Università degli Studi di Pisa
Scuola di Dottorato in Matematica
XIV ciclo

Tesi di Dottorato in Matematica

Difficoltà in matematica e sistemi di convinzioni

di
Pietro Di Martino

Relatore
Prof.ssa Rosetta Zan

Direttore della Scuola di Dottorato
Prof. Fabrizio Broglia

Indice

CAPITOLO I

Introduzione

1. Premessa

Spesso nelle comunicazioni a convegni o negli articoli per riviste non c'è il tempo o lo spazio per descrivere scelte e considerazioni preliminari al lavoro di ricerca. Penso che esplicitare tali scelte e le motivazioni che hanno portato a queste scelte sia invece un punto fondamentale di una tesi di dottorato, in cui non è importante comunicare solo il risultato della ricerca ma anche la *storia* della ricerca stessa.
Innanzitutto la scelta più importante, o almeno iniziale (quasi una meta-scelta), senza la quale non sarei qui a scrivere questa tesi, è stata quella di fare ricerca in didattica della matematica. Come spesso accade, anche la mia scelta è dovuta in buona parte all'incontro con una persona carismatica di cui ho avuto modo di apprezzare inizialmente il modo di lavorare e che rappresenta un esempio. Il mio relatore poi non si è limitato ad essere un esempio ma mi ha aiutato e mi aiuta tuttora con una pazienza infinita. Inoltre ha influenzato (ovviamente, secondo me, molto positivamente) la qualità della mia ricerca in didattica, suggerendomi spunti interessanti e mai banali.
Una scelta che, voglio sottolineare, non è dovuta a paura di non essere in grado di fare ricerca in matematica pura, ma viceversa dettata dalla grande passione per la matematica e dalla voglia di trasmettere questa passione; e che non rappresenta neanche una scelta *comoda*, visto lo scetticismo che alcuni matematici hanno sulla necessità di una ricerca specifica in didattica. Una cosa è certa: nessuno scetticismo potrà incrinare la convinzione sulle cose che faccio o farmi sentire *figlio di un dio minore*; penso che questo tipo di ricerche, come anche quelle di matematica pura, possano essere buone o meno buone, ed è questo che dovrebbe essere giudicato, ma che non ci possano essere dubbi sul fatto che siano importanti per un dipartimento di matematica.
Si può infatti pensare che la matematica, anche ad un livello di base[1],

[1]Si può discutere su quale sia questo livello di base: quello dei programmi della scuola dell'obbligo, o pre-universitari, o universitari dei corsi di servizio o altro ancora. Con qualsiasi definizione il problema sussiste visto che le difficoltà in matematica di molti studenti sono riscontrabili in ogni ordine scolare.

sia accessibile solo a poche persone? Io credo di no, ma sono sicuro che chi pensa il contrario allora dovrebbe coerentemente ammettere l'inadeguatezza della presenza di corsi di matematica in tutti i livelli scolari. Ha infatti senso che una materia *intrinsecamente* accessibile a pochi sia insegnata obbligatoriamente a tutti fino all'inizio dell'Università?

La mia scelta è quindi anche culturale: dettata dalla voglia e dalla convinzione che la mia materia possa piacere (e quindi in primo luogo sia accessibile almeno a livello di base) a persone non professioniste della matematica[2]; dalla rabbia che mi prende quando nei quiz televisivi alla domanda: *quanto misura l'altezza di un rettangolo di perimetro* 16 *e base* 5*?* la premessa è sempre la stessa: *queste domande di matematica sono sempre le più difficili!*, come se, per qualche strano motivo, fosse più difficile ricordarsi una formula piuttosto che una data o un nome.

A proposito di questo aspetto culturale della ricerca in educazione mi sembrano interessanti un'intervista a Bombieri (2001) in cui si parla del disinteresse per quello che viene chiamato *analfabetismo matematico* e per le sue conseguenze culturali come il credito a maghi, cartomanti e lottologhi; e il libro di Fontana (1996) in cui si intervistano matematici e professionisti che usano la matematica tra cui lo stesso Bombieri che sostiene (p.16-17): *Ho sempre pensato che sia impossibile spiegare cosa è la matematica a chi non è matematico. [...] Per molti la matematica è solo un'arida astrazione [...] A pensarla così sono spesso le persone che leggono con entusiasmo [...] il racconto delle scoperte di fisica, biologia, astrofisica e che, affascinate dalla suggestione delle parole, riescono a sentirsi partecipi del processo di ricerca.*

Detto questo la convinzione è che si possa fare molto per intervenire sulle difficoltà degli studenti, e comunque per rendere accessibile a molte più persone la matematica, ma anche che per questo obiettivo sia necessario un campo di ricerca (la didattica della matematica) e non ci si possa affidare vagamente al buon senso delle singole persone.

[2]Tra l'altro questo desiderio è fortunatamente condiviso attivamente da molte altre persone, come dimostrano anche attività nel campo della divulgazione matematica accessibili a tutti: come le mostre itineranti (a Pisa si sono viste tra le altre quelle sugli specchi della Prof.essa Dedò e quella di grande successo del Prof. Conti), oppure i seminari accessibili anche a non matematici e che sottolineano i tanti collegamenti tra la nostra disciplina e altri interessi (a Pisa il Prof.Salvini ha tenuto un mini-corso sul rapporto matematica-musica descritto con il punto di vista di un professionista della musica e non della matematica).

Fatta la scelta di dedicarmi a questo settore di ricerca, sono arrivato, attraverso un percorso più lungo nel tempo, alla definizione dell'argomento di questa tesi. Ovviamente anche in questo caso sono stati determinanti gli studi e le ricerche del mio relatore, così come i miei interessi: in particolare quello di occuparmi di difficoltà in matematica.

Può sembrare ovvio che l'attenzione di una tesi di didattica della matematica sia rivolta alle difficoltà che gli studenti hanno in matematica[3], ma non è altrettanto ovvio (e nemmeno forse condiviso all'interno della stessa comunità di ricerca) cosa si intenda per difficoltà e quale tipo di difficoltà si studi.

Possiamo classificare varie tipologie di difficoltà (Zan, 2002) a seconda dell'oggetto su cui puntiamo l'attenzione:

- Si può parlare di allievo *in* difficoltà o *con* difficoltà in matematica, associando la parola difficoltà a tratti caratteristici dell'allievo stesso come deficit sensoriali o psichici o di origine socio-culturale.
- Si può parlare di difficoltà *della* matematica e quindi focalizzare l'attenzione su caratteristiche della disciplina.
- Si può parlare di difficoltà *di* un allievo *in* matematica, soffermandoci sulla relazione tra l'allievo e la materia. Quest'ultima caratterizzazione comprende anche difficoltà che possono derivare dal tramite tra l'allievo e la matematica: che può essere rappresentato dall'insegnante, ma a volte anche da un manuale.

Questa terza tipologia è quella su cui ho focalizzato la mia attenzione, questo perché, a mio parere, limitarsi alle difficoltà dell'allievo non mette sufficientemente in gioco la specificità della disciplina, mentre limitarsi a caratteristiche della disciplina a prescindere dall'allievo contrasta con la mia visione dell'apprendimento come processo di costruzione della conoscenza da parte del discente.

Ma quando è che si può parlare di un allievo in difficoltà? Dal mio punto di vista, condizione necessaria è la presenza di un obiettivo da raggiungere (per esempio saper risolvere un problema o riuscire a superare un esame). Possiamo definire mancato raggiungimento di tale obiettivo un *fallimento*.

Sono d'accordo con molti ricercatori (Zan, 2002; Borasi, 1996; Balacheff, 1990) e insegnanti che non identificano difficoltà con un singolo

[3] In realtá anche se molte ricerche in didattica danno informazioni indirette sulle difficoltà, sono rari gli studi che scelgono come oggetto di analisi proprio le difficoltà.

fallimento locale o con un errore, ma anzi sottolineano l'inevitabilità di qualche fallimento e la potenzialità della loro gestione per un apprendimento maggiormente consapevole. D'altra parte in matematica una delle attività più importanti è la risoluzione di problemi, ovvero parafrasando Duncker (1935) e Polya (1962), il cercare di raggiungere un obiettivo senza sapere inizialmente come fare a raggiungerlo. È evidente che si debba tenere in conto, a volte, di non riuscire a raggiungere l'obiettivo e quindi andare incontro a dei fallimenti. Distinguo quindi tra fallimento e difficoltà e parlerò di *difficoltà* in presenza di un fallimento che si ripete nel tempo.
È ovvio che la definizione data della parola difficoltà è una scelta basata sulle mie convinzioni, in particolare su uno degli obiettivi che una ricerca in didattica interessata allo studio sulle difficoltà in matematica deve avere: proporre e descrivere possibilità di interpretazione di comportamenti osservati in attività matematica, in modo da fornire spunti per interventi di recupero.
Proprio il desiderio di proporre possibili interpretazioni diverse alle difficoltà che possono incontrare gli studenti in matematica ha influenzato l'argomento della mia tesi (e la seconda parte del titolo). Ma è bene sottolineare che questo desiderio non è fine a se stesso, ma motivato da un lato dalla finalità di intervenire, cioè di modificare le cose, dall'altro dall'osservazione dei fallimenti a cui vanno incontro spesso gli interventi di recupero basati su una interpretazione puramente cognitiva delle difficoltà degli studenti. Esistono delle interpretazioni alternative che vanno al di là della semplice *mancanza di conoscenze* e che possono spiegare casi in cui tale interpretazione fallisce. I fattori cui fanno riferimento queste interpretazioni sono fattori metacognitivi, linguistici e affettivi[4]; questi ultimi, come vedremo, secondo la nota classificazione di McLeod (1992) comprendono emozioni, convinzioni e atteggiamenti[5].

Proprio allo studio delle convinzioni, delle loro origini e della loro influenza sulle difficoltà in matematica è dedicata questa tesi, finalizzata a evidenziare e superare alcuni nodi presenti in letteratura.

[4]La traduzione italiana del termine *affective* può confondere le idee, anche perché le convinzioni, che sono il focus di questa tesi, hanno ovviamente una forte componente cognitiva.

[5]Goldin (2002) in seguito sottolinea l'importanza di un altro costrutto visto all'interno della sfera affettiva: i valori.

2. L'importanza dei fattori affettivi in educazione matematica

Spesso l'approccio *tradizionale* all'osservazione e recupero delle difficoltà in matematica consiste nella valutazione attraverso prove strutturate di tali difficoltà e nella ripetizione dell'argomento in cui le difficoltà si sono manifestate. Alla base di questo intervento di recupero c'è l'interpretazione, spesso implicita, che le difficoltà provengano da mancanza di conoscenze. Un intervento di recupero basato su questa interpretazione e quindi sulla ripetizione di contenuti in alcuni casi funziona, ma l'esperienza quotidiana fornisce anche molti esempi nei quali si rivela invece totalmente improduttivo.
Quali possono essere i motivi del fallimento di un intervento di recupero basato sulla ripetizione di conoscenze? Ecco alcune ipotesi:

- L'intervento di recupero non ha funzionato perché con quello studente non c'è niente da fare. Cioè il fallimento non è dovuto alla cura ma al paziente. Come già detto nell'introduzione una tale conclusione insieme al numero elevatissimo di studenti che rientrano in questa casistica avrebbe come conseguenza coerente l'ammissione che la matematica non può essere una materia per tutti. Io non ci credo, e quindi scarto a priori questa interpretazione del fallimento dell'intervento di recupero.
- L'intervento di recupero non ha funzionato perché le difficoltà su un argomento non sono circoscritte all'argomento stesso, ma magari a concetti precedenti, quindi la ripetizione dell'argomento non è sufficiente. In pratica l'intervento di recupero è stato *locale*, centrato sull'ultimo argomento, mentre le difficoltà erano più estese. Questa interpretazione alternativa è *ragionevole*, può capitare per esempio a livello universitario che uno studio di una funzione sia errato non solo per difficoltà riguardo al concetto di funzione, ma anche per problemi con la risoluzione di particolari disequazioni reali.
- L'intervento di recupero non ha funzionato perché ispirato da processi di osservazione e interpretazione carenti. Dal punto di vista dell'osservazione, spesso si identifica l'errore con la difficoltà: ma non sempre l'errore è sintomo di difficoltà e viceversa non sempre una risposta corretta è indice di comprensione. In questo senso è molto interessante una ricerca descritta da Campione, Brown e Connel (1988), che intervistano alcuni studenti dopo una prova oggettiva standard. Ebbene da queste interviste risulta che il 41% degli studenti ha risposto sbagliato

ma dimostra di aver capito o ha risposto bene ma dimostra di non aver capito[6]. Cioè l'indicatore *errore* come unico segnale di difficoltà porta a diagnosi sbagliate in 4 casi su 10.
Anche la fase di interpretazione si limita spesso all'aspetto *locale*: mancanza di conoscenze, ignorando che l'errore può essere dovuto a molti fattori, come la gestione delle proprie risorse (fattori metacognitivi) o il fatto che in una situazione problematica si debbano prendere molte decisioni e che queste decisioni dipendano molto da fattori metacognitivi e affettivi[7]. In particolare tali fattori influiscono anche sul riconoscimento della situazione problematica da parte dello studente. Significativa mi sembra questa frase tratta dal libro di logica di Copi e Cohen (1997, *p*.97): *"le azioni hanno spesso cause molto complesse. Studiarne le motivazioni è più propriamente compito dello psicologo che del logico, ma sappiamo tutti che un'azione comporta in genere sia ciò che* vuole *sia ciò che* crede *chi la compie. Chi è affamato e desidera qualcosa da mangiare non metterà in bocca qualsiasi cosa trovi, a meno che non creda che sia cibo; chi non ha dubbi che sia cibo, può non toccarlo a meno che non abbia voglia di mangiare."*

Il mio punto di vista è che l'intervento di recupero fallisca perchè l'interpretazione che identifica difficoltà con mancanza di conoscenza è insufficiente e che spesso ci sia bisogno di andare oltre un'interpretazione puramente cognitiva delle difficoltà degli studenti. Un'interpretazione alternativa la fornisce Schoenfeld (1983) che sottolinea il ruolo delle *convinzioni* e la loro particolare importanza in matematica: attività caratterizzata dalla risoluzione di problemi e quindi dalla necessità di prendere continuamente decisioni. Schoenfeld afferma che il comportamento che un soggetto attiva nella risoluzione di un problema è influenzato dalle convinzioni:

- sulla disciplina

[6] In particolare in quest'ultima categoria un esempio interessante è quello di un allievo che svolge correttamente l'espressione $(3 + \frac{1}{3}) - (2 + \frac{5}{6}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ma quando gli viene chiesto chi è più grande tra $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ insiste sul fatto che quest'ultimo sia più grande perché *"il denominatore è più piccolo, così le parti sono più grandi e uno dei due pezzi grandi è più dei tre pezzi piccoli"*. Dopo questa confusione non è più in grado di svolgere correttamente l'esercizio.

[7] La tesi si interessa prevalentemente di convinzioni, uno dei tre costrutti in cui McLeod suddivide la sfera affettiva, che, come sostengono Törner e Pehkonen (1996) nel lavoro introduttivo del gruppo europeo MAVI (MAthematical VIews) che studia il ruolo delle convinzioni in matematica, sta nella *zona di confine* tra il dominio affettivo e quello cognitivo.

- sull'ambiente
- sul compito
- su di sé

In realtà come vedremo i confini tra queste convinzioni sono difficili da tracciare anche perché spesso più convinzioni influiscono su una singola decisione. Certo è che l'analisi di alcuni episodi (che riporterò in seguito) proposte da Schoenfeld, ma anche da Cobb, Silver e altri, in cui, per superare le carenze di un'interpretazione puramente cognitiva, viene introdotto il costrutto *convinzioni*, appaiono convincenti.
Alcuni potrebbero contestare che in matematica non c'è spazio per l'ambiguità, che il messaggio matematico non lascia spazio all'interpretazione soggettiva e quindi alla nascita di convinzioni sulla disciplina[8]. Questa *convinzione*, piuttosto diffusa soprattutto negli esperti, può essere dovuta, a mio modo di vedere, a due fattori:

(1) La fiducia estrema nella non ambiguità del formalismo matematico. Lasciando da parte le riserve sul fatto che il formalismo estremo non possa essere fonte di ambiguità soprattutto tra gli studenti, la critica prima a questa fiducia è l'impossibilità di comunicare esclusivamente in maniera formale. Impossibilità dichiarata nell'introduzione agli *Elementi* del Bourbaki: *Se la matematica formalizzata fosse semplice come il gioco degli scacchi, una volta descritti il suo linguaggio e le sue regole, non resterebbe che da redigere le dimostrazioni in questo linguaggio, esattamente come l'autore di un trattato di scacchi descrive, con le sue notazioni, le partite che si propone di insegnare, accompagnandole, se necessario con qualche commento.*
Ma le cose son lungi dall'essere così semplici, e non occorre affatto una lunga pratica per accorgersi che un tale progetto è assolutamente irrealizzabile; la più piccola dimostrazione dell'inizio della Teoria degli Insiemi esigerebbe già, per essere completamente formalizzata, diverse centinaia di segni.
Sin dall'inizio s'impone dunque la necessità imperiosa di abbreviare un testo formalizzato (...) con ciò si abbandona ben presto la matematica formalizzata (...) questo fatto ci permetterà di scrivere il presente trattato come lo sono, in pratica, tutti i testi matematici, cioè in parte in linguaggio ordinario e

[8] D'altra parte una tale presa di posizione contesterebbe solo il ruolo delle convinzioni sulla disciplina, ma non gli altri tipi di convinzioni elencati da Schoenfeld.

in parte per mezzo di formule che costituiscono delle formalizzazioni parziali (...)
Spesso ci si servirà addirittura del linguaggio ordinario in una maniera ancor più libera, cioè per mezzo di deliberati abusi di linguaggio, *di omissione pura e semplice di passaggi che un lettore con un minimo di esperienza si presume sia capace di ricostruire da sé, di indicazioni intraducibili in linguaggio formalizzato e destinate a facilitare una tale ricostruzione.*
Altri passaggi, egualmente intraducibili, conterranno commenti destinati a rendere più chiaro il cammino delle idee, con un appello, se necessario, all'intuizione del lettore.
È interessante notare come nella stessa introduzione del Bourbaki si sottolinei spesso la necessità di una partecipazione attiva del lettore che deve ricostruire da solo alcuni concetti o passaggi. È un *avvallo* all'ipotesi della costruzione del sapere, fatta da un gruppo di *insospettabili.*

(2) La non consapevolezza di alcuni passaggi *critici* della comunicazione matematica dovuta al fatto di saper gestire da esperto, forse addirittura in modo automatico e quindi inconsapevole, tali passaggi. Il problema è che noi siamo interessati alla comunicazione con non esperti, e non possiamo *presumere* questa capacità di gestione[9]. Inoltre non è possibile pensare che la ricostruzione personale di concetti, passaggi, significati sia univoca.
Un'ambiguità intrinseca alla necessità di comunicare, e ben presente nella pratica matematica, è quella descritta da Ferrari (2001) riguardo alla distinzione tra proposizioni e atti linguistici: *Si definisce proposizione quell'aspetto del significato di una frase che consente di identificare i referenti e stabilire se la frase è vera o falsa. Un atto linguistico, che riguarda anche le frasi non dichiarative (interiezioni, ordini, domande,...) include anche il fatto di produrre quella frase in quelle circostanze; oltre a una proposizione può quindi esprimere atteggiamenti, convinzioni, impegni, azioni del parlante (illocuzione) o modificare atteggiamenti, convinzioni, comportamenti del ricevente (perlocuzione). Esempi:*
  - Quel quadro non è bello, è un obbrobrio. *Si nega la proposizione associata a* Quel quadro non è bello.

[9]Che non è una dote innata, ma va *coltivata* come una competenza necessaria per far bene in matematica.

- Quel quadro non è bello, è un capolavoro. *Si nega l'adeguatezza dell'atto linguistico associato a* Quel quadro è bello *non la proposizione.*

Nella pratica matematica c'è spesso ambiguità tra proposizioni e atti linguistici.

D'altra parte l'esistenza e l'influenza di convinzioni sulle decisioni in ambito di problem solving matematico dovrebbe essere evidente anche agli esperti: quante volte capita di dover fare una scelta in ricerca o comunque nella risoluzione dei problemi? E tale scelta (o risoluzione) da cosa è guidata? Tra i tanti fattori che giocano un ruolo in processi decisionali complessi (qualcuno cita l'esperienza, qualcun altro l'intuito[10]) sicuramente hanno un ruolo anche le convinzioni (per esempio considerazioni sulla simmetria di un risultato). Questa osservazione vuole sottolineare come, nonostante la tesi si soffermi sulle influenze negative di alcuni sistemi di convinzioni (essendo l'interpretazione di difficoltà il *motore* della tesi), l'influenza delle convinzioni (ma in generale dei fattori affettivi, metacognitivi e linguistici) sull'attività matematica non sia necessariamente negativa.
Il ruolo delle convinzioni e dei fattori affettivi in attività di problem solving è sottolineato nel libro curato da Adams e McLeod (1989) *'Affect and mathematical problem solving'*, libro che rappresenta un punto di riferimento per tutti i ricercatori nel campo. Ma già Schoenfeld (1983, 1985*a*), in un volume dedicato al problem-solving matematico, aveva introdotto il costrutto *convinzioni*. Queste ricerche, come quelle di Silver (1982, 1985), Cobb (1985), Shaughnessy (1985), Lester (1987), sono particolarmente significative perché focalizzate sul problem solving e non su quei fattori che in seguito (1992) McLeod riunirà sotto il termine *affect*. Convinzioni, atteggiamenti ed emozioni vengono appositamente introdotti da questi autori (a volte con definizioni anche molto vaghe) per fornire un'interpretazione alternativa a quella puramente cognitiva che notano essere in alcuni casi insufficiente.
Il ruolo dei fattori affettivi nel problem-solving è di nuovo protagonista in due sezioni speciali dello ZDM (1991, 1995) curate da Pehkonen. Queste sezioni sono interessanti in quanto portano il loro contributo

[10]In educazione matematica alcuni costrutti studiati hanno caratteristiche in comune con le convinzioni: nella trattazione dei *modelli mentali impliciti* e dell'*intuizione* di Fischbein (1989) ci sono alcune analogie con la struttura dei sistemi di convinzioni di Green che descriverò in seguito. Ma anche l'idea di *concept image* di Tall e Vinner (1981) ha analogie con le convinzioni. Concept image appartiene interamente al dominio cognitivo ed è la struttura cognitiva che una persona associa ad un oggetto e che si forma attraverso l'esperienza e attraverso quest'ultima si modifica.

ricercatori con tradizioni di ricerca diverse tra loro, ma, come per il libro curato da Adams e McLeod, il focus è già sui fattori affettivi. Quale è la differenza tra questi studi e quelli di Schoenfeld e degli altri che hanno introdotto il costrutto? Il fatto che questi ultimi, non nati con un'*ottica affettiva*, e che hanno introdotto le convinzioni[11] per l'insufficienza delle interpretazioni esistenti, sono un punto di partenza per gli altri che possono assumere l'influenza e la significatività delle convinzioni sul comportamento matematico.

L'attività di problem solving è caratterizzata non solo dalla necessità di prendere decisioni, ma anche dalle forti reazioni emozionali che può provocare in chi vi è coinvolto. Sia la nascita che la gestione di queste reazioni emozionali è fortemente influenzata dalle convinzioni dell'individuo. In questo caso la teoria a cui faccio riferimento è quella di Mandler (1984, 1989), secondo cui uno *stimolo*[12] è conseguenza di una discrepanza cognitiva o dell'interruzione, del blocco di una azione che stiamo compiendo. Questa discrepanza avviene quando le aspettative di un certo schema mentale sono violate. L'emozione è la combinazione di questo stimolo con la valutazione cognitiva dell'interruzione, ed è evidente che la valutazione cognitiva è influenzata dalle convinzioni che abbiamo. L'influenza delle convinzioni nella nascita delle emozioni è ben descritta da Varani (2000, p.4): *Perché di fronte alla medesima situazione, per esempio un'immagine violenta, qualcuno può provare un'emozione di orrore e qualcun altro curiosità o interesse? Perché entra in gioco la componente cognitiva (...) e i processi euristici innescati dalle esperienze passate che ciascuno di noi porta con sé nel proprio bagaglio personale. La stessa situazione produce quindi emozioni diverse a seconda delle interpretazioni cognitive che ognuno di noi ne dá.*[13]

Se risolvere un problema, come sostiene anche Polya (1962), significa trovare una via di uscita ad una o più difficoltà, il modo di aggirare un ostacolo, di ottenere un obiettivo non immediatamente raggiungibile, allora è evidente che bisogna spesso mettere in conto la violazione di qualche aspettativa e quindi la presenza di reazioni emozionali forti[14].

[11]E gli altri fattori che in seguito verranno chiamati *fattori affettivi*.

[12]L'espressione originale usata è *visceral arousal*.

[13]Questa citazione è attualissima, basti pensare alle immagini di guerra che nei mesi scorsi sono state mandate in onda nei telegiornali: sicuramente esiste un pubblico interessato e incuriosito da tali immagini, ma altrettanto sicuramente ne esiste un altro che le vede malvolentieri e con orrore.

[14]Questo è dimostrato anche dalle biografie di molti matematici famosi: un esempio abbastanza recente è *L'enigma di Fermat* di Aczel (1996) dove sono riportate le forti reazioni emozionali di Wiles nel periodo che va dal primo annuncio della

Ci possiamo comunque chiedere: accettato che le convinzioni sono un fattore importante nella nascita di emozioni e che l'attività di problem solving è fortemente caratterizzata da reazioni emozionali, che incidenza possono avere queste reazioni emozionali sulla risoluzione del problema? Cioè accettato che le reazioni emozionali siano un fenomeno presente nell'attività di problem solving, quale è il loro ruolo, positivo o negativo, che sia? Mandler (1989) descrive due tipologie distinte di discrepanza tipiche dell'attività matematica:

(1) L'insuccesso, che occorre quando il soggetto fa o pensa qualche cosa che è diverso dalle sue intenzioni originali o da quello che doveva accadere. L'insuccesso può avere come risultato emozioni negative di varia intensità. L'osservazione importante è che comunque il risultato è un'interferenza con i processi cognitivi a causa dell'utilizzazione di capacità consce e della ricerca della correzione.
(2) Il successo, che è una discrepanza quando per esempio il soggetto arriva ad una soluzione nonostante egli sia insicuro della propria abilità. Da questa discrepanza risulteranno gioia e soddisfazione.

Quindi la reazione emozionale, nel caso dell'insuccesso, interferisce con le capacità cognitive e questa è la risposta alla precedente questione. Ma un'altra osservazione interessante è che anche la gestione di queste reazioni emozionali è fortemente influenzata dal controllo cognitivo (e in particolare anche dalle convinzioni che stanno nella linea di confine tra dominio affettivo e cognitivo)[15].
Uno studio di McLeod, Metzger e Craviotto (1989) dimostra come le reazioni emozionali di ricercatori in matematica e di semplici studenti delle superiori originatesi durante la risoluzione di problemi siano praticamente le stesse. Quello che distingue le due categorie è la capacità di controllare le proprie emozioni da parte degli esperti, il loro controllo cognitivo su esse e il saper anche in situazioni difficili *aggrapparsi* alle proprie conoscenze e convinzioni.

---

dimostrazione alla copertura del *buco* della prima dimostrazione presentata.

[15]Mi sembrano significative anche le parole di Schreiber (1998, citato in Varani 2000): *Ciò che sembra determinare la riuscita sociale di una persona non è tanto la potenza del suo intelletto, quanto la sua capacità di comunicare con gli altri, di valutare le situazioni sociali ed emozionali, di controllare le proprie emozioni (...) l'insieme di queste capacità è chiamato* quoziente emozionale *(...) è emerso che il QE determina il successo sociale di una persona molto più del QI.*

Dopo queste considerazioni introduttive, vediamo alcuni esempi di convinzioni piuttosto diffuse, riscontrabili anche tra i nostri studenti, riportate da Schoenfeld (1992) e significative[16] per le loro possibili conseguenze a livello di comportamento:

(1) *Cè un solo modo di risolvere un problema, di solito usando le cose più recentemente spiegate dall'insegnante.*
Molto spesso in effetti gli studenti chiedono *ma si fa così?* piuttosto che *è corretto questo procedimento?*, sottintendendo che ci sia un unico modo di procedere, e spesso possiamo notare come siano in difficoltà su problemi che *a tradimento*, cioè senza parole chiave, rimandino ad argomenti non particolarmente recenti[17].

(2) *A parte chi è predisposto, gli altri studenti, quelli* normali*, non possono pensare di capire la matematica; devono semplicemente memorizzare e applicare meccanicamente le regole che vengono loro insegnate.*
Questa convinzione, molto diffusa, ha due risvolti: uno culturale, ovvero che la matematica la possa capire solo chi è predisposto; l'altra sui comportamenti, spesso fallimentari, di molti studenti. Infatti una convinzione del genere porta ad una memorizzazione *a-critica*, che in particolare non permette di ricostruire concetti, procedure, regole dimenticate.

(3) *La matematica insegnata a scuola non ha niente a che fare con la vita di tutti i giorni.*
La condivisione di questa convinzione è testimoniata, per esempio, da queste parole di Sandro[18], un bambino di quinta

[16]È importante sottolineare ancora una volta che l'origine dell'interesse di Schoenfeld per le convinzioni è dovuto alle sue ricerche nel campo del problem solving, e quindi le sue conclusioni, come quella di dover andare oltre il puramente cognitivo, sono frutto dell'esperienza e dei comportamenti da lui osservati e non da posizioni pregresse.

[17]D'altra parte quasi tutti i libri di esercitazione propongono esercizi *a tema*, divisi per capitoli, come il testo teorico, con l'accortezza di mettere nell'ultimo capitolo esercizi di ricapitolazione. In questo modo è automatico ricondursi ad una parte ridotta della teoria per risolvere il problema ed è anche evitata la difficoltà di dover riconoscere quale è la parte in questione. Un testo matematico interessante, ma di livello molto alto, che ha fatto la scelta di *mischiare* gli esercizi è *Esercizi di Algebra Lineare* di Broglia, Fortuna, Luminati. Sarebbe interessante verificare quanto un esperimento del genere sia proponibile a livelli più elementari.

[18]Uso per la prima volta brani di alcuni temi che rappresentano una parte importante della mia ricerca e che introdurrò in maniera dettagliata nel seguito della tesi.

elementare: *C'è un problema addosso alla gente e c'è un problema che si fa sul quaderno*, e anche in quelle di Alice (quarta elementare): *Ma non è vero!!! È un problema.*

(4) *La dimostrazione formale è irrilevante per i processi di scoperta e invenzione e spesso è superflua anche per discutere la validità della proposizione che intende dimostrare.*
Sul ruolo delle dimostrazioni ci sono molte ricerche in didattica della matematica, è certo che una tale convinzione incida negativamente sulla significatività dell'attività matematica e di alcune richieste fatte agli studenti in classe. D'altra parte è significativa questa affermazione di Pascal (citato in Wells, 1997): *Regole di dimostrazione: I- non tentare di dimostrare nessuna di quelle cose tanto evidenti per le quali non si abbia nulla di più chiaro attraverso cui arrivare alla dimostrazione.*

3. Una prima *esplorazione*

Una prima esperienza significativa per la mia ricerca è stata la costruzione e l'utilizzo di un questionario matematico proposto nell'anno accademico $1999 - 2000$ alle matricole di Geologia con lo scopo di avere un'idea sulla loro dimestichezza con argomenti di base per l'eventuale organizzazione di un tutorato. Mossi[19] dall'ipotesi che molte difficoltà non siano interpretabili in termini puramente cognitivi, abbiamo cercato di inserire items nel tentativo di andare oltre il test classico di verifica di conoscenze[20].
Come in tutte le ricerche i primi passi sono ovviamente un po' confusi: per esempio in questo strumento abbiamo alternato domande che potremmo classificare come tipici esercizi matematici con domande sul significato di termini matematici, probabilmente non avendo un'idea precisa su quale tipologia di domande avrebbe fornito gli spunti più interessanti. D'altra parte inizialmente si cercano riscontri empirici di ipotesi di ricerca solo abbozzate.
Le analisi alle risposte di questo questionario hanno comunque dato spunti interessanti seppur molto diversi tra loro; in questa discussione riporto solo quelli che mi sembrano più attinenti allo sviluppo che ha avuto in seguito la mia ricerca.
Prima di presentare il questionario e le indicazioni che l'analisi delle risposte ha dato, voglio sottolineare come questo studio e il fatto di essersi preoccupati comunque del tentativo di monitorare il campione

[19] Quando parlo al plurale mi riferisco a me e al mio relatore.

[20] Alcune delle domande proposte sono idee originali, altre sono tratte da lavori del prof. P. Ferrari e dalla tesi di laurea della dott.ssa M. Marzario.

anche su alcune conoscenze di base, confermi il nostro punto di vista: lo studio dei fattori affettivi e nello specifico delle convinzioni, il sottolineare che si debba andare oltre il puramente cognitivo, non vuol dire sostenere una posizione integralista in cui tutte le difficoltà sono spiegabili dal punto di vista affettivo, non vuol dire non considerare le difficoltà dovute a mancanza di conoscenza. Si tratta di sottolineare che non c'è una spiegazione buona per tutte le difficoltà e che a nostro modo di vedere spesso alla formazione di difficoltà in matematica concorrono più fattori: cognitivi, metacognitivi, affettivi e linguistici. D'altra parte questa posizione nasce dalla constatazione che interventi di recupero basati sull'interpretazione puramente cognitiva sono molto spesso inefficaci.
Detto questo il questionario è stato sottoposto alle matricole del Corso di Laurea in Geologia all'inizio dell'anno accademico $1999-2000$. Se la scelta di somministrare il questionario ad inizio anno è conseguenza di necessità contingenti come quella di approntare un eventuale tutorato in tempi brevi, quella del Corso di Laurea non è stata casuale ma dettata dalla consapevolezza che l'esame di Matematica avesse, a Geologia, una certa consistenza: forse anche per questo solitamente il Corso di Laurea è frequentato in maggioranza da studenti provenienti da licei scientifici.
Il campione che ha risposto al nostro questionario ha confermato questo dato: su 51 studenti che hanno risposto: 24 provengono dal liceo scientifico, 1 dal classico e gli altri 26 da ragioneria, geometri, istituti professionali e tecnici.
Gli studenti hanno avuto a disposizione 2 ore per rispondere al questionario che alterna domande a risposta chiusa (quasi sempre seguite dalla richiesta di specificare il *perché* della risposta) a domande a risposta aperta. Dal punto di vista dei contenuti ci interessavano solo gli argomenti che vengono quasi sempre dati per scontato in un corso universitario, ovvero le proprietà dei numeri, in particolare l'ordinamento e la risoluzione di equazioni e disequazioni. Inoltre ci interessava conoscere cosa pensano gli studenti di una definizione e di un teorema in matematica. Il questionario proposto è il seguente:

(1) Siano m e n interi positivi tali che $m \cdot n = 4 \cdot 6$.
Puoi concludere che $m = 4$ e $n = 6$, o viceversa?
☐ Sì
☐ No
☐ Non so rispondere
Perché?

(2) Siano x e y divisori di 7.
Puoi concludere che $x \cdot y$ divide 7?
☐ Sì
☐ No
☐ Non so rispondere
Perché?

(3) Leggi con attenzione il seguente teorema (Non ti preoccupare dei termini usati, nessuno ha fatto questi argomenti alle superiori, ma cerca di comprendere la logica di quello che leggi).
Teorema: Se un grafo è euleriano, allora è vera una delle due seguenti alternative:
(a) Tutti i vertici sono di grado pari.
(b) Due vertici sono di grado dispari e tutti i rimanenti sono di grado pari.

