descrivendo non solo quel che *concretamente* succede, ma le opinioni espresse, gli atteggiamenti dei compagni, le domande e le proprie opinioni; lo studente ha poi tempo, a casa, di rileggere il proprio *informe* e di correggerlo, modificarlo. I primi minuti dell'ora della lezione successiva (uno o più giorni dopo) sono dedicati alla lettura comune ed al commento, da parte di tutti i compagni e dell'insegnante, del testo redatto: il tale studente ha davvero detto quanto dichiarato nell'*informe*?, si ritrova in quanto scritto nel diario?; l'insegnante ha davvero insegnato quello che appare scritto?; qual è stata davvero la domanda del tale altro studente?; e così via. L'apparente perdita di tempo, in ogni modo non oltre 10 minuti per accordo esplicito, in realtà svanisce di fronte al continuo cambio di responsabilità ed all'attenzione che si è costretti a porre su quel che *davvero* succede in aula.

¹⁴ Esempio di attività efficacemente svolta in una I media in Italia e in una di grado VI in Colombia. Stimolo: «Immaginiamo che a , b e c rappresentino numeri naturali nessuno dei quali sia zero; inoltre sia $a > b > c$. Come si può classificare ciascuna delle seguenti frazioni: $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}$?»». Il comportamento degli allievi si rivela estremamente

vario: la maggior parte sceglie valori di a , b , c e fa tentativi. Nel processo messo in atto, si rilevano facilmente concezioni dei singoli allievi sulle frazioni e, più in generale, sulla matematica.

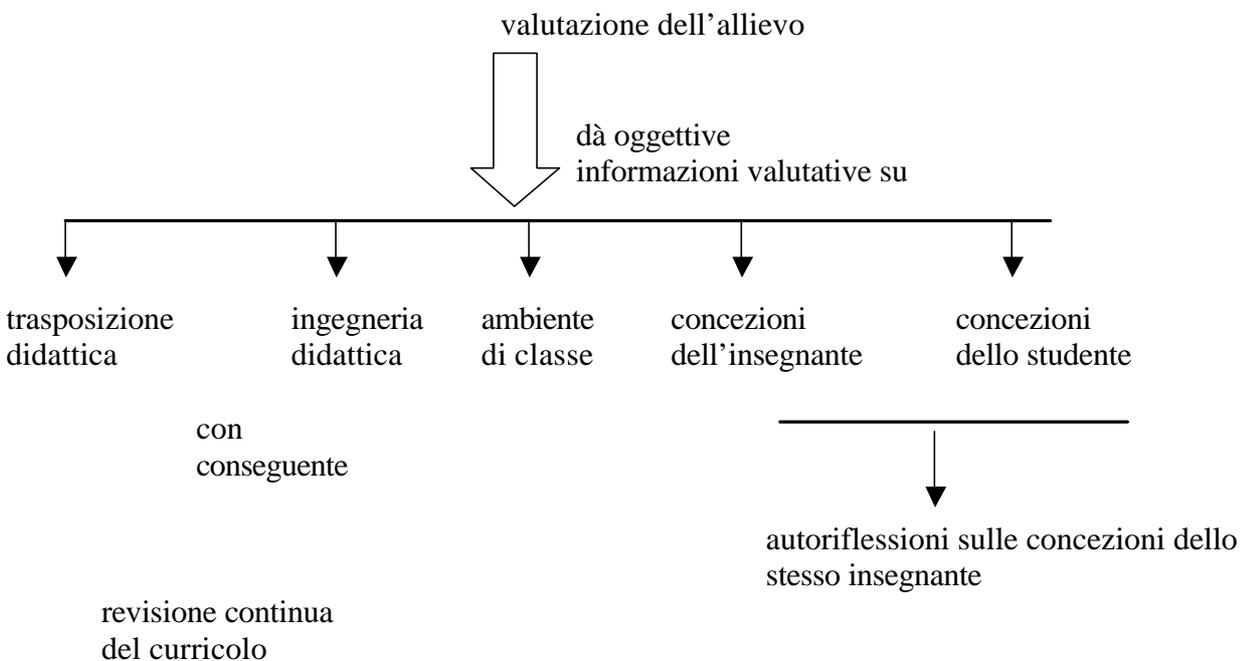
¹⁵ Come dice molto bene Zan (1996), lo studente positivo, quello che di solito riesce, sembra trarre maggior vantaggio dall'analisi dell'insegnante ed è disponibile a mettersi in discussione; lo studente in difficoltà in genere non cerca di sostenere la propria tesi perché non si assume la responsabilità dell'apprendimento, e quindi dei propri processi di pensiero e dell'errore: è disponibilissimo a cambiare la propria risposta al minimo cenno dell'insegnante, a differenza dello studente "positivo"; il problema è che per lo studente che non si assume la responsabilità dell'apprendimento e che in particolare risponde a caso o comunque senza convinzione; la correzione dell'insegnante non può essere incisiva: si limita a far modificare una risposta e non un processo di pensiero.