Dal teorema segue che se un grafo ha tutti i vertici di grado pari, allora esso è euleriano?
☐ Sì
☐ No
☐ Non è possibile stabilirlo se non si sa che cosa è un *grafo euleriano*
☐ Dipende
☐ Non so rispondere

(4) Cosa è per te un teorema?
(5) Cosa è per te un'ipotesi in matematica?
(6) Nel teorema del punto 3 quale è l'ipotesi?
(7) Dati tre numeri interi a, b, c con $a > b$ e $c \neq 0$, la disuguaglianza:
$$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$
è vera:
☐ Per qualunque valore di c
☐ Solo per $c > 0$
☐ Solo per $c = 1$
☐ Solo per $c < 0$
☐ Nessuna delle risposte precedenti è esatta
☐ Non so rispondere

(8) Scrivi un numero maggiore di $\frac{1}{8}$ e minore di $\frac{1}{7}$.
(9) Scrivi il risultato di $\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8}$.
(10) Le soluzioni reali della disequazione $x^2 + 1 < 0$ sono:
☐ Nessun valor di x
☐ $-1 < x < 1$
☐ Ogni valore di x

☐ $x < -1$ e $x > 1$
☐ Nessuna delle precedenti
☐ Non so rispondere

(11) Il numero $x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$, con x intero, è sempre divisibile per 6?
☐ Sì
☐ No
☐ Non so rispondere
Perché?

(12) Come per il punto 3, leggi con attenzione la seguente definizione, senza preoccuparti del fatto che tu non abbia mai sentito parlare di queste cose (sono tutti nella tua condizione, visto che è un argomento non trattato in nessun superiore) ma cercando di comprendere quello che leggi.
Definizione: Il semifattoriale di un numero naturale n diverso da zero è il prodotto di tutti i numeri naturali non nulli minori o uguali di n che hanno la stessa parità di n, cioè è il prodotto dei numeri pari minori o uguali a n se n è pari, ed è il prodotto dei numeri dispari minori o uguali a n se n è dispari. Il semifattoriale di n si indica con il simbolo $n!!$
Dopo aver letto questa definizione cerca di calcolare:
$6!! =$
$7!! =$

(13) Cosa è per te una definizione?

(14) Fai un esempio di definizione matematica tra quelle che hai incontrato alla scuola superiore.

(15) Scrivi le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

(16) Dal teorema *Se* $A \neq B$ *allora* $C = D$ segue che:
☐ Se $C = D$ allora $A \neq B$
☐ Se $A = B$ allora $C \neq D$
☐ Se $C \neq D$ allora $A = B$
☐ Se $C \neq D$ allora $A \neq B$
☐ Nessuna delle precedenti

Già le risposte alle prime due domande hanno evidenziato la carenza di un'interpretazione puramente cognitiva: infatti ben 14 persone rispondono in maniera errata alla prima domanda ma le loro giustificazioni fanno pensare più ad una difficoltà nel cogliere il quantificatore universale sottointeso dalla domanda piuttosto che una mancanza di conoscenze. La loro attenzione si fissa sul *viceversa* che giustificano enunciando la proprietà commutativa del prodotto. Ovviamente questa è solo un'interpretazione possibile e non l'unica. Detto questo le risposte alla seconda domanda in qualche modo mostrano ancora di più i limiti di una interpretazione puramente cognitiva. Solo 3 persone rispondono correttamente ma le giustificazioni alla risposta sembrano *stranamente* più ingenue e comunque meno articolate, di quelle date da alcuni che sbagliano la risposta[21]:

(1) No, perché 7 è un numero primo. (2 studenti danno questa stessa risposta)
(2) No, perché non si specifica se x e y sono numeri interi.
(3) Sì, perché un numero primo è divisibile per se stesso e per l'unità, e $7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7$ che divide se stesso.

Una risposta interessante è anche quella al quesito 8, infatti tutti quelli che rispondono lo fanno correttamente, ma 12 studenti scrivendo il procedimento di calcolo semplificano l'espressione per poi riportarla in ottavi:

$$\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{5}{4} = \frac{1 + 2 \cdot 5}{8} = \frac{11}{8}$$

In questo caso non si può parlare di errore e tantomeno di mancanza di conoscenze, ma esistono due interpretazioni possibili che appaiono convincenti per questo comportamento: una è quella di un approccio *instrumental* alla matematica (Skemp, 1976), l'altra (che può anche non essere alternativa alla precedente, ma anche una sua spiegazione) è quella che fa riferimento alle *sociomathematical norms* (Yackel e Wood, 1996)[22], in particolare alla necessità di arrivare al risultato giusto e mostrare tutto quello che si sa fare. In questo caso poi anche la terminologia usata in questi casi può indirizzare il comportamento: sembra abbastanza naturale *semplificare* quando è possibile.

Continuo l'analisi delle risposte al questionario discutendo le risposte alle domande 13 e 14 sull'idea di definizione in matematica e alla domanda 11 sulla necessità di dimostrare in matematica. Ovviamente sono discorsi molto ampi, che tra l'altro hanno spazi autonomi molto

[21]Questo non solo evidenzia le lacune di questionari a risposta chiusa per la verifica di conoscenze ma mostra l'importanza di chiedere una giustificazione alla risposta.

[22]Di questi due termini tecnici (*instrumental* e *sociomathematical norms*) parlerò più approfonditamente in seguito. Brevemente: Skemp distingue tra un approccio alla matematica basato sull'applicazione di regole detto instrumental ed uno mirato alla comprensione delle relazioni detto relational, mentre Yackel e Wood parlano di sociomathematical norms come le regole implicite ed esplicite riguardanti la matematica che si stabiliscono solitamente nel contesto classe.

rilevanti nella ricerca in educazione matematica, che sfioro solamente perché sono, a mio modo di vedere, indicativi di convinzioni su oggetti matematici e sul senso dell'attività matematica in genere, raccolti o inferiti da risposte ad un test come questo: ovvero un test di matematica in cui, a chi risponde, non vengono chieste direttamente le proprie convinzioni.
Le risposte alle domande sulle definizioni si sono rivelate molto interessanti. Si nota una grossa difficoltà nel descrivere la propria idea su concetti che dovrebbero essere familiari: questo è accaduto anche nella risposta alla domanda sui teoremi e può essere interpretato come mancanza di conoscenze ma anche, se non pensiamo che la quasi totalità degli studenti coinvolti non sapesse cosa è un teorema o una definizione, a difficoltà linguistiche.
Suddividerei in tre tipologie le risposte date:

- Una sola persona risponde con un esempio di definizione, in particolare il semifattoriale dell'esercizio precedente.
- Sette persone non rispondono, o lasciando lo spazio vuoto, o scrivendo *non so*, o rendendosi conto che *non riesco a spiegarlo*: ovvero in questo caso suggerendo che la propria difficoltà sta nel comunicare agli altri concetti che lui ha in mente e pensa forse di saper gestire.
- Gli altri cercano di scrivere la loro idea e ne viene fuori un quadro molto interessante. C'è chi ha idee anche piuttosto raffinate sull'utilizzo delle definizioni in matematica: *È una proposizione che definisce un termine matematico scomponendolo in termini più elementari*, *Indica i requisiti che una qualsiasi cosa deve avere per essere detta con quel nome*, *È il modo in cui si esprime un concetto o si descrive una cosa generalizzandola* e chi risponde con una tautologia: *Una definizione è ciò che definisce un termine.*
  La maggioranza degli studenti associa al concetto di definizione un valore di verità estraneo alla concezione di definizione che può avere un matematico, ma forse dovuto alla pratica didattica: *Una definizione è quando il testo ci da delle informazioni che noi giudichiamo vere e non ne mettiamo in discussione il proprio contenuto.* Questa frase è curiosa, perché presenta convinzioni contraddittorie al suo interno: da una parte bisogna *giudicare la veridicità*, dall'altra *non metterne in discussione il contenuto.* È probabile che ci sia uno *slittamento* del soggetto dalla comunità dei matematici (impersonata dall'insegnante) che giudica vero, agli studenti che non hanno la possibilità (e

non conviene nemmeno loro) di mettere in discussione.
La fissità delle definizioni ricorre spesso:

– *Una definizione è un dato unico e immutabile.*
– *Una definizione è un enunciato ormai stabile, che non viene messo in discussione.*

Proprio l'imposizione dall'alto delle definizioni, senza probabilmente condividere con gli studenti la necessità strategica della loro introduzione, può essere causa di perdita di senso e anche originare la convinzione che non si possano mettere in discussione le scelte proposte. Questo ha un'influenza anche sul senso delle dimostrazioni e sui criteri di validità di un risultato; infatti molti studenti, come detto, ritengono le definizioni come qualcosa di assoluto, dimostrato. Ora evidentemente queste dimostrazioni non esistono e quindi tale convinzione è di origine autoritaria. Il fatto che per nessuno sia un problema conoscere o aver visto la dimostrazione di queste che considerano verità assolute, sottolinea come queste convinzioni *epistemologiche* abbiano un'influenza profonda sul comportamento, perché certamente abbassano o annullano il pensiero critico. Per far capire la portata di questo fenomeno riporto altre risposte degli studenti di questo tipo:

– *Una definizione è qualcosa di dimostrato.*
– *È un enunciato sempre vero.*
– *Un ragionamento corretto e universalmente accettato.*
– *Secondo me, una definizione è la spiegazione di un concetto matematico certo, che si verifica sempre.*
– *È un qualcosa di affermativo, di certo.*

Una buona quantità di risposte (11 per l'esattezza), *abbracciano* l'opzione definizione-spiegazione. In realtà (Bernardi, 1987) in matematica, questa non è la funzione primaria delle definizioni. Non si spiega niente di nuovo (Bernardi dice che da questo punto di vista potremmo considerarle inutili, perché non aggiungono niente a quello che si sa già), ma si cerca di sintetizzare tante proprietà con un nome, anche per aiutare una delle attività più diffuse in matematica: la classificazione.
In queste risposte non si riconosce la differenza tra una definizione, come si può trovare nel vocabolario, e una definizione in matematica: *È una descrizione accurata della cosa che si vuole definire* oppure la differenza sta non nel ruolo della definizione ma nel linguaggio usato: *è una frase molto tecnica in cui viene spiegata una determinata cosa.*

È infine interessante notare che c'è chi vede la definizione come un elenco di proprietà di un oggetto (4 persone). La difficoltà *epistemologica*, in questo caso, sta nel fatto che non tutte le proprietà di un oggetto entrano nella definizione, e che non è semplice stabilire quali siano le proprietà essenziali che entrano nella definizione di un oggetto (può dipendere da scelte didattiche differenti per esempio). Allora molti identificano come definizione di un oggetto noto l'elenco di qualche proprietà di questo, non preoccupandosi del fatto che queste proprietà possano essere comuni anche ad oggetti diversi: *Definire un qualcosa è uguale ad elencarne delle caratteristiche.* Il problema è che questo è vero in fase di definizione di un oggetto (ma sembra che raramente gli studenti vengano coinvolti in questo processo), ma una volta che l'oggetto è stato definito, conoscere la definizione significa sapere tutte quelle caratteristiche o altre ad esse equivalenti. Questa difficoltà, ma non solo, risaltano in alcuni esempi fatti dagli studenti alla domanda successiva:

- Il problema sottolineato precedentemente si ritrova in 4 persone che definiscono la retta come *un insieme infinito di punti*, mentre una quinta aggiunge *allineati.* Infine un altro studente definisce il segmento come *una parte di retta delimitata da due punti.* Forse di questo tipo è anche il seguente esempio *monomio è l'insieme di una parte numerica e di una letterale.*
- Ben 12 persone non ricordano nessuna definizione dalle superiori.
- Uno studente sovrappone teorema e definizione e come esempio di definizione scrive *La somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è* 180 *gradi.* Come si può notare questa risposta non è significativa solo per la confusione tra teorema e definizione, ma anche per le informazioni che fornisce sull'idea che della matematica che può avere questo studente.
- Infine i seguenti esempi, secondo me, sottolineano da un lato la poca attenzione degli studenti data alla comunicazione matematica e da un altro la poca significatività di certe definizioni che invece di servire per categorizzare, tendono a distinguere il più possibile gli oggetti matematici, con il risultato che una definizione che abbraccia molti casi viene riconosciuta solo in casi molto particolari:

* *Definizione di integrale: è l'area del trapezoide sottointesa dalla parabola.*
* *La derivata parziale prima rispetto a x è il limite, per h che tende a zero, del rapporto incrementale considerando y costante.*
* *Una funzione è logaritmica se compare l'incognita nell'argomento del logaritmo stesso.*
* *Un numero si dice primo se è divisibile per* 1 *e per se stesso.*
* *Una funzione razionale fratta è quando compare un'incognita al denominatore.*

Anche il problema 11 è indicativo del senso che ha la dimostrazione matematica per molti studenti. Distinguiamo tre tipi di risposta:

(1) 6 persone sbagliano risposta affermando che non è vero che $x(x+1)(x+2)$ è sempre divisibile per 6, giustificando questa affermazione con il fatto che per $x = 0$ o $x = -1$ o $x = -2$ si ottiene 0 che non è, a loro modo di vedere, divisibile per 6. Possiamo interpretare questa risposta errata come una mancanza di conoscenza specifica: in particolare un non completo controllo della definizione *rigorosa* di divisibilità. La cosa più interessante è però osservare che 2 tra quelli che rispondono in questa maniera lasciano sul foglio consegnato i tentativi di dimostrare la divisibilità. Può darsi che accorgendosi di non riuscire a dare una dimostrazione siano stati *convinti* a rispondere in questa materia *appoggiandosi* alla *specificità* dello 0 che discuteremo in seguito.
Come detto più volte questa è solo una interpretazione possibile, in questo caso mi sembra interessante per far vedere che anche in casi come questi non è detto che ci sia un'unica interpretazione possibile.

(2) Una sola persona risponde correttamente dando una risposta matematicamente soddisfacente notando che il prodotto di tre numeri consecutivi deve contenere un multiplo di due e un multiplo di tre.

(3) Ben 44 persone danno la risposta giusta senza riuscire a dimostrarla. Bisogna osservare che l'esercizio non chiedeva in realtà esplicitamente una dimostrazione nel senso matematico del termine, ma alla fine dell'item era chiesto *Perché?* Questo è importante perché alcuni (non tutti) interpretano questo perché come necessità di fornire una dimostrazione matematica: in questo caso sembra *calzante* l'interpretazione che

vede le sociomathematical norms giocare un ruolo fondamentale. Le stesse, insieme alle convinzioni sulla matematica, sembrano guidare i tentativi degli studenti di presentare una dimostrazione che possa essere *accettata*. Infine è interessante notare come anche chi interpreta il *Perché?* come necessità di fornire una dimostrazione matematica ed è convinto di non essere riuscito a fornire una dimostrazione non perde la sua fiducia nella risposta: nessuno ha infatti usufruito della opzione *Non so*. Questo oltre che a far riflettere sui comportamenti attivati in quiz a risposta multipla (sembra che ci sia la convinzione che la risposta *Non so* sia comunque da evitare, meglio sbagliare che dichiarare di non sapere), è un segnale delle convinzioni sul senso della dimostrazione, vista come una richiesta dell'insegnante piuttosto che uno strumento che dá la sicurezza al soggetto stesso della universalità della sua conclusione.

Riporto alcune delle risposte alla domanda *Perché?* di chi ha risposto *Sì* che danno l'idea di dimostrazione che molti studenti hanno. Quasi tutti sono andati per tentativi e poi hanno generalizzato (con un ragionamento induttivo), ma alcune generalizzazioni si basano su criteri anche molto fini. Questi tentativi illustrano a mio modo di vedere le convinzioni sulle dimostrazioni matematiche, e su quali caratteristiche queste dovrebbero avere. Ed è proprio il fatto che non siano dimostrazioni corrette a dare questa quantità di informazioni, molto più povera sarebbe stata questa analisi se tutti gli studenti conoscessero il principio di induzione e l'avessero applicato come un algoritmo:

- *Sì perché ho provato più numeri pari e dispari e l'ipotesi è sempre vera.* Si può notare come il ragionamento consideri anche gli aspetti di validazione più fini come la dissimilarità tra le premesse (pari e dispari) oltre che al numero di entità (più numeri).
- *Sostituendo a x un intero* **qualsiasi** *si ottiene un multiplo di* 6. In questo caso è interessante notare come si sia sentita la necessità di affermare l'universalità (ovviamente non reale) delle prove.
- *Non* **so dare** *una risposta però* **so** *che è vera.* Qui sembra evidente il contrasto tra la sicurezza nella conclusione derivante probabilmente da una generalizzazione di un alto numero di prove e la consapevolezza che tale generalizzazione non fa parte delle regole del gioco. Questo fatto

può creare un certo smarrimento: lo studente riesce a darsi un perché ma sa di non saperlo dare come vorrebbe l'insegnante.

- *L'ho* **dimostrato** *fino ad* $x = 6$ *ed è vero.* Questo studente si *arrende* e non fa nulla per nascondere la sua generalizzazione basata su un numero esiguo di tentativi.
- *Non* **ricordo** *la spiegazione, riesco però a dimostrarlo per tentativi, sostituendo cioè ad* x **infiniti** *numeri interi e verificando che il risultato è sempre multiplo di* 6. La cosa più carina è il fatto che lo studente si accorge di essere fuori dalle regole del gioco (dimostrarlo per tentativi) e cerca di *rientrarci* suggerendo un' azione che non può compiere (sostituendo infiniti interi). Non credo che lo studente pensi che chi correggerà il test non sappia dell'impraticabilità di questa sostituzione infinita: non si tratta quindi di cercare di *raggirare*, ma probabilmente della convinzione che sia importante far vedere di conoscere le regole del gioco anche se non si riesce ad applicarle.
- *Sì, perché si può dimostrare sia per* $x = n$ *che per* $x = n+1$. Sembra un caso in qualche modo analogo al precedente: lo studente ha visto nel corso dei suoi studi il principio di induzione, non riesce ad applicarlo ma cerca di mostrare che conosce le regole. È difficile che lo studente si sia convinto del suo *sì* in quanto ritiene di saper dimostrare la proposizione sia per $x = n$ che per $x = n+1$... Questo dà altri spunti sulla possibile interpretazione della domanda *Perché?*: non solo devo rispondere a questa domanda in maniera da accontentare chi corregge ma devo anche far finta che questo sia stato il motivo che realmente mi ha portato a rispondere in quel modo.
- *Proviamo con il primo numero utile, cioè* 1*, poi per* **deduzione** *si arriva sempre alla stessa soluzione.* Anche questo caso può rientrare nei precedenti con la ricerca di una terminologia, per la giustificazione, che viene sentita come *appropriata* allo scopo.
- *Si risolve* **per induzione**, *infatti dando alla* x *il valore* 1 *l'espressione è divisibile per* 6 *e di* **conseguenza** *anche con il valore* $2, 3, \ldots$ Come sopra sembra che gli studenti si ricordino che il ragionamento per tentativi *non vale*, e si

ricordano cosa *vale* anche se non lo sanno applicare. Cercano però di far credere non solo di riuscire in qualche modo a maneggiarlo ma anche che l'induzione matematica sia effettivamente la giustificazione alla risposta. Fantastica in questo senso è la prossima e ultima citazione.

- *Ho provato a risolverla con diversi numeri al posto della x e mi* **riesce***, e poi se vale per x allora vale anche per $x+1$ perché lo implica.*

4. Il piano della tesi

Dopo i primi tre paragrafi introduttivi, che sono serviti per descrivere e motivare le mie scelta (quella globale: scelta di fare ricerca in didattica della matematica e quella locale: scelta, nell'ambito della didattica della matematica, di studiare i fattori affettivi e in particolare le convinzioni), con il secondo capitolo inizia la descrizione della trattazione dei fattori affettivi in letteratura, o almeno nella letteratura da me considerata: penso che lo spettro di vedute considerate sia abbastanza ampio. È evidente che potrebbero esserci molti altri riferimenti, ma qui devo raccontare la mia *storia* e quindi segnalerò quelli che per il mio lavoro sono risultati più importanti.
La scelta di introdurre i lavori in ordine cronologico è motivata dalla volontà di sottolineare come sia cresciuta la ricerca in questo campo, come si siano evoluti gli strumenti pratici e teorici e come siano cambiate le problematiche affrontate nel corso del tempo. In qualche modo ho cercato di mostrare come questo processo di crescita della ricerca sia dovuto effettivamente alla costruzione di una teoria specifica, susseguente alla diffusione dei lavori di ricerca, e quindi sottolineando l'importanza della comunicazione tra ricercatori. Durante l'analisi della letteratura evidenzierò quelli che sono stati i risultati e quelli che a mio modo di vedere sono punti critici della ricerca sull'affect e in particolare sulle convinzioni. È importante sottolineare la scelta di considerare nell'analisi della letteratura ricerche sui fattori affettivi e di non limitarsi, in un primo momento, a quelle sulle convinzioni, su cui si focalizza l'attenzione del mio lavoro. Questo perché, come cercherò di mostrare, lo studio delle convinzioni è legato sia *storicamente* che *teoricamente* a quello dei fattori affettivi.
Un'altra puntualizzazione da fare è che non tutta la letteratura che ha fatto da riferimento al mio lavoro sarà citata in questo capitolo, ma solo quella essenziale per tracciare una breve cronistoria della ricerca sui fattori affettivi: gli altri risultati importanti saranno ripresi nel terzo capitolo, dove l'attenzione si focalizza sulle convinzioni. Il capitolo in

particolare sarà suddiviso in sezioni che tratteranno quelli che a mio avviso sono i punti centrali della ricerca sulle convinzioni: il problema della definizione, il modello dei sistemi di convinzioni, ed il problema dell'osservazione.
Nel quarto capitolo descrivo la parte originale della mia ricerca, cercando, quando possibile, di seguirne anche l'ordine cronologico e logico: illustro quindi il problema di ricerca affrontato, le scelte metodologiche, il percorso, i risultati. L'obiettivo di ricerca è quello di evidenziare l'importanza dei sistemi di convinzioni *nell'ambito* della ricerca sulle convinzioni, quindi di evidenziare l'inadeguatezza, a livello teorico, di considerare le convinzioni isolatamente.
L'approccio metodologico seguito per portare evidenza a tale ipotesi è un approccio multiplo, cioè che fa riferimento a tipologie diverse di strumenti, di dati, ma anche di analisi. L'osservazione è stata condotta in diverse forme e con diversi soggetti: attraverso temi (più di 500 di studenti di ogni ordine di scuola), questionari appositamente costruiti (e somministrati a più di 600 studenti di scuola superiore), interazioni con studenti nel contesto della matematica. L'osservazione diretta è stata realizzata a livello individualizzato con tre studenti al primo anno di università nel contesto del programma del corso di Istituzioni di Matematica, attraverso 6 incontri di 2 ore l'uno, ma il materiale raccolto per ogni studente comprende anche temi e questionari: si tratta quindi del tipo di indagine che in letteratura viene chiamata 'case study'. In definitiva i dati complessivamente raccolti comprendono quindi materiale narrativo (più precisamente temi a carattere autobiografico), risposte a questionari, registrazioni audio degli incontri individualizzati e appunti presi durante gli stessi. L'analisi è stata sia qualitativa che quantitativa.
Nel quinto capitolo riassumo le conclusioni di questo percorso di ricerca: discuto i risultati, accenno brevemente alle implicazioni didattiche secondo me più significative, ed evidenzio alcuni problemi aperti e le possibili direzioni future di ricerca.
Infine in appendice ho riportato la descrizione dettagliata degli incontri che ho avuto con i tre studenti.

E ora buona lettura...

CAPITOLO II

La ricerca sui fattori affettivi in educazione matematica

1. Le prime ricerche

La ricerca sui fattori affettivi[1] e la loro influenza nell'apprendimento in matematica ha, seppure sporadiche, radici piuttosto lontane nel tempo. Molte di queste ricerche non hanno una grossa eco, anche per lo scarso coordinamento che esiste tra i ricercatori e per la frammentarietà della ricerca stessa. Uno dei primi ricercatori il cui lavoro in questo campo diventa un punto di riferimento è Aiken. Già nel 1961 partendo dall'ipotesi (supportata anche da altre ricerche) che la performance in matematica sia influenzata non solo da fattori cognitivi ma anche da fattori che chiama *nonintellective*[2], cerca di dimostrare statisticamente alcune relazioni tra l'atteggiamento nei confronti della matematica e:

(1) Il successo (che identifica con il voto finale nel corso di matematica).
(2) L'abilità.
(3) Le esperienze avute con la matematica.

Non sembra invece essere correlato al temperamento e più in generale a specifici tratti della personalità.
Ci sono alcuni particolari interessanti in questa ricerca:

- Il fatto che l'autore non si sofferma sul significato dei termini usati, per esempio quello di *atteggiamento nei confronti della matematica*, che pure è l'oggetto delle sue ricerche; inoltre non si sofferma sulla giustificazione di alcune scelte, come la definizione di successo.
- La struttura di questa ricerca, molto chiara, e in qualche senso molto matematica: ci sono delle ipotesi iniziali, degli strumenti

[1] L'espressione 'fattori affettivi', come già detto, fa riferimento a sistemazioni teoriche relativamente recenti, quale quella di McLeod (1992). È chiaro quindi che parlare di 'ricerca sui fattori affettivi' porta ad unificare a posteriori anche studi che in effetti hanno origini e storie molto diverse.

[2] E come esempio porta la paura che alcune persone hanno di affrontare problemi di matematica, che chiama *matemafobia*.

per misurare gli oggetti di cui si vuol provare la correlazione, un'analisi statistica dei dati e la conclusione che non lascia spazio ad interpretazioni.

- L'introduzione di un argomento molto importante nella ricerca dei fattori affettivi, ovvero l'adeguatezza o meno degli strumenti di misura/osservazione. Infatti l'autore prima di riportare risultati e conclusioni lascia il seguente spiraglio all'interpretazione dei dati (*p*.23): *Assuming that the various measures employed for this study accurately assess their respective variables.* Questa assunzione è tutt'altro che scontata, e anzi una delle questioni teoriche ancora dibattute è l'adeguatezza degli strumenti di osservazione/misurazione (Di Martino e Zan 2001*a* e 2001*b*).

Nello stesso anno (1961) dell'articolo di Aiken, un lavoro di Corcoran e Gibb cataloga i metodi (quasi tutti *importati* da ricerche di psicologia sociale) di misurazione di atteggiamento nei confronti della matematica che si possono trovare in letteratura fino a quel momento. Le tre categorie individuate sono:

(1) metodi di osservazione diretta
(2) interviste
(3) self-report come questionari, scale di atteggiamento, completamento di frasi o analisi di temi.

Lo sforzo di Corcoran e Gibb di sottolineare tratti comuni della ricerca esistente, ripreso in seguito nuovamente da Aiken (1970)[3] è molto importante, perché rappresenta un primo tentativo di dare organicità alla ricerca sui fattori affettivi. Inoltre Aiken cerca di individuare possibili curricula per modificare atteggiamenti ritenuti negativi: si dimostra interessato non solo a descrivere staticamente il fenomeno, ma anche ad una descrizione evolutiva ed alla possibilità di intervento.
Nonostante l'importanza indiscutibile di queste ricerche sono evidenti alcune carenze che, nel corso degli anni, come vedremo, saranno spunto di riflessione della ricerca sull'influenza dei fattori affettivi in matematica:

(1) La mancanza della condivisione di una terminologia rigorosa dei concetti studiati.

[3]In questo lavoro l'autore affronta anche il problema della definizione dei termini usati(p.551): *Although there is no standard definition of the term* attitude*, in general it refers to a learned predisposition or tendency on the part of an individual to respond positively or negatively to some object, situation, concept or another person.* Da cui si evince che la definizione fatta propria dall'autore non è specifica dell'atteggiamento nei confronti della matematica.

(2) La debolezza della giustificazione di ricerche sui fattori affettivi in matematica. Come detto, Aiken, nel suo lavoro dei 1961, parte da ipotesi di correlazione che poi dovrà ammettere non essere così statisticamente importanti. Anche Corcoran e Gibb sembrano assumere come dato di partenza l'importanza dell'atteggiamento in matematica; il loro lavoro inizia con questa significativa presa di posizione non argomentata in seguito (p.105): *The attitudes of students toward mathematics play a vital part in their learning.* D'altra parte Aiken (1970, *p*.558) afferma che *Obviously, the assessment of attitudes toward mathematics would be of less concern if attitudes were not thought to affect performance in some way.* Ma come e quanto l'atteggiamento influisca sulla performance matematica non è documentato; significativa è la presa di posizione di Neale (1969, *p*.631): *Implicit in such recommendations is a belief that something called* attitude *plays a crucial role in learning mathematics.*
(3) La validazione teorica e sperimentale degli strumenti di osservazione dei costrutti studiati.

Come si può vedere non esiste ancora una vera e propria *classificazione* dei fattori affettivi, si parla quasi sempre di un generico atteggiamento nei confronti della matematica, si cerca di misurarlo con questionari spesso basati su scale di Likert[4] e di confrontare statisticamente la significatività della relazione tra il *punteggio* dell'atteggiamento e il successo, di cui non si dice molto, spesso limitandosi a misurarlo in base alla votazione dello studente.
Negli anni ottanta cresce la produzione di lavori interessati ai fattori affettivi in matematica, e si può notare come questi cerchino di rispondere alle carenze esistenti. Innanzitutto comincia a sentirsi la necessità di una sistemazione teorica dei concetti studiati; Kulm (1980) rivisita la ricerca sull'atteggiamento nei confronti della matematica, puntando l'attenzione proprio sul problema della definizione di atteggiamento e su quello dell'osservazione. In particolare Kulm sottolinea come, pur esistendo in psicologia varie definizioni di atteggiamento, solitamente si evitino definizioni esplicite e si punti a definizioni operative che si

[4]Le scale di Likert sono questionari con una serie di proposizioni a cui bisogna assegnare un valore, solitamente da 0 a 5, in una scala che va dal completo disaccordo al completo accordo. Ogni assegnazione risulta in un punteggio negativo o positivo a seconda che la risposta sia considerata rivelatrice di un atteggiamento negativo o positivo. Il punteggio finale è la somma totale.

evincono dagli strumenti di misura usati. Ma la considerazione più importante è che (p.358) *It is probably not possible to offer a definition of attitude toward mathematics that would be suitable for all situations, and even if one were agreed on, it would probably be too general to be useful.* C'è infatti la convinzione che la ricerca sui fattori affettivi in matematica possa aiutare a capire fenomeni anche più complessi rispetto a quelli originariamente presi in considerazione e così anche la ricerca stessa si fa più articolata: non si parla più solo di atteggiamento, ma, con gli studi sul problem solving soprattutto, si comincia a parlare di convinzioni e anche a studiare le emozioni e la loro influenza sui processi cognitivi, e allargare i confini di queste ricerche oltre lo studio dell'ansia e delle sue conseguenze. Inizialmente, seguendo le origini di costrutti tipici della psicologia sociale, lo studio dei fattori affettivi era finalizzato a prevedere scelte: si prestava quindi ad affrontare problemi semplici come, per esempio, la prosecuzione o meno di studi matematici[5]. Proprio negli anni ottanta la ricerca si fa più ambiziosa, definisce i suoi obiettivi più chiaramente e si comincia a credere che i fattori affettivi possano influire non solo su scelte di adesione, ma anche su decisioni più articolate e quindi in particolare che possano influire sull'attività di problem solving.
Si evidenziano dunque tre filoni di ricerca:

(1) Il primo continua a interessarsi alla relazione tra fattori affettivi e scelte di evitamento di matematica e in particolari di sotto-rappresentanza, ovvero di spiegare perché particolari gruppi di persone siano statisticamente poco rappresentati in matematica, spesso cercando di spiegare la differenza, in termine di coinvolgimento numerico, tra uomini e donne (gender-differences). Questo filone di ricerca, rimasto molto simile a quello classico, ha avuto dei risultati molto importanti: rispetto ai primi studi, infatti, aver definito precisamente l'obiettivo di ricerca ha fatto sì che si siano trovate correlazioni molto significative dal punto di vista statistico tra alcuni tratti affettivi che distinguono per esempio donne e uomini (in particolare sul senso di auto-efficacia) e la scelta di proseguire gli studi matematici. L'importanza di queste ricerche (Fennema e Behr, 1980; Leder, 1982; Fennema et altri, 1990) è testimoniata dal fatto che ancora pochi anni prima Aiken a proposito delle gender-differences affermi (1976, *p*.296): *it is possible that*

[5]Ma, come visto, si cercava di mostrare anche l'esistenza di una correlazione tra atteggiamento in qualche senso *positivo* e successo.

lack of success in mathematics (...) is due at least in part to genetically determined low ability in mathematics. I lavori citati e altri dello stesso tipo hanno contribuito a cancellare quel *it is possible*, cioè a dare una spiegazione diversa da quella genetica.