- Prove tradizionali:

interrogazioni, compiti in classe, tests di vario tipo. Anch'esse, se ben utilizzate, e soprattutto se rientrano come una delle categorie all'interno di una vasta gamma di prove di valutazione, sono una fonte per raccogliere informazioni; basta pensarle ed attuarle con intelligenza, secondo uno scopo preciso dichiarato.

Tramite le tecniche di valutazione degli allievi, l'insegnante riceve informazioni chiarissime circa l'efficacia della propria azione didattica in aula e dunque sia sui contenuti trattati, sia sulla metodologia; l'insegnante trae inoltre informazioni sull'ambiente di classe; ha la possibilità, specie con le prove diciamo così non tradizionali, di comunicare anche in modo esplicito che cosa è importante e che cosa no, in matematica, per esempio quando non si privilegia il prodotto rispetto al processo.

Tutto ciò dà all'insegnante le informazioni necessarie alla continua riflessione critica sul curriculum (che comprende, infatti, tutte queste componenti: Fandiño Pinilla, 2002a):



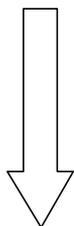
Le funzioni della valutazione e le loro caratteristiche

funzione	descrizioni	caratteristiche
sociale (Howson, Mellin-Olsen, 1986)	aiuto ed orientazione per gli studenti soddisfare le domande sociali	obiettività della conoscenza matematica e uso di modelli derivati da questa conoscenza controlli sul sistema d'insegnamento e sulla sua gestione stabilire criteri per la differenziazione sociale degli individui funzione informatrice creazione di aspettative per eccellere in aula
etico -politica aspetto critico	revisione costante postura critica e aperta lo studente è più	l'errore è legittimo, dato che è visto come una via di accesso alla conoscenza attenzione ai processi si dà importanza alla formazione globale dello studente

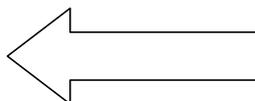
(Skovmose, 1994; Eliott, 1990; Schön, 1991)	importante della disciplina	<ul style="list-style-type: none"> si cerca di andare verso una omogeneità culturale ci si apre a tutti coloro che vogliono intervenire la conoscenza scientifica è vista criticamente si esige una pianificazione critica e riflessiva si chiede una riflessione critica anche sulla pratica docente
pedagogica (Rico, 1990)	<ul style="list-style-type: none"> regolazione e controllo del processo di apprendimento sue interazioni con altri aspetti 	<ul style="list-style-type: none"> accettare modifiche nel tema trattato informazioni sulle esperienze informazione su abitudini, aspettative e concezioni gestione della pianificazione adeguamento della disciplina allo studente riconoscimento delle difficoltà e loro presa in esame
professionale (Giménez et al., 1997)	<ul style="list-style-type: none"> carattere riflessivo compiere un dovere di controllo e di giudizio 	<ul style="list-style-type: none"> realizzazione concreta per quanto concerne l'adeguamento di cui sopra utilità come strumento di progresso analisi di compiti: identificare abilità, regolare processi, intervenire nella pianificazione, influire sulla scelta delle decisioni... significatività della valutazione mediante la scelta delle modalità promozione di autonomia e di autoregolazione (compresi qui gli aspetti metacognitivi)

contesti:

- classe
- scuola
- sistema scolastico

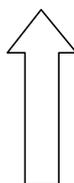


esigenze della valutazione



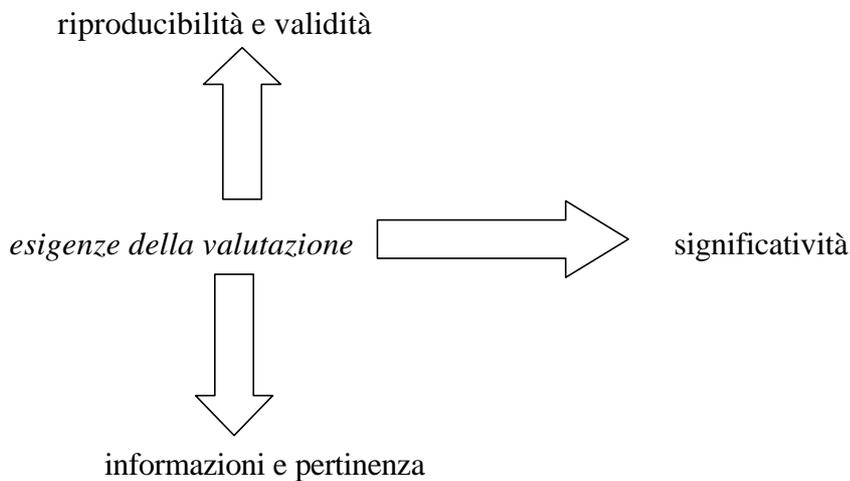
tappe del processo di valutazione:

- organizzazione
- scelta degli obiettivi
- presentazione degli obiettivi
- osservazione in aula
- trattamento delle osservazioni
- valorizzazione
- utilizzazione delle osservazioni



variabili:

- didattiche
- psicologiche
- interazione sociale



Criteria associati a contenuti matematici

Poniamoci ora in una situazione criteriale e vediamo che relazione c'è tra questa ed i contenuti della matematica.

Per prima cosa, si potrebbe dire che i criteri associati ai contenuti, in genere, potrebbero essere così classificati:

- criteri di realizzazione
 - criteri di risultato
 - criteri di comprensione,
- dando dunque già una prima idea di ripartizione di modalità di lettura valutativa.

A seconda poi del compito assegnato (per esempio, espressa in verbi:

- eseguire
- provare
- elaborare
- risolvere),

si possono cominciare ad elaborare frasi per esprimere criteri che tengano conto dell'ambito e del compito.

Ovviamente non si possono dimenticare le componenti del linguaggio e della comunicazione (per esempio, sempre in verbi:

- spiegare
- giustificare
- argomentare
- dimostrare).

Né si possono passare sotto silenzio i risultati ottenuti (per esempio:

- secondo la competenza: essere capace di...
- secondo l'accettazione: riconoscere...
- secondo la comprensione: identificare, sapere, comprendere, enunciare, mettere in relazione,...).

A questo punto, ci sono tutti gli ingredienti per costruire criteri a seconda degli obiettivi cognitivi che si desidera raggiungere.

Facciamo un esempio da scuola media.

Supponiamo che il compito sia:

«Usare il teorema di Pitagora per calcolare l'area laterale di una piramide retta a base quadrangolare regolare, una volta assegnati come dati le misure del lato di base e dello spigolo laterale».

Criteri associati ai contenuti:

- criteri di realizzazione: essere capace di realizzare un progetto di compito; esso può consistere nel realizzare un disegno appropriato alla situazione, ma anche nel progettare il comportamento da seguire per giungere alla risoluzione; saper argomentare, giustificando le scelte effettuate;
- criteri di risultato: saper condurre la risoluzione secondo un comportamento logico, giungendo alla risposta adeguata; saper dimostrare che la via scelta è la più economica o la più idonea; riconoscere che il risultato dipende dal teorema di Pitagora applicato ad altre situazioni, per esempio a triangoli nella geometria piana;
- criteri di comprensione: saper mostrare, attraverso il progetto precedente, che il problema è stato compreso; da ciò dedurre che si sa usare il teorema di Pitagora nella situazione detta; saper esporre il risultato ottenuto, comunicandolo a compagni che non lo hanno prodotto; mettere in relazione il risultato ottenuto in questa situazione con altri in situazioni diverse.

Si noti che, nella precedente redazione, tenendo conto della tipologia del compito, si sono usati i verbi ritenuti più significativi ed idonei, così come era stato richiesto nella presentazione teorica.