(2) Il secondo, partendo dalla convinzione che i fattori affettivi, e in particolare alcune reazioni emozionali come l'ansia, inibiscano alcune attività cognitive e quindi, in particolare, influiscano sulla prestazione matematica spesso in modo negativo, cercano di dimostrare questa correlazione e di suggerire strategie didattiche mirate a diminuire i livelli di ansia. Questo tipo di ricerca ha risultati contradditori ma ha l'importanza di introdurre nella ricerca in didattica della matematica l'influenza di fattori puramente emozionali e quindi un sostegno all'idea che lo studio della sfera affettiva (anche quella emozionale) sia fondamentale per comprendere un processo complesso come quello dell'apprendimento. In particolare mentre Hembree (1991) cerca di studiare le differenze tra *test-anxiety* e *mathematics anxiety* e quindi di capire se ci sono delle caratteristiche specifiche della matematica per cui le reazioni emozionali di una persona possono essere diverse da quelle usuali, Hunsley (1987) e Morris (1981) sottolineano l'influenza negativa dell'ansia sulla performance matematica. Significativo il titolo del lavoro di Morris: *math anxiety: teaching to avoid it.*

(3) Il terzo (che è quello che mi interessa di più e che quindi descriverò più dettagliatamente) ha cominciato a studiare l'importanza specifica dei fattori affettivi (e in particolare delle convinzioni che proprio in questo contesto cominciano ad essere studiate) in ambito problem-solving, partendo da studi sulla metacognizione, e quindi ad interessarsi a processi decisionali più complessi di quelli di scelta o evitamento tipici delle ricerche di mercato, nel contesto delle quali è nata, in psicologia sociale, la ricerca su convinzioni e atteggiamenti o di quelli legati alla componente emozionale vista solo come fattore inibitore di comportamenti.
In realtà, come detto, già Aiken cercava di stabilire statisticamente una correlazione tra atteggiamento e successo e quindi in un certo senso ipotizzava un'influenza dell'atteggiamento in particolare, su processi decisionali più complessi, ma limitandosi a correlazioni di tipo statistico. Negli anni 80 si comincia a parlare di influenza dei fattori affettivi nell'attività caratterizzante la matematica: il problem solving e si è convinti che la

sfera cognitiva e affettiva siano indissolubilmente legate. Particolarmente significativo è il volume edito da Silver (1985) il cui titolo è di per sé eloquente: *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, e il curatore stesso nel suo articolo relativo ai temi sotto-rappresentati e le direzioni auspicabili nel futuro per la ricerca sul problem solving sottolinea l'importanza della ricerca sull'affect. Nello stesso volume McLeod parlando dell'influenza dei fattori affettivi in matematica, comincia a classificarli, distinguendo tra emozioni, convinzioni e atteggiamenti (fino a questo momento non c'era mai stata una sistemazione e una distinzione netta tra costrutti che lo stesso McLeod sottolinea essere profondamente legati tra loro, ma distinti) e attacca un approccio puramente cognitivo affermando che (*p*.268): *Limiting one's research perspective to the purely cognitive seems acceptable for those interested mainly in the performance of machines; however, researchers who are interested in human performance need to go beyond the purely cognitive if their theories and investigations are to be important for problem solving in classrooms.*

Interessanti anche le sue osservazioni sulle reazioni emozionali, e in particolare sull'ansia; citando scritti epistemologici di matematici famosi come Hadamard, sostiene la tesi che la componente affettiva non deve essere vista come un aspetto *inquinante* dei processi di pensiero, perché appunto presente anche nel lavoro di grandi matematici[6]. Anzi sottolinea, a proposito dell'ansia, come (*p*.273): *of course, too much tension could also be debilitating, leading to what students referred to as mental blocks to their thinking. However, a moderate amount of tension seemed to improve problem-solving performance for most students.*

Se McLeod introduce molte osservazioni interessanti e per la prima volta tenta di classificare e descrivere i vari costrutti dell'area affettiva, l'articolo di Schoenfeld nello stesso volume non solo descrive l'influenza delle convinzioni sull'attività di problem-solving ma soprattutto va oltre il tentativo di dimostrare questa influenza e cerca di sottolineare alcuni aspetti importanti della ricerca sulle convinzioni. È il primo passo avanti rispetto ad una ricerca bloccata nel tentativo di

[6]Riprenderà sperimentalmente queste considerazioni in McLeod, Metzger, Craviotto 1989 e in McLeod, Craviotto, Ortega 1990.

confermare l'ipotesi di correlazione tra fattori affettivi (e nella fattispecie convinzioni) e performance in attività di problem-solving. Schoenfeld continua a portare evidenze rispetto a questa che ormai è più di un'ipotesi, ma traccia anche alcune linee guida per la ricerca futura, assumendo in qualche modo definitivamente l'importanza delle convinzioni in matematica. Così per la prima volta sottolinea il fatto che si deve fare attenzione non alle singole convinzioni, ma anche al legame tra esse, e cioè a quello che chiama (*p*.368) *world view, or set of belief, or epistemology [*that*] determines the kind of reasoning (and meta-reasoning) one does*, si interroga sull'origine di queste convinzioni (*p*.370): *Those examples indicate that one's world view is largely shaped by one's empirical experience, including one's instructional experience* e sull'importanza di strumenti di osservazione per poter cambiare convinzioni ritenute dannose (*p*.375): *those beliefs must be discovered before they can be removed.*
L'evidenza portata dalla ricerca di Schoenfeld sull'influenza delle convinzioni in attività di problem solving continua anche nei lavori successivi in cui studia (1989a) l'importanza dell'ambiente e più in generale del contesto nella formazione delle convinzioni e (1989*b*) introduce la differenza tra *belief espoused* e *beliefs in action.*
Nel primo lavoro citato afferma che (1989a, p.82): *the students'sense of* what mathematics is really all about *is shaped by the culture of school mathematics, the environment in which they learn those facts and procedures. In turn, that sense of what mathematics is really all about determines how (if at all) the students use the mathematics they have learned.* In particolare Schoenfeld è convinto che un certo tipo di insegnamento, volto soprattutto a dare senso a quello che si impara e quindi dove le procedure non sono un fine ma un mezzo dell'istruzione matematica, possa in qualche modo prevenire convinzioni *pericolose* sulla matematica.[7] Nel secondo lavoro Schoenfeld affronta il problema di spiegare alcuni fenomeni apparentemente inspiegabili, ovvero quelli di studenti con convinzioni in qualche senso ritenute *corrette* sulla matematica e sull'attività matematica, ma che si comportano, in un contesto

[7]Interessante notare come Schoenfeld (1983*a*) sottolinei l'influenza delle convinzioni (*p*.3): *the set of beliefs one has about the discipline, the environment, the task, and oneself (...) determine the context within which one selects and deploys the cognitive resources.*

di problem solving, all'opposto di quello che le loro convinzioni professate farebbero prevedere. Schoenfeld ipotizza che non sempre le convinzioni professate siano quelle che *guidano* il comportamento, e che spesso certe risposte a questionari su convinzioni siano dovute alla consapevolezza di quali sono considerate le risposte *buone*. In pratica si comincia a dubitare della affidabilità dei questionari per l'osservazione delle convinzioni.

Anche dai lavori di Cobb (1985, 1986) si capisce lo slittamento della ricerca sui fattori affettivi: da un tentativo di trovare correlazioni statistiche tra fattori affettivi e comportamento al tentativo di spiegare teoricamente certe correlazioni. Nel primo lavoro, osservando due bambini in attività di problem-solving, Cobb sottolinea l'influenza del senso che i due danno alle domande a loro proposte (senso che si distingue dal significato della domanda) e come questo poi guidi l'attività risolutiva (*p.*124): *the solver must give an initial meaning to the problem before applying a heuristic.* Ebbene è evidente che questo processo di dare senso alla domanda è influenzato dalle convinzioni che lo studente ha sulla matematica, sulle richieste dell'insegnante e sulle loro motivazioni. Nel secondo lavoro (1986) Cobb cerca di descrivere l'importanza di conoscere il contesto e gli obiettivi che una persona si prefigge per capirne il comportamento matematico e affronta il problema del legame che esiste tra obiettivi, contesto e convinzioni. In particolare è molto interessante il fatto che quando descrive la *contestualità della cognizione* sottolinei che solo capendo il contesto in cui una persona opera si possano capire comportamenti a prima vista irrazionali e inoltre che (*p.*5): *to say that cognition is context-bounded is to say that beliefs are intimately involved in the meaning-making process.*

Molti dei lavori di ricercatori che si occupano di questo filone di ricerca sono raccolti nel volume edito da Adams e McLeod (1989), che ho già citato. Il volume (che è di per sé una novità importante, perché appunto raccoglie contributi di vari ricercatori sullo stesso tema: affect e problem-solving matematico) è interessante anche per la sua struttura, che testimonia molte delle *esigenze* della ricerca sull'affect che cominciano ad affiorare. Nelle cinque parti del volume infatti, tre (quella iniziale e le due finali) sono dedicate al tentativo di costruire una teoria

dell'affect per il problem-solving matematico[8] sia descrivendo l'interazione tra fattori affettivi e cognitivi (Mandler, 1989; McLeod 1989a), sia catalogando e descrivendo il dominio affettivo (Hart, 1989) sia, infine, indicando direzioni future di ricerca (Mandler, 1989a; McLeod 1989b). Questo a testimonianza di una nuova consapevolezza della necessità di sviluppare una teoria e di integrare le molte ricerche sull'affect in matematica, partendo dallo stabilire, se possibile, un vocabolario comune. Hart (1989, p.49) citando Simon afferma: *if our science is to advance, we must identify these nuances and both construct and adhere to a vocabulary that makes the necessary distinctions in a consistent way.* Importante è anche notare come la parte teorica si avvalga di contributi di studiosi provenienti da campi di ricerca diversi da quelli della didattica della matematica come quello della psicologia (Mandler; McDonald 1989) da cui molti dei costrutti usati provengono originariamente.
Le parti centrali del libro descrivono esperienze didattiche in cui si focalizza l'attenzione (seconda parte) sull'influenza dei fattori affettivi sull'apprendimento e (terza parte) sul ruolo che i fattori affettivi hanno nell'insegnamento della matematica e del problem-solving in particolare. Anche l'attenzione all'influenza dei fattori affettivi non solo nell'apprendimento della matematica ma anche nell'insegnamento è una novità e ha due aspetti, come sottolinea Nespor (1987): da una parte si comincia a studiare come le convinzioni degli insegnanti influenzino quelle degli studenti[9] e quindi ad interessarsi anche alla possibilità di cambiare, o comunque influenzare, tramite la pratica didattica le convinzioni e gli atteggiamenti nei confronti della matematica degli studenti stessi[10]. Dall'altra si

[8]La prima parte è proprio intitolata *A theory of affect for mathematical problem solving.*

[9]come detto, Schoenfeld, e non è il solo, sottolinea come, soprattutto in matematica, l'origine delle convinzioni sia legata all'esperienza scolastica

[10]Questo dipende anche da come definiamo i costrutti considerati: per esempio Haladyna, Shaughnessy J. e M. (1983) trovano che l'insegnante e il suo atteggiamento siano variabili che incidono profondamente sull'atteggiamento degli studenti, dove per atteggiamento si intende la disposizione emozionale nei confronti della disciplina (mi piace/ non mi piace), mentre Ernest (1988) sostiene che questa influenza non è così marcata anche a causa della complessità di un costrutto multidimensionale come l'atteggiamento nei confronti della matematica, di cui individua varie componenti.

pensa all'influenza dei fattori affettivi in attività di problem-solving allargando la visione di problema da una concezione *locale* di problema di matematica ad una *globale*: in questo modo l'insegnamento è di per sé un *problema* con obiettivi auspicati e decisioni da prendere e quindi la ricerca si può interessare anche al cambiamento di convinzioni e atteggiamento di insegnanti e non solo di studenti. In particolare Thompson (1985, *p*.293) sottolinea come: *much more remains to be learned about teachers' conceptions and how these affect instructional practice before we begin to understand their role in the teaching of mathematics and accordingly design in-service programs (...) there is a need for researchers to investigate the stability of teachers' conceptions (...) only when we reach an understanding of how conceptions are formed and modified will the findings be useful to those attempting to improve the quality of mathematics education in the classroom.*
Anche la scuola francese (Brosseau, 1980) con l'idea di *contratto didattico* si occupa in qualche modo di un particolare tipo di convinzioni: quelle dello studente sulle aspettative dell'insegnante e le aspettative stesse dell'insegnante sullo studente. In particolare l'importanza di questa idea sta nel riuscire ad interpretare comportamenti e situazioni che non sono spiegabili limitandosi al puramente cognitivo: per esempio i comportamenti dei bambini di fronte ai cosiddetti problemi assurdi quali 'l'età del capitano'[11] o altri simili vengono spiegati con la clausola tipica del contratto didattico che un problema scolastico *debba poter essere risolto*. L'idea di contratto didattico è importante anche perché viene evidenziato come molte clausole del contratto didattico siano implicite e spesso non volute dall'insegnante: un'ulteriore conferma della teoria costruttivista dell'apprendimento, secondo la quale lo studente interpreta le proprie esperienze scolastiche. Nonostante questo l'idea di contratto didattico è più attenta all'ambiente *classe*, piuttosto che al singolo individuo.

Come visto, è indubbia la crescita di interesse per i fattori affettivi nel periodo che parte dai primi anni 80 del secolo scorso ai primi anni 90

[11] Il problema del capitano, a meno di piccole modifiche che non cambiano la struttura del problema, è il seguente: Su un battello ci sono 36 pecore. 10 muoiono affogate. Quanti anni ha il capitano?
La cosa interessante è che molti bambini rispondono a questa domanda combinando i dati a seconda delle operazioni conosciute e inoltre che la percentuale di risposte alla domanda aumenta nelle ultime classi.

dello stesso. Questa crescita di interesse è sicuramente dovuta anche ad una nuova concezione dell'apprendimento che nel campo dell'educazione matematica viene sviluppata in quegli anni (von Glasersfeld, 1983, 1991): è sempre più superato un modello di apprendimento di tipo trasmissivo per far spazio ad un modello dove l'apprendimento è visto come un processo di costruzione della propria conoscenza da parte di chi apprende. Inoltre anche l'insegnamento e la ricerca possono essere viste come attività costruttive e quindi attivitá dove le convinzioni, emozioni e atteggiamenti di una persona (in una parola i fattori affettivi) giocano un ruolo determinante; significative mi sembrano le parole di Lucock (1987, *p*.126): *The adoption of a personal construct approach reflect the belief* [12] *that pupils differ from each other in the ways in which they make sense of mathematic lessons, the roles which they, and others, play in those lessons, and even what it means to be 'doing mathematics'.*

Questa nuova visione dell'apprendimento come attività costruttiva alimenta l'interesse per il terzo filone di ricerca che tende a descrivere l'influenza dei fattori affettivi su decisioni complesse come quelle da prendere in ambito problem solving, e contribuisce anche al lento abbandono dei primi due filoni di ricerca ancorati ad un rapporto causa-effetto poco compatibile appunto con le differenze individuali. Interessante da questo punto di vista è il lavoro di Weiner (1983), uno psicologo cognitivista che studia le emozioni, ma con un punto di vista diverso rispetto alle ricerche citate sull'ansia (*p*.168: *investigations of emotion have been virtually restricted to the negative states of fear and anxiety*), legando lo studio delle emozioni a fattori cognitivi e in particolare a quelle che chiama attribuzioni causali, ovvero quello che l'individuo crede sulle ragioni per cui si è verificato un dato evento. Interessante è la classificazione che Weiner (1982) fa delle attribuzioni causali, individuando tre dimensioni:

(1) Il locus: ovvero le cause possono essere interne o esterne alla persona. Per esempio posso pensare che un compito non mi è riuscito perché non sono capace (locus interno) o perché il professore lo ha dato particolarmente difficile (locus esterno).
(2) Controllabilità: cause controllabili dal soggetto versus cause non controllabili. Questa dimensione dipende dalle convinzioni della persona su quello che identifica come fattore determinante. Per generalizzare solitamente l'impegno è visto come controllabile mentre l'intelligenza come incontrollabile (ma ci sono anche teorie dell'intelligenza diverse).

[12] La sottolineatura è aggiunta.

(3) Stabilità: cause stabili versus cause instabili nel tempo. Questa tra le tre dimensioni è forse quella che più di tutte risente delle convinzioni della persona: per esempio l'impegno può essere considerato un fattore sia stabile che instabile a seconda della persona.

La ricerca in psicologia ha dimostrato l'influenza di tali attribuzioni sulla motivazione e anche sulle reazioni emozionali del soggetto (che a loro volta ovviamente influiscono sul comportamento). Le attribuzioni causali dipendono fortemente dalle conoscenze e dalle convinzioni del soggetto.

Conseguentemente alla crescita di interesse per i fattori affettivi c'è la necessità di rendere più organica la ricerca, cominciano quindi i primi lavori di catalogazione della letteratura sul tema (per esempio Lorenz, 1982) e anche sugli strumenti di osservazione usati (Leder, 1985). Questa possibilità di conoscere e confrontare le ricerche esistenti porta ad individuare i punti critici della ricerca in tale campo e ad indicare nuove direzioni di ricerca, spinte dalla volontà di evidenziare il ruolo dei fattori affettivi su processi sempre più complessi come quelli attivati durante il problem-solving. In particolare alcuni punti critici e alcune direzioni di ricerca importanti sono evidenti fin dai primi studi[13]:

(1) La mancanza di una classificazione dei fattori affettivi e la mancanza di una terminologia condivisa.
(2) La prevalenza di metodologie di osservazione di tipo quantitativo, la cui adeguatezza è raramente messa in discussione[14]. Interessanti per la novità che introducono sono i lavori di Munby (1983, 1984), dove si descrivono osservazioni qualitative di atteggiamenti e convinzioni. Nel secondo lavoro in ordine di tempo, dopo aver usato vari metodi per descrivere le convinzioni

[13]Germann (1988) evidenzia questi punti critici nel caso specifico della ricerca sull'atteggiamento (*p.*689): *First, the construct of attitude has been vague, inconsistent, and ambiguos. Second, research has often been conducted without a theoretical model of the relationship of attitude with other variables. Third, the attitude instruments themselves are judged to be immature and inadequate.* In particolare è molto interessante l'osservazione sui risultati discordanti di correlazione atteggiamento - successo (*p.*699): *This suggests that researchers of attitude and achievement need to take care as to what they select as a measure of achievement.*

[14]Tra l'altro proprio la *spinta costruttivista* dovrebbe indirizzare anche su metodologie qualitative, che hanno l'inconveniente di richiedere tempi di analisi lunghi e quindi in particolare di non poter quasi mai essere fatte su grandi numeri e perciò di perdere qualche cosa in termini di significatività statistica, ma hanno il vantaggio di fornire particolari più dettagliati e spesso di essere *adattabili* alla persona osservata.

di un'insegnante chiamata Ellen, Munby conclude (1984, *p*.38): *The utility of the knowledge obtained in this way is very limited, of course, for it pertains to Ellen alone. But knowledge is not to be judged solely upon the criterion of its range of applicability: power is important, too.*

(3) La necessità di descrivere sempre meglio l'interazione tra fattori affettivi e fattori cognitivi che appaiono sempre più evidentemente non due aspetti separati ma inestricabilmente collegati (Bassarear, 1989; McLeod, 1987).

2. Dall'Handbook 1992 ad oggi

Un momento di svolta nella ricerca sui fattori affettivi in matematica è sicuramente l'uscita dell'*Handbook of research on mathematics teaching and learning* nel 1992. In questo volume i contributi di Thompson, Schoenfeld e McLeod diventano presto un punto di riferimento per la ricerca sui fattori affettivi in matematica: i tre ricercatori, sfruttando anche la possibilità di avere più spazio a disposizione rispetto ai lavori su rivista, analizzano articolatamente molti dei punti critici della ricerca e descrivono le future direzioni della ricerca stessa. In particolare i tre lavori toccano molti dei punti di interesse della ricerca sui fattori affettivi (e più specificatamente sulle convinzioni quelli di Schoenfeld e Thompson): lo studio della relazione tra convinzioni sulla matematica tenute dagli insegnanti e la loro pratica scolastica; lo studio dell'influenza delle convinzioni e delle capacità metacognitive sull'attività di problem-solving; la classificazione, la descrizione dei costrutti interni ai fattori affettivi e la descrizione delle nuove necessità della ricerca in questo campo. In particolare, oltre che a dare esempi (Schoenfeld) di convinzioni e di loro influenza sull'attività di problem-solving, i tre lavori cominciano a dare risposte alle problematiche emerse dalla ricerca fino a quel momento:

- Si comincia a definire i costrutti usati in quanto ci si rende conto che (Thompson, p.129): *Despite the current popularity [...] the concept of belief has not been dealt with in a substantial way in the educational research literature. For the most part, researchers have assumed that readers know what beliefs are.* Le definizioni date spesso non sono *dirette*, ma descrivono caratteristiche peculiari dei costrutti e differenze tra costrutti (McLeod, p.578): *Beliefs, attitudes and emotions are used to describe a wide range of affective responses to mathematics. These terms vary in the stability of the affective responses that they represent; beliefs and attitudes are generally stable, but* *emotions may change rapidly. They also vary in the level of intensity of the affects that they describe, increasing in intensity from cold beliefs about mathematics to cool attitudes related to liking or disliking mathematics to hot emotional reactions to the frustrations of solving non routine problems. Beliefs, attitudes, and emotions also differ in the degree to which cognition plays a role in the response, and in the time that they take to develop.* (Thompson, p.129): *Beliefs have been distinguished from knowledge in a number of ways.* oppure usando metafore per descrivere come questi costrutti siano organizzati (per esempio la descrizione di sistema di convinzioni).

- Si sottolinea la difficoltà di osservare e descrivere questi costrutti (McLeod, p.576): *affect is generally more difficult to describe and measure than cognition* e quindi la necessità di passare da un approccio puramente quantitativo all'osservazione di questi costrutti (con l'uso massiccio di questionari a risposta chiusa e scale di Likert) all'uso di metodi qualitativi (che permettano per esempio di minimizzare la differenza tra beliefs espoused e beliefs in action descritta da Schoenfeld) o comunque integrare le due metodologie con un approccio multiplo (McLeod, p.577): *Although traditional quantitative approaches provide substantial information on some issues, there are many other areas [...] that are not susceptible to this approach*; (McLeod, p.591): *research on affective issues in mathematics education should develop a wider variety of methods. [...] The use of clinical interviews and detailed observations should provide the field with a deeper understanding of the role of affective issues in mathematical learning and teaching.* Inoltre la critica ai tradizionali metodi di osservazione nasce anche dalla nuova esigenza di non voler limitarsi più solo a descrivere delle relazioni tramite corrispondenze statisticamente significative, ma voler spiegare anche perché e come queste relazioni esistono (Schoenfeld, p.364): *The older measurement tools and concepts found in the affective literature are simply inadequate; they are not at a level of mechanism and most often tell us that* something *happens without offering good suggestions as to how and why.*
- Si comincia a descrivere (McLeod) l'interazione tra fattori affettivi e tra fattori affettivi e cognitivi e si incoraggia a proseguire nella descrizione di questa interazione. In particolare Schoenfeld descrive le convinzioni come un *ponte* tra fattori affettivi e cognitivi, osservazione in qualche modo ripresa da

McLeod che, come visto, descrive le convinzioni come il fattore affettivo con la componente cognitiva più marcata.

Da questo momento in qualche modo la ricerca sui fattori affettivi cambia, in primo luogo per la prima volta sono stati in qualche modo distinti, con la classificazione di McLeod, i costrutti considerati tipici del dominio affettivo, inoltre è stata sottolineata la pericolosità di affidare la loro definizione al senso comune: alcuni anni dopo (1998, p.2) Ruffel, Mason e Allen affermeranno a proposito dell'atteggiamento che *attitude as a technical term became rather distant from its colloquial sense.*
I temi della definizione dei costrutti usati e degli strumenti di osservazione e/o misurazione diventano così primari e questo è il primo passo verso la costruzione di un vero e proprio quadro teorico sui fattori affettivi.
Uno dei punti critici della ricerca sui fattori affettivi è infatti il tentativo di definire i costrutti usati. Come detto per un certo periodo molti hanno preferito evitare questo tipo di problema considerando il fatto che i termini usati sono presenti anche nel lessico quotidiano e quindi *appoggiandosi* al loro senso comune. Questo fino a che non è parso evidente che gli oggetti della ricerca erano inevitabilmente piuttosto lontani dal loro significato nel lessico quotidiano e che la mancanza di una definizione formale impediva la crescita della ricerca stessa. Infatti, come visto, nel corso degli anni la ricerca sui fattori affettivi si è posta obiettivi via via più ambiziosi come quelli di interpretare comportamenti sempre più complessi. A questo punto, come testimoniato per esempio dai lavori di Furinghetti e Pehkonen (2002) e di Leder e Forgasz (2002) per quanto riguarda le convinzioni, il problema diventa quello in qualche senso *opposto*, cioè si passa dalla mancanza di una definizione ad una varietà incredibile di definizioni. Ogni ricercatore usa la sua definizione, Furinghetti e Pehkonen arrivano addirittura ad affermare che (2002, p.40): *researchers have often formulated their own definition of belief which might even be in contradiction with others.* Questo può essere di ostacolo per confrontare risultati di ricerche con definizioni diverse, ma è anche vero che le definizioni non sono le uniche assunzioni che *dirigono* una ricerca e che permettono o meno un confronto tra ricerche diverse. Questo perché come sottolineano in molti, anche il lavoro di ricercatore è fortemente influenzato da fattori affettivi (Schoenfeld, 1994, p.704): *I wish to make the point that the choice of perspective, and of method, represent a choice of values. Those choices say what the researcher considers important, what needs to be explained, and what does not.*

È molto più importante, a mio modo di vedere, l'esplicitazione di una definizione (o comunque la caratterizzazione del costrutto tramite le proprietà che il ricercatore assume che il costrutto stesso possegga), piuttosto che la ricerca di una definizione condivisa[15], perché questo permette di identificare l'oggetto della ricerca[16]. Inoltre questa maggiore sensibilità nella esplicitazione delle proprie scelte da parte dei ricercatori permette di confrontare ricerche diverse tra loro (in qualche modo delle meta-analisi: per esempio Ma e Kishor, 1997) e di classificare anche i vari tipi di ricerca nel campo dei fattori affettivi.
Questa nuova attenzione é sicuramente un fatto positivo che, insieme al sempre maggiore interesse per gli studi sui fattori affettivi in matematica[17], dá modo di pubblicare lavori che offrono un'ampia bibliografia con lo stato della ricerca nel campo (per esempio Malmivuori 2001) o la formazione di gruppi di ricerca internazionali che si occupano di fattori affettivi in matematica (per esempio il già citato gruppo europeo MAVI) o infine la pubblicazione di libri interamente dedicati a questo settore della ricerca in didattica della matematica con i contributi di ricercatori di diversa provenienza e con tradizioni di ricerca differenti (per esempio Leder et altri, 2002).
La letteratura recente segna anche il passo di un approccio pesantemente quantitativo a favore di uno qualitativo, con studi relativi a poche persone (da un caso singolo ad una classe): siano essi studenti, insegnanti in formazione o insegnanti; basati su strumenti e tempi di osservazione diversi; da interviste guidate a osservazioni durante un semestre o un anno di lezioni (Leron e Hazzan 1997, Cooney, Shealy e Arvold 1998, Cifarelli 2001, Burton 2002, Hannula 2002). Questo spostamento è significativo della volontà di descrivere sempre meglio l'influenza dei fattori affettivi in matematica, superando una concezione di causa-effetto (che aveva ispirato i primi studi sull'atteggiamento) che non porta a conclusioni soddisfacenti. Inoltre è una conseguenza della

[15] E forse proprio il timore che l'attenzione si focalizasse sulla differenza per le definizioni è uno dei motivi per i quali per tanto tempo si è scelto di appoggiarsi al senso comune, assumendo che una tale definizione in qualche modo *implicita* fosse condivisa.

[16] Mi sento quindi di condividere la seconda parte delle conclusioni di Furinghetti e Pehkonen (2002) relativa appunto alla esplicitazione delle scelte del ricercatore (p.55): *They* [i ricercatori] *have to make clear their assumptions , the meaning thei give to basic words, and the relationship between the concepts involved.*

[17] Testimoniato dall'ampio spazio dato a temi di questo tipo nelle apposite sezioni di convegni internazionali tipo PME o ICME e anche, a livello nazionale: per esempio in Italia e Spagna, da articoli e monografie sul tema in riviste specializzate (per esempio Zan (2000a,b,c) o Graó 1997).

critica ai metodi di osservazione classici (questionari, soprattutto scale di Likert), ma allo stesso tempo l'uso di approcci diversi alimenta ancora di più la discussione intorno alle questioni metodologiche e permette la crescita di una ricerca finalizzata alla costruzione di una teoria sui fattori affettivi in matematica.
La scelta dei metodi di osservazione è infatti significativa non solo perché da una parte ci si affida ad autovalutazioni (quelle che in letteratura vengono chiamate self-report), mentre con un approccio qualitativo si cerca solitamente di inferire tratti della persona dall'osservazione dei comportamenti e non solo dalle sue valutazioni, ma anche per il fattore tempo. Infatti mentre i classici metodi di rilevazione quantitativa (scale di Likert e questionari in genere) sono *fotografie* di un particolare momento che possono essere anche ripetute dopo un certo periodo di tempo, ma comunque in maniera discreta, solitamente l'approccio qualitativo aumenta la frequenza temporale delle osservazioni cercando di rendere più continua l'indagine sull'evoluzione nel tempo dei tratti osservati.
Questo particolare in qualche modo indirizza la ricerca (o comunque ne rafforza la tendenza) anche verso l'aspetto evolutivo, e quindi l'obiettivo della ricerca si sposta sempre più dal tentativo di mostrare una certa correlazione statistica tra tratti della persona (o fra tratti e comportamenti), a capire l'origine e la possibilità di cambiamento dei costrutti studiati tramite pratiche didattiche. Il lavoro di Yusof e Tall (1999) è focalizzato proprio su questo obiettivo e i risultati sono molto interessanti: innanzitutto gli autori alla fine del loro corso sperimentale di problem-solving osservano un cambiamento di atteggiamento e convinzioni nella direzione desiderata dagli insegnanti[18]. Il risultato è importante anche perché è uno dei pochi studi fatti a livello universitario: molti pensano che ormai a questo livello educativo non si possa intervenire.
Inoltre un'altra considerazione importante dello studio di Yusof e Tall è la verifica che i cambiamenti che ci sono stati non durano nel tempo una volta che si abbandona la sperimentazione per tornare all'approccio tradizionale (p.76): *comparing the situation from before the problem-solving course with the status after six months back at regular mathematics lectures, many of the indicators revert back towards their old*

[18]In questo modo superano anche il problema di stabilire cosa significhi avere un atteggiamento o delle convinzioni positive nei confronti della matematica. Limitandosi all'ambiente universitario in cui la ricerca è avvenuta è naturale definire come cambiamento positivo quello desiderato dagli insegnanti (p.69): *we established a 'desirable direction of change' by asking the staff to say first what attitudes they* expected *students to have and then what they* preferred.

position. Tornerò su questo punto cercando di spiegarlo attraverso il modello di sistema di convinzioni che descriverò nel prossimo capitolo.

Un altro segnale importante del cambiamento della ricerca sui fattori affettivi è il fatto che crescono gli studi sull'interazione tra fattori affettivi e fattori cognitivi: ovvero i due domini non sono visti più come distinti e complementari. È sempre più spesso superata una visione di questo tipo: se un'interpretazione puramente cognitiva non funziona allora proviamo con una spiegazione di carattere affettivo. I due domini vengono visti come facce della stessa medaglia che si completano (e le convinzioni rappresentano un ponte tra questi due domini) e che, insieme, forniscono più strumenti per l'interpretazione di comportamenti. Questa interazione viene rappresentata attraverso modelli (per esempio Goldin, 2000) e viene spiegata da vari punti di vista: dalla psicologia sociale fino alla neuro-scienza (Evans, 2000; Schlöglmann, 2002).
È curioso notare che Mason, Burton e Stacey già nel 1982 nell'introduzione del loro libro sul pensare matematicamente affermavano che (p.IX): *experience in working with students of all ages has convinced us that mathematical thinking can be improved by* [...] *linking feelings with action.*
D'altra parte un parere autorevole sull'importanza di non separare fattori affettivi e cognitivi lo aveva già dato Vygotskij molti anni prima (1954, p.369): *Consideriamo il rapporto tra intelletto ed affettività. La loro separazione come materia di studio è la maggior debolezza della psicologia tradizionale poiché essa fa apparire il processo del pensiero come un flusso autonomo di 'pensieri pensanti se stessi', separati dalla pienezza della vita, dagli interessi e dai bisogni personali , dalle inclinazioni e dagli impulsi di colui che pensa. Tale pensiero separato deve essere considerato o come un epifenomeno insignificante, incapace di cambiare alcuna cosa nella vita o nella condotta di una persona, o come una specie di forza primordiale che esercita un'influenza sulla vita personale in modo inspiegabile e misterioso. Non esiste soluzione al problema della causa e dell'origine dei nostri pensieri, poiché l'analisi deterministica richiederebbe una chiarificazione delle forze motrici che dirigono il pensiero in questo o in quel canale. Nello stesso modo, la vecchia maniera di accostarsi al problema preclude ogni studio fecondo del processo opposto, l'influenza del pensiero sulla vita affettiva e sulla volizione. L'analisi per unità indica il modo di risolvere questi problemi di importanza vitale. Dimostra l'esistenza di un sistema dinamico del significato nel quale si uniscono l'affettivo e l'intellettuale. Dimostra che ogni idea comporta un mutamento nell'atteggiamento affettivo verso la parte di realtà cui si riferisce. Ci permette inoltre di tracciare*

il percorso che va dai bisogni e dagli impulsi di una persona fino alla direzione specifica dei suoi pensieri, ed il percorso inverso, dai pensieri al suo comportamento ed alla sua attività.
Potremmo dire che per un certo periodo la ricerca ha cercato di mostrare che il dominio affettivo non è *un epifenomeno insignificante, incapace di cambiare alcuna cosa nella vita o nella condotta di una persona* e poi in un secondo momento, quando anche nuovi modelli di apprendimento (come quello costruttivista) hanno facilitato l'accettazione di questa idea, si è concentrata a cercare di rendere meno *inspiegabile e misterioso* il modo in cui i fattori affettivi influenzano attività come l'apprendimento o l'insegnamento.

CAPITOLO III

Le convinzioni in educazione matematica

1. Premessa

In questo capitolo l'attenzione si sposta sulle convinzioni e sulle mie assunzioni e prese di posizione: citerò quindi lavori di cui ho già parlato e no sottolineando vicinanza e differenze dal mio punto di vista.
È importante, a mio modo di vedere, per capire la storia della ricerca sulle convinzioni in educazione matematica distinguere due momenti di tale ricerca:

- Il primo agli inizi degli anni 80 in cui per la prima volta si parla di convinzioni ma nell'ambito di ricerche sul problem-solving. Cobb (1985), Schoenfeld (1985), Silver (1982) convinti dell'insufficienza delle teorie esistenti per interpretare alcuni comportamenti riscontrati in ambito problem-solving matematico, introducono in maniera anche vaga il concetto di *belief*. In qualche modo queste ricerche possono essere prese come punto di partenza e *dimostrazione* del fatto che l'interpretazione di alcuni comportamenti matematici basata sulle convinzioni sia convincente: in alcuni casi molto più che quella puramente cognitiva.
- Una seconda fase comincia con i lavori di McLeod (1989, 1992) che, preso atto delle interpretazioni convincenti dei lavori precedenti, comincia a cercare di inquadrare la ricerca e di costruire una teoria intorno a questo nuovo costrutto e di interpretare nuovi episodi partendo dall'assunzione che le convinzioni giochino un ruolo fondamentale.

Come si può intuire il punto di vista è molto diverso, tra l'altro le ricerche del secondo tipo sono state affrontate con in mente due paradigmi diversi: quello *normativo*, tendente a stabilire dei rapporti di causa-effetto tra convinzioni e comportamento, e quello *interpretativo*, che

considera le convinzioni come un costrutto dell'osservatore [1] utile come strumento di interpretazione del comportamento. Quest'ultima posizione ha una base di forza essenziale nelle ricerche del primo tipo in quanto, come detto, in queste il costrutto di convinzione è stato introdotto proprio per interpretare comportamenti.
Mi sembra essenziale, a questo punto, riportare due degli esempi più famosi tratti da ricerche del primo tipo, proprio perché mostrano la necessità di andare oltre il puramente cognitivo e la *forza* dell'interpretazione basata sulle convinzioni (tra l'altro è interessante che siano esempi di livelli scolari diversi):

(1) **Scenetra** (Cobb, 1985):
Scenetra è una bambina di seconda elementare. Assieme a Tyrone fa parte di un gruppo di 6 alunni coinvolti in una sperimentazione. La maestra vuole riconoscere se la bambina è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Il suo compagno Tyrone nell'eseguire addizioni ha dimostrato di utilizzare tale strategia in modo spontaneo. L'insegnante scrive quindi, una sotto l'altra, le due espressioni: $34 + 9 = 43$ e $34 + 11 =$. Alla richiesta di trovare il risultato dell'ultima espressione, Scenetra risponde '45', dicendo di aver trovato tale risultato sommando i due numeri 34 e 11 nel modo usuale. Sollecitata dall'insegnante, dice di non aver potuto utilizzare l'espressione precedente, anzi rimane visibilmente turbata quando l'insegnante le chiede di risolvere un compito analogo, invitandola esplicitamente a mettere in relazione somme note e incognite. All'insegnante di Scenetra e all'assistente presente alla sessione, Marva, viene in mente che una causa del blocco della bambina possa essere il fatto che Scenetra ritiene poco corretto ottenere il risultato utilizzando una *scorciatoia* piuttosto che l'algoritmo imparato a scuola. L'insegnante si rivolge allora alla bambina chiedendole: 'Secondo te, come farebbe Marva?' Dopo un attimo di esitazione, Scenetra risponde, collegando senza difficoltà somme note e incognite. Per assicurarsi che la bambina utilizzi effettivamente la relazione fra le espressioni e non esegua invece mentalmente la somma, l'insegnante scrive una prima espressione scorretta:

[1] D'altra parte, come vedremo, lo stesso Green (1971) nella costruzione del suo modello di convinzioni, descrivendo i sistemi di convinzioni parla esplicitamente di metafora. L'idea delle convinzioni e degli atteggiamenti come un costrutto del ricercatore è poi ripresa da Ruffel, Mason e Allen (1998).

34+14 = 49 e, sotto, aggiunge l'espressione: 32+15 =. Chiede quindi: 'Come farebbe Marva?' E Scenetra:'...48'. Insegnante: 'Quanto hai aggiunto e tolto? Come ha fatto Marva?' Scenetra: 'Lei ha tolto 2 e poi aggiunto 1.' Quest'ultima soluzione in particolare, relativamente sofisticata, dimostra che le strategie spontaneamente utilizzate da Scenetra all'inizio della sessione non erano dovute a mancanza di competenze. Il comportamento della bambina, in particolare i processi risolutivi messi in atto, appaiono guidati dalla convinzione che forme abbreviate di soluzione non hanno la stessa legittimità dell'algoritmo standard, almeno in contesto scolastico. Tale comportamento nella sua globalità suggerisce in definitiva l'interpretazione che il *fallimento* iniziale di Scenetra nel mettere in relazione fatti aritmetici non era dovuto alla mancanza di risorse disponibili, ma al blocco causato dalle sue convinzioni, che in particolare inibivano a priori le possibilità di utilizzare conoscenze e abilità seppure disponibili.

(2) **Il cerchio e le rette tangenti** (Schoenfeld, 1985*a*):
L'osservazione da cui parte Schoenfeld è che per riuscire a risolvere problemi di matematica non è importante solo quello che si conosce, ma come se ne fa uso. Questa capacità sottolinea l'importanza della metacognizione nei due aspetti di: consapevolezza delle proprie risorse e attivazione di processi di regolazione o di controllo. I processi di controllo però, ed in generale le decisioni prese nell'ambito del problem solving, avvengono nel contesto delle convinzioni che il soggetto ha (p.45): *Belief systems are one's mathematical world view, the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks. One's beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establish the context within which resources, heuristics, and control operate.*
In particolare Schoenfeld sottolinea proprio il fatto che un'interpretazione puramente cognitiva sia convincente solo in casi molto particolari (p.37): *The point here is simply that 'purely cognitive' behavior - the kind of intellectual performance characterized by discussion of resources, heuristics, and control alone - is rare. The performance of most intellectual tasks takes place within the context established by one's perspective regarding the nature of those tasks. Belief systems shape cognition, even when one is not consciously aware of holding those*

beliefs.
L'esempio divenuto poi classico da lui proposto è tratto proprio da un'attività di problem solving condotta con studenti universitari volontari che nella scuola superiore avevano seguito con ottimi risultati corsi di matematica. Gli studenti hanno appe-

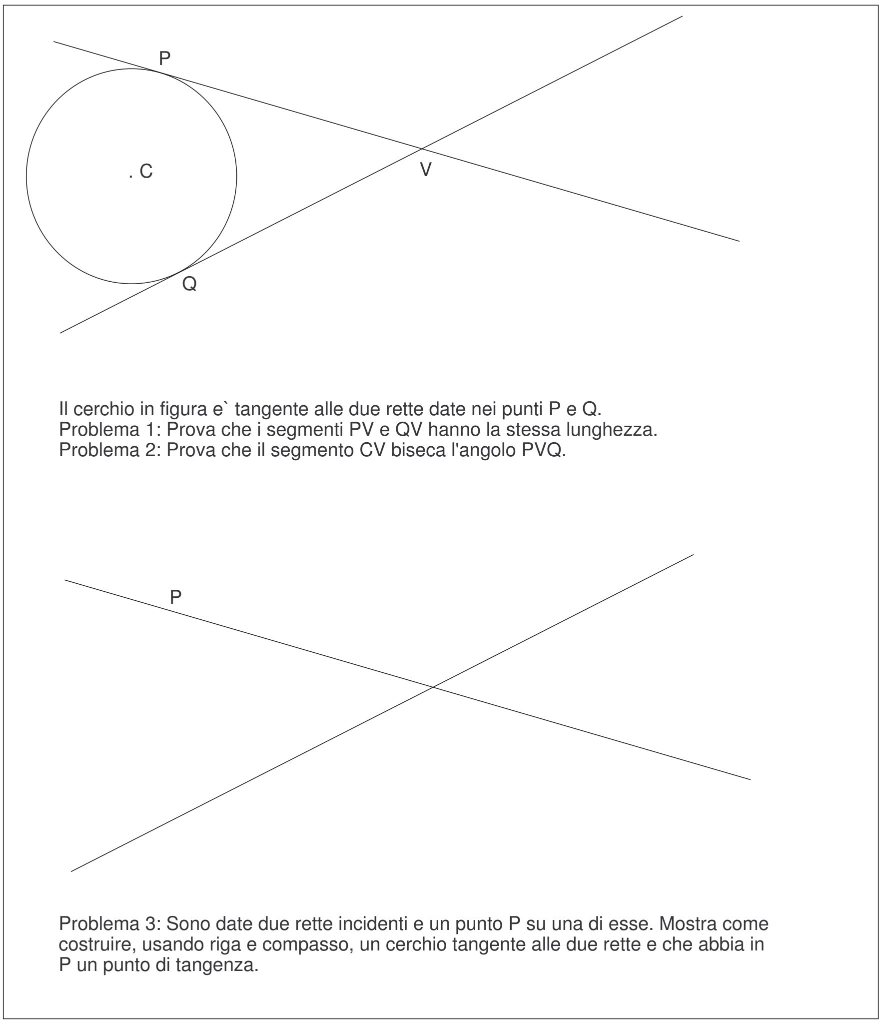


FIGURA 1

na risolto con successo i problema 1 e 2 illustrati in figura 1, viene quindi loro proposto il problema 3. Il 30 per cento degli studenti che avevano risolto senza difficoltà i primi due problemi di dimostrazione congetturano che il centro del cerchio è il punto medio del segmento che unisce P con il suo *opposto* Q con disegni approssimativi tipo quello in figura 2. Schoenfeld

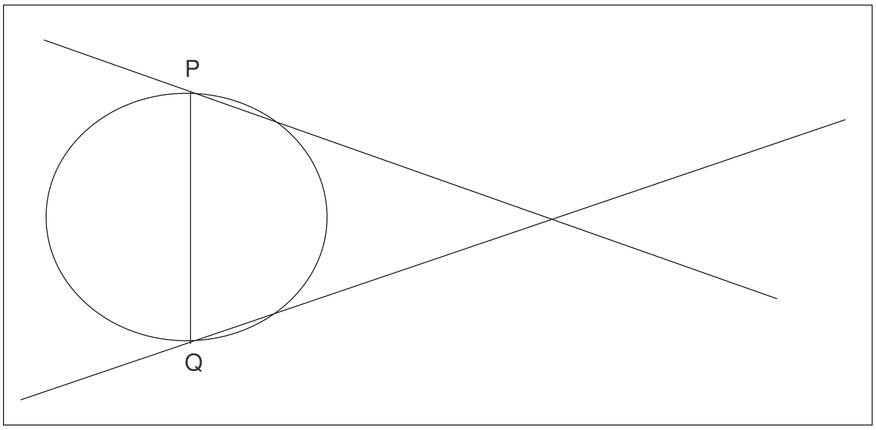


FIGURA 2

conclude argomentando i limiti di una spiegazione in termini puramente cognitivi di questo comportamento, e proponendo una spiegazione alternativa nella quale introduce una sua definizione del termine belief come 'mathematical world view' (p.43−44): *That is, for these students, mathematical argumentation is not seen as being relevant to the processes of discovery needed for solving construction problems. Thus is simply not called upon. There are some delicate issues regarding the use of the term belief in this context, especially when a stronger version of the second explanation is couched in language such as 'the students believe proof to be irrelevant to the discovery process.' In my opinion such statements merit serious consideration...The term belief itself is controversial and needs to be modified to some degree. The point of departure, however, should not be controversial: one's mathematical world view shapes the way one does mathematics. It is in the broad sense of a mathematical world view that the term belief systems will be used.*
Sempre nello stesso lavoro Schoenfeld cerca di spiegare anche l'origine di tali convinzioni (p.157): *students abstract a 'mathematical world view' both from their experiences with mathematical objects in the real world and from their classroom experiences with mathematics. Some aspects of their mathematical*

world view may be unarticulated and other aspects may be codified as overt beliefs. These perspectives affect the ways that students behave when confronted with a mathematical problem, both influencing what they perceive to be important in the problem and what sets of ideas, or cognitive resources, they use.

Mi sembrano significativi anche i due seguenti episodi tratti dalla mia esperienza didattica personale: il primo è relativo all'anno accademico $1999-2000$ in cui ho tenuto le esercitazioni per il corso di Matematica Discreta ad Informatica.
Durante l'anno ho raccomandato più volte di controllare tramite teoremi di esistenza (p.e. teorema cinese dei resti) l'esistenza di una soluzione di un sistema di congruenze, prima di calcolare le effettive soluzioni laddove esistessero. Al compito di esame uno studente risolve il sistema di congruenze trovandone una soluzione e a quel punto, ricordandosi della mia esortazione, dimostra coi teoremi di esistenza che il sistema stesso è risolvibile! In questo modo lo studente dimostra di conoscere il teorema e di saperlo applicare, ma anche come l'*esigenza* di applicarlo sia in qualche modo *esterna*. Il suo probabile ragionamento è tutt'altro che illogico:

- Ad un compito c'è sempre un esercizio con un sistema di congruenze.
- Il professore vuole vedere se sono in grado di risolvere sistemi di congruenze.
- Quindi il sistema proposto sarà risolvibile.

Questo ragionamento è rinforzato dall'esperienza: nei compiti passati il sistema era sempre risolvibile.
Il secondo episodio è relativo all'anno accademico $2000-2001$ e si riferisce alle interessanti, e per un certo verso inaspettate, soluzioni degli studenti del seguente esercizio proposto in un compito per il corso di Linguaggio e Metodi della Matematica del primo anno di Informatica:
Consideriamo la seguente congruenza:

$$15x \equiv 3\ (a)$$

(1) Determinare per quali $a \in \mathbb{N}$ il sistema ha soluzioni intere.
(2) Scegliere un $n > 12$ per cui il sistema ha soluzione e trovarne tutte le soluzioni.

La seconda domanda vuole essere in qualche modo di aiuto. Quelli che conoscono la condizione di esistenza di soluzioni di una congruenza scrivono giustamente che la condizione necessaria e sufficiente affinché la congruenza sia risolubile è che il massimo comun divisore tra 15 e a divida 3. Però come ci aspettavamo molti deducono da questa condizione che a sia della forma $3k$. Ora il primo numero di questa forma che è maggiore di 12 è 15, che non verifica ovviamente la condizione che il massimo comun divisore tra lui e 15 divida 3. Questo dovrebbe servire a far capire, a chi sbaglia in questo senso, che l'espressione per a ricavata dalla condizione $M.C.D.(a, 15)$ divide 3 è scorretta. Inaspettatamente quello che accade è che, tra quelli che hanno sbagliato, molti riescono a trovare una soluzione e quelli che non la trovano, lasciano il procedimento a metà convinti di aver sbagliato qualcosa nell'applicazione dell'algoritmo per la ricerca della soluzione stessa.

Una delle critiche più diffuse alla ricerca sulle convinzioni è quella sostenuta da Lester (2002) che sottolinea il pericolo della *circolarità* della ricerca sulle convinzioni. Ma cosa si intende per circolarità? Da una parte si tenta di mostrare che le convinzioni sono importanti per il comportamento, dall'altra alcuni studi tentano di dedurre convinzioni dal comportamento: è chiaro che questa seconda operazione è possibile se assumiamo l'importanza dei beliefs nel comportamento matematico, non se vogliamo dimostrarla.
È importante chiarire questo aspetto perché altrimenti la ricerca sulle convinzioni lascia spazio a questioni apparentemente irrisolvibili. Lester (2002) sottolinea proprio questo punto e parla di ragionamento circolare (p.346): *a basic assumption is that beliefs influence peoples'thinking and actions. However, it is also often assumed that beliefs lie hidden and so can be studied only by inferring them from how people think and act. For researchers to claim that student behave in a particular manner because of their beliefs and then infer the students' beliefs from how they behave involves circular reasoning. The reasoning goes something like this:*
Question: How do you know that students'beliefs influence how they do mathematics?
Answer: Because in our study students did mathematics in a certain way.
Question: But how do you know that the students'beliefs contributed to this behavior?
Answer: Because they would not have behaved this way if they did not hold these beliefs.
La forza di questo ragionamento sta nel fatto che la ricerca sui beliefs ha sempre mostrato un certo senso di inferiorità verso altri tipi di ricerca (dovuto forse alla presunta inosservabilità dei costrutti studiati

o meglio della presunta osservabilità di altri costrutti tipici di altri studi come quelli cognitivi) che ha come conseguenza quella di cercare di portare sempre nuove evidenze a risultati che potrebbero essere assunti a partire da ricerche precedenti[2]. Ma ben più evidente è la sua debolezza se letto da un punto di vista interpretativo e non normativo. Non si tratta di fissare dei rapporti di causa-effetto ma di dare modelli di interpretazione che possono risultare più o meno convincenti. Proprio il *non giocare in difesa* rivela la debolezza del ragionamento, se infatti ragioniamo da un punto di vista normativo, di causa-effetto, il *giochino* funziona con qualsiasi tipo di argomento, anche i classici studi cognitivi:
Domanda: Come sai che quello studente non ha le conoscenze?
Risposta: Perché nel nostro studio lo studente si comporta in un determinato modo.
Domanda: Ma come sai che la mancanza di conoscenze contribuisce a questo comportamento?
Risposta: Perché non si sarebbe comportato in questo modo se non avesse avuto questa mancanza di conoscenza.
Fatta l'analogia è facile *smascherare il trucco* del ragionamento di Lester, l'errore è nell'usare il verbo *know* piuttosto che *interpret*, ma questo in generale e non solo nel caso particolare della ricerca sulle convinzioni.
La cosa singolare è che lo stesso Lester nelle critiche sugli strumenti di osservazione self-report, in uno *spirito puramente interpretativo*, usa come ipotesi che le risposte degli studenti o insegnanti siano influenzate dalle loro convinzioni su quale sia, in un certo senso, la *risposta corretta* (p.348): *It is difficult to determine whether the teachers' and students' beliefs actually changed as a result of the experiences or if they simply told the interviewers what they thought the interviewers wanted to hear.*
Illuminante per descrivere la differenza tra i due paradigmi e per mostrare come per la complessità dei comportamenti sia poco credibile quello normativo è l'esempio riportato da Watzlawick, Beavin e Jackson (1967, p.22): *Se il piede di un uomo che sta camminando colpisce un sasso l'energia viene trasferita dal piede al sasso. Il sasso verrà messo in movimento e spostato finchè non si fermerà in una posizione che è determinata esclusivamente da fattori come la quantità di energia trasmessa, la forma e il peso del sasso, la natura della superficie su cui è rotolato. Se l'uomo dà un calcio a un cane anzichè ad un sasso, il cane può saltare su a morderlo. In questo caso il rapporto tra il calcio e il morso è di un ordine diverso.*

[2]Tra l'altro questo fatto come è facilmente intuibile rallenta lo sviluppo della ricerca perché in qualche modo è un partire sempre dall'inizio.

Potremmo dire che il cane può reagire con un morso, può scappare, può ringhiare, etc., in definitiva può mettere in atto una serie di comportamenti che *dipendono* dalla sua storia, tanto che alla luce di quella storia possiamo *capirli*, anche se non prevederli con certezza.
Nonostante i ricercatori in educazione matematica abbiano per lo più abbandonato il paradigma normativo in favore di quello interpretativo, la ricerca si porta dietro eredità pesanti di tale paradigma: frenesia di misurare e di evidenziare rapporti di causa-effetto, piuttosto che semplici associazioni. Nel paradigma interpretativo invece si sottolineano associazioni, patterns, senza pretendere di stabilire nessi causali validi per tutti, ma cercando di capire i motivi delle azioni del singolo individuo. In questo modo la *storia* del singolo individuo diventa importante, non solo se è frequente e quindi rappresentativa, ma anche per il solo fatto di essere possibile: *capire* una storia può aiutare a capirne altre. Naturalmente parallelamente a questa presa di posizione è aperto il dibattito su come garantire la qualità e significatività di una ricerca di tipo interpretativo, per evitare il rischio di far passare qualsiasi *storia* per ricerca.
Per superare il rischio di circolarità, riportato da Lester, la questione diventa quindi: si può assumere l'importanza dei beliefs nel comportamento? La risposta è sì, se ci si pone nell'ottica di un paradigma interpretativo[3], e la sua *consistenza* è dovuta proprio alle ricerche del primo tipo che hanno introdotto questo costrutto solo una volta che con le interpretazioni messe a disposizione dalla ricerca non riuscivano a spiegarsi alcuni fenomeni. Non è un caso che Lester faccia risalire l'inizio degli studi sulle convinzioni a McLeod (1992), il suo errore è saltare il momento e il perché un tale costrutto venga introdotto. Il famoso articolo di McLeod può segnare l'inizio della ricerca specifica sui beliefs ovvero, una volta dimostrata l'importanza dei beliefs grazie agli studi precedenti, alcuni ricercatori studiano questo costrutto partendo dall'assunzione che possa spiegare vari fenomeni. Il compito di questa seconda fase della ricerca non dovrebbe essere più quello di mostrare l'importanza dei beliefs in educazione matematica ma di sviluppare una teoria per un costrutto che è stato dimostrato poter essere importante in fase interpretativa.
La forza della teoria è testimoniata allora dalla generalizzazione della capacità interpretativa, ovvero l'interpretazione non solo è verosimile nei casi particolari per cui il costrutto è stato introdotto, ma è convincente anche per interpretare altri fenomeni: sia passati che a modo

[3]L'esempio del cane mostra come un paradigma normativo sia in ogni caso incapace di descrivere la complessità del comportamento.

di vedere del ricercatore avevano avuto interpretazioni insoddisfacenti, sia futuri. In poche parole il modello del ricercatore trova la sua forza nell'applicabilità e nella capacità di fornire interpretazioni verosimili ad osservazioni di comportamenti difficilmente interpretabili da un punto di vista puramente cognitivo[4].

I primi studi, nella loro importanza, lasciano un'eredità *pesante*, in quanto, avendo mostrato la forza interpretativa del costrutto convinzioni inducono nuovi studi e la necessità di *costruire* una teoria intorno al costrutto stesso. Innanzitutto è sentito il bisogno di superare la definizione potremmo dire *intuitiva* di convinzioni che troviamo negli studi di primo tipo. Inoltre una volta riconosciuta l'importanza del costrutto si tenta di osservarlo, misurarlo o descriverlo a seconda dei paradigmi che guidano la ricerca. Queste due necessità, centrali nella ricerca sulle convinzioni che si è sviluppata in seguito agli studi di primo tipo, si portano dietro varie problematiche, alcune delle quali tuttora irrisolte: proprio all'evidenziazione di queste problematiche è dedicato il resto del capitolo.

2. Il problema della definizione delle convinzioni

Come detto il problema della definizione è una costante della ricerca più recente sui fattori affettivi e in particolare della ricerca sulle convinzioni.

In realtà più che di *problema* dovremmo usare il plurale e parlare di problemi connessi alla definizione di convinzioni: infatti da una parte in letteratura esistono lavori in cui non c'è una definizione esplicita, dall'altra non c'è accordo tra i vari studiosi su una definizione di convinzione (Pehkonen e Furinghetti, 2002). Ma non è tutto: un altro problema è il tentativo di distinguere, e quindi di demarcare, le convinzioni da altri costrutti, primo tra tutti la conoscenza (Thompson, 1992).

McLeod D. e S. (2002) attribuiscono le differenze nelle definizioni presenti in letteratura al fatto che spesso i ricercatori parlano ad auditori diversi e quindi quello che varia è in primo luogo il tipo di definizione, di cui individuano tre tipologie a seconda del grado di specializzazione dell'interlocutore e quindi dell'obiettivo comunicativo: informale, formale o estesa (quest'ultima inizia come una definizione formale, ma

[4]Anche qui è bene, per l'ennesima volta, precisare che una teoria non cancella o sostituisce un'altra in una visione interpretativa dell'educazione matematica. Certi fenomeni saranno meglio interpretati in un'ottica cognitiva, altri in una affettiva o metacognitiva, altri ancora in quella linguistica. Per quanto mi riguarda la complessità del comportamento umano suggerisce che il più delle volte un solo punto di vista non sia sufficiente e che quindi concorrano aspetti tra loro distinti.

continua in un linguaggio più tecnico per la descrizione più accurata del termine). Sostengono quindi che proprio alla luce del fatto che ricercatori diversi si possono rivolgere a pubblici diversi e quindi avere obiettivi comunicativi diversi (p.119): *flexibility is not only acceptable, but even advisable.* Concordo con questa conclusione anche se in realtà la difficoltà di definire le convinzioni è intrinseca: il problema rilevato da McLeod è di comunicazione[5], ma non spiega per esempio perché nello studio di Pehkonen e Furinghetti (2002), in cui i vari ricercatori avevano gli stessi interlocutori specializzati, le differenze nella definizione di convinzioni non sono superate[6]. Questo perché l'obiettivo comunicativo non è l'unico obiettivo che può differire tra i vari ricercatori: in una visione della disciplina come problem-led (Zan, 1999) è il problema che dirige la metodologia e quindi anche la scelta delle definizioni. Se il costrutto serve ad analizzare problemi complessi (come l'interpretazione di difficoltà), il costrutto stesso dovrà essere articolato nella sua definizione: per esempio non ci si potrà limitare a considerare il fatto che ad una persona la matematica piaccia o meno e quindi riassumere le convinzioni verso la matematica come un indice di gradimento. Ma questo approccio esiste in letteratura ed ha una sua valenza se il fenomeno che si vuole analizzare o prevedere è quello di scelta: ovvero che relazione c'è tra questo indice di gradimento e la scelta di corsi matematici nel proseguo della carriera scolastica.
Una volta fissati gli obiettivi e quindi in qualche modo indirizzato da questi il grado di complessità che dovrà avere il costrutto, ci si concentra sul problema comunicativo: non è detto che un costrutto articolato e complesso debba avere una definizione complessa nel senso di difficilmente accessibile ai non specialisti. È una decisione che dipende sia dagli interlocutori che vogliamo *raggiungere* sia dai gusti e dalle abitudini del ricercatore, come è testimoniato dal fatto che nello stesso volume (Leder e Forgasz 2002) ci siano tipologie di definizione di convinzione profondamente diverse, anche se tutte con la premessa che il costrutto in questione sia molto articolato:

[5] Problema rilevante in educazione matematica in cui molto spesso alcuni lavori sono inaccessibili ai ricercatori non specializzati.

[6] Gli autori stessi infatti sottolineano l'importanza di caratterizzare il contesto e gli obiettivi prima di scegliere una definizione del costrutto (p.53): *we would drop the idea of a multipurpose characterization suitable for all the possible fields of application* [...] *and refer our considerations to a given context, a specific situation and population. Also it is useful to link a given characterization to the goals that we have in mind when using the concept we are characterizing.* Contextualization *and* goal-orientation *make the characterization an* efficient *one.*

- Op'T Eynde e altri (p.24): *Students'mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true, that influence their mathematical learning and problem solving.*
  Questa definizione non è tecnica e perciò è accessibile a molti e ha due particolarità: è *circolare*, ovvero usa un altro termine *tecnico* come *conception* per definire le convinzioni e nella definizione stessa si assume come caratteristica che le convinzioni siano quelle concezioni che influenzano l'apprendimento. Cioè non si definisce il costrutto pensando poi di mostrare che questo influenza il comportamento matematico degli studenti, ma si assume per definizione tale influenza. Questa assunzione ha solo una valenza comunicativa, infatti in termini matematici si dovrà poi mostrare che l'insieme delle concezioni che influenzano l'apprendimento non è vuoto e anche che non coincide con costrutti già studiati (in questo caso infatti sarebbe poco costruttivo introdurre una nomenclatura diversa ad un costrutto già studiato).
- Törner (p.82): *a belief B constitutes itself by a quadruple $B = (O, C_O, \mu_i, \epsilon_j)$, where O is the debatable belief object, C_O is the content set of mental associations (what traditionally is called a belief), μ_i is the membership degree function(s) of the belief, and ϵ_j is the evaluation map(s).*
  Questa definizione usa nozioni (come mappe di valutazione continue) e simboli prettamente matematici ed è molto articolata: se da una parte questo rende la complessità del costrutto descritto, dall'altra questa definizione sposta l'attenzione sulle definizioni delle componenti O, C_O, μ_i, ϵ_j. È evidente che questa definizione ha una valenza quasi esclusivamente teorica: appunto di considerare la complessità del costrutto e in particolare di sottolineare con la componente ϵ_j anche la componente affettiva legata ad una certa convinzione. D'altra parte dal punto di vista pratico diventa molto difficile indagare e osservare in profondità tutte le quattro componenti, in particolare μ_i che è la misura del livello di certezza, di consapevolezza e di attivazione.
- Goldin (p.59): *beliefs are defined here to be multiply-encoded, internal cognitive/affective configurations, to which the holder attributes truth value of some kind (e.g. empirical truth, validity, or applicability).*
  Questa definizione, come la precedente, è piuttosto tecnica ma

abbandona la notazione matematica. Si può notare che anche in questo, come nel primo caso, la definizione si *appoggia* su termini (in particolare *configurazioni*) su cui è difficile credere che ci sia condivisione di significato. È interessante notare una particolarità che distingue questa dalle altre due definizioni: ovvero l'individuazione di diversi criteri di verità per cui una certa configurazione si può dire essere una convinzione della persona.

È ovvio che non esistono definizioni *giuste* o *sbagliate*, come più volte detto dipende dai gusti, dagli obiettivi del ricercatore. A mio modo di vedere è preferibile una definizione il più accessibile possibile, poco tecnica e quindi del primo tipo, per dare un'idea anche vaga dell'oggetto di studio, e poi in seguito cercare di descrivere una modellizzazione del costrutto che permetta di risalire alle sue caratteristiche peculiari:
Le convinzioni di una persona su un oggetto sono le sue idee, valutazioni riguardanti l'oggetto stesso delle convinzioni, siano essi espliciti o impliciti.
È evidente che una tale definizione è molto vaga (e in qualche modo anch'essa *circolare*), ma proprio il fatto di non essere dettagliata è in qualche modo un suo punto di forza per due motivi: innanzitutto la rende accessibile a chiunque e inoltre questo non impedisce di entrare più in dettaglio in seguito con ulteriori caratterizzazioni[7].
Questa definizione si differenzia da quella di Op'T Eynde e altri, innanzitutto perché non fa riferimento a criteri di verità: non sono infatti convinto che per le convinzioni che generalmente vengono considerate come oggetto di studio sia sempre coerente o quantomeno rilevante affermare che la persona le ritiene vere. Penso che questa attenzione particolare ai criteri di verità sia dovuta alla volontà di confrontare e distinguere le convinzioni dalla conoscenza, ma tornerò in seguito su questo punto.
Un'altra distinzione profonda dalla prima definizione citata è quella di non considerare come convinzioni solo quelle che influenzano l'apprendimento, questo perché a mio modo di vedere le rende indefinibili.
È innegabile che questa definizione è piuttosto vaga, ma serve solo come introduzione al costrutto convinzioni che verrà approfondito attraverso la descrizione delle sue caratteristiche.
Per completezza riporto anche l'interessante definizione proposta da Cobb (1986, p.4): *beliefs can be thought of as assumptions about the nature of reality that underlie goal-oriented activity.*

[7]Si può notare che anche le due definizioni tecniche non sono di per sé *autosufficienti* e anch'esse necessitano di ulteriori caratterizzazioni.

2.1. Distinzione tra convinzioni e conoscenza. Una costante delle discussioni teoriche sulle convinzioni è la ricerca di caratteristiche che le distinguano dalla conoscenza. Giustamente non avrebbe senso definire un nuovo costrutto se questo coincidesse con uno già esistente. Detto questo bisogna osservare (e non è solo una mia *convinzione*, ma discussioni filosofiche millenarie lo dimostrano) che definire la conoscenza è un'impresa molto più difficile di quella di definire le convinzioni. È infatti indubbio che la conoscenza si porta dietro una connotazione di oggettività, che a differenza delle convinzioni, ha come conseguenza che sia poco accettabile che ci siano definizioni differenti del costrutto stesso e a maggior ragione che a partire da una definizione non si riesca a dire quali oggetti hanno le caratteristiche volute. In particolare la conoscenza dovrebbe essere tale a prescindere dalla persona: qualcuno cerca di considerare questo carattere affermando che la conoscenza è valida con una probabilità del 100%[8]. Il problema, di natura forse filosofica, è che i criteri di validità possono essere soggettivi ma non solo anche se stabilissimo dei criteri oggettivi, per avere un'oggettività totale dovremmo essere sicuri che questi criteri siano controllabili dall'intera comunità, altrimenti per quelli che non controllano questi criteri si tratta di niente di più di quella che viene chiamata *fede*.
Queste considerazioni di natura puramente filosofica sono servite solo per sfiorare un argomento che è preso molto sul serio all'interno della ricerca sulle convinzioni (se ne trovano discussioni già in Thompson 1992, fino ai molti contributi che toccano l'argomento sul volume più volte citato di Leder e altri 2002).
Penso che il tentativo più diffuso di distinguere i due costrutti usando un concetto intuitivo di probabilità sulla base del fatto che la conoscenza debba essere vera con probabilità 100% mentre le convinzioni possano essere tenute anche con probabilità più bassa sia discutibile per almeno due motivi:

(1) Si sposta l'incertezza sulla definizione di verità o di validità di un enunciato e comunque sul concetto di probabilità[9].
(2) Molte proposizioni che vengono considerate convinzioni non si potrebbero giudicare in base a questo criterio o comunque non potrebbero essere distinte dalla conoscenza in base allo

[8]Per esempio Furinghetti e Pehkonen (2002, p.43):*we can describe this property with probabilities: knowledge is valid with a probability of* 100% *,whereas the corresponding probability for belief is usually less than* 100%.

[9]Tra l'altro una delle concezioni possibili di probabilità, sviluppata soprattutto da De Finetti, è detta non a caso *soggettiva*: in questa impostazione la probabilità, vincolata ad alcune condizioni come quella di coerenza, è *il grado di fiducia nel verificarsi dell'evento.*

stesso. Penso ai giudizi sulla matematica o sull'adeguatezza della persona ad affrontare un compito: *'Sono un disastro in matematica'*, che senso ha chiedersi se questa proposizione è vera al 100%?

La difficoltà nel definire cosa può essere chiamata conoscenza ostacola quindi questo tentativo di distinguere i due costrutti. La questione, proprio perché in realtà non c'è assolutamente accordo su cosa sia la conoscenza, non mi sembra prioritaria: è infatti importante mostrare che stiamo introducendo un costrutto nuovo e non rinominandone uno già esistente, ma in questo caso quello già esistente non è ben definito. In particolare definire le convinzioni è di per sé un distinguerle dalla conoscenza.

2.2. I sistemi di convinzioni. Come detto un modo per integrare la definizione di convinzioni è proporre un modello che ne descriva le proprietà fondamentali, ovvero quelle proprietà che il ricercatore crede siano peculiari del costrutto. D'altra parte la matematica stessa studia oggetti definiti a partire dalle proprietà che si assume verifichino, come si può leggere nell'Enciclopedia Universale delle Scienze - Garzantine (2003, p.903): **matematica:** *scienza avente per oggetto (...) enti di natura non precisata in modo esplicito ma definita per mezzo delle proprietà descritte da un sistema compatibile di assiomi.*
Nel caso delle convinzioni, il lavoro di riferimento è il libro di Green (1971) in cui l'autore sottolinea come (p.$41-42$): *the important thing is to see that beliefs come always in sets or groups, never in complete independence of one another (...) in short, beliefs are gathered always as parts of a belief system.* Questa osservazione non è solo descrittiva e fine a sé stessa, è infatti evidente che il modello che costruiamo ha implicazioni sulla ricerca e su possibili interventi finalizzati ad incidere sulle convinzioni di una persona (p.42): *when beliefs are acquired, they will be acquired as parts of a belief system, and when they are modified, they will be modified as parts of a belief system. Therefore, even though the more usual approach of philosophers is to examine the nature of belief alone, it may be more important in the philosophy of education to explore the nature of sets of beliefs or beliefs systems.*
Nella costruzione del modello (che lui chiama *metafora*) dei sistemi di convinzioni (ovvero dell'insieme delle convinzioni di una persona), Green sottolinea come il considerare i sistemi piuttosto che la singola convinzione è dovuto anche alla necessità per un ricercatore non solo di indagare su *cosa* una persona crede, ma anche su *come* crede: ovvero se ci crede fortemente o no, con passione o meno, se sono consce le

ragioni per cui ha questa convinzione oppure no. D'altra parte è evidente dall'esperienza quotidiana che due persone possono credere la stessa cosa ma in modi differenti (un esempio classico può essere la religiosità diversa di molte persone credenti) o viceversa credere a due cose opposte ma con la stessa convinzione (e qui l'esperienza suggerisce di pensare ad idee politiche contrastanti). In tutti e due i casi le due persone avranno dei tratti distinti dal punto di vista delle convinzioni.
D'altra parte molti esempi possono essere portati sulla necessità di considerare sistemi di convinzioni piuttosto che convinzioni: supponiamo di sapere che una persona pensi che in matematica sia necessaria molta memoria. È evidente che se il nostro interesse non è puramente sull'immagine della matematica, ma per esempio siamo interessati alla percezione della persona delle sue possibilità di riuscire in matematica, saremo interessati anche all'idea che la persona ha della propria memoria. Come afferma Pajares (1992, p.326): *Seeing educational beliefs as detached from and unconnected to a broader belief system, for example, is ill advised and probably unproductive.*
Detto dell'importanza di considerare la struttura delle convinzioni, come sono organizzate, è arrivato il momento di elencare le peculiarità dei sistemi di convinzioni; cercherò non solo di descrivere queste caratteristiche, ma di portare delle evidenze a favore di questa modellizzazione:

(1) **Organizzazione logica delle convinzioni**: quando una persona ha una convinzione A non sempre è detto che sia in grado di spiegare perché è convinto di A. Ma spesso, quando è in grado di giustificare perché abbia la convinzione A, usa come giustificazioni altre convinzioni:
L'esame di Analisi è praticamente impossibile da superare, ci sono troppe formule e definizioni da studiare.
Questa osservazione suggerisce che i sistemi di convinzioni abbiano un certo tipo di struttura logica: alcune convinzioni, dette **derivate** sono *viste* dal soggetto come dipendenti da altre convinzioni; le altre, dette **primarie** sono viceversa quelle per cui il soggetto non può dare ulteriori ragioni.
La struttura dei sistemi di convinzioni è dunque definibile come *quasi-logica*: il quasi è dovuto al fatto che le regole di inferenza di questa logica sono totalmente soggettive e non c'è nessun motivo di condividerle con altri. Inoltre può capitare che in una persona, con il passare del tempo, due convinzioni si *scambino* i ruoli: ovvero ciò che in precedenza era primario diventi derivato e viceversa.

Questa dimensione quasi-logica può avere forti conseguenze su tentativi di intervento che abbiano l'obiettivo di cambiare convinzioni. È evidente che se l'obiettivo è cambiare una convinzione A, che nel sistema di convinzioni dell'individuo è derivata, risulteranno inefficaci interventi che non si preoccupino di incidere sulla convinzione primaria da cui la convinzione A deriva. Da qui l'importanza di riuscire a *ricostruire* i legami tra le convinzioni tenute dall'individuo. Compito molto difficile, se non è l'individuo stesso ad esplicitare certe connessioni, proprio perché non è semplice riconoscere i criteri logici personali su cui si basano i legami da individuare.