Caratteristiche di un'innovazione nella valutazione in matematica

Che cosa, dunque, costituisce, in questi primi anni 2000, una innovazione nella valutazione in matematica?

Risponderò facendo un brevissimo elenco delle condizioni che sembrano oggi determinare il senso che ha l'innovazione nella valutazione; lo farò per punti, cercando di riutilizzare più o meno gli stessi termini finora introdotti, anche se in forma molto più abbreviata, per dare maggiore unità all'esposizione.

Le caratteristiche principali di un'innovazione nella valutazione in un processo sistemico di insegnamento – apprendimento della matematica, desunte dai lavori di ricerca, sono le seguenti.

- Un'accurata selezione e descrizione esplicita di criteri e obiettivi, riferiti a contenuti, in un modello critico – orientativo. In esso, la matematica è vista come costruzione significativa; la lista dei contenuti non è statica, ma ampiamente dinamica; l'obiettivo è visto come un modo di apprendere; la conoscenza raggiunta non è statica, ma ampiamente dinamica; deve essere inclusa la valorizzazione dei progressi anche locali dei singoli allievi (Baldacci, 1993); l'elaborazione delle attività deve essere una conseguenza del processo o almeno relazionarsi con essa e non viceversa essere fissata a priori in modo definitivo.
- La valutazione è vista come complessa e multidimensionale.
- La valutazione non è ristretta ad un punto o ad una certa azione, ma è attuata lungo tutto l'arco del processo di insegnamento - apprendimento, dato che è vista essa stessa come parte integrante di tale processo. La valutazione dunque è continua e globale.
- La valutazione è adeguata allo studente valutato e tiene conto delle diversità. Valutare significa anche riconoscere ed accettare le caratteristiche individuali. L'adeguatezza e l'attenzione per le diversità si estendono a riferimenti alla valutazione del curriculum e del lavoro dell'insegnante.

- La valutazione comporta lo sviluppo di abilità di tipo comunicativo. Essa favorisce l'acquisizione di competenze anche di tipo strutturale. Lo studente potrà sviluppare concetti, procedimenti, atteggiamenti e strutture migliori, nella misura in cui essi si basino su schemi non fissi, in modo che tutto sia applicabile in modo indipendente dalle singole situazioni; da questo punto di vista ho parlato di "competenze strutturali".
- La conoscenza acquisita deve avere un alto grado di applicabilità non solo endogena, ma anche esogena. Non solo, ma lo studente deve riconoscere ciò e saperlo esprimere attraverso opportune situazioni: deve avere la sensazione che la conoscenza acquisita influenza la sua competenza che risulta spendibile e valutabile.
- Che cosa succede nel processo, come viene dapprima analizzato e poi registrato il livello di qualità della evoluzione conoscitiva? Di questo punto si occupa il "controllo". Il controllo interviene, anche se sembra paradossale, in via previa, al momento di progettare il curricolo o, almeno, la parte progettuale specifica della valutazione; ma è sempre presente per giungere ad una riprogettazione costante, per articolare forme di regolazione e di autoregolazione. Proprio queste sono le caratteristiche che individuano un sistema aperto rispetto ad uno chiuso. Ciò comporta attività di tipo diverso dalle prove di valutazione "usuali", ricorrendo alla formulazione di congetture, alla loro verifica e difesa, alla verifica del dominio di situazioni diverse che cadono sotto la stessa conoscenza, alla stesura di testi, disegni, grafici,... Ma come riconoscere se le tecniche di controllo (inteso in questo senso) sono adeguate? Possiamo dire che un controllo è un controllo adeguato se esso stesso produce informazioni atte ad essere usate per migliorare le competenze del singolo studente e il processo individuale di costruzione della conoscenza.
- La ricerca attuale sulla valutazione, riflettendo un andamento generale che si può pensare comune a tutta la didattica della matematica, sta dando molta importanza alla motivazione ed agli aspetti affettivi.
- Una moderna idea di valutazione, che tenga conto dei risultati della ricerca, non può non porsi il problema della formazione. Da un lato, la formazione degli studenti sul tema: esplicitare le problematiche, renderle palesi e contribuire a far sì che anche la valutazione sia elemento vivo e presente nella vita di aula. Dall'altro, quello non sempre ovvio della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti.
- Una moderna idea di valutazione, che si proponga come innovatrice, non può non prescindere dall'esigenza che essa sia coerente, equa e tale da ricevere la fiducia di tutti, degli studenti, delle loro famiglie, degli insegnanti, della noosfera.

È in tutto quanto precede che si riconosce un tentativo di fondare una moderna visione della valutazione sulla base degli attuali risultati della ricerca; lungi dall'essere, come potrebbe apparire, solo un insieme di vuote parole, quello fin qui descritto è invece uno strumento preciso e concreto che apporta un fondamento nuovo, alla professionalità docente.

Naturalmente, non tutto, non subito, è raggiungibile; né è facile il cambio di mentalità e di visione delle cose. D'altra parte, il rischio che si corre, visibile sotto gli occhi di tutti, è il fallimento dell'azione del docente di matematica: una professionalità perduta, a volte sprecata, a volte sottostimata.

Bibliografia

- Alsina C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. In: Goñi J. M. et al. (2000). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó. 13-21.
- Abrantes P., Cunha L. (1994). Is it possible to integrate learning and assessment. In: AA. VV: (1994). *L'évaluation centrée sur l'élève*. Atti del 45° incontro della CIEAEM (Cagliari, 4-10 luglio 1993). Bergamo: Clas. 46-56.
- Artigue M. (1989). *Epistémologie et Didactique*. Paris: Université Paris VII. [Publicazioni dell'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, IREM].
- Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 2-3, 241-286.
- Baldacci M. (1993). *L'istruzione individualizzata*. Firenze: La Nuova Italia.
- Bartolini Bussi M. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 12, 1, 5-49.
- Bartolini Bussi M. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 12, 5, 615-654.
- Bartolini Bussi M. (1991a). Apprendere la matematica attraverso la discussione: i grafici nel piano cartesiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, I e II parte: 14, 3, 243-258; III parte: 14, 5, 407-436.
- Bartolini Bussi M. (1991b). Social interaction and mathematical knowledge. In: AA. VV. (1991). *Proceedings of the 15th Conference of PME*, vol. I. 1-16. Assisi.
- Bartolini Bussi M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction. In: Biehler R., Scholz R.W., Strässer R., Winkelmann B. (eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Kluwer. 121-132.
- Bloom B. S., Hasting J. I., Madaus G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York: McGraw-Hill.
- Bodin A. (1993). L'évaluation en mathématiques: continuités et perspectives. In: AA. VV: (1994). *L'évaluation centrée sur l'élève*. Atti del 45° incontro della CIEAEM (Cagliari, 4-10 luglio 1993). Bergamo: Clas. 25-45.
- Boero P. (1989). Matematica. Il Sole, la Terra e la misurazione delle ombre. In: Gattullo M., Giovannini L. (1989). *Cit.* 289-307.
- Bornstein et al. (1977). Social skills training for unassertive children: a multiple baseline analysis. *Journal of applied behavior analysis*. 10, 183-195.
- Brousseau G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101, 3-4, 107-131.
- Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.
- Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Brousseau G., Pères J. (1981). *Le cas Gaël*. Université de Bordeaux I, Irem.
- Bunge M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Bunge M. (1985b). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.
- Bunge M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Caldelli M. L., D'Amore B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.
- Canevaro A. et al. (1984). *Handicap e scuola. Manuale per l'integrazione scolastica*. Roma: La Nuova Italia Scientifica.
- Cardinet J. (1983). *L'évaluation des connaissances*. Neuchâtel: IRDP.

- Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 12, 1, 73-112.
- Cornoldi C. (1991). La conoscenza metacognitiva. *Età evolutiva*. 40 (Nucleo monotematico). 57-119.
- Cornoldi C. (1995). *Metacognizione e apprendimento*. Bologna: Il Mulino.
- Cornoldi C. et al. (1995). *Matematica e metacognizione. Atteggiamenti metacognitivi e processi di controllo*. Trento: Edizioni Centro Studi Erickson.
- D'Ambrosio U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (1987a). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. In: AA. VV. (1987). *Atti del «II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática»*. Valencia: Universidad de Valencia. 323-324.
- D'Amore B. (1987b). Tra lingua e matematica. *Insegnare*. 3-4, 28-33.
- D'Amore B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La Matematica e la sua didattica*. 3, 289-301. [Questo articolo è stato ristampato, in una versione ampliata, in lingua tedesca, con il titolo: Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97; ed anche in: Gagatsis A., Maier H. (eds.) (1995). *Texte zur Didaktik der Mathematik*. Regensburg, Erasmus. 105-125].
- D'Amore B. (1994). Un'indagine sulle programmazioni nella scuola media. *La Matematica e la sua didattica*. 1, 82-94].
- D'Amore B. (1998). La crisi di identità e di valori nella essenza e nella fenomenologia della conoscenza matematica. *Encyclopaideia*. 2, 77-90.
- D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.
- D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2000a). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40.
- D'Amore B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La Matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.
- D'Amore B. (2000c). Semiotica e noetica nell'apprendimento dei concetti matematici. In: D'Amore B. (ed.) (2000). *Matematica e didattica: tra sperimentazione e ricerca*. Bologna: Pitagora. 37-48.
- D'Amore B. (2000d). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università*
- D'Amore B. (2001a). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2001a). Didattica della matematica. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2001b). Il "triangolo" allievo-insegnante-sapere in didattica della matematica. *L'educazione matematica*. 3, 2, 104-113.
- D'Amore B. (2001c). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.
- D'Amore B. (2001d). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La Matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.
- D'Amore B. (2001e). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2002a). Basta. *La Vita Scolastica*. 8, 1° gennaio 2002, 14-18.
- D'Amore B. (2002b). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. In corso di stampa.

- D'Amore B. et al. (1986-1993). Progetto Ma.S.E. (Matematica Scuola Elementare). Milano: Angeli. [11 volumi pubblicati tra il 1986 e il 1993, ristampati in varie edizioni].
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2001a). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. [Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus", Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno --6 luglio 2001]. 111-130.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2001b). La "matematica del quotidiano". *La Matematica e la sua didattica*. 3, 256-263.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática (México DF)*. 14, 1, 48-61.
- D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 2002, 144-189.
- Davis R. B. (1990). The knowledge of cats: epistemological foundations of mathematics education. In: AA. VV: (1990). *Proceedings of the XIV PME Conference*. México: G. Booker. Vol. 1, 1-21.
- De Landshere G. (1979). Prefazione a: De Corte E. (1979). *Les fondements de l'action didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- DES (1987) [Department of Education and Science]. *Curriculum, task group on assessment and testing. A report*. London: HMSO.
- DES (1988). *National Curriculum for Ages 5 to 16*. London: HMSO.
- Dorsch F. (1985). *Diccionario de psicología*. Barcelona: Herder.
- Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*. 22, 233-261. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1996, 370-393].
- Duval R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Esiste una traduzione italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 2, 1996, 130-152; appare anche come Volume 1 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?* Bologna: Pitagora.
- Ernst P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.
- Elliot J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.
- Fandiño Pinilla M.I. (1999). Algunas consideraciones acerca del currículo y de la evaluación en Matemáticas. In: AA. W. (1999). *Memorias IV Congreso Nacional de Matemática Educativa*. Guatemala, noviembre 1999. Città di Guatemala: Ministerio de Educación de Guatemala. 209-219.
- Fandiño Pinilla M. I. (1999b). La evaluación en matemáticas: fines. Modelos y técnicas. In: AA. VV. (1999). *Matemáticas escolares asistidas por computador*. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-19, del modulo: Evaluación.
- Fandiño Pinilla M.I. (2001). La formazione degli insegnanti di matematica. Alcuni riferimenti ad un quadro teorico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 352-373.
- Fandiño Pinilla M. I. (2002a). Ipotesi alla base di un curriculum di matematica. *La Matematica e la sua didattica*. 4, 369-410.
- Fandiño Pinilla M.I. (2002b). Trasposizione didattica, sapere e sapere insegnato: il "caso" delle frazioni. *Bollettino degli insegnanti di Matematica*. (Bellinzona, Svizzera). Accettato: in corso di stampa.
- Furinghetti F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. Trento: Iprase.
- Frabboni F. (1999). *La didattica, motore della formazione*. Bologna: Pitagora.