(2) **Centralità psicologica delle convinzioni**: nell'insieme delle convinzioni tenute da una persona non tutte hanno la stessa importanza e sono tenute con la stessa forza dalla persona stessa. Avendo in mente una rappresentazione spaziale[10] differenzieremo tra convinzioni **psicologicamente centrali** e **psicologicamente periferiche**. In particolare spesso le convinzioni psicologicamente centrali sono quelle su di sé, ovvero quelle che scatenano le reazioni emozionali più forti. Più la convinzione è psicologicamente centrale e meno siamo disposti a dibatterne il contenuto e quindi è più difficile cercare di cambiarla.

È importante notare come le due proprietà finora discusse: primarietà logica e centralità psicologica, siano tra loro ortogonali, cioè una convinzione può essere primaria ma psicologicamente periferica e viceversa derivata e psicologicamente centrale. Nell'esempio riportato precedentemente, è probabile che la convinzione che l'esame di Analisi sia impossibile abbia, per uno studente che si sforzi di passare l'esame stesso, una forza psicologica maggiore di credere che in Analisi ci sono troppe formule e definizioni.

(3) **Isolamento dei clusters di convinzioni**: Se consideriamo il sistema di convinzioni di un individuo possiamo immaginare di *isolare* un insieme di convinzioni che partendo da una convinzione primaria comprende tutte le convinzioni derivate secondo la struttura quasi-logica dei sistemi di convinzioni. Queste *unità* le chiameremo, per usare la terminologia di Green, **clusters** di convinzioni.

L'esperienza quotidiana (anche su sistemi di convinzioni non

[10] Green descrive un sistema di cerchi concentrici, nella parte più interna del quale ci stanno le convinzioni psicologicamente centrali

interni alla matematica) mostra come ognuno possegga, simultaneamente, convinzioni contraddittorie. Questo fenomeno è spiegabile con l'isolamento tra cluster di convinzioni; per usare le parole dello stesso Green (p.47): *It is possible to hold conflicting sets of beliefs (...) because we tend to order our beliefs in little clusters encrusted about, as it were, with a protective shield that prevents any cross-fertilization among them or any confrontation between them.*
In particolare quindi l'indipendenza tra i vari cluster di convinzioni può spiegare l'esistenza nella stessa persona di convinzioni contraddittorie. La persona stessa non è a disagio per questo, in quanto l'isolamento permette che l'incoerenza non si manifesti. A seconda delle situazioni, dei contesti, la persona farà (molto probabilmente inconsciamente) riferimento ad un certo tipo di convinzioni piuttosto che ad altre.

2.3. La categorizzazione delle convinzioni ritenute significative per l'attività matematica. Dopo aver parlato del tentativo di definire le convinzioni, di differenziarle da altri costrutti (in particolar modo dalla conoscenza) e di modellizzare i sistemi di convinzioni descrivendone le caratteristiche principali, un altro passo per fare ordine è sicuramente quello di cercare di suddividere in qualche modo *per categoria* le convinzioni che pensiamo possano influire nel comportamento di una persona in attività matematica[11] e comunque che sono state studiate in letteratura.
Questa esigenza della ricerca è evidente dal fatto che, come visto, già nei primi articoli sulle convinzioni (Schoenfeld, 1983) si parla di categorie e la discussione sulle categorizzazioni possibili continua tuttora. Tra l'altro lo stesso McLeod (1992, p.581) afferma che *mathematics education needs to develop a more coherent framework for research on beliefs.*
Molti hanno cercato di categorizzare le convinzioni significative (ovvero che si pensa possano influenzare o si assume che influenzino il comportamento in attività matematica) nei confronti della matematica, ci sono alcune sfumature diverse, ma come vedremo i modelli di categorizzazione non sono troppo dissimili tra loro: i distinguo non sono tanto sulle categorie ma sull'inserimento di particolari convinzioni in

[11]Vorrei sottolineare la sottile differenza tra questo punto di vista e quello di Op't Eynde, De Corte e Verschaffel (2002) che definiscono convinzioni sulla matematica solo quelle che influiscono sull'attività matematica. Diverso è il punto di vista di Kloosterman (1996) che proponendo il suo modello sottolinea come questo consideri (p.143) *a number of potential important factors.*

una categoria o in un'altra.
Come già detto, Schoenfeld (1983) identifica quattro categorie di convinzioni: sulla disciplina, sul contesto sociale, sul compito e su di sé.
Interessante e basata su un criterio diverso rispetto a tutti gli altri è la categorizzazione di Lewis (1990) che suddivide le convinzioni in base ai modi in cui possono essere originate. Il limite di un tale criterio è che in questo modo non è semplice individuare a quale categoria appartenga una convinzione e inoltre la stessa convinzione può stare in categorie diverse se tenuta da due persone diverse, infine non è chiaro chi stabilisca l'origine di una convinzione: è infatti accettato che spesso la persona non è conscia dell'origine di alcune convinzioni che ha. Si perde di vista in qualche modo l'obiettivo classificatorio della categorizzazione, ma si tenta di descrivere e distinguere la varietà di origini possibili di una convinzione: in particolare si sottolinea come l'origine di una convinzione sia un tratto determinante della convinzione stessa.
Le sei categorie proposte da Lewis sono: credere ad un'autorità, inferire per logica deduttiva, l'esperienza dei sensi, la sensazione che qualcosa sia vero o falso, l'intuizione razionale, l'uso personale di metodi scientifici.
McLeod (1992) considera una categorizzazione delle convinzioni che si distingue da quella di Schoenfeld per la presenza delle convinzioni sull'insegnamento della matematica piuttosto che le convinzioni sul compito.
Underhill (1988) oltre che considerare le convinzioni su di sè nel contesto sociale (cioè unire due categorie distinte nei modelli di McLeod e Schoenfeld), distingue le convinzioni sull'insegnamento e sull'apprendimento della matematica; infine è il primo che sente l'esigenza di puntualizzare che la categoria delle convinzioni sulla matematica è inerente alla matematica come disciplina: ovvero, molto probabilmente, prende in considerazione la distinzione tra convinzioni sulla matematica come disciplina e come scienza, ritenendo poco significative queste ultime.
In Op't Eynde e altri, (2002)[12] tenendo in considerazione la letteratura e i contributi esistenti sull'argomento, gli autori propongono una loro categorizzazione piuttosto articolata in cui le tre categorie principali: convinzioni sull'educazione matematica, su di sé, e sul contesto sociale, sono ulteriormente suddivise in sotto-categorie.
Prima di passare ad altri argomenti è necessario argomentare in maniera

[12]Gli autori descrivono tra gli altri anche modelli piuttosto recenti come quelli di Kloosterman (1996) e Pekhonen (1995*a*) che rispetto a quelli descritti articolano la loro categorizzazione in sotto-categorie.

più dettagliata la *carrellata* di categorizzazioni presentate. Cosa si intende solitamente per convinzioni riguardo alla matematica? E riguardo a sé o al contesto sociale?

- Le convinzioni sulla matematica: sono ovviamente dal punto di vista della specificità del ricercatore in educazione matematica le più significative e che hanno avuto, almeno inizialmente il maggior spazio. Tra l'altro come già notato molti lavori che non parlano esplicitamente di convinzioni hanno parecchie similitudini con il costrutto da noi studiato.
  Qualcuno (per esempio Schoenfeld, 1989), come detto, distingue tra convinzioni sulla matematica come disciplina scolastica e come scienza. Un'ulteriore suddivisione è possibile se si considera convinzioni *globali*, ovvero sulla matematica in generale, o convinzioni *locali* ovvero su singoli fatti matematici: una molto comune di questo tipo è la *specialità* dello 0 rispetto ad altri numeri.
  Innanzitutto come nota Schoenfeld (1992) le convinzioni sulla matematica hanno origine quasi esclusivamente dall'esperienza scolastica a differenza delle convinzioni verso altre scienze come la fisica o la chimica. D'altra parte come afferma Bombieri (2001, p.3): *La matematica è una scienza che può studiare se stessa (...) è una scienza auto-referenziale (...) la fisica, la chimica, la medicina debbono passare per il vaglio della realtà. Non così la matematica.* È clamorosamente falso, come lo stesso matematico sostiene, che la matematica non abbia legami forti con la realtà, ma molti studenti inferiscono (noi diremmo con una costruzione di tipo quasi-logico) questa convinzione dalla precedente.
  Questa osservazione sul fatto che le convinzioni sulla matematica siano di origine prettamente scolastica in qualche modo sembra *sminuire* l'importanza della ulteriore suddivisione, che alcuni tracciano, tra matematica come scienza e come disciplina scolastica visto che gli studenti sembrano poter accedere solo alla prima. In realtà non è così, molti studenti in interviste o temi, distinguono tra la matematica come scienza e la loro esperienza scolastica. E in generale le opinioni positive sulla scienza matematica che è utile per il funzionamento di ogni cosa, si tramutano in convinzioni di segno totalmente opposto sull'opprimente e avvilente attività matematica scolastica.
  A cosa può essere dovuto questo divario? E come si possono formare convinzioni su qualcosa con cui difficilmente abbiamo

a che fare da studenti come la matematica come materia di ricerca?
Una prima risposta potrebbe far ricadere le responsabilità su come la matematica viene insegnata a scuola e pensare che appunto certe pratiche didattiche *polverizzino* l'immagine positiva che la matematica come scienza avrebbe. Ma con questa interpretazione non si risponde alla seconda domanda. Dal fatto che le risposte che si ottengono riguardo alla matematica come scienza siano alla fine piuttosto simili tra loro, secondo me, si può ipotizzare che in realtà tutte queste convinzioni positive non siano altro che luoghi comuni, miti e quindi convinzioni di origine *autoritaria* (non nel senso di imposta, ma della verità del quale è garante qualcuno in cui la persona ripone fiducia riguardo all'argomento). Proprio l'origine autoritaria permette il formarsi di convinzioni su cose che non conosciamo nemmeno o comunque conosciamo poco[13] e può quindi rispondere alla seconda domanda. In qualche modo questa interpretazione *suggerisce* una risposta anche alla prima domanda. Se può essere che una persona sia consapevole di avere convinzioni molto diverse tra la matematica come scienza e come disciplina scolastica e che sia anche convinto che le due cose siano molto diverse (e in effetti sembrano forzatamente dover essere diverse), può anche essere che dato che i due tipi di convinzione hanno origine diversa (in un caso sono accettate e *prese in prestito*, nell'altro sono elaborate attraverso l'esperienza personale) stiano in cluster di convinzioni isolati e probabilmente con forza psicologica differente. In particolare quindi la persona non è né consapevole né probabilmente interessato a questa profonda differenziazione. Una prova di questo, e della verosimiglianza del modello di sistemi di convinzioni descritto: con i clusters indipendenti che sono tra loro isolati, è che a volte alcune convinzioni sulla matematica come scienza sviluppate attraverso l'esperienza scolastica contrastano con quelle di origine autoritaria: *La matematica è molto utile perché è presente in tutte le cose che usiamo quotidianamente...ma a cosa ci serve saper costruire cateti su ipotenuse?*[14].

[13]È il caso di chi per esempio porta avanti una battaglia politica senza essere conoscitore diretto della materia ma fidandosi di chi lo rappresenta.

[14]Apro una parentesi su questo esempio sottolineando come a proposito della distinzione utilità della matematica - necessità che tutti sappiano la matematica mi sembrano molto interessanti le riflessioni di Vinner (2000).

Il fatto è che la persona non si preoccupa di queste contraddizioni: sarebbe perplesso solo se tale contraddizioni si sviluppassero tra convinzioni *quasi-logicamente* legate tra loro e che quindi interagiscono.

Ci potremmo chiedere come mai solitamente le convinzioni nei confronti della matematica come scienza siano positive a differenza di quelle sulla matematica come materia scolastica. Anche qui la risposta più spontanea è che una delle persone che può fungere da autorità per quanto riguarda la matematica è l'insegnante. Ma poi leggendo i temi o intervistando studenti e adulti ci si accorge che anche molti miti sulla matematica non sono facilmente classificabili come positivi o anche solo epistemologicamente corretti. Cosa si può dire su luoghi comuni come: *la matematica non è un'opinione* o *solo i genii possono riuscire in matematica*? Sono convinzioni positive o comunque considerabili come epistemologicamente corrette? Ne dubito fortemente.

Tornando alle convinzioni sulla matematica come disciplina scolastica, queste hanno una importanza particolare: non solo perché, come detto, è ipotizzabile che nella maggior parte dei casi siano psicologicamente piu‘ forti di quelle sulla matematica come scienza, ma anche perché sono le convinzioni sull'*oggetto* che gli studenti sono convinti di dover affrontare nel loro percorso scolare ed è quindi presumibile che incidano maggiormente sul loro comportamento durante attività matematiche.

Bisogna considerare inoltre che non tutti distinguono tra matematica scolastica e matematica come scienza: l'unica matematica che conoscono è quella propria della loro esperienza scolastica. D'altra parte anche alcune pratiche e necessità didattiche fanno sì che effettivamente ci sia una grossa frattura tra matematica come scienza e matematica come disciplina. Se infatti ogni matematico sa che ci sono questioni (anche dall'enunciato molto semplice come il *famigerato* teorema di Fermat) la cui risposta è tutt'altro che immediata e per cui possono servire strumenti molto complessi dal punto di vista matematico, nella pratica scolastica raramente si propongono questioni *aperte* e quindi chi è chiamato a risolvere i problemi, sa che con i suoi mezzi può arrivare ad una risposta. Sa inoltre che questa risposta è conosciuta da chi chiede di risolvere il problema e questo può influire molto dal punto di vista motivazionale.

Tornando alle convinzioni sulla matematica come disciplina scolastica, alcune piuttosto diffuse sono:

- La matematica che si fa a scuola è inutile e spesso senza senso.
- In matematica quello che contano sono i prodotti non i processi.
- Gli argomenti di matematica sono molto vasti: ci sono molte definizioni, proprietà, teoremi tutti diversi tra loro.
- C'è un unico modo corretto di risolvere un problema di matematica.
- Tutti i problemi di matematica hanno una risposta.
- Se una persona sa risolvere un problema di matematica ci riesce in poco tempo.

È chiaro che certe convinzioni possono influire sulla motivazione e sul comportamento, perché da queste possono dipendere teorie del successo[15] di un certo tipo e di conseguenza strategie particolari per fare bene in matematica. Quello che mi preme sottolineare è che la stessa convinzione può avere origini e conseguenze diverse in persone diverse e che non è detto che da una convinzione debbano seguire determinate teorie del successo. Per esempio la convinzione che la matematica scolastica sia inutile può essere presa come causa di una bassa motivazione, ma in realtà potrebbe essere anche il frutto di uno di quei meccanismi di difesa ben descritti da Nimier (1993): ovvero lo studente in difficoltà preferisce attribuire queste difficoltà allo scarso impegno, motivato da fattori quali la presunta inutilità della matematica, piuttosto che affrontare le difficoltà stesse, convinto più o meno inconsciamente di non avere armi per superarle[16]. Analogamente la convinzione che la matematica sia utile può essere originata da fattori molto diversi tra loro; in un tema ho trovato la seguente affermazione: *la matematica era utile e fondamentale, infatti nei colloqui con gli insegnanti i genitori non potevano saltare il professore di*

[15]Le teorie del successo sono le convinzioni circa i fattori necessari per fare bene: nel caso specifico in matematica. Un lavoro importante riguardo questo tema è quello di Nicholls e altri (1990) in cui gli autori fanno un'interessante osservazione sul fatto che tali teorie del successo indirizzano gli obiettivi di una persona e quindi guidano l'impegno (p.110): *Different goals, which can be thought of as different personal criteria of success, were expected to be related to different beliefs about what one must do to succeed in mathematics.*

[16]Questo mostra come certe convinzioni sulla matematica possano derivare da convinzioni su di sé.

matematica.
Analogamente non è automatico che da una convinzione sulla matematica come quella della vastità degli argomenti segua una teoria del successo sulla necessità della memoria per riuscire in matematica: potrà dipendere per esempio dal fatto che l'insegnante voglia sapere tutti queste definizioni, teoremi, etc. o che ai compiti si possa usare appunti o manuali.

Della convinzione che in matematica ogni problema abbia una risposta abbiamo in qualche modo già parlato. È interessante notare però che esistono anche situazioni piuttosto elementari con cui si possa mettere in crisi tale convinzione. Un esempio di questo tipo lo troviamo nel libro di Borasi (1996): l'insegnante sta definendo con i suoi studenti di scuola superiore l'esponenziazione, e ad un certo punto chiede di definire 0 elevato alla 0. Gli studenti notano che applicando modelli già applicati in precedenza (con basi diverse o con le prorietà dello zero) arrivano a due risposte distinte: 0 e 1. Così l'autrice descrive questo momento (p.133−135): *The students were at first both puzzled and disturbed by this contradiction, as it presented them with a mathematical error that apparently could not be eliminated and, furthermore, they had never before encountered a similar situation in mathematics nor had recognized other limitations in the discipline (...) despite this immediate reactions of frustration, the students did not give up their attempts to 'make sense' of this situation. (...) this vignette suggests that some mathematical errors - especially those that cannot be totally eliminated - have the potential to stimulate students' reflections on the nature of mathematics.* Ma ancora più interessanti sono le reazioni dirette degli studenti coinvolti che di fronte a questa situazione esplicitano le loro convinzioni sulla matematica: Karen (p.197): *math is always a right or wrong answer, and you get to a problem in advanced math where there is neither a right or a wrong answer because there is just...it is an impossibility, yet you come across equations that have that for an answer* come Juana (p.199): *a feeling that i had that math was perfect. (...) It makes me feel good to know that even in math sometimes things don't work well, don't follow the rule. Maybe it makes me feel that math is a little bit more human.*

Un discorso a parte merita la convinzione che la matematica e quello che si fa in matematica non abbia senso. Questo

non solo per la diffusione di questa convinzione ma anche per le conseguenze profonde che a livello di comportamento e motivazione può avere tale convinzione. Skemp (1976) distingue due tipi di comprensione: quando si comprende come si fa una cosa e perché la si fa in quel modo si parla di *relational understanding* mentre quando ci si limita a conoscere come si applicano delle regole si parla di *instrumental understanding.* Similmente ci sono due modi di presentare la matematica come instrumental o come relational a seconda che ci si limiti ad insegnare ad applicare regole più o meno giustificate o si tenti di creare collegamenti tra gli argomenti proposti e di giustificare la maggior parte delle scelte fatte. Spesso ci si *adagia* su una presentazione instrumental della matematica, perché, come fa notare lo stesso Skemp, all'interno di un determinato e preciso contesto è più facile raggiungere risultati positivi (e quindi possibili gratificazioni) con un approccio instrumental[17]. Questo anche se è evidente che da un punto di vista epistemologico è preferibile un approccio relational in quanto come sottolinea giustamente lo stesso autore (p.25): *There are two kinds of simplicity: that of naivity; and that which, by penetrating beyond superficial differences, brings simplicity by unifying.*
Qualunque sia la presentazione in classe, è naturale pensare che uno studente non tenterà lo sforzo di capire il perché di quello che fa se è convinto che la matematica non abbia senso. Tra l'altro come notato un approccio instrumental è apparentemente e nell'immediato più semplice e gratificante (come fa notare Skemp (p.23): *If what is wanted is a page of right answers, instrumental mathematics can provide this more quickly and easily.*) di un approccio relational.

[17]La conferma che a volte la matematica sia presentata in maniera instrumental è confermato per esempio dai risultati ottenuti ai precorsi della facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, negli ultimi due anni alla richiesta di spiegare perché $-1 \cdot (-1) = 1$. La quasi totalità degli studenti è convinta che sia un teorema o una proprietà intrinseca dei numeri interi. Ma la cosa più interessante è che nessuno, ovviamente, si ricorda la dimostrazione di tale teorema e non si è mai chiesto perché questo accada. L'unica *dimostrazione* fornita è che due negazioni fanno un'affermazione.
È interessante notare (Furinghetti, 2002) che tale regola, e il disagio di non avere una giustificazione per essa, sia riportata da Stendhal nel suo romanzo autobiografico *La vie d'Henry Brulard* (p.310): *Che stupore per me scoprire che nessuno poteva spiegarmi come accadeva che: meno moltiplicato meno fa più* $(-x- = +)$*! Non solo nessuno mi spiegava questa difficoltà, ma ciò che era peggio, essi la spiegavano su ragioni che erano evidentemente lontane dall'esser chiare a loro stessi.*

Ma un approccio relational non è preferibile (e non è comunque poco) solo da un punto di vista epistemologico e culturale, ma anche perché è evidentemente più adattabile a nuovi compiti[18]. Il creare relazioni infatti permette di allargare i criteri di analogia: molto spesso basta cambiare qualche numero in un problema per avere l'effetto che sembri *nuovo* agli occhi degli studenti. Mettersi nell'ottica di affrontare quella che Skemp chiama matematica relational ha quindi il grosso vantaggio di diminuire le cose da ricordare: per esempio non sarà necessario ricordarsi le formule dell'area di tutti i parallelogrammi se conosciamo quella del triangolo e capiamo la relazione che c'è tra l'area del triangolo e quella dei parallelogrammi. Inoltre la creazione di collegamenti *giustificati* permette in ogni momento di ricostruirsi tali collegamenti quindi diminuisce non solo il *volume* delle cose da ricordare ma anche l'importanza di ricordare tutto. In poche parole un approccio instrumental è probabile che alimenti la convinzione che in matematica ci siano moltissime cose da ricordare che può provocare a sua volta una sensazione di incontrollabilità di quello che si sta studiando.

Ma cosa può originare la convinzione che la matematica non abbia senso? E perché è così diffusa? Se è vero che una presentazione instrumental può favorire la nascita di questa convinzione, il sospetto è che una tale convinzione sia legata anche ad alcune caratteristiche della matematica, perché difficilmente la stessa convinzione è associata ad altre discipline scolastiche.

Credo che ci possano essere più spiegazioni non in contrasto tra loro: innanzitutto un fattore culturale, l'opinione diffusa che la matematica sia una scienza inaccessibile ai più e studiata da persone spesso fuori dalla realtà e con poco senso pratico[19]. Qualcuno potrebbe notare anche il fatto che molti

[18]La diffusione, e a mio modo di vedere la fragilità, di un approccio instrumental alla matematica è ben visibile anche a livello universitario: studenti con alle spalle un curriculum buono anche in licei scientifici sono spesso *terrorizzati* davanti a problemi 'mai visti'. Chi non ha avuto la sensazione che per molti dei nostri studenti i problemi debbano essere una immediata applicazione della cose più recentemente studiate? Questo è il tipico modo di approcciare la matematica che Skemp definisce instrumental.

[19]In questo caso è evidente che il legame tra le due convinzioni è di tipo quasi-logico. Non cè infatti nessun principio logico in senso stretto che assicura che le caratteristiche della persona che studia una determinata materia (e ci sarebbe da

studenti si lamentano della distanza tra gli oggetti matematici studiati e le applicazioni pratiche e quindi sottolineare come certe scelte didattiche rinforzino questa convinzione della matematica poco collegata con il mondo reale che può essere all'origine anche della non sensatezza della matematica. Bisogna però osservare che le stesse contestazioni gli studenti non le fanno per altre discipline scolastiche: per esempio che applicazione pratica, o per usare le parole degli studenti *'a cosa mi serve nella vita' leggere 'L'infinito' di Leopardi?* Questo per dire che raramente gli studenti sentono l'esigenza di trovare un'applicazione concreta immediata ad argomenti studiati in altre discipline scolastiche.
È vero caso mai il contrario, cioè che certi tentativi di mostrare un legame immediato con il concreto, con la vita quotidiana, mostrano tutti i propri limiti (Vinner, 2000). Per esempio è tipico, soprattutto ai livelli scolastici inferiori, cercare di costruire problemi con contesti familiari, che ricordino la realtà. L'inefficacia di questi metodi è dimostrata da varie ricerche (Zan, 1998) e dai ricordi di molti studenti che contestano per l'appunto la sensatezza delle situazioni descritte o la significatività delle domande proposte:
Che senso ha calcolare quanta vernice ci vuole per colorare i muri di una stanza senza finestre?
Che senso ha riempire una tinozza che perde? Non faremmo prima a tappare il buco?
In particolare si devono trovare metodi meno *ingannevoli* per *condividere* scelte con gli studenti.
Ma oltre al fattore culturale ci sono, a mio parere, caratteristiche della matematica che rinforzano la convinzione che la matematica sia poco collegata alla realtà e che sia spesso senza senso: innanzitutto le particolarità del linguaggio matematico, le sue differenze con il linguaggio quotidiano, e in particolare il fatto che in matematica vengano considerate proposizioni che nel linguaggio quotidiano sarebbero insensate o quantomeno inadeguate (Ferrari, 2004). Questo amplificato dal fatto che forzatamente in classe si debba alternare un linguaggio con che usa un registro pesantemente evoluto come il linguaggio matematico con quello quotidiano: se un esperto si presume sia in grado di gestire questo *salto continuo* di registri linguistici, è

discutere ovviamente anche sul fatto che effettivamente questa visione del matematico sia realistica) siano proprie anche della materia stessa.

molto probabile che negli studenti questo possa generare confusione.
Un'altra caratteristica della matematica è quella di non *accontentarsi* di una valida argomentazione per stabilire la verità di un enunciato. In particolare le argomentazioni che possono permetterci di congetturare la verità o falsità di un enunciato, in matematica come nella vita quotidiana, raramente sono in termini di logica deduttiva, ma quasi sempre su basi cosiddette induttive come l'argomentazione per analogia o per generalizzazione induttiva: ovvero si cerca di *convincere* o *ci si convince* della verità di un enunciato presentandolo come molto probabile sulla base di certe premesse. Per molti studenti la richiesta, tipica della matematica, di una dimostrazione è poco significativa una volta che l'argomentazione sia ritenuta valida e quindi la conclusione molto probabile: nella migliore delle ipotesi una inutile pignoleria, il più delle volte un non-sense, cercare di dimostrare una cosa di cui sono già convinto.
Se, da matematici, non possiamo disconoscere l'importanza delle dimostrazioni, possiamo osservare però come spesso non ci soffermiamo sulla *sensatezza* di alcuni *errori matematici.* Un esempio molto diffuso e esplicativo è il rovesciamento dell'implicazione logica: A implica B. Ovvero molti studenti, hanno $A \Rightarrow B$ e sanno che B è vera e concludono che A è vera. Nella mia personale esperienza didattica è successo spesso per esempio che le funzioni continue siano anche derivabili. Un'interpretazione unidirezionale sottolineerebbe la mancanza di conoscenze e suggerirebbe di dimostrare nuovamente l'implicazione, evidenziando il passaggio in cui si usa l'ipotesi che valga A, e fornirebbe contro-esempi (nel caso menzionato il classico valore assoluto di x in zero). Si può però anche osservare che esiste la possibilità di un ragionamento induttivo molto diffuso nella vita quotidiana: se la strada di casa mia si allaga ogni volta che piove, quando trovo la strada di casa allagata è naturale che pensi che abbia piovuto (poi magari invece si è rotto un tubo o è uscita acqua dai tombini). Questo modo di ragionare ha un certo fondamento matematico: è piuttosto sensato se siamo interessati non a stabilire certezze ma a stabilire una conclusione più probabile possibile. Infatti se l'evento B non è certo, ovvero la sua probabilità è minore di 1, e sappiamo che A implica B, la probabilità che si verifichi A se si è verificato B è maggiore della probabilità che si verifichi

A. Nel caso specifico delle funzioni continue è molto facile osservarlo: nell'insieme di tutte le funzioni, considerando quelle continue, ci siamo ristretti moltissimo eppure l'implicazione ci assicura che abbiamo lasciato dentro tutte le funzioni derivabili. La probabilità che una funzione continua sia derivabile è perciò molto alta rispetto a quella che una funzione qualsiasi sia derivabile.
Ma non è solo un discorso probabilistico, una spiegazione ci può essere fornita anche tramite un punto di vista pragmatico (Ferrari, 2004): il rovesciamento di una frase in forma condizionale attraverso implicature dovute a principi di cooperazione del linguaggio è frequente nel linguaggio quotidiano. Per esempio dalla frase *se non vieni promosso a scuola non ti compro il motorino* è *naturale* inferire che se il ragazzo viene promosso a scuola avrà il motorino.
La confusione diventa ancora più forte quando si usano motivazioni di tipo induttivo per giustificare alcune conclusioni salvo poi contestare un analogo tipo di giustificazione allo studente: il seguente brano è tratto da un libro di testo universitario:
Il caso più semplice è quello di una sola equazione in una sola incognita: $ax = b$. (...) Per le soluzioni di questa equazione tre casi sono possibili [ed elenca i tre casi] *Questo fa chiaramente capire che, quando si passi ad un sistema lineare di m equazioni in n incognite, si potranno presentare gli stessi tre tipi di eventualità.*
Lo stesso tipo di ragionamento potrebbe, per esempio, portare uno studente di Analisi II a concludere che le funzioni differenziabili e derivabili sono la stessa cosa anche nel caso in più variabili.

Per quanto riguarda le convinzioni su oggetti e fatti matematici, è piuttosto comune che quando si parli di misconcetti o convinzioni errate si pensi che siano dovute a mancanza di conoscenze o quanto meno ad una inadeguatezza delle conoscenze. Ma anche in questo caso possono entrare in gioco molti altri fattori: linguistici, culturali, affettivi.
Per quanto riguarda i fattori linguistici rimando al lavoro molto completo di Ferrari (2004), per gli altri voglio dare una interpretazione alternativa ad una puramente cognitiva al seguente episodio (che penso sia piuttosto comune):
Scritto di Algebra per il Corso di Laurea di Informatica, in un esercizio si chiede di discutere la diagonalizzabilità di una

matrice al variare di un parametro reale h. Il polinomio caratteristico della matrice è:

$$(\lambda - 4)^2(\lambda - h)$$

La discussione è focalizzata sulla molteplicità algebrica di λ che è due se h è diverso da 4 e tre se h è uguale a 4. Questi sono dunque i due casi da distinguere nella discussione della diagonalizzabilità. Quello che accade è che circa la metà degli studenti che risolvono questo esercizio si sentono in dovere di studiare anche il caso $h = 0$.
Bisogna subito osservare che questa *stravaganza* non compromette la correttezza della risposta all'esercizio ma è comunque un segnale interessante. Tanto più che difficilmente si può interpretare un comportamento del genere in termini di conoscenze: infatti si potrebbe pensare che ci sia difficoltà nella gestione dei parametri, ma sarebbe singolare che tutti quelli che hanno studiato casi *superflui* hanno studiato il caso $h = 0$.
È dunque probabile che abbiano avuto una parte importante in questo comportamento delle convinzioni che nel corso dell'esperienza scolastica si formano sul numero 0, come caso particolare *per antonomasia*. Sono convinzioni derivanti molto probabilmente da un tipico ragionamento per analogia (Ferrari M.; 1988, p.1188): *L'obiettivo è di raccontare che cosa significhi l'operazione indicata con* b^a. *Si può iniziare precisando che la base b deve essere diversa da zero. Il fatto non desta meraviglia perché gli studenti sanno già, per averlo visto nella divisione, che lo zero è un numero 'sui generis', da prendere con le molle.*
Ma sulle convinzioni sullo zero ci sono anche riferimenti culturali: il Matto in *Re Lear* (I.IV) (citato in Weels 2002, p.213): *Now thou art on* 0 *without a figure. I am better than thou art now; I am fool; thou art nothing. [Adesso sei uno zero senza cifre davanti. Sono meglio io di te, adesso: io sono un matto; tu non sei nulla.]*
Questa citazione è tutt'altro che puramente aneddotistica, spesso infatti studenti che si trovano di fronte ad espressioni tipo la seguente:

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x) \cdot f(x)}$$

dopo aver semplificato tutti i termini tra loro concludono: *Quindi? Zero, perché non ci rimane più nulla.*

- Le convinzioni sul contesto sociale: in particolare spesso si studiano le dinamiche interne al *microcosmo* classe sottolineando l'importanza del contesto sociale e il fatto che certe azioni di un individuo siano guidate dalle sue convinzioni sulla *rilevanza* delle sue azioni in un determinato contesto. In particolare possiamo identificare due filoni di questo tipo: uno è associato alla già citata idea di *contratto didattico* di Brosseau (1980), l'altro alle norme *sociali* e *socio-matematiche* descritte da Cobb, Yackel e Wood (1989, 1991, 1996) e riprese da molti altri autori. Uso le parole degli stessi autori per descrivere cosa intendono per norme sociali e norme socio-matematiche (Yackel e Wood, 1996 p.460−461): *the process by which teachers initiate and guide the development of social norms that sustains classroom microcultures characterized by explanation, justification, and argumentation. Norms of this type are, however, general classroom social norms that apply to any subject matter area and are not unique to mathematics. (...) we extend our previous work on general classroom norms by focusing on normative aspects of mathematics discussions specific to students' mathematical activity. To clarify this distinction, we will speak of sociomathematical norms rather than social norms. For example, normative understanding of what counts as mathematically different, mathematically sophisticated, mathematically efficient, and mathematically elegant in a classroom are sociomathematical norms. Similarly, what counts as an acceptable mathematical explanation and justification is a sociomathematical norm (...) the understanding that student are expected to explain their solutions and their ways of thinking is a social norm, whereas the understanding of what counts as an acceptable mathematical explanation is a sociomathematical norm.*
  Studi che fanno riferimento in modo più o meno diretto all'idea di sociomathematical norms si sono concentrati molto su quest'ultimo punto, ovvero sull'influenza che ha sul comportamento degli studenti la loro idea di cosa sia una dimostrazione accettabile. Un lavoro recente interessante è, per esempio quello di Healy e Hoyles (2000), che evidenzia come l'idea che gli studenti hanno del ruolo della dimostrazione matematica in classe (in questo caso nell'ambito specifico dell'algebra) influenza pesantemente le loro scelte.
  Ad un livello ancora più fine, Cobb (1986) evidenzia delle convinzioni che potremmo definire ad un livello *meta* che sono

quelle che si attivano nel processo di riconoscimento di un determinato contesto e di un determinato obiettivo di una richiesta. Cioè se è vero che un individuo condiziona il suo comportamento a seconda del contesto che riconosce e a seconda degli obiettivi che ritiene siano *impliciti* in una richiesta (per esempio dell'insegnante) diventano fondamentali allora anche tutti quei fattori che permettono la determinazione del contesto e degli obiettivi stessi: tra questi ci sono anche le convinzioni.

- Le convinzioni su di sé: quasi tutti gli studi in educazione matematica su questa *categoria* di convinzioni si basano sugli studi di Bandura e in particolare sul suo *Social foundations of thought and actions* (1986) in cui l'autore sostiene l'importanza delle convinzioni su di sè che permetterebbero di esercitare una certa forma di controllo sui pensieri e sulle azioni. Bandura sottolinea anche l'importanza di quelle che lui chiama outcome expectations, ovvero quello che il soggetto pensa siano le conseguenze di sue azioni: *people regulate their level and distribution of effort in accordance with the effects they expect their actions to have. As a result, behavior is better predicted from their beliefs than from the actual consequences of their actions.* E sottolinea come questo tipo di convinzioni non sia indipendente dalle convinzioni riguardo a quanto la persona pensa di poter fare.
  In particolare Bandura distingue due costrutti: *self-concept* e *self-efficacy*, mentre quest'ultimo è la valutazione di competenza su uno specifico compito, *self-concept* è meno specifico ed include giudizi di auto-stima e la percezione di competenza.
  Nel campo specifico dell'educazione matematica Pajares e Miller (1994)[20] trovano che il senso di auto-efficacia è correlato alle performance in ambito problem-solving maggiormente rispetto ad altre variabili come il self-concept o il gender.
  È interessante anche il lavoro di Pajares (1996) in cui l'autore sottolinea come i problemi generali della ricerca sulle convinzioni si riflettano su questo caso particolare: non è sempre chiara infatti la distinzione tra *self-concept* e *self-efficacy* e comunque le opinioni non sono concordanti, e infine gli strumenti di osservazione usati spesso non sono coerenti con le prese di posizione su tale distinzione.

Bisogna osservare che finora abbiamo discusso di categorizzazioni riferite alle convinzioni degli *studenti* nei confronti della matematica, che è poi

[20]Non entro nel merito dell'attendibilità degli strumenti usati.

l'obiettivo della tesi, ma una ulteriore categorizzazione può essere fatta sulla categoria di persone studiata. È infatti presente in letteratura un filone che rivolge il suo interesse a persone che non hanno più un rapporto in contesto scolastico con la matematica, per descrivere la visione della matematica di chi non è più obbligato a confrontarsi con essa (Furinghetti, 1993). E un altro filone, da sempre molto ricco di contributi (vedi Pajares, 1992; Thompson, 1992; Cooney, 1993 e il secondo capitolo del libro di Krainer, Goffree e Berger 1991 dedicato interamente a questo argomento), interessato alle convinzioni degli insegnanti di matematica.[21]
Il filone di ricerca sulle convinzioni degli insegnanti ha vari obiettivi: descrivere il rapporto convinzioni sulla matematica - pratica di insegnamento[22] (Cooney et altri, 1998; Charalambous e Philippou, 2002; Llinares 2002), descrivere l'influenza delle convinzioni dell'insegnante su quelle degli allievi, anche se come sottolinea Thompson, 1992, spesso la pratica di insegnamento si discosta, se non è addirittura contraddittoria, con le convinzioni dichiarate dagli insegnanti (Brown, 1992). È più facile infatti trovare ricerche sull'influenza di particolari approcci didattici sulle convinzioni degli studenti (Ponte, Matos, Guimarães, Leal e Canavarro, 1994; Yusof e Tall, 1999; Hofer, 1999), cercare di descrivere possibili percorsi didattici per cambiare convinzioni di insegnanti in formazione (Philippou e Christou, 1998; Llinares et altri, 2000), descrivere il cambiamento di particolari convinzioni degli insegnanti con il passare del tempo (Lerman, 2002; Philippou e Christou, 2002).

3. Il problema dell'osservazione

Come già sottolineato nel precedente capitolo, il problema dell'osservazione, descrizione o misurazione (d'ora innanzi, per semplicità, quando parlerò di osservazione, se non diversamente specificato, intenderò una indifferentemente delle precedenti tre opzioni) dei fattori affettivi è uno dei più rilevanti: questo vale ovviamente anche nello specifico delle convinzioni.

[21] La ricerca sulle convinzioni degli insegnanti a sua volta si può suddividere in due: tra chi si occupa di insegnanti in servizio e chi di insegnanti in formazione (che hanno la particolarità di essere nel doppio ruolo di studenti proiettati verso un futuro di insegnamento).

[22] In questo caso è interessante notare come esistano dei contributi anche esterni alla ricerca sulle convinzioni in cui si cerca una correlazione tra *filosofia* della matematica e pratica d'insegnamento. Uno di questi particolarmente citato è il lavoro di Ernest (1991), in cui l'autore sostiene la forza di tale correlazione. Un punto di vista diverso e critico rispetto al precedente si può trovare in Ferrari (1995).

La necessità di costruire strumenti di osservazione, accettando che le convinzioni siano legate al comportamento, è sottolineata sia da chi si muove in un paradigma normativo che da chi ha un punto di vista interpretativo. Nel primo caso infatti si vogliono isolare quelle variabili che si ritengono *causa* di un determinato comportamento, nel secondo caso è necessario studiare le convinzioni per *capire* il comportamento (eventualmente per tentare di cambiarlo con un intervento mirato).
Più nello specifico si possono riconoscere almeno quattro motivazioni diverse per l'osservazione delle convinzioni, a seconda degli obiettivi e del paradigma che *guidano* la ricerca:

(1) Una motivazione *descrittiva*: convinti della bontà di un'interpretazione di alcuni comportamenti in termini anche di convinzioni si tenta di descrivere convinzioni ritenute significative. La maggior parte dei primi studi sulle convinzioni è di questo tipo.
(2) Una motivazione *statistico-deterministica*: si cerca di raccogliere informazioni sulle convinzioni di soggetti diversi (tipicamente maschi e femmine) e se ne evidenziano le differenze statisticamente più rilevanti. Si cerca di spiegare differenze di comportamento (come scelte di evitamento della matematica) attraverso le differenze rilevate sulle convinzioni.
(3) Una motivazione *normativa*: si tenta di dimostrare una correlazione tra convinzioni e comportamento, a volte passando dalla correlazione convinzioni-successo in matematica. Questo punto di vista è quello che più di tutti si scontra con il problema della circolarità sottolineato da Lester (2002).
(4) Una motivazione *diagnostica*: si cerca di individuare se un soggetto ha certe convinzioni.

Detto del *perché osservare* è fondamentale chiedersi anche *cosa osservare*, infatti è ovvio che una prima difficoltà è conseguenza proprio della mancanza di una chiara terminologia: non possiamo costruire strumenti adeguati se non abbiamo stabilito cosa vogliamo osservare. Non è un caso che in un interessante lavoro riassuntivo sugli strumenti di osservazione delle convinzioni Leder e Forgasz (2002) citino le misure fisiologiche che sono tipiche degli studi sulle emozioni e riportino indistintamente gli strumenti di misurazione per atteggiamenti e convinzioni.
Un'ulteriore difficoltà è dovuta al fatto che spesso vengano indagate anche le emozioni del soggetto, con l'ulteriore complicazione della distinzione tra l'opinione su una emozione e l'emozione stessa (Ruffel, Mason e Allen, 1998).

Non si tratta di disconoscere l'importanza di studiare le influenze e i collegamenti tra i vari fattori affettivi e sono convinto anche che si possano costruire strumenti che indaghino su più componenti dei fattori affettivi: ma l'impressione è che il tutto sia dovuto più ai problemi di demarcazione e di distinzione tra un costrutto e l'altro che alla volontà di costruire strumenti che riescano a svelare l'interazione tra i vari fattori affettivi. Significativa a proposito è la questione posta da Silver (1985, p.256): *we need to investigate the relationship between beliefs and attitudes. Are all attitudes also beliefs; if not, then how do we distinguish those that are from those that are not?*. A proposito della necessità di fare chiarezza sul significato e le distinzioni dei termini usati in una ricerca Pajares (1992, p.315) afferma: *A community of scholars engaged in the research of common areas with common themes, however, has a responsibility to communicate ideas and results as clearly as possible using common terms. For these reasons, it is important to use the terms consistently, accurately, and appropriately once their definitions have been agreed on.*
L'anteporre la necessità di osservare a quella di definire i termini è tipica comunque degli studi affettivi fin dalle loro origini in psicologia sociale, e può essere dovuta ancora al pensare di *dover dimostrare qualcosa in più* rispetto ad altre ricerche classiche in educazione matematica. Interessante a tal proposito è quanto osservano Arcuri e Flores D'Arcais sulle origini del costrutto di atteggiamento (1974, p.3): *Per alcuni decenni, intorno agli anni trenta e agli anni quaranta, buona parte della psicologia sociale si è identificata con lo studio degli atteggiamenti. Per una scienza sperimentale giovane e desiderosa di garantirsi una buona reputazione di fronte alle 'scienze esatte', la ricerca di una 'unità di analisi' - che potesse assumere lo 'status' del quantum nella fisica, per esempio - non poteva non rappresentare un obiettivo molto importante (...) gli psicologi sociali potevano sfoggiare l'atteggiamento, suscettibile di misurazione e quindi con tutte le carte in regola per divenire uno degli elementi portanti di una disciplina rispettabile.*
La terza questione centrale nell'osservazione è *come osservare*: in letteratura esistono più lavori che fanno una panoramica della situazione esistente proprio riguardo agli strumenti di osservazione per le convinzioni.
Uno dei più recenti è il già citato lavoro di Leder e Forgasz (2002) che descrive le varie tipologie degli strumenti per misurare convinzioni e atteggiamenti: come anche altri autori preferiscono usare la parola *misurazione* invece di *osservazione*. Le tipologie individuate sono quattro:

(1) Questionari che possono essere proposti in forme diverse, i più diffusi tra queste sono sicuramente le scale di Likert di cui abbiamo già parlato e i differenziali semantici. Il differenziale semantico è un questionario le cui finalità sono molto simili a quelle di una scala di Likert: bisogna riportare il grado di accordo o disaccordo ad alcune affermazioni proposte. In un caso questa indicazione viene data solitamente con un numero da 1 a 5 che rappresenta la scala da completo disaccordo a completo accordo, nell'altro l'indicazione è di natura grafica ovvero ai due estremi di una linea (che può essere segmentata o continua) si trovano una parola o una proposizione e dall'altra quella che si pensa sia la sua negazione o il suo opposto e chi risponde deve fare un segno sulla linea che indichi la sua posizione rispetto a questa presunta dualità. Una variazione della numerazione o della linea segmentata può essere quella di proporre un numero pari di opzioni in modo da eliminare la posizione che rappresenta una via di mezzo: in qualche modo si obbliga la persona a *sbilanciarsi*.
   Nelle tipologie di questionario descritte dagli autori ci sono anche alcune varianti alle precedenti due che sono basate sulla richiesta fatta al soggetto di valutare aggettivi *adatti* a descrivere l'oggetto di studio, dichiarare il proprio accordo o disaccordo ad affermazioni, o infine rispondere sullo stimolo provocato da qualche cosa correlata con l'oggetto di studio (per esempio un disegno o una storia).
(2) Misure fisiologiche di cui però è sottolineata la poca affidabilità dovuta al fatto che le reazioni fisiologiche sono fuori dal controllo del rispondente e all'osservazione che tali misure sono praticabili solo in situazioni particolari.
(3) Interviste che possono essere guidate da questionari strutturati (e in questo caso è facilitato il compito di confrontare risposte di soggetti diversi) o non strutturate (che hanno il vantaggio di poter evidenziare degli aspetti non previsti inizialmente). La via di mezzo tra questi due estremi, l'intervista semi-strutturata, è la più diffusa.
(4) Osservazione diretta di comportamenti. Viene notato che questo metodo è molto dispendioso in quanto il ricercatore non può predire quando osserverà comportamenti interessanti, ma come già discusso questo è un problema *relativo* se confrontato con quello teorico della circolarità degli studi sulle convinzioni che solo un approccio interpretativo permette di superare.

È giusto riportare che nello stesso lavoro viene proposto un metodo alternativo: l'utilizzo di uno strumento, detto ESM, usato in psicologia da Csikszentmihalyi più di 30 anni fa, per studiare le convinzioni di alcuni studenti volontari. Si tratta in pratica di un questionario che i soggetti devono compilare quando ricevono uno stimolo acustico da un beeper di cui vengono dotati. La maggiore novità di questo strumento è di analizzare le risposte degli studenti in vari momenti della giornata anche al di fuori dell'orario scolastico e di cercare di raccogliere informazioni sui pensieri degli stessi in vari momenti della giornata.
Tornando alle tipologie di osservazione (o misurazione) elencate si possono fare tre considerazioni: una di tipo classificatorio che distingue tra strumenti *self-report* in cui al soggetto vengono chieste direttamente le opinioni sulle proprie convinzioni, e strumenti in cui le convinzioni vengono inferite dal ricercatore attraverso l'analisi di risposte o reazioni del soggetto stesso. Una di tipo statistico che rivela come i questionari siano di gran lunga il costrutto più usato, e infine una più qualitativa che deriva dall'analisi dei lavori che usano interviste o osservazioni dirette: raramente è proposto uno schema di intervista o di interpretazione dell'osservazione. Due eccezioni sono rappresentate dal lavoro di Kloosterman (2002), in cui oltre che alle domande da proporre ci sono anche delle avvertenze per l'intervistatore, e un lavoro di Leron e Hazzan (1997) che tentano di interpretare quanto accade in classe non secondo il loro punto di vista ma secondo quello dello studente stesso, attraverso quello che chiamano *monologo virtuale*. È chiaro che questa mancanza di condivisione sia degli strumenti di osservazione che degli schemi interpretativi se da un lato non intacca il fatto che le ricerche possano arrivare a conclusioni interessanti, dall'altro non aiuta la crescita degli strumenti *alternativi* ai questionari. In particolare anche una critica costruttiva di queste tipologie di strumenti è resa piuttosto difficoltosa: per questo, e anche per la diffusione molto più marcata dei questionari, nella prossima sezione mi soffermo sull'analisi critica dell'uso e progettazione di questionari sulle convinzioni.
Prima di fare un'analisi critica dei questionari sulle convinzioni è necessario sottolineare come alcuni autori (Leder, 1985; McLeod, 1992; Ruffel, Mason e Allen, 1998) suggeriscano e propongano anche un approccio multiplo di osservazione in cui siano usati più strumenti: sia per raccogliere il maggior numero di informazioni, sia per evidenziare possibili carenze di uno strumento o dell'analisi fatta.

3.1. I limiti dei questionari. Nella maggior parte dei casi un questionario è una raccolta di affermazioni che solitamente rappresentano particolari *convinzioni*, la risposta consiste nel dichiarare il proprio accordo o disaccordo con tali affermazioni solitamente su una scala di 5 punti (da completamente d'accordo a completamente in disaccordo):

item	1	2	3	4	5
La matematica è importante perché è utile					
La matematica è un insieme di regole e teoremi					
La matematica è scoperta					

Oppure un'altra modalità abbastanza frequente è quella dei differenziali semantici in cui chi risponde deve mettere un segno sulla posizione che meglio rappresenta il suo modo di pensare tra due estremi che dovrebbero essere uno l'opposto dell'altro:

La matematica e`:

utile						inutile
facile						difficile

Innanzitutto cerchiamo di analizzare i motivi per cui questo strumento così dibattuto sia in assoluto il più usato nella ricerca sulle convinzioni e sui fattori affettivi in generale. Sicuramente offre la possibilità di gestire la distribuzione dei testi e l'analisi delle risposte in tempi brevi riuscendo a raggiungere campioni numericamente significativi di persone. Quindi per un approccio, come quello che inizialmente hanno avuto i fattori affettivi, di ricerca in qualche modo *frenetica* di correlazioni statistiche tra fattori diversi i questionari erano sicuramente lo strumento più adatto. D'altra parte come afferma Hart (1989, p.43 − 44) confrontando quelli che chiama strumenti paper-and-pencil con le interviste ad alta voce (ma potremmo parafrasare la sua frase anche con altri strumenti di osservazione dall'analisi più complessa ma anche più informativa dei questionari): *Beliefs (...) have been examined via scores on paper-and-pencil instruments and occasionally via individual student interviews. This view of beliefs (...) might be called a black-box approach (...) The time and effort required to collect and analyze the data obtained from the think-aloud interview are much greater than the time and effort required for the paper-and-pencil instrument, but the information gained is a richer reflection of the student.*
Come detto nel corso del tempo sono aumentate le osservazioni critiche

ai questionari, anche se sono rimasti lo strumento più usato nelle ricerche sulle convinzioni.
Uno dei problemi più dibattuti è quello sottolineato anche da Lester (2002) del rischio che le risposte a tali questionari siano date cercando di dare quella che viene ritenuta la risposta *corretta* piuttosto che il proprio punto di vista. Questo può spiegare come in alcuni studi risaltino contraddizioni profonde tra le convinzioni dichiarate come risposta ad un questionario e il comportamento in attività matematica che sembra guidato da tutt'altre convinzioni. Schoenfeld (1989) distingue tra *beliefs espoused* e *beliefs in action*. Se ciò che interessa è l'interpretazione del comportamento è evidente che sono particolarmente significative le convinzioni in azione, il problema diventa quindi quello di come riuscire ad evidenziare tali convinzioni, ovvero come cercare di evitare che le risposte dei soggetti siano influenzate dalle loro convinzioni sullo scopo dell'osservatore o comunque sulla ricerca di una risposta *corretta*. Nel caso specifico se con i questionari questo sia possibile.

Ma ci sono altre problematiche relative all'utilizzo di questo strumento:

(1) I questionari selezionano convinzioni che il ricercatore a priori ritiene interessanti, al soggetto che risponde si chiede l'accordo su convinzioni selezionate da altri. Questo non tiene conto della centralità psicologica di tali convinzioni e in particolare c'è il rischio che il soggetto che risponde non abbia mai pensato a tali convinzioni (Munby, 1984; Eagly e Chaiken, 1998).
(2) I questionari generalmente tendono a chiedere il parere su singole convinzioni: in questo modo si perde completamente la dimensione quasi-logica delle connessioni tra convinzioni.

Entrambi questi due punti sembrano sottolineare il fatto che i questionari classici non riescano a cogliere la complessità della struttura dei sistemi di convinzioni (Pajares, 1992, Di Martino e Zan 2001*a*).
Le lacune dei questionari sono evidenziate, a mio modo di vedere, anche dall'analisi che delle risposte ai questionari viene fatta: spesso l'attenzione passa dalla valutazione delle convinzioni alla misurazione. È evidente che parlare di osservazione di convinzioni è una forzatura *linguistica* dal nostro punto di vista in cui le convinzioni sono un costrutto dell'osservatore. Dovremmo specificare, come fatto in precedenza, che si intende un tentativo di costruire un profilo di convinzioni attraverso interpretazioni e inferenze personali del ricercatore. Ma se nel termine

osservazione riguardo a convinzioni la forzatura è linguistica, nel termine *misurazione* la forzatura è a mio modo di vedere teorica[23].
Ma come avviene la misurazione delle convinzioni? Solitamente si stabilisce che certe convinzioni usate nel questionario siano positive e certe altre negative. In un caso l'accordo con le convinzioni risulta in un punteggio positivo, nell'altro in un punteggio negativo. La somma totale dei punteggi dovrebbe permettere di stabilire se le convinzioni di chi risponde nei confronti della matematica sono positive o negative.
Questo approccio ha dei punti critici evidenti:

(1) Il fatto che un singolo punteggio non sia in grado di descrivere la complessità del sistema di convinzioni di una persona. Ancor più evidente è che in questo modo non si distinguono casi tra loro molto diversi: pensiamo ad una persona che abbia risposto in maniera *netta* a tutti gli items (cioè si sia dichiarato completamente d'accordo o completamente in disaccordo) e che nel punteggio totale le risposte *positive* e *negative* si compensino. Questa persona equivarrà nella misurazione ad una persona che ha risposto in maniera *neutra* a tutti gli items: è evidente che questo da un punto di vista teorico ha poco senso. Tra l'altro questo spostamento dell'attenzione sulla misurazione ha come conseguenza che si salti un passaggio critico della valutazione di questo tipo di questionari: l'interpretazione della risposta *neutra*, cioè il punteggio 3 nelle scale di Likert o il segnare il segmento di metà nei differenziali semantici. A mio modo di vedere ci sono almeno tre interpretazioni possibili di una tale risposta che non possono essere riassunte da uno stesso punteggio perché sono tra loro alternative, non fotografano lo stesso fenomeno. Potrebbe essere un'indicazione che il soggetto ha un'idea che è una via di mezzo tra le due proposizioni proposte (nel caso del differenziale semantico) o che la sua opinione non è così radicale come espressa dalla singola proposizione nella scala di Likert (e questa è forse il modo più comune di considerare questo tipo di risposte nell'assegnare punteggi[24]), ma potrebbe anche essere che il soggetto in

[23]Proprio questa *convinzione* ha portato, in una ricerca tuttora in corso sull'evoluzione delle convinzioni degli studenti, ad analizzare i questionari (differenziali semantici) non in termini di punteggio ma di profili da noi ritenuti significativi. Ovvero l'interesse è spostato sulla combinazione delle risposte e non sulla somma totale di punteggi delle singole risposte.

[24]A volte un'ulteriore complicazione è che nelle affermazioni usate ci siano presupposti *forti* o *universali*: un esempio di questo è un item del questionario proposto ad insegnanti da Philippou e Christou (2002): *Non ho dubbi di poter*

certi casi pensi sia vera una proposizione ed in altri che sia vera il suo opposto, o infine potrebbe non avere un'idea in merito e quindi esprimere la sua indecisione.

(2) Il fatto che in questo modo, non solo, come detto, la scelta delle convinzioni è a carico del ricercatore, ma anche la scelta di cosa si intenda per convinzioni *positive* e *negative* e quindi l'assegnazione dei punteggi ai vari items. A volte il punteggio è deciso a priori, altre volte (come nel caso della famosa scala di Fennema e Sherman, 1976) gli items sono validati in precedenza da esperti[25]. Ma il problema non cambia molto: chi assegna i punteggi secondo quali criteri lo fa? C'è insomma l'implicita assunzione in tutti e due i casi che si possa assegnare un punteggio (una connotazione positiva/negativa e la sua portata) ad una convinzione. Il criterio di assegnazione di questi punteggi è solitamente implicito, ma si possono formulare le seguenti ipotesi (Di Martino e Zan, 2001*b*):

- Si pensa che ci sia un corpo di convinzioni tipiche di chi ha successo, o comunque che in qualche modo siano immediatamente correlate ad un comportamento ritenuto produttivo. Per esempio la convinzione che la matematica sia utile è usata anche da chi segue questo punto di vista: la *convinzione* è che essere convinti dell'utilità della matematica nella vita di tutti i giorni influisca positivamente sulla sfera motivazionale. A questo proposito sono d'accordo con Vinner (2000), secondo il quale, siamo tutti convinti che viviamo in un mondo matematico e quindi che la matematica sia realmente utile, ma da questo non segue che tutti devono sapere la matematica. Vinner afferma che anche gli studenti hanno chiaro questo e quindi il mostrare l'utilità della matematica, la sua presenza in molti degli strumenti che usiamo, non è detto che provochi uno stimolo della sfera motivazionale secondo il pensiero che è bene saperla bene perché servirà nella vita.

  Il problema di una tale impostazione, a parte il caso particolare della convinzione sull'utilità della matematica,

aiutare i ragazzi a migliorare il loro pensiero matematico. In questi casi una risposta *neutra* potrebbe riferirsi al *non ho dubbio* ma anche al fatto in generale do poter aiutare i ragazzi.

[25]Bisogna sottolineare che spesso i questionari sulle convinzioni vengono analizzati con metodi statistici finalizzati ad evidenziare *fattori significativi.* Questi test cercano di supportare i punteggi assegnati e in certi casi sono usati per eliminare eventuali items.

è che la correlazione tra fattori affettivi e successo in matematica non è così chiara (Ma e Kishor, 1997), anche perché bisognerebbe stabilire cosa si intende per successo in matematica. La definizione più semplice è quella che identifica il successo in matematica con il risultato scolastico, ma a questo punto siamo sicuri che le caratteristiche per avere un buon risultato scolastico siano universali e non dipendano, per esempio, dalla valutazione ma anche dalle scelte didattiche dell'insegnante?
Si può comunque cercare di individuare convinzioni che secondo la comunità dei ricercatori in educazione matematica possano *stimolare* comportamenti ritenuti positivi o negativi. Il problema rimane che non è dimostrabile (e credo nemmeno verosimile) un rapporto causa-effetto tra convinzioni e comportamenti. Anche accontentandosi di considerare un'influenza in qualche modo ritenuta *probabile* tra convinzioni e comportamento, penso che l'inadeguatezza dei questionari sia proprio nella loro struttura che tende a *dimenticare* la struttura dei sistemi di convinzioni. Facciamo un esempio: uno studente è convinto che in matematica ci voglia molta memoria. Questa convinzione può avere effetti per esempio sulla motivazione dello studente, ma non possiamo cercare di prevedere tali effetti se non abbiamo indicazioni su cosa pensa lo studente delle proprie capacità mnemoniche.
Anche convinzioni che appaiono *immediatamente negative*, come la convinzione che la matematica non abbia senso, sono banalizzate dai questionari: tale convinzione infatti sarà collegata a convinzioni diverse a seconda della persona che la esprime, allora non considerare questi collegamenti dando lo stesso punteggio a chi si trova d'accordo (seppur con motivazioni diversissime) con questa affermazione appare francamente molto poco significativo[26].

- Si pensa che ci sia un insieme di convinzioni tipiche degli esperti in matematica e si considerano positive le convinzioni appartenenti a questo insieme. Meno chiaro in questa impostazione è cosa siano le convinzioni negative,

[26]Nel prossimo capitolo l'esperienza del tutorato mostrerà come alla stessa convinzione siano collegati sistemi di convinzioni profondamente diversi. Inoltre questa osservazione non sarà significativa solo dal punto di vista teorico ma anche da quello pratico del recupero.

a meno che non ci si limiti al dichiararsi non d'accordo con convinzioni dell'insieme precedente. Anche in questo caso il nodo principale è se sia possibile costruire un tale insieme di convinzioni: il risultato dello studio di Grigutsch e Törner (1998) suggerisce che esistono profili di convinzioni diversi tra gli esperti, riguardo alla loro visione della matematica e conferma già quanto trovato da Mura (1993; 1995) sulla varietà di visioni della matematica di insegnanti universitari.

- Si pensa che ad una determinata convinzione sia associata univocamente una reazione emozionale positiva o negativa[27], e si presume che questo sia legato ad aspetti motivazionali: chi ha convinzioni che si pensa elicitino reazioni emozionali positive sarà più motivato di chi ha convinzioni associate ad una reazione emozionale negativa. A parte quest'ultima correlazione, in realtà il passaggio più problematico è l'associazione automatica iniziale convinzione-reazione emozionale, contrastante con un paradigma interpretativo, che è del tutto arbitraria.
  Tale arbitrarietà è emersa chiaramente da una ricerca (Di Martino e Zan, 2002; 2003) di cui parlerò approfonditamente nel capitolo successivo.
  Se analizziamo i questionari più usati in letteratura questi fanno solitamente riferimento, oltre che a convinzioni sulla natura della matematica, a convinzioni sulla facilità e sull'utilità della matematica: analizziamo separatamente queste due convinzioni.
  Facile-difficile: Se è probabile che gli studenti più bravi trovino più facile la matematica, è molto discutibile che proprio tra gli studenti più bravi la convinzione che la matematica sia facile, sia automaticamente associata ad una componente emozionale positiva.
  Anche in questo caso accenno solamente ad uno strumento centrale nella mia ricerca di cui parlerò nel capitolo successivo: il tema sul rapporto con la matematica. Una parte della mia ricerca si è concentrata sull'analisi di temi di questo tipo fatti fare a studenti di ogni livello scolare:

[27] Per completezza è giusto osservare che nonostante l'etichetta *positiva* o *negativa* sia considerata più naturale rispetto ad una reazione emozionale, abbiamo visto nel capitolo precedente che per esempio di emozioni come l'ansia è importante considerare anche il *livello*.

ora ne uso alcuni brani per mostrare l'arbitrarietà di associare alla facilità un'emozione positiva e alla difficoltà una negativa:

– Della matematica a me piacciono le divisioni e i problemi; le divisioni mi piacciono perché secondo me sono semplici e, i problemi perché sono misteriosi. [Federica, grade 5]
– Questa materia mi appassiona e mi piace perché è abbastanza complessa e bisogna ragionare. Infatti a me piacciono problemi difficili da ragionarci un po'. [Arianna, grade 6]

<u>Utile-inutile</u>: L'assunzione che l'utilità sia legata al piacere di fare matematica è in primo luogo contestata dal pensiero di molti matematici, contemporanei e non. Ma anche in questo caso voglio usare uno spezzone molto significativo (e a mio modo di vedere maturo) di Veronica, una ragazza di prima media:

– La matematica mi piace perché ci sono sempre cose nuove da scoprire, infatti non è come l'Italiano che ha gli argomenti che non cambiano mai (...) Non penso che la matematica sia più importante dell'Italiano, perché se uno non sa scrivere non sa nemmeno spiegarsi.

Se ne desume che: la matematica piace a Veronica più dell'Italiano, ma se il criterio dovesse essere l'utilità Veronica non si *sbilancerebbe* a favore della matematica.

3.2. Distinzione beliefs dichiarati vs beliefs in azione e conseguenze per l'osservazione. Una questione, già *sfiorata*, è quella della distinzione suggerita da Schoenfeld (1989) tra beliefs dichiarati e beliefs in azione. Riprendendo l'esempio del problema sul cerchio e le tangenti, che aveva usato per dimostrare l'insufficienza di un'interpretazione puramente cognitiva, Schoenfeld si interroga sulle *incongruenze* tra il comportamento degli studenti e le convinzioni da essi dichiarate (p.348 – 349): *Despite their claims that proofs and constructions are closely related, they behave on construction problems as thought their proof-related knowledge were non existent.*
Come possono essere spiegate tali incongruenze? Una possibile interpretazione è proposta dallo stesso Schoenfeld sulla base della distinzione tra matematica come disciplina scolastica e come scienza. In questo senso i due oggetti sono visti come distinti, quindi non si può parlare di contraddizione.

Sicuramente gli strumenti di osservazione in cui le convinzioni sulla matematica vengono indagate in maniera esplicita (come solitamente si fa per esempio con i questionari) possono indurre lo studente a rispondere in un contesto e con obiettivi che sono ben diversi da quelli di quando è impegnato in un'attività matematica.
Le risposte possono essere guidate dalla *convinzione*, più o meno conscia, che sia meglio adeguarsi a quelle che si pensano siano le *risposte giuste*, del sentire comune, o viceversa dalla voglia di essere *alternativi* a questo sentire comune.
Rimane certo che, se la ricerca sulle convinzioni è interessata all'influenza delle convinzioni sul comportamento in attività matematica, sia interessata maggiormente alle convinzioni in azione[28] rispetto a quelle esposte. Come afferma Schoenfeld (p.349): *If so, the fact that students espouse and pheraps believe the favorable rhetoric about abstract mathematics offer us little consolation. What counts in problem-solving situations is students' behavior, and that behavior seems to be driven much more by students' experiences than by their professed beliefs.*
Ma come osservare le convinzioni in azione rimane un problema piuttosto grosso della ricerca sulle convinzioni: partiamo dalla distinzione tra strumenti che chiedono in qualche modo un'auto-analisi (self-report) con le osservazioni dirette del soggetto (o i soggetti) studiati da cui si inferiscono le convinzioni.
Si può ragionevolmente ipotizzare che i self-report sono più efficaci per cercare di avere informazioni sulle convinzioni in azione quando non è esplicitato l'obiettivo della ricerca. Si può dire perciò che differenziali semantici e scale di Likert sono solitamente più a *rischio* beliefs dichiarati, rispetto per esempio a temi sul rapporto con la matematica o diari[29].
È anche vero che ci possono essere altri fattori di *inquinamento* della ricerca: in particolare la nostra esperienza con i temi ha mostrato come i risultati siano molto più significativi quando il tema sia proposto da un'insegnante diverso da quello di matematica. Gli studenti

[28]Non è vero però che i beliefs dichiarati siano poco interessanti. Innanzitutto dal punto di vista culturale, ma anche per confermare il modello di Green e in particolare la separazione dei cluster di convinzioni: la stessa persona può, in buona fede, avere convinzioni esposte che sono contraddittorie con quelle in azione, questo perché queste convinzioni sono *attivate* in contesti diversi che non si sfiorano.

[29]È da notare che in letteratura sono molto rare le ricerche sulle convinzioni degli studenti che usino temi o diari. In letteratura il self-report che lascia più spazio al soggetto è il completamento di frasi, anch'esso comunque poco usato rispetto ad altri metodi di osservazione.

riconoscono obiettivi diversi del tema a seconda che lo stesso sia proposto dall'insegnante di matematica o per esempio di italiano, oppure se interessati a compiacere l'insegnante, nel caso dell'insegnante di italiano, non riconoscono le loro convinzioni sulla matematica come una variabile significativa per raggiungere questo obiettivo.
L'osservazione diretta del comportamento in quanto tale sembra essere più correlata a beliefs in azione, ma ci sono tre considerazioni da fare: innanzitutto la presenza di una persona o di uno strumento che osserva altera in qualche modo la situazione[30]. Inoltre come già detto, se ci poniamo in una visione normativa di causa-effetto, inferire convinzioni dal comportamento evidenzia la circolarità della ricerca portata avanti. Infine l'interpretazione del ricercatore è un filtro molto forte del passaggio dal comportamento alle convinzioni (o a qualsiasi altro tratto del soggetto).
Il problema è quindi il seguente: quanto questa *osservazione* è condizionata dall'osservatore, dalle sue convinzioni e dalle sue ipotesi?
Tornando alla già citata presa di posizione di McLeod (1992) sulla maggior difficoltà di descrivere e misurare i fattori affettivi rispetto ai fattori cognitivi, penso che il paradigma interpretativo in realtà implichi che ogni studio in educazione matematica sia condizionato dall'interpretazione del ricercatore.
Interessante a proposito è l'idea di Leron e Hazzan (1997) che tentano di interpretare quanto accade in classe non secondo il loro punto di vista ma secondo quello dello studente stesso, attraverso quello che chiamano *monologo virtuale* e la loro giustificazione di questo singolare esperimento (p.280): *We do not claim that ours is an objective picture. But then, neither are the interpretations based on the more standard data. In fact, according to constructivist theory it is doubtful that such an objective picture can ever be attained.*

[30]Vedremo in seguito la reazione di Luigia, una partecipante al tutorato, alla richiesta di audio-registrare i nostri incontri.

CAPITOLO IV

La parte sperimentale

Alla luce del quadro teorico presentato e delle problematiche evidenziate nel capitolo precedente la mia ipotesi di ricerca è la seguente: affinché il costrutto convinzioni sia utile come strumento teorico per l'interpretazione di comportamenti in contesto matematico, e quindi anche per suggerire interventi, è necessario considerare le convinzioni unitamente alla loro struttura (sistemi di convinzioni)[1].
Un'analisi puramente logica di tale ipotesi porta a riconoscere due punti importanti:

- i sistemi di convinzioni possono aiutare a comprendere i comportamenti matematici degli allievi
- le singole convinzioni non sono in grado di farlo.

È chiaro quindi che l'ipotesi di ricerca inizialmente formulata può essere riformulata in modo significativamente diverso a seconda che assumiamo o meno l'importanza delle convinzioni come costrutto che aiuta a comprendere i comportamenti matematici degli allievi. Se tale importanza è data come accettata, l'ipotesi precedente richiede *solo* di evidenziare che *le singole convinzioni* non forniscono uno strumento utile per comprendere i comportamenti degli allievi.
Per quanto detto nel capitolo precedente, è questa la mia posizione iniziale, anche se in realtà gli strumenti utilizzati per portare evidenza in favore di tale ipotesi porteranno anche evidenza in favore dell'assunzione di partenza, cioè dell'importanza dei sistemi di convinzioni.

Per motivi di chiarezza espositiva e per non appesantire il discorso anticiperò la descrizione della metodologia seguita, cioè degli strumenti utilizzati e del tipo di analisi effettuata.

[1] Naturalmente questa ipotesi ha forti implicazioni a livello di osservazione. Dato che i classici strumenti d'osservazione non sembrano interessarsi alla rilevazione dei sistemi, ma solo alle singole convinzioni, evidenziare l'importanza dei sistemi suggerisce che questo disinteresse possa essere una possibile causa del conflitto più volte citato fra beliefs espoused e beliefs in action.