- Goñi J. M. (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. In: Goñi J. M. et al. (2000). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó. 23-58.
- Gardner H. (2000). The testing obsession. In the quest to improve public school, wh've made test performance more important than education. *Los Angeles Times*. December 31, 2000. [Si trova nel sito: <http://www.prospectsierra.org/gardner.html>].
- Gattullo M., Giovannini M.L. (1989). *Misurare e valutare l'apprendimento nella scuola media*. Milano: Bruno Mondatori.
- Giménez Rodríguez J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Giménez Rodríguez J. et al. (1997). ¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas? In: Giménez Rodríguez J. (1997). *cit.* [Si tratta del cap. 1 di quel libro, capitolo che appare firmato da vari Autori]. 15-35.
- Giovannini M. L. (1988). Il problema della valutazione delle innovazioni: note introduttive. In: Giovannini M. L. (ed.) (1988). *La valutazione delle innovazioni nella scuola*. Bologna: Cappelli. 9-25.
- Godino J. D. (2002a). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. *Uno*. 29, 9-19. [Questo articolo è in corso di traduzione in italiano; apparirà sulla rivista *La Matematica e la sua didattica* nel corso del 2003].
- Godino J. D. (2002b). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matematica. *La Matematica e la sua didattica*. 4, in corso di stampa. [Questo testo appare anche in: D'Amore B. (ed.) (2002). *Sulla Didattica della Matematica e sulle sue applicazioni*. Atti del XVI Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica". Castel San Pietro Terme, 8-10 novembre 2002. Bologna: Pitagora. In corso di stampa].
- Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 3, 325-355.
- Godino J.D., Batanero C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta analysis of three investigations. In: Malara N. (ed.) (1998). *Proceedings of Working Group 25 – ICME 8, Sevilla July 1996. An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Modena: CNR. 13-22. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1998, 402-422].
- Grugnetti L. (1994). De la recherche à la pratique scolaire: la problématique de l'évaluation. In: AA. VV: (1994). *L'évaluation centrée sur l'élève*. Atti del 45° incontro della CIEAEM (Cagliari, 4-10 luglio 1993). Bergamo: Clas. 3-9.
- Hieber J., Carpenter T. (1992). Learning and teaching with understanding. In: AA. VV: (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.
- Hoyles C. (1997). The curricular shaping of student's approaches to proof. *For the learning of mathematics*. 17, 1, 7-15. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 1998, 3, 248-270. Appare anche come Volume 5 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
- Howson G, Mellin-Olsen S. (1986). Social norms and external evaluations. In: AA. VV. (1986). *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publ. Comp.
- Imbert F. (1985). *Pour une praxis pédagogique*. Paris: Matrice.
- IREM Bordeaux (1978). Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. Project de Recherche CNRS: Enseignement élémentaire des mathématiques. *Cahiers de l'IREM de Bodeaux*. I. 18, 170-181.
- Kilpatrick J. (1991). The chain and the arrow: from the history of mathematics assessment. In: AA. VV. (1991). *Assessment in Mathematics Education and its effects*. Calonge: ICMI Study.
- Kuhn T.S. (1957). *The Copernican Revolution*. Cambridge (Mass): Harvard Univ. Press. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1972].