Il percorso di ricerca può essere suddiviso in tre fasi, caratterizzate da strumenti diversi:

(1) Come primo passo ho utilizzato lo strumento del *tema* di tipo autobiografico. Si tratta quindi di materiale cosiddetto *narrativo*, sempre più frequente nella ricerca interpretativa. In educazione matematica, non a caso il contesto in cui questo tipo di materiale (sotto forma di diari, interviste, resoconti) ha cominciato ad essere utilizzato è stato proprio quello delle convinzioni, in particolare delle convinzioni degli insegnanti (Brown e Cooney, 1991; Chapman, 1997; Krainer, Goffree e Berger, 1999). Questa scelta risponde all'obiettivo di (Chapman, p.204) *suggest a possible holistic interpretation of a teacher's perspective*, superando, o meglio prescindendo, da quello ormai classico di confrontare beliefs espoused con i beliefs in action. Contrapponendo il paradigma normativo a quello interpretativo in termini di *tentare di spiegare* vs *tentare di capire*, Stake (1995) suggerisce che il ruolo della narrativa nella ricerca qualitativa è simile a quello delle scale, delle misurazioni, in definitiva dei numeri, nella ricerca quantitativa (p.40): *These epistemological concerns double back to the ordinary meanings of quantitative and qualitative study. To sharpen the search for explanation, quantitative researchers perceive what is happening in terms of descriptive variables, represent happenings with scales and measurements (i.e., numbers). To sharpen the search for understanding, qualitative researchers perceive what is happening in key episodes or testimonies, represent happenings with their own direct interpretation and stories (i.e. narratives). Qualitative research uses these narratives to optimize the opportunity of the reader to gain an experiential understanding of the case.* Stake, come altri ricercatori, usa come sinonimi positivista / quantitativo e interpretativo / qualitativo. In realtà altri (Cohen e Manion, 1994) sottolineano che la distinzione paradigma normativo vs interpretativo fa riferimento ad una scelta epistemologica, mentre la distinzione analisi quantitativa vs qualitativa fa riferimento ad una scelta metodologica. In questo senso un ricercatore *interpretativo* può anche utilizzare analisi quantitative: quello che caratterizza la scelta del paradigma interpretativo non è tanto l'evitare le analisi statistiche, ma rifiutare un approccio tipo causa-effetto. Questa osservazione trova conferma nelle possibili metodologie descritte per il materiale narrativo.

Nel mio caso la scelta di utilizzare il tema autobiografico come strumento per indagare sui sistemi di convinzioni è dovuta al fatto che nel raccontare la propria *storia* con la matematica i soggetti tendono ad esplicitare gli eventi e le osservazioni che più ritengono importanti, ma soprattutto tendono a *cucirli*, introducendo nessi percepiti come causali o semplicemente cronologici[2]. Quello che emerge naturalmente dallo scritto è comunque soltanto la punta di un iceberg, che suggerisce però la complessità ma anche la natura dei *legami* (di tipo logico o cronologico) fra le varie convinzioni esplicitate.

Per quanto riguarda l'analisi fatta, le dimensioni individuate come tipiche nella lettura e analisi di questo tipo di materiale (Lieblich, Tuval-Mashiach e Zilber, 1998) sono:

(a) Approcci olistici vs categoriali.
Nel primo caso il testo è visto come un'unità, mentre nel secondo è spezzato in sotto-unità alla luce di categorie.
In genere il secondo caso è preferito quando il ricercatore è interessato a un problema o fenomeno che coinvolge un gruppo di soggetti, mentre l'approccio olistico è preferito quando lo studio ha per oggetto una persona nella sua complessità.

(b) Contenuto vs forma.
Il contenuto descrive cosa è successo, perché, chi ha preso parte all'evento ecc. La forma ha a che fare con l'organizzazione del testo, la successione degli eventi, la complessità, coerenza, lo stile, la scelta di metafore o parole (ad esempio la forma passiva invece di quell'attiva).

Naturalmente non sempre è possibile fare distinzioni così nette, ma essendo le due dimensioni ortogonali, portano a individuare quattro modalità di analisi di materiale narrativo, e precisamente:

- olistico / contenuto (tipico dei cases studies)
- olistico / forma
- categoriale / contenuto (noto come *content analysis*)

[2]Bruner (1998, p.21) a questo proposito afferma: *noi organizziamo la nostra esperienza e il nostro ricordo degli avvenimenti umani principalmente sotto forma di racconti - storie, giustificazioni, miti, ragioni per fare e per non fare, e così via. (...) Diversamente dalle costruzioni generate da procedure logiche e scientifiche, che possono venire eliminate mediante falsificazione, le costruzioni narrative possono raggiungere solo la 'verosomiglianza'.*

- categoriale / forma

Ognuna di queste modalità fa riferimento ad un certo tipo di problema di ricerca, a differenti tipi di testi, a differenti numerosità del campione.
L'approccio forse più noto in psicologia, sociologia ed educazione è quello categoriale / contenuto, noto come *content analysis*. Sono definite a priori categorie, e sono quindi estratte dal testo delle frasi, classificate alla luce di tali categorie. È chiaro che questo permette anche un'analisi quantitativa del materiale. Le categorie possono essere definite a priori da una teoria, ma possono anche essere selezionate a posteriori dopo la lettura del materiale. Questo tipo di analisi in educazione matematica è piuttosto raro, e comunque limitato per lo più a testi di interviste (Vinner, 2000).
Dato il mio obiettivo, la lettura che ho fatto del materiale è stata di contenuto, per quanto riguarda la dimensione forma / contenuto. Per quanto riguarda invece l'altra dimensione, è stata volutamente sia di tipo olistico, che di tipo categoriale, perché è proprio il confronto fra le sottounità e il testo nel suo complesso che interessa per il confronto fra convinzioni e sistemi di convinzioni.
Per quanto riguarda le categorie, alcune di esse erano definite a priori (dalla teoria descritta nel capitolo precedente) mentre altre sono *emerse* a posteriori.
In definitiva l'analisi dei temi, come è tipico dell'analisi di materiale di tipo narrativo, è stata un'analisi *a spirale*, in cui la lettura stessa ha generato nuove ipotesi di ricerca, suggerito nuove categorie significative, che hanno stimolato una *nuova* lettura (Glaser e Strauss, 1967, parlano a questo proposito di *grounded theory*: la teoria *emerge* progressivamente da questa interazione continua).

(2) Per ottenere ulteriori evidenze con strumenti profondamente diversi, come secondo passo ho utilizzato un questionario, appositamente costruito per indagare sui sistemi di convinzioni anzichè sulle singole convinzioni. Si tratta quindi di uno strumento originale, la cui costruzione è avvenuta per gradi, nel senso che la versione definitiva qui presentata ha integrato due versioni precedentemente preparate, sperimentate e analizzate. L'analisi di questo questionario è stata sia di tipo quantitativo che qualitativo.

(3) Se il primo e il secondo passo coinvolgono modalità di osservazione profondamente diverse (temi nel primo caso; questionari seppure originali nel secondo), il terzo passo integra vari tipi di osservazione: temi, questionari aperti, ma soprattutto osservazione diretta di tre studenti nel contesto di un'attività matematica per un totale di 12 ore ciascuno[3].

Questa osservazione è individualizzata: l'oggetto di studio è il singolo studente, un individuo, un *caso*. Si tratta in altre parole di quella forma di ricerca nota come *case study*. Come osserva Stake (1998) il case study non è una scelta metodologica, ma è la scelta dell'oggetto (il caso singolo, l'individuo) da studiare, tanto che poi le modalità per tale studio possono essere di diverso tipo, sia qualitative che quantitative.

La forza del case study sta nell'offrire una profonda descrizione di un soggetto *reale* in un contesto *reale*, attraverso la descrizione e l'analisi di eventi rilevanti: l'evidenza che ne segue può essere strumentale ad un problema di ricerca iniziale (*instrumental case study*), oppure può essere intrinseca, cioè limitata alla comprensione di *quel* particolare caso (*intrinsic case study*).

Nel nostro caso lo studio dei tre studenti è strumentale al problema di ricerca posto, si tratta quindi di tre case studies di tipo strumentale.

Inoltre l'osservazione relativa ai case studies è una *participant observation* (Cohen e Manion, 1994), nel senso che l'osservatore *partecipa* alle attività che osserva intervenendo intenzionalmente con la finalità di modificare eventualmente alcuni dati osservati.

Questa ulteriore scelta è dovuta naturalmente a vincoli di natura contingente (come convincere uno studente a partecipare a 12 ore di incontri con l'unica prospettiva di essere *osservato*?), ma anche di natura etica. Di natura etica perché tale è la scelta di intervenire se convinti che un intervento possa essere risolutivo o comunque utile.

Inoltre un intervento di questo tipo stimola maggiormente l'interazione, permettendo di portare alla luce convinzioni significative che altrimenti rimarrebbero nascoste, e permette anche di *sperimentare* sul campo la significatività di alcune ipotesi teoriche.

[3]Più un incontro finale comune di 2 ore.

Riassumendo, le scelte metodologiche fatte rappresentano in definitiva un approccio multiplo, o triangolazione, cioè (Cohen e Manion, 1994, p.112) *the use of two or more methods of data collection.*
L'importanza della triangolazione è sottolineata da molti ricercatori, ed è un aspetto in cui la ricerca in matematica e in educazione matematica mostrano profonde differenze, come osserva Schoenfeld (2002, p.463): *Argumentation in education is much more complex than in mathematics and the physical sciences. In mathematics, one compelling line of argument (a proof) is enough; validity is established. In education (more broadly, in the social sciences), we are generally in the business of looking for* compelling evidence. *The fact is, evidence can be misleading. What we think is general may in fact be an artifact or a function of circumstances rather than a general phenomenon.*
Secondo Cohen e Manion (1994) la triangolazione può essere di diversi tipi, a seconda dell'elemento che si varia (ad esempio il tempo, o il luogo, o il quadro teorico). Potremmo dire quindi che nel nostro caso si tratta in un certo senso di *doppia* triangolazione, in quanto oltre a variare lo strumento utilizzato (temi, questionari, osservazione diretta), varia anche il livello dell'indagine (che coinvolge un gruppo nei primi due casi, case studies nel terzo).
Ed ora entriamo nel merito del percorso di ricerca seguito.

1. I temi

Nel capitolo precedente ho cercato di portare alla luce quelle che a mio modo di vedere sono le lacune di un approccio classico nella ricerca sulle convinzioni pesantemente caratterizzato dall'utilizzo di questionari a risposta chiusa. Tali osservazioni e critiche in qualche modo provengono anche da strumenti alternativi usati, come per esempio i temi.
I temi sono stato il primo strumento, da noi utilizzato, per lo studio delle convinzioni. Il titolo del tema proposto a studenti di ogni fascia scolare (dalla prima elementare fino all'università) e a insegnanti in formazione (prevalentemente studenti SISS) è il seguente: *Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi*[4]. Il numero di temi raccolti non è fissato in quanto la raccolta stessa continua ancora, è comunque significativo che l'analisi sia stata fatta per più di 500 composizioni.
Come detto, in letteratura in educazione matematica, pur se a volte i

[4]Naturalmente il *sottotitolo* era escluso nella consegna agli studenti delle scuole elementari.

temi sono citati come strumento di indagine, non esistono lavori sui fattori affettivi che propongano un'analisi strutturata di temi. In pratica questo strumento è concepito solo in teoria come modalità di indagine self-report. D'altra parte è evidente (e ancor più per noi che li abbiamo analizzati) che l'analisi di temi richieda tempi enormemente più lunghi che l'analisi di questionari a risposta chiusa, ma non solo: l'analisi dei temi comporta anche l'acquisizione di competenze tipiche di altri campi di ricerca, penso per esempio agli studi sul pensiero narrativo.
È però innegabile che la lettura di questi temi dia molte indicazioni che cercherò di riassumere avvalendomi proprio di brani di temi stessi[5]. Se è vero infatti che anche i temi sono comunque uno strumento di tipo *self-report*, e quindi in qualche modo siano *a rischio* di identificazione di convinzioni dichiarate piuttosto che convinzioni che guidano il comportamento, è innegabile che lascino molte più libertà a chi scrive e lo costringano a prendere decisioni autonome su quali cose sia importante dire e quali approfondire rispetto ad altre ritenute meno significative. L'analisi di queste decisioni può dare molte indicazioni sulle convinzioni e sulla loro organizzazione: centralità psicologica, ordine quasi-logico e anche isolamento di cluster. Quest'ultimo punto è particolarmente rilevante: i questionari a risposta chiusa raramente, per come sono strutturati, possono evidenziare contraddizioni, mentre nei temi capita che la stessa persona riporti convinzioni contradditorie. Tali contraddizioni possono essere dovute alla distinzione tra beliefs dichiarati e in azione: capita che una persona dichiari di avere certe convinzioni e poi la descrizione del suo comportamento suggerisca che queste convinzioni non sono rilevanti[6].
Ma ci sono almeno altre due eventualità riscontrate con i temi che evidenziano sia la *forza* dello strumento usato sia l'importanza dei sistemi di convinzioni:

- In alcuni temi ci sono contraddizioni che non intaccano la sfera comportamentale e quindi non si può parlare di distinzione tra beliefs dichiarati e in azione. In questo caso l'osservazione (l'analisi del tema) dimostra l'adeguatezza del modello teorico (separazione dei clusters di convinzioni):
  La matematica sicuramente è una delle materie più importanti tra quelle che ci offre oggi la scuola (...) richiede grande

[5]Tutti i nomi riportati sono di fantasia e la loro utilità è solo quella di label per permettere di richiamare un testo indicando il nome associato.

[6]Che poi è quello che ha messo in luce questa distinzione tra beliefs dichiarati e in azione, con la differenza che qui i comportamenti non sono osservati ma sono riportati.

impegno da parte degli alunni, un impegno a volte inutile visto che, almeno secondo il mio parere, la maggior parte delle cose studiate non vengono utilizzate nella vita reale. [Giulio, grade 11]

- Altre volte i temi evidenziano come una contraddizione apparente tra convinzione dichiarata e comportamento sia superabile se si considerano i sistemi di convinzioni, ci sono cioè altre convinzioni, probabilmente psicologicamente più forti rispetto a quella dichiarata che guidano il comportamento:
  Mi dispiace rovinarmi la pagella con questo odioso numero ma non ci posso fare nulla perché algebra non la ho mai capita e mai la capirò! Certo lo ammetto, a volte non ho voglia perché io le cose che non capisco (matematica) mi ostino a non farle, invece le cose che capisco continuo a farle fino a volte ad arrivare alla perfezione! So che dovrei fare il contrario ma io la matematica la ODIO e ormai vi ho rinunciato, sarei contenta se ci si potesse esentare da quella materia come da religione. [Grazia, grade 9]

Un'altra osservazione importante è sul titolo scelto per il tema, anche questa una scelta sicuramente fondamentale: non richiede di esplicitare le proprie convinzioni sulla matematica ed è piuttosto vago proprio per lasciare il maggior spazio possibile alle scelte narrative di chi risponde e per *nascondere* il nostro obiettivo di indagare sulle convinzioni in modo da cercare di evitare il rischio evidenziato da Lester (2002 p.352 − 353):
I am simply not sure that core beliefs can be accessed via interviews or written self reports because interview and self-report data are notoriously unreliable. Furthermore, I do not think most students really think much about what they believe about mathematics and as a result are not very aware of their beliefs. So, although I think these researchers are leading the way in efforts to develop good methodological tools for studying students'beliefs, a considerable amount of work remains to be done..
Inoltre il fatto che, nonostante non sia chiesto esplicitamente di esprimere convinzioni, nei temi raccolti abbiano una parte rilevante, oltre che alla descrizione di esperienze ed episodi, proprio le convinzioni della persona (spesso annunciate con un *credo che* o *penso che*) è una prova che, almeno per il soggetto, tali convinzioni hanno influenzato i suoi comportamenti, le sue emozioni e i suoi gusti. Si riescono a ricavare moltissime informazioni sulle convinzioni di chi scrive e questo secondo l'importanza (tecnicamente diremo la centralità psicologica) che lui stesso assegna.

Ma il risultato più importante della lettura dei temi è l'evidenza portata all'ipotesi di ricerca: è a volte esplicito, altre implicito, che alcuni comportamenti siano frutto delle connessioni tra convinzioni e quindi l'importanza dei sistemi di convinzioni e la scarsa significatività, in termini di interpretazione di comportamenti, delle singole convinzioni.
Vediamo un esempio di questo: molti nei loro temi hanno fatto riferimento alla certezza del risultato in matematica, ma come dimostrano questi temi (fatti da studenti SISS di formazione umanistica) questa stessa convinzione ha origine e conseguenze (anche dal punto di vista emotivo) profondamente differenti spiegabili con le differenze nei sistemi di convinzioni:

- Era bello perché c'era il risultato (...) Ma perché non ho fatto matematica? Almeno lì 2 + 2 fa 4 e non c'è alcun dubbio! [Carlo]
- Ciò che non ho mai accettato è la rigidità del percorso da seguire per la risoluzione del problema, il rapporto di causa effetto. [Paola]
- Ho sempre portato in me la convinzione che la matematica è un mondo dove 'tutto torna', contrapposto alla realtà dove 'il calcolo dei dadi più non torna' (E.Montale). [Sara]
- Forse questo 'divertimento' nasceva dalla gioia della pura astrazione o piuttosto dalla tranquillità determinata dal fatto che applicando una regola, si giunge sempre ad una soluzione? [Serena]
- Il fatto di constatare l'esattezza dei risultati degli esercizi mi genera la soddisfazione di aver 'obiettivamente' svolto bene il mio lavoro. [Armando]
- La matematica invece è la perfezione, è l'assoluto. È ciò che ci mette alla prova in modo oggettivo. La si padroneggia o no. Non ci sono vie di mezzo: i risultati 'tornano' oppure no. [Elena]

A prescindere dall'accordo o meno con la convinzione sulla certezza del risultato e di conseguenza (inferenza quasi-logica) sull'oggettività della matematica, queste differenze che non potrebbero essere evidenziate con un questionario classico sono significative, sia da un punto di vista teorico che pratico: alcune tra queste persone riferiscono di avere avuto difficoltà ed emozioni negative collegate a questa convinzione, altre di avere avuto *benefici* e emozioni positive, altri ancora pur non avendo particolari difficoltà ricondotte a questa convinzione hanno deciso che altre materie erano più consone ai propri gusti. Molte di queste

diversità sono dovute al fatto che a tale convinzione sono associate convinzioni molto diverse su di sè o sulle conseguenze di una valutazione oggettiva.
L'importanza dei sistemi di convinzioni è intuibile anche dal brano di Elena: abbiamo trovato molti temi in cui si fa riferimento alle stesse convinzioni, ovvero che in matematica la valutazione è oggettiva e che la matematica si padroneggia o no senza mezze misure; ma le conseguenze sono profondamente diverse a seconda delle convinzioni che si hanno sulle proprie possibilità di padroneggiarla o di avere un giudizio *oggettivamente* positivo[7].
Voglio portare un ulteriore esempio dell'importanza dei sistemi di convinzione utilizzando i brani di due temi fatti da studenti della stessa classe (grade 11) e che quindi si può assumere che condividano molte esperienze:

- Credo che si dovrebbe diminuire il carico generale, visto che, con l'arrivo dei nuovi calcolatori sofisticati scompare il bisogno dei calcoli manuali. Dall'altra parte la matematica la vedo come una ginnastica della mente. [Giulio]
- Quello che ci manca è la proprietà di calcolo e la velocità nell'eseguire operazioni banali (...) Secondo me la colpa è tutta delle calcolatrici che semplificano il calcolo ma reprimono di molto le capacità mentali. [Pietro]

Giulio e Pietro, oltre che alla stessa classe, condividono due convinzioni: il fatto che le calcolatrici facilitino il calcolo e che la matematica debba servire per allenare le capacità della mente, ma sono su posizioni diametralmente opposte. Probabilmente i due hanno, per esempio, convinzioni diverse su cosa siano le capacità della mente che la matematica debba allenare.
Sottolineare la complessità del pensiero e del comportamento umano non è *resa* di fronte alla prospettiva di cercare di interpretarlo, bensì uno sprone per cercare, per quanto possibile, di usare strumenti di interpretazione meno semplicistici possibile.

L'analisi dei temi, come visto nella critica ai questionari, evidenzia la poca significatività di singole convinzioni che sono spesso state di *riferimento* nei questionari presenti in letteratura: l'utilità e la facilità

[7] Apro una parentesi su un altro fatto interessante: la connessione tra le convinzioni dichiarate da Elena è, per usare la terminologia di Green, di tipo quasi-logico, infatti non è *scontato* che anche assumendo che in matematica un risultato sia giusto o sbagliato da questo derivi che ci metta alla prova in maniera oggettiva. Questo presuppone la sicurezza che chi giudica sappia sempre riconoscere se un risultato è giusto o sbagliato.

della matematica. Il punto centrale, come detto, non è tanto l'importanza presunta di un singolo item di un questionario, ma la poca significatività di non considerare il sistema di convinzioni legato a quell'item.
A questo proposito vediamo un altro esempio riferito ad un aspetto indagato spesso nei questionari sulle convinzioni: il fatto che fare matematica piaccia o no. In questo caso sembrerebbe naturale l'assegnazione di un punteggio se l'intento è quello di misurare: ma l'individuazione di sistemi di convinzioni mette in crisi la *naturalezza* di questa assegnazione e ne sottolinea una volta ancora l'ambiguità. Molto significativo, mi sembra, il seguente esempio dal tema di Luca (grade 10), da cui si possono estrarre le seguenti frasi:

- Già dalle scuole elementari la matematica mi ha affascinato molto, infatti ho raggiunto sempre risultati lusinghieri.
- Questa materia richiede molto impegno.
- La matematica mi piace.
- La matematica che bella materia se non ci fosse bisognerebbe inventarla.

Da questi estratti le convinzioni di Luca sembrano estremamente *positive*, ma il tema nella sua complessità permette di conoscere informazioni significative sull'origine di questi giudizi:
Già dalle scuole elementari la matematica mi ha affascinato molto, infatti ho raggiunto sempre risultati lusinghieri. Questa materia richiede molto impegno, perché la maggior parte degli argomenti sono basati su formule, teoremi e leggi che richiedono tanto studio. La matematica mi piace perché oltre ad usare le solite leggi e schemi sempre uguali spesso sono necessari collegamenti che servono a sviluppare l'intuito della persona. La matematica che bella materia se non ci fosse bisognerebbe inventarla.
Questo esempio può mettere in crisi la volontà di dare un punteggio positivo o negativo al fatto che a Luca piaccia la matematica: è infatti, a mio modo di vedere, fondamentale considerare anche le convinzioni sulla matematica che Luca ha.
Sempre a questo proposito confrontiamo i seguenti brani di temi:

- Io non so il perché della matematica, perché quello schema, quel procedimento e non un altro; perché, come dice il mio babbo:- Nell'aritmetica non si inventa -; io a volte invento e sbaglio; vorrei proprio sapere i motivi, le cause, perché così mi sembrano tutte regole astratte appiccicate qui e là. (Luca, grade 6)

- Della matematica mi piace tutto (...) io vorrei essere tanto una calcolatrice. (Sara, grade 5)
- Il mio profitto in questa materia è sempre stato sufficiente, ma di questo sono molto stupita, e mi domando il perché. (...) Ora me la cavicchio, ma non perché riesco a ragionare sulle formule, ma perché le applico e basta. Sono sicura che se dovessi fare un compito con dei 'perché' sulle formule, non sarei in grado nemmeno di scrivere una parola. Andando avanti per la mia strada, le equazioni di primo grado, quelle di secondo grado e i radicali nel campo del turismo non servono, ma queste cose le facciamo per imparare a ragionare giusto? Ma se io le faccio perché so le regole ma non le capisco, a cosa mi servono? Se potessi, la matematica sarebbe una materia che smetterei di studiare, visto che la odio. Penso che questo sentimento dipenda dal fatto che il mio studio è stato sempre di tipo mnemonico, meccanico senza la preoccupazione di capire veramente l'esercizio che dovevo svolgere. Colpa mia o degli insegnanti? (Laura, grade 10)

Da un questionario risulterebbe probabilmente che Sara è l'unica con convinzioni *positive*. A parte il grado di maturità delle composizioni, dovuto anche alle differenti età, è evidente che *l'odio* di Laura, ma anche le difficoltà di Luca, non possono essere sbrigativamente etichettate come convinzioni negative, a meno che esse non siano decontestualizzate come accade nei questionari. Skemp (1976) interpreterebbe queste difficoltà come quelle di studenti con una visione *relational* della matematica a cui la matematica è stata presentata (non solo dall'insegnante, ma anche dai parenti) in maniera *instrumental*: ma la possibilità di una tale interpretazione, che si può giudicare più o meno attendibile, è permessa dalla ricostruzione di un sistema di convinzioni. Tale ricostruzione non è detto sia sempre possibile tramite il tema, ma è sicuramente irrealizzabile con i classici questionari. La maggior ricchezza dell'analisi di un tema rispetto ad un questionario penso sia innegabile, ma forse non si ha l'idea, la misura di tale differenza: significativo mi sembra proprio il tema intero di Luca che mostra oltretutto una maturità e una chiarezza incredibile per la sua età:
Mi ricordo vagamente della mia maestra di aritmetica di prima, in seconda ricordo una signora anziana che andò subito in pensione. Era nervosa con un tic continuo alle spalle, spesso urlava e a volte ci prendeva per un orecchio. Ho presente invece molto bene la mia maestra dalla terza alla quinta. Si chiama Rosa, è alta e magra ma aveva una natura pessimista, da pessimismo leopardiano: ad esempio verso

Pasqua ci faceva fare dei problemi sulle uova con delle situazioni dove tanti pulcini morivano prima di nascere. Domandava: quanti nasceranno vivi? A me passava la voglia di saperlo. Secondo me era troppo formale: teneva molto alla disciplina e pretendeva che chiedessimo il permesso per andare a buttare la carta nel cestino e rispettassimo la fila, buoni e zitti, per farle correggere i quaderni; noi eravamo vivaci e lei diceva -Io parlo, parlo, ma a voi...- e concludeva con un gesto della mano strusciata sotto il mento che voleva dire:...non ve ne importa niente... Ma a me quello che seccava più di tutto era il continuo ripetermi che avevo fatto la Primina come la chiamava lei, come se fosse una colpa e io mi sentivo a disagio con i miei compagni: -Come mai hai fatto la primina?...Vedi Luca? Questo ti è mancato... Questo è perché non hai fatto la prima normale...- Infatti quando quest'anno sono andato a trovare le mie maestre lei me lo ha ridetto. Però Rosa mi sorprese quando un giorno la incontrai a tennis, dove c'è anche sua figlia, mi sembrò un'amica che mi volesse bene, mi lodò per la mia intelligenza, mi incoraggiò, mi disse anche che ero bello e che avevo degli 'ottimi genitori' e che senz'altro avrei avuto buoni risultati negli studi...poi a scuola non mi disse mai più nulla di queste cose e le lezioni di matematica me le ricordo un po' tristi. Rosa spiegava con le spalle girate alla classe, riempiva la lavagna e parlava con quel tono di voce monotona.
Ora sono in prima media e la professoressa di matematica è brava, simpatica, specialmente quando ci fa scienze, ma la vorrei più incoraggiante nei miei confronti. Penso che il mio rapporto con la matematica sia stato sempre 'buio e tenebroso'; non ho mai avuto la padronanza nella materia e fin dai primi tempi delle elementari mi sentivo incerto; anche se una cosa la sapevo mi sorgevano un sacco di dubbi. Ecco, io non so il 'perché' della matematica, perché quello schema, quel procedimento e non un altro; perché, come dice il mio babbo: -Nell'aritmetica non si inventa.-; io a volte invento e sbaglio; vorrei proprio sapere i motivi, le cause, perché così mi sembrano tutte regole astratte e appiccicate qui e là.

L'analisi dei temi oltre a mostrarsi ben più densa di informazioni rispetto ai questionari e ad aver sottolineato l'importanza della ricostruzione dei sistemi di convinzioni piuttosto che la singola convinzione, ha evidenziato che, nonostante le differenze di maturità e di competenza linguistica delle persone che hanno svolto i temi, ci sono una serie di categorie e *collegamenti* ricorrenti.
In particolare si trovano categorie di convinzioni:

(1) Sulla matematica in generale o su particolari argomenti e attività matematiche:
   - Questa materia non è un'opinione, dal momento che i conti devono tornare. [Daniele, grade 3]
   - La matematica è utile ma bisogna dedicarle tutta la propria infanzia e questo mi pesa molto. [Chiara, grade 4]
   - Se ti distrai un attimo sbagli subito. [Martina, grade 5]
   - La cosa che mi ha insegnato la matematica è che bisogna sempre chiederci il perché accadono certe cose. [Simone, grade 6]
   - Ho sempre paragonato la matematica ad un quiz dove c'è una sola via d'uscita. [Giacomo, grade 6]
   - Un lato della matematica che non mi piace è che non possiamo sbagliare una virgola, infatti se durante la risoluzione di un problema soltanto una cifra viene scritta in modo errato, tutto il problema risulta sbagliato. [Martina, grade 6]
   - Mi piace perché ci sono sempre cose nuove da scoprire, infatti non è come l'Italiano che su per giù gli argomenti non cambiano mai. [Veronica, grade 6]
   - Ho conosciuto la matematica alle elementari e mi è piaciuta, perché rispetto all'italiano, che è un po' fantasioso, nella matematica ci sono sempre risposte certe, che danno una garanzia sull'esercizio svolto. [Elena, grade 11]

(2) Su di sé:
   - Non riesco a ragionarci molto. [Claudia, grade 5]
   - Non riesco a concentrarmi nel testo dove ci sono i dati conosciuti. [Letizia, grade 5]
   - La seconda è stata più dura perché si sono imparate le tabelline. All'inizio, siccome ero dura, non riuscivo ad impararle[8]. [Francesca, grade 4]
   - Non so come mettere in funzione il mio cervello, forse sono scariche le pile o si è smontato qualche pezzo o filo, non so. [Jonathan, grade 5]
   - Non capisco i passaggi. [Nicola, grade 5]
   - Sono un ragazzo che studia pochissimo. [Valerio, grade 7]

[8] In questo caso la convinzione su di sé è legata ad un'attribuzione di fallimento. Secondo la classificazione di Weiner, potremmo dire che questo è un locus interno, probabilmente considerato stabile e non controllabile.

- la precisione non è una mia peculiarità. [Paolo, studente SISS]

(3) Sul contesto, e in particolare sull'insegnante, ma anche, per esempio sui parenti:
  - La maestra aveva un brutto carattere, mi faceva proprio paura e questa paura contribuiva a farmi avere un pessimo rapporto con la matematica. [Luca, grade 7]
  - - Mario perché non sai rispondere?- mi dice la professoressa mentre sono davanti ad un esercizio che mi crea difficoltà. Ho sempre odiato le insegnanti che pretendono che tu sappia già tutto della matematica fin dalla tua nascita. [Mario, grade 8]
  - Le cose sono peggiorate alle superiori perché avevo una professoressa che mi aveva preso all'ingiù. Lei spiegava malissimo e poi chi rimaneva indietro per lei era uno che non voleva capire e andava avanti. L'anno dopo mi è ricapitata e in principio sembrava più disponibile ma poi dopo pochi mesi è ritornata come l'anno prima e andava avanti senza aspettare chi rimaneva indietro. [Roberto, grade 9]
  - Secondo me la matematica non sarebbe la stessa se la maestra fosse un'altra. [Federica, grade 4]
  - Ricordo ancora adesso le serate con mio padre a ripetere le tabelline! Un incubo [Claudia, studente SISS]
  - Sono stati i miei genitori a dirmi che la matematica è importante e bisogna studiarla molto. [Luisa, grade 9]

È poi interessante notare come dall'interazione tra le convinzioni sulla matematica e sul contesto sociale vengano costruite le proprie teorie del successo in matematica. L'osservazione fondamentale, che mostra la *forza* dello strumento tema, è che le teorie del successo riportate sono di ogni tipo, a testimonianza del fatto che quando vengono rimossi gli *sbarramenti* tipici dei questionari che chiedono l'accordo o meno su teorie del successo pre-selezionate dal ricercatore si hanno probabilmente informazioni più significative per esempio sulla centralità psicologica delle convinzioni riportate:

- Capisco [la teoria] forse perché la studio e la ripeto a voce alta fino allo sfinimento. [Carlo, grade 11]
- La matematica (...) regole, principi, definizioni!!! (...) Imparare a memoria (...) non dovevo capire, ma solo imparare! [Laura, studentessa SISS]

- La matematica era una materia noiosa, poco intrigante, o troppo facile o troppo difficile (...) se mi interrogavano per prima: 4, se da seconda in poi: 7/8, perché gli esercizi erano tutti uguali. [Martina, studentessa SiSS]
- Bisogna essere veramente forti perché i numeri sono fatti e messi lí, con schemi ben precisi dove tutto deve tornare e per renderli piacevoli ci vuole proprio la fantasia, la calma e la pazienza che riesce ad avere il nostro insegnante. [Giorgio, grade 10]
- La cosa per me più fondamentale della matematica è stare molto attento alle spiegazioni in classe e fare molto esercizio sugli argomenti trattati. La matematica è un meccanismo che va allenato facendo esercizio sia a scuola che a casa. [Elisa, grade 10]
- Quando si fanno le spiegazioni in classe non bisogna perdere neanche una parola. [Andrea, grade 6].
- Partiamo pure dal presupposto che questa sia una materia da studiare a casa, però prima bisogna capire in classe, altrimenti è inutile esercitarsi a fare dei calcoli su dei segni che per te non hanno senso, che ti appaiono come simboli astrusi, malefici, capaci di fare solo del male. [Daniela, grade 9]
- Io con la matematica alle medie non mi garbò molto perché bisogna imparare tutti i libri a memoria. [Carlo, grade 9]
- No...chi sa...forse una volta perso il feeling con la matematica, non lo si ritrova più e bisogna affidarsi alla fortuna. [Mattia, grade 10]
- ho capito che per riuscire ad affrontare i problemi matematici occorre applicarsi molto, fare esercizi e seguire le spiegazioni dell'insegnante. [Luigi, grade 9]

Mi voglio soffermare ancora sulle teorie del successo perché in presenza di motivazione a fare bene sono considerate decisive nell'orientare gli sforzi dovuti a tale motivazione (Nicholls e altri, 1990). Ma anche perché i temi mostrano delle caratteristiche importanti di queste particolari convinzioni che sono difficilmente riscontrabili con i questionari. Innanzitutto la presenza molto frequente del verbo *bisogna* all'inizio dell'esplicitazione di una teoria del successo: questo *marcatore* per l'appunto evidenzia come per molti queste teorie del successo siano centrali o quantomeno strettamente necessarie e non delle caratteristiche opzionali che possono servire per far bene in matematica.
Inoltre suddividendo i temi per età si riscontra come nelle classi delle elementari generalmente le teorie del successo sembrano rispecchiare le

raccomandazioni esplicite dell'insegnante:

- Senza chiacchierare e ascoltando la maestra si impara di più. [Elena, grade 4]
- Bisogna ragionare. Bisogna, ragionare sui conti... [Giada, grade 5]
- La matematica non è né facile né difficile, basta solo ragionare e ascoltare quello che dice la maestra, se t'impegni è facile e se non t'impegni vuol dire che non hai capito niente e vuol dire che non ascolti i comandi della maestra. Però è un po' complicata e ci devi saper ragionare. [Michele, grade 5]
- È una materia importante che si capisce subito se ci si riflette e ci si impegna. [Alessia, grade 5]
- A volte non capisco molto su quello che dice la maestra L. perché forse sto pensando ad un'altra cosa. Penso che stando attenta in classe o alle spiegazioni migliorerò su questa materia. [Martina, grade 5]
- Una persona può imparare la matematica ascoltando ma se non ascolta non capisce. Se non capisce non potrà fare bene gli esercizi. Se non fa bene gli esercizi, boccia! [Filippo, grade 6]

Successivamente, con l'aumentare delle esperienze e della consapevolezza, le riflessioni si fanno più personali e critiche: nelle teorie del successo il soggetto mette in relazione le caratteristiche che egli stesso attribuisce alla matematica con i comportamenti che egli riconosce, per esperienza, vincenti o perdenti nel suo contesto.