- Kuhn T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: The Univ. of Chicago Press. [Trad. it.: Torino, Einaudi, I ed. 1969, II ed. (con *Poscritto 1969*) 1978].
- Kuhn T.S. (1968). Relations between the History and the Philosophy of Science. In: Kuhn T.S. (ed.) (1977), *cit.*
- Kuhn T.S. (ed.) (1977). *The essential tension. Selected Studies in scientific tradition and change*. Chicago: The Univ. of Chicago Press. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1985].
- Kitcher P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford Univ. Press.
- Kutschera F. von (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos.
- Laborde C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.
- Laborde C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La Matematica e la sua didattica*, 2, 121-135. [Si tratta della conferenza che la Laborde ha tenuto al II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona il 30 marzo 1995; quindi appare anche su quegli Atti].
- Lakatos I., Musgrave A. (eds.) (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1976].
- Langione J. (1990). Teaching students with mild and moderate learning problems. Boston: Allyn & Bacon.
- Lesh R. et al. (1992). Using learning progress maps to improve instructional decision making. In: Lesh R., Lamon S. J. (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics*. Washington: American Ass. for the Advancement of Science. 343-375.
- Llinares S. (1994). El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y el desarrollo profesional. In: Santaló L. A., Llinares S. et al. (1994). *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Madrid: Rialp. 296-340.
- Luján J. (1991). *Elaboración de instrumentos para la evaluación de aspectos básicos del rendimiento escolar*. Madrid: Ministerio dell'Educazione.
- Maier H. (1989). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*. 3, 86-118. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 3, 1995, 298-305; appare anche come vol. 2 nella Collana Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
- Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La Matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.
- Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La Matematica e la sua didattica*. 1, 43-59.
- NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) (1989). *Curriculum and evaluation standards for schools mathematics*. Reston: NCTM.
- Noss R. (1998). *Nuove culture, nuove numeracy*. Bologna: Pitagora.
- Noss R., Hoyles C. (1996). The visibility of meaning: modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 1. 3-31.
- Not L. (1984). *Une science spécifique pour l'éducation?* Toulouse: Université de Toulouse.
- Pellerey M. (1989). *Oltre gli insiemi*. Napoli: Tecnodid.
- Perrenoud P. (1991). Pour une approche pragmatique de l'évaluation formative. In: AA. VV. (1991). *Mésure et évaluation en éducation*. Vol. 13, 4, 49-81.
- Platone (1974). *Repubblica*. In: *Tutte le opere*. Firenze: Sansoni. A cura di Pugliese Caratelli G. III ed. 1988. 869-1090.
- Resnick L., Clement J. (1980). Learning without understanding: the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of mathematical behavior*. 3, 1, 3-27.
- Rico L. (1990). Diseño curricular en educación matematica: elementos y evaluación. In: Llinares C. S., Sánchez G. M. V. (eds.) (1990). *Teoría y práctica en educación matematica*. Madrid: Alfar. 117-172.

- Rico L. et al. (1993). *Bibliografía de investigación sobre Evaluación en Matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Rico L. et al. (1995a). *La evaluación en el aula de matemáticas*. Granada: Univ. de Granada y Soc. Andaluza de Educación Matemática "Thales".
- Rico L. et al. (1995b). *Conocimientos y creencias de los profesores de matemática sobre evaluación*. Granada: Univ. de Granada.
- Rico L., Sierra M. (1991). La comunidad de educadores matemáticos. In: Gutierrez A. (ed.) (1991). *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- Romberg T. (1988). Necessary Ingredients for a Theory of Mathematics Education. In: Steiner H. G., Vermandel A. (eds.) (1988). *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME Conference. Bielefeld.
- Romberg T. (1989a). Evaluation: a coat of many colours. In: *Document Series*. Paris: Unesco. Vol. 32, 3-18.
- Romberg T. (1989b). *One perspective on mathematics assessment*. Madison: Univ. del Winsconsin.
- Rosales C. (1990). *Evaluar es reflexionar sobre la enseñanza*. Madrid: Narcea.
- Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 2, 1998, 132-175].
- Schubauer-Leoni M.L. (1997). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique: quel «cognitif»? *Recherches en didactique des mathématiques*. 17, 1, 7-27.
- Schön D. A. (1991). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Jossey-Bass Publ.
- Skovmose O. (1994). *Toward a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Thompson A. (1994). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: Grouws D. (ed.) (1994). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.
- Tyler R. (1911). *Principios básicos del currículo*. Mi servo qui della edizione spagnola Buenos Aires: Troquel, 5^a ed., 1986.
- Tymoczko T. (ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser.
- Verdugo A. M. A. et al. (1994). *Evaluación curricular: una guía para la intervención psicopedagógica*. Madrid: Siglo XXI de España.
- Vergnioux A. (1991). *Pédagogie et théorie de la connaissance. Platon contre Piaget?* Berne: Peter Lang.
- Vygotskij L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press. [Ed. italiana: 1990, Bari: Laterza].
- Webb N. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: steps toward a theory. In: Grouws D. (ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.
- Wittrock M. (1990). Procesos de pensamiento en los alumnos. In: AA. VV: (1990). *La investigación en la enseñanza*. Barcelona: Paidós.
- Zan R. (1996). Difficoltà d'apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B 4, 311-350.