- Le cose che mi riescono poco sono i problemi perché per essi non serve studiare e possono variare molto. [Denise, grade 6]
- Questa materia non mi piaceva mai perché occorre tanto ragionamento e memoria. Inoltre non si può fantasticare ed esporre le proprie opinioni come nell'italiano. Nella matematica bisogna attenersi a quello che dicono gli altri e non a quello che mi dice il cuore come quando scrivo un tema. [Francesca, grade 6]
- Il fatto è che nelle altre materie basta studiare per sapere ed andare bene in quella materia, la matematica ti pone ogni volta un nuovo quesito che non sempre riesco a svolgere. [Martina, grade 7]
- Io penso che la matematica sia una materia che dà molte soddisfazioni, perché in essa non basta sapere, ma bisogna riuscire a capire ad applicare. [Eleonora, grade 8]

- Da piccola mi attirava in modo particolare perché pensavo che non bisognasse studiare tanto per capirla, come poteva essere la storia, l'italiano, pensavo che fosse tutta pratica. [Federica, grade 11]

Queste teorie evolvono con il passare del tempo, con il cambio di scuola (contesto sociale) e di livello di difficoltà degli argomenti (matematica):

- Chi alle medie è abituato ad un altro metodo di studio, alle superiori si trova davanti un grosso scoglio di marmo e questo può essere superato a testate, cioè con lo studio. [Alessandro, grade 10]
- Crescendo invece è calata la mia bravura cioè logicamente parlando è rimasta la stessa ma parlando di ore di studio ho visto che non avendone mai avuto bisogno, non riesco a mettermi in testa che ora le cose sono difficili e che non si possono basare solo sulla propria logica. [Francesca, grade 11]
- Più o meno nelle materie dove è necessario studiare direttamente senza eccessivi sforzi come possono essere quelle mnemoniche, non ho mai avuto eccessivi problemi, mentre nelle materie dove oltre che lo studio, bisogna capire la radice del problema o dello studio stesso, ho sempre avuto bisogno di un tempo maggiore per il ragionamento e la comprensione. La materia che rispecchia maggiormente queste caratteristiche è la matematica con la quale ho sempre avuto un rapporto in cui si sono alternate luci e ombre. [Lorenzo, grade 12]

Si potrebbe obiettare che questa osservazione dell'evoluzione delle teorie del successo e della loro *maggior autonomia* rispetto ai messaggi dell'insegnante con il crescere dell'età, potrebbe essere fatta anche con i questionari. Forse è vero, ma in misura minore, in quanto non ci sarebbero riferimenti espliciti al fatto che una determinata cosa *è stata detta dalla maestra* e inoltre è difficile cogliere per esempio l'evoluzione delle teorie del successo nella stessa persona. La forza del tema sta anche nel titolo e nella richiesta di scrivere la storia personale della persona e non soltanto il momento attuale. Si potrebbe chiedere opinioni *retroattive* anche con un questionario ma, a parte il fatto che raramente questo viene fatto, non sarebbe probabilmente la stessa cosa: la persona dovrebbe dichiarare un cambiamento delle proprie idee senza specificare a cosa sono dovute (per esempio *ora le cose sono difficili*). Forse anche questo potrebbe essere chiesto, ma allora il questionario diventerebbe talmente strutturato da portare forzatamente la persona a ragionare e parlare di determinate cose: la forza del tema è nella libertà di scelta e di decisioni che lascia a chi lo scrive.

Un'ultima categoria di convinzioni riscontrata è quella che *proviene* in un certo senso dalla interazione delle proprie teorie del successo in matematica con la percezione di sè: questa valutazione produce il senso di auto-efficacia.

- La matematica è una materia che non mi riesce. [Sandro, grade 9]
- Ecco forse è proprio la geometria la parte di matematica che mi riesce un po' di più, perché secondo me c'è da fare meno conti. [Andrea, grade 10]
- Quando ho iniziato alle elementari era facile e la capivo abbastanza. Quando sono passato alle medie la matematica non mi riusciva perché avevo delle lacune. Adesso sono alle superiori e la matematica non mi riesce capirla perché è abbastanza difficile[9]. [Giorgio, grade 10]

È interessante notare che dai temi spesso si riesce a seguire un'evoluzione di queste convinzioni e anche del senso di auto-efficacia. Questo tipo di convinzioni è particolarmente interessante perché con il tempo, spesso, il senso di auto-efficacia (soprattutto se basso) diventa una caratteristica fissa della persona che non si basa più su valutazioni sulla matematica, su di sè e sulle richieste che vengono fatte nel proprio contesto. Questo fatto spesso incide sulle persone in difficoltà: con un comportamento rinunciatario e con scelte di evitamento mirate. Dai temi si evince anche che la *cristallizzazione* del senso di auto-efficacia è spesso legata a momenti precisi:

- Dal quel momento in poi la mia vita si è tramutata in un inferno dato che, malgrado il mio impegno, non riuscivo più a capire questa materia. [Bettina, grade 10]
- La maestra si arrabbiò così tanto che mi fece la nota e fu da quel momento che nacque il mio odio verso la matematica. [Lucilla, grade 11]
- da quel momento in poi la matematica non l'ho più ascoltata né studiata. [Francesco, grade 10]
- La consapevolezza di un vero e proprio limite che ogni tanto compare e non puoi non accettare. [Luciana, studentessa SISS]

Cè un'ultima caratteristica importante delle convinzioni che i temi suggeriscono: non solo l'importanza delle connessioni tra convinzioni, ma anche la grande rilevanza data alle emozioni suscitate da determinate convinzioni. In particolare questa caratteristica è l'unica per cui non

[9]Anche in questo caso si nota un'*evoluzione* del senso di auto-efficacia con il tempo

si notano differenze palesi tra temi fatti da ragazzi di età diverse: la rilevanza delle reazioni emozionali non dipende dal livello scolare.

- Quando si fa una verifica di matematica mi sento: molto male, mi sente la pancia e ho molta paura. [Letizia, grade 5]
- Io, quando c'è matematica, ho sempre paura e mi viene freddo. [Eleonora, grade 6]
- Per me le ore che passavo a scuola a fare matematica erano ore di terrore. La notte avevo perfino gli incubi! [Doriana, grade 6]
- Se per caso vengo a scuola con tristezza, la matematica me la fa andare via. [Giulia, grade 4]
- Quando ho imparato le quattro operazioni mi sentivo come 'Cristoforo Colombo' perché avevo scoperto qualcosa. [Francesco, grade 4]
- Secondo me la matematica è un insieme di felicità. [Irene, grade 6]
- Quando mi recai alle scuole medie inizia ad avere una certa paura della matematica, e se avessi potuto per quella materia non sarei più andato a scuola. [Luca, grade 11]
- Ricordo ancora adesso le serate con mio padre a ripetere le tabelline! Un incubo (...) Ero terrorizzata dalle interrogazioni e dai compiti. Ogni tanto ancora adesso la sogno!! [Marika, studentessa SiSS]
- Non c'è il trasporto che provo nel leggere un libro, nel recitare una poesia. Trovo che sia 'utile', 'formativa', ma non mi fa battere il cuore!! [Carla, studentessa SiSS]
- Anche il foglio a quadretti mi crea ansia! [Giuditta, studentessa SiSS]

Sembra che la matematica rispetto ad altre materie scolastiche sia maggiormente caratterizzata da tali reazioni emozionali. Come è spiegabile questo fenomeno? Da un lato il fatto che il problem-solving, attività tipica in matematica, sia caratterizzato da molte discrepanze cognitive che originano reazioni emozionali (Mandler 1984, 1989), dall'altro sembra giocare un ruolo importante la convinzione particolarmente diffusa che il giudizio in matematica sia oggettivo: questo contribuisce al sentire spesso la matematica come un *terreno ideale di sfida* con tutte le conseguenze emozionali del caso. Forse anche questa presunta oggettività di giudizio fa sì che tale giudizio oggettivo si trasformi da una valutazione del profitto matematico di una persona ad una valutazione della persona:

- Il mio problema era questo: considerare la matematica come una dimostrazione di intelligenza, ma anche di competizione con i compagni più bravi. [Lauro, studente SiSS]
- Mi sembrava di essere inadeguato o comunque di esserlo di meno rispetto ad alcuni compagni. Alle soluzioni ci arrivavo, forse neppure male, ma con più lentezza di alcuni. [Mario, studente SiSS]
- Ma quando ero accanto ad alcuni miei amici che finivano un problema in meno di un secondo, avevo sempre un nodo in gola e avevo voglia di sprofondare sottoterra. Ho sempre avuto un debole per i problemi. Per me sono come una sfida, una corsa contro il tempo e contro i bambini più veloci di me. [Clarissa, grade 6]
- Avevo sviluppato un senso di rifiuto anche per i problemi perché era nata anche una forte competizione tra tutti i miei compagni. C'erano due bimbi ed alcune bambine che finivano sempre per prime l'esercizio e la maestra li lodava di fronte a tutti gli altri. Io mi rodevo le dita e cercavo di impegnarmi ma la mia ansia diventava troppo forte e non riuscivo ad andare avanti. [Sandro, studente SiSS]

È evidente che questa osservazione non è uno sfizio teorico perché la presenza di reazioni emozionali negative di livello intenso non solo può essere origine, ancora una volta, di scelte di evitamento, ma anche nell'immediato è di ostacolo ai processi cognitivi. La considerazione di questa componente emozionale fa riflettere una volta di più sui criteri di misurazione di questionari che valutano positiva o negativa una convinzione a prescindere dalla componente emozionale stessa, ma anche di quelli che assegnano ad una convinzione un punteggio positivo perché stabiliscono che da questa debba scaturire un'emozione positiva. In definitiva i temi, per quanto riguarda il rapporto convinzioni-emozioni, mostrano i limiti di un'interpretazione normativa tesa alla ricerca di leggi universali e che vede i comportamenti soggetti a spiegazioni di tipo causa-effetto (Cohen e Manion, 1994) e inoltre sottolineano come quasi sempre l'emozione sia collegata al sistema di convinzioni e non alla singola convinzione.

2. IQB

I limiti dei questionari classici (scale di Likert e differenziali semantici) e delle analisi di questi strumenti tese a dare una misura della *positività* o *negatività* delle convinzioni di un soggetto sono confermati dall'analisi dei temi. Quest'ultima, come descritto, ha evidenziato la

varietà di sistemi di convinzioni associate ad una singola convinzione e l'importanza di considerare questi sistemi di convinzioni.
Il passo successivo è stato quello di tentare di costruire un questionario dall'analisi del quale *poter ricostruire* in parte un sistema di convinzioni associato a convinzioni spesso presenti nei questionari usati classicamente. Questa scelta è dovuta alla volontà di mostrare come, anche per queste convinzioni, i sistemi di convinzioni associati siano molteplici.
Ma non solo, abbiamo voluto indagare anche su un'altra caratteristica sottolineata dai temi: l'arbitrarietà di associare univocamente a determinate convinzioni la stessa reazione emozionale prescindendo dal sistema di convinzioni del soggetto.
Il voler, con lo stesso strumento, avvalorare un'ipotesi di ricerca e una critica agli strumenti esistenti ha in qualche modo *indirizzato* la progettazione dello strumento stesso. La nostra convinzione è che una delle debolezze maggiori dei questionari tipo scale di Likert o differenziali semantici sia di essere a risposta chiusa: per questo i questionari usati alla tipica domanda a risposta chiusa fanno seguire la richiesta di giustificazione e di esempi.
Abbiamo innanzitutto selezionato sette convinzioni presenti nei questionari più diffusi in letteratura, perché probabilmente considerate epistemologicamente corrette:

- In matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.
- La matematica è utile.
- In matematica le regole e le proprietà vanno imparate a memoria.
- Solo alcune persone possono arrivare a capire bene la matematica.
- In matematica ogni conoscenza si basa su conoscenze precedenti.
- La matematica ha molti collegamenti con la realtà.
- In matematica si può sempre capire il perché di ogni regola.

Selezionate queste convinzioni abbiamo costruito due questionari distinti[10], che chiameremo 1 e 2 per distinguerli, composti da 5 domande oltre che dai dati sulla persona compreso il suo voto in pagella in matematica[11]. Le prime 4 domande sono generiche sul fatto che la

[10]Il Prof. Piochi dell'Università di Firenze ha collaborato a questo studio sia nella fase di costruzione dei 2 questionari che in quella di analisi.

[11]Questo per suddividere i ragazzi in *alti* e *bassi* in matematica. È ovvio che il criterio è discutibile, ma il voto in pagella rappresenta almeno il grado di successo scolastico in matematica. Tra l'altro per differenziare bene i due insiemi abbiamo

matematica piaccia o meno e perché, e sono comuni a tutti e due i questionari che poi si differenziano nella quinta e ultima domanda. In entrambi i questionari nella quinta domanda si chiede l'accordo con le sette convinzioni o con il loro opposto: in questo si conserva un difetto dei questionari, sottolineato anche da Lester (2002), ovvero di chiedere l'accordo su convinzioni su cui magari il soggetto non ha mai riflettuto. Inoltre per il modo in cui sono stati strutturati questi questionari non ha *rappresentanza* chi pensa che non sia vera né la convinzione né il suo opposto. La cosa importante è però non solo che noi stessi siamo consapevoli di questi *difetti*, ma anche che in un certo senso li vogliamo *usare* per mostrare i limiti dei questionari classici: per le nostre considerazioni ci interessa selezionare proprio chi ha o dice di avere posizioni nette. È da sottolineare comunque che lasciando spazio a chi risponde con la domanda *aperta*, spesso chi non ha una posizione *netta* sente la necessità di dichiarare la sua *moderazione*. Per esempio c'è chi si dichiara d'accordo con il fatto che solo alcune persone possono arrivare a capire bene in matematica, ma poi aggiunge *non è che la cosa sia così drastica*, oppure chi segna che in matematica le regole e le proprietà vanno imparate a memoria e poi afferma *forse non proprio a memoria, ce ne sono alcune meno importanti che basta ricordare a grandi linee* o chi mette la croce accanto alla proposizione sull'utilità della matematica ma poi specifica che alcune parti come la trigonometria non lo sono. La differenza tra i due questionari sta nell'articolazione della quinta domanda: infatti, dopo aver chiesto l'accordo sulle sette convinzioni selezionate, in un caso si indaga sui sistemi di convinzioni mentre nell'altro sulle emozioni associate alla convinzione *dichiarata* inizialmente[12]:

Questionario 1

5. Per tutte le domande che seguono, scegli ogni volta fra le due alternative l'affermazione che ti convince di più e motivala con parole tue:
☐ In matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.
☐ Non è vero che in matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.
Perché? Puoi fare qualche esempio?

tolto la fascia di mezzo: quella che presenta voti da 5 a 7.

[12]Discuterò solo le risposte relative alla convinzione *in matematica c'è sempre un perché per ogni cosa*. I risultati ottenuti sono simili per tutte le convinzioni usate, in particolare la convinzione scelta è quella su cui abbiamo basato la sperimentazione del questionario definitivo.

Questionario 2

5. Per tutte le domande che seguono, scegli ogni volta fra le due alternative l'affermazione che ti convince di più. Segna poi se quello che pensi (cioè l'affermazione che hai scelto tu) ti piace / non ti piace / ti è indifferente:

□ In matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.
□ Non è vero che in matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.
E questo:
□ Mi piace.
□ Non mi piace.
□ Mi è indifferente.

I due questionari sono stati somministrati rispettivamente a 205 e 211 studenti di scuola superiore pubblica (14-18 anni).

(1) Le risposte al questionario 1 sono molto interessanti, la richiesta di fare un esempio si è rivelata molto significativa per inferire convinzioni collegate ai particolari esempi e alla convinzione iniziale.
Quello che è importante, per sottolineare la significatività dei sistemi di convinzioni, è mostrare la varietà di tipologie di risposte avute a questa domanda del questionario. In particolare riporto alcune tra le risposte che mi sembra *marchino* una differenza netta con quelle che si potrebbero ottenere con i classici questionari e che evidenziano convinzioni collegate alla presa di posizione iniziale sensibilmente diverse tra loro:
   - Non sempre in matematica c'è un perché a tutto: ad esempio i criteri di divisibilità per $2, 3, 4, 5, 6, 11, 25$ sono così e non c'è una spiegazione, i calcoli tornano sempre perché è così senza una spiegazione.
   - In matematica c'è sempre un perché per ogni cosa perché è stata inventata dall'uomo, quindi ogni operazione ha una logica, ma non sempre la capiamo.
   - In matematica c'è sempre un perché per ogni cosa perché in matematica non c'è regola che non richieda un perché. Esempio: perché $- \cdot - = +$? a questo non so rispondere, ma io lo prendo come regola.
   - Non sempre in matematica c'è un perché a tutto perché alcune regole sono così e basta, non c'è una spiegazione per tutto.
   - Non sempre in matematica c'è un perché a tutto, non ho un esempio preciso ma mi ricordo che alle medie ci dissero

che dovevamo fare in quel modo e basta.

- Non sempre in matematica c'è un perché a tutto: forse sono io che non capisco in tutti i casi. Ma comunque ci sono alcune cose che non si possono spiegare: ad esempio gli assiomi.

Abbiamo notato che il chiedere il perché e lasciare spazio a chi risponde permette di chiarire quando la posizione sull'affermazione non è netta. Lo stesso spazio e la richiesta di esplicitare un sistema di convinzioni a volte *forza* anche a rivelare che non si è proprio convinti di poter rispondere alla domanda:

- Non sempre in matematica c'è un perché a tutto. Ci sono molti problemi irrisolti. Comunque non credo di essere in grado di rispondere in coscienza a questa domanda, perché forse non conosco abbastanza la matematica.

In definitiva l'opzione che ha caratterizzato il questionario 1 si è rivelata utile per quel che era stata progettata: ovvero mostrare che ad una stessa convinzione possono essere associati sistemi di convinzioni diversi e che queste diversità sono a nostro modo di vedere significative.
Inoltre ha permesso, in alcuni casi, di far esprimere il soggetto rispetto alla sua *preparazione* per rispondere alla domanda ma anche di far capire come il soggetto stesso ha interpretato la domanda. Il fatto che ci siano interpretazioni diverse della stessa domanda non è di per sè un fatto negativo se siamo in grado di capire quali sono state queste interpretazioni.
Questa osservazione sottolinea un altro punto critico dei questionari con domande a risposta chiusa: si presume (i nostri questionari dimostrano che tale assunzione è arbitraria) che la richiesta non sia ambigua e quindi si analizza la risposta alla luce della propria interpretazione.

(2) Il questionario 2 aveva il compito di mostrare come fosse arbitrario associare univocamente ad una convinzione una determinata reazione emozionale.
Anche in questo l'analisi dei dati raccolti ha confermato la nostra ipotesi iniziale, come si può vedere dalla seguente tabella riassuntiva in cui B sta ad indicare l'accordo con l'affermazione che in matematica c'è sempre un perché in ogni cosa e nonB l'accordo con l'affermazione *opposta*: i segni +, -, 0 indicano rispettivamente il fatto che la convinzione posseduta piaccia, non piaccia, sia indifferente:

(B,+)	(B,-)	(B,0)	(nonB,+)	(nonB,-)	(B,0)	TOT
95	27	17	14	20	38	211

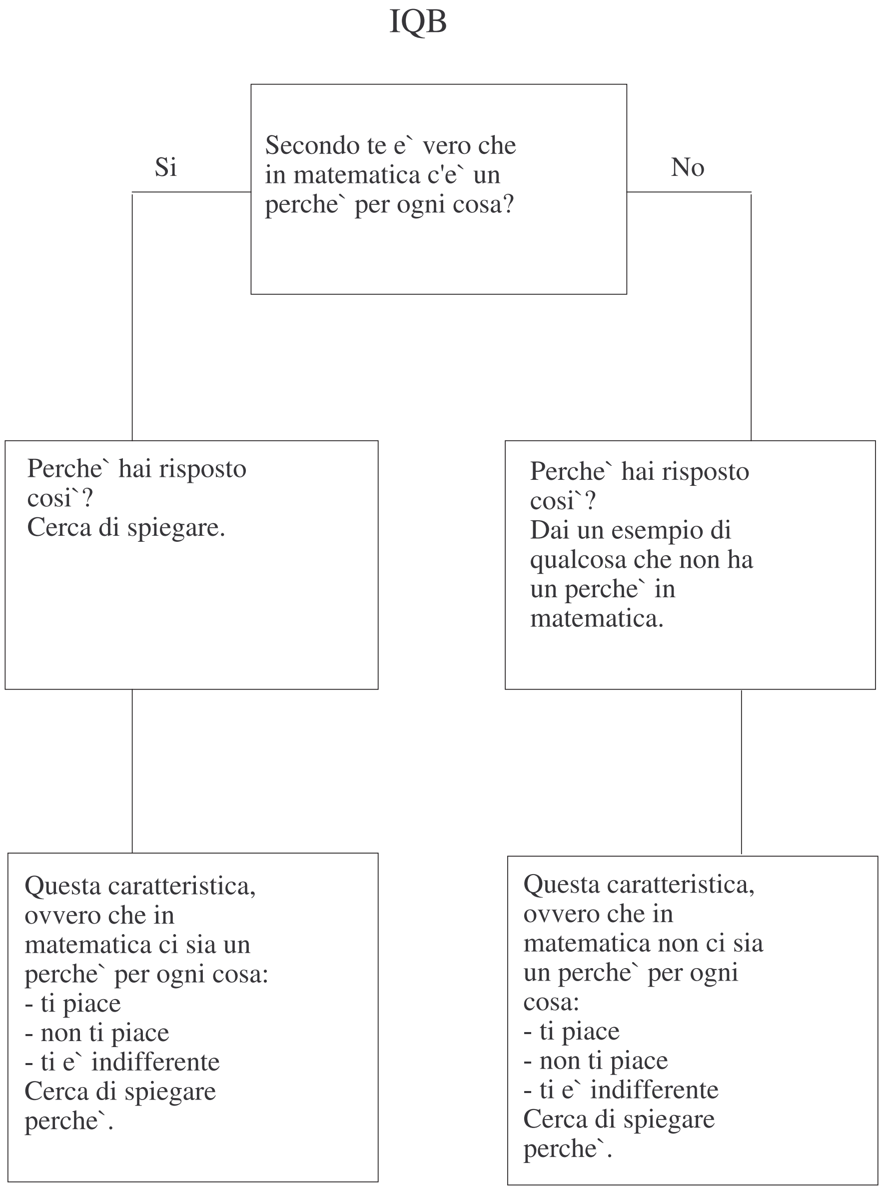
La prima osservazione da fare è che tutte le sei combinazioni teoricamente possibili sono presenti, e anche quella meno rappresentata è composta da più del 6.5 per cento del campione. Inoltre solo 109 studenti (circa il 51.7 per cento del campione) si ritrova nelle combinazioni di *riferimento*, ovvero (B,+) e (nonB,-).

In particolare questa osservazione sottolinea come una convinzione possa suscitare reazioni emozionali differenti in individui diversi e rende impraticabile la valutazione a priori della componente emozionale di una convinzione come positiva o negativa.

Osserviamo che le considerazioni fatte con l'analisi delle risposte al questionario 2 sono limitate alla critica sulla valutazione dei questionari che assumono la reazione emozionale a partire dalla convinzione. Manca ancora un passo, quello che riguarda l'interpretazione di questo fenomeno che può essere di natura diversa: la componente emozionale può essere direttamente collegata con la convinzione B oppure indirettamente attraverso un sistema di convinzioni legato a B. Per esempio con convinzioni legate al senso di auto-efficacia: nel caso specifico alcuni hanno sottolineato il fatto che non credono di essere in grado di capire tutti questi perché della matematica.

La convinzione che ha guidato la strutturazione del questionario definitivo (chiamato IQB: Integrated Questionnaire on Beliefs) è che non bastasse mettere insieme i due questionari 1 e 2. Abbiamo visto che anche alcuni questionari in letteratura indagano sia su convinzioni che emozioni, ma raramente queste sono correlate alla convinzione dichiarata e ancora più raramente sono formulate domande a risposta aperta. Quello che cerchiamo di mostrare è che, così facendo, si perdono di vista differenze significative e anzi risposte ispirate da motivazioni profondamente diverse siano assimilate tra loro. L'ipotesi interpretativa fatta sull'analisi del questionario 2 suggerisce non solo di tenere in conto le conseguenze emozionali di una convinzione ma anche l'origine cognitiva delle emozioni. Il risultato di queste considerazioni è il questionario IQB, che tiene conto dell'importanza di indagare sia sui sistemi di convinzioni associati ad una singola convinzione, sia sull'emozione associata e sull'origine cognitiva di tale reazione emozionale.

È evidente che l'IQB si porta dietro alcune problematiche difficilmente eliminabili dei self-report, ma cerca di limitarne gli effetti usando anche domande a risposta aperta. In questo modo, come detto, l'analisi richiede tempi più lunghi, ma è molto più informativa: in particolare ci sono molti più elementi per categorizzare le risposte tra loro simili. L'IQB è stato progettato intorno alla convinzione che abbiamo finora analizzato, ovvero che *in matematica c'è sempre un perché per ogni cosa.*



Il questionario è stato distribuito in 13 classi di scuola pubblica media (8 classi) e superiore (5 classi). Abbiamo raccolto 282 questionari: 178

di scuola media e 104 di scuola superiore.
Le risposte avute hanno da una parte confermato i risultati ottenuti dall'analisi dei questionari 1 e 2 ma anche alcune osservazioni tratte dai temi. La seguente tabella mostra i numeri associati alle sei combinazioni possibili *convinzione-reazione emozionale* (le notazioni sono identiche alla precedente tabella):

	(B,+)	(B,-)	(B,0)	(nonB,+)	(nonB,-)	(nonB,0)
Scuola media	104	26	40	0	7	1
Scuola superiore	46	12	25	7	10	4
Totale	150	38	65	7	17	5

Come possiamo notare anche in questo la percentuale degli studenti fuori dalle combinazioni di *riferimento* (115 persone su 282) è poco più del 40 per cento. Inoltre tutte le sei combinazioni possibili sono presenti, anche se con percentuali sensibilmente differenti. Si può notare però anche una differenza marcata tra le risposte degli studenti di scuola media e di scuola superiore: in un caso circa il 95.5 per cento degli studenti si dichiara d'accordo con l'affermazione proposta, nell'altro la stessa risposta è scelta da meno del 80 per cento. Questo può essere dovuto anche alla, già riscontrata nell'analisi dei temi, minor autonomia rispetto a quanto sentito in classe degli studenti più piccoli che probabilmente si *adeguano* a quella che ritengano la risposta corretta. Per sostenere questo tipo di interpretazione è molto importante avere chiesto di giustificare il proprio assenso o dissenso (cioè la parte presa dal questionario 1); dalle risposte di molti studenti di scuola media che si sono dichiarati d'accordo con l'affermazione proposta si intuisce l'influenza di luoghi comuni o la ricerca di una risposta giusta:

- Secondo me sì perché dicono che la matematica non è un'opinione. (grade 6)
- Perché la matematica è una scienza sicura. (grade 7)
- Siccome la matematica è ragionamento e logica ci sarà sempre un perché per ogni cosa. (grade 7)
- Mi sembra la risposta più giusta. (grade 7)
- Ho risposto così perché l'ho sentito dire. (grade 8)

C'è chi invece risponde facendo riferimento alla matematica come disciplina scolastica in base alle proprie esperienze:

- Ho risposto sì perché ho sempre trovato fatti il cui risultato era spiegato. Come nel caso del numero infinito dei numeri, questo è possibile perché si può sempre aggiungere uno al numero.

(grade 6)

- Ho risposto no perché molte cose ci sono state insegnate senza una spiegazione precisa, sono così e basta. (grade 11)
- Ho risposto no perché a volte si applicano procedimenti che fino dalle scuole elementari ti hanno insegnato senza però spiegarti il motivo. (grade 9)
- Ho risposto di sì perché finora le domande che mi sono posto hanno sempre avuto una risposta (grade 6)

Le giustificazioni alla risposta negativa sono particolarmente interessanti, come nell'analisi del questionario 1, per la richiesta di produrre un esempio in cui non c'è spiegazione in matematica. Vengono fuori dubbi, curiosità ed epistemologie personali:

- Perché $\infty \cdot 0$ non fa 0? Fin dalle elementari ci hanno insegnato che qualunque quantità moltiplicata per 0 fa 0. Ora si scopre che non è vero, perché? (grade 12)
- Perché non capisco perché se si ha un numero e si moltiplica per zero si ha zero e non il numero stesso. Infatti se io ho una cosa e la moltiplico per nulla (zero) mi rimane sempre quella cosa, quindi non mi sparisce. (grade 9)
- Per esempio, perché $2 + 2$ fa per forza 4 e non 3 o altre cose? (grade 6)
- Perché i numeri sono infiniti? (grade 8)
- Un esempio è l'associazione dei nomi o figure ai numeri. Per quale motivo al concetto di tre associo il termine *tre* e lo rappresento con 3 e non con 7? (grade 11)

Ma la richiesta della giustificazione anche nel caso di risposte affermative può mettere in luce sistemi di convinzioni sulla matematica in cui è compresa la convinzione di partenza e quindi fornire spunti per capirne a volte anche l'origine:

- Ho risposto di sì perché la matematica è difficile e va capita, quindi ci deve essere per forza un perché a tutte le domande. (grade 6)
- La matematica è la scienza della certezza, situazioni apparentemente irreali sono invece comunque dimostrabili. (grade 11)
- Perché la matematica è nata per le spiegazioni (anche se sono inutili perché tanto io non ci capisco niente) (grade 9)

La richiesta di giustificazione sia nel caso della convinzione che della reazione emozionale associata serve anche a individuare interpretazioni diverse della convinzione; come detto è importante riuscire ad individuare tali interpretazioni sia per modificare il questionario che per

categorizzare le risposte: infatti è ovvio che se due persone hanno interpretato diversamente la convinzione, l'aver risposto uguale al questionario non permette comunque di considerare le due risposte dello stesso tipo.
Alcune interpretazioni possibili potrebbero essere state le seguenti:

- In matematica ci sono tante domande a cui trovare una risposta: *Ho risposto sì perché in matematica ci sono ancora tanti segreti* (grade 6).
- La matematica non risponde a perché esterni alla matematica. Questa interpretazione sembra aver guidato chi ha risposto no ed ha fatto esempi fuori dal contesto matematico: *Per esempio la matematica non risponde alla domanda: 'lo spazio ha una fine?'* (grade 6).

Ma anche nel caso della reazione emozionale associata alla convinzione alcuni studenti hanno risposto riferendosi non alla caratteristica singola ma alla matematica in generale. Questo può essere dovuto ad una lettura frettolosa della consegna, è comunque importante, come in precedenza, rendersi conto che qualcuno ha risposto ad un'altra domanda.
Ma la novità del IQB rispetto ai questionari 1 e 2 è quella di chiedere non solo la reazione emozionale associata alla convinzione, ma anche la ragione di questa associazione. Questo proprio perché le risposte ai questionari 1 e 2 avevano fatto nascere l'ipotesi che la componente emozionale fosse collegata ad un determinato sistema di convinzioni contenente la convinzione piuttosto che direttamente alla singola convinzione.
Effettivamente questa richiesta ha dato informazioni interessanti, riporto un esempio per ogni combinazione possibile:

- (B,+): Mi piace perché avendo un perché a tutto se ci si adegua non si può sbagliare. (grade 8)
- (B,0)): Mi è indifferente perché quando mi tornano gli esercizi non mi importa se c'è una spiegazione diversa. (grade 12)
- (B,-): Non mi piace perché a me piace il mistero, gli enigmi irrisolvibili, in matematica è tutto spiegato, è un mondo noioso per le persone noiose. (grade 8)
- (nonB,+): Mi piace che in matematica non tutto sia spiegato perché la rende più intrigante e stimola la voglia di scoprire nuove cose. (grade 9)
- (nonB,0): Mi è indifferente perché non sono un matematico. (grade 12)

- (nonB,-): Non mi piace perché mi riesce difficile imparare a memoria regole che non capisco o che non riesco a ricavare mediante ragionamenti. (grade 9)

Infine la richiesta di giustificazione della reazione emozionale associata alla convinzione evidenzia le tipologie profondamente differenti di risposta che possono *nascondersi* nella risposta *indifferente* e che non sono visibili utilizzando differenziali semantici o scale di Likert. Infatti la risposta *neutra* può essere conseguenza di:

- Un *mi piace* (o *non mi piace*) non troppo deciso, che è l'interpretazione più frequente che si considera solitamente nell'analisi dei questionari: *Mi è indifferente, non proprio, cioè mi piace il fatto di avere molte risposte con la matematica ma non scoppio di felicità per questo.* (grade 9)
- Un'alternanza tra mi piace e non mi piace a seconda dei contesti o delle situazioni: *Mi è indifferente perché mi piace trovare le motivazioni, ma non a tutto (...) non mi piace quando la professoressa mi chiede sempre il perché di ciò che ho detto!* (grade 8)
- La *convinzione* che la propria opinione non può cambiare comunque le cose: *Mi è indifferente perché la matematica è così e anche se non ci fossero dei perché sarebbe così uguale.* (grade 11)
- La difficoltà di capire la reazione emozionale associata ad una certa convinzione che non è psicologicamente centrale e su cui non si è mai pensato:*Non ci ho mai pensato abbastanza e così a bruciapelo non saprei dire se mi piace o non mi piace.* (grade 8)

I risultati dell'analisi delle risposte avute con l'IQB sono dunque incoraggianti, non solo confermano quanto ottenuto con i questionari, ma sembra effettivamente riuscire nella maggior parte dei casi ad evidenziare convinzioni collegate alla convinzione di partenza e la centralità psicologica della stessa. Si riesce, indagando anche sull'origine cognitiva della reazione emozionale associata alla convinzione di partenza, a conoscere convinzioni ad essa associate.
Naturalmente anche questo strumento mantiene alcuni difetti tipici degli strumenti self-report come il rischio di indagare solo su convinzioni dichiarate e comunque di mettere in difficoltà persone che per esempio hanno mezzi linguistici *poveri*. Comunque pensiamo, ed i risultati ottenuti lo confermano, che per quanto riguarda il rischio *convinzioni dichiarate*, sia usare domande a risposta aperta che *forzare* il soggetto

ad evidenziare convinzioni correlate (e quindi ancora una volta considerare sistemi piuttosto che singole convinzioni) fornisca al ricercatore strumenti di interpretazione delle risposte molto più adeguati.

3. I tre case studies

3.1. La selezione dei tre studenti. Il primo problema per la realizzazione di questi case-studies, è stato quello di selezionare tre studenti, con difficoltà in matematica e con la convinzione di non riuscire a *controllare* la materia, tra le matricole di Scienze Ambientali dell'anno accademico $2001 - 2002$.
Per questa selezione abbiamo utilizzato un questionario con domande a risposta aperta e in seguito un incontro-intervista. Il questionario era così strutturato:

(1) Prova a descrivere il tuo rapporto con la matematica.
(2) Ricordi episodi particolari successi nella tua esperienza scolastica che sono stati particolarmente traumatizzanti per il tuo rapporto con la matematica?
(3) Hai la sensazione di non riuscire a 'controllare la matematica'. In caso affermativo, prova ad analizzare da cosa dipende questa sensazione di incontrollabilità. Prova ad analizzarla:
    - Proviene da caratteristiche della matematica? Se sì da quali?
    - Oppure dipende da te, cioè da *tue* caratteristiche? Se sì da cosa?

Dai questionari emerge come un *cattivo* rapporto con la materia sia il frutto di un processo lungo, alla fine del quale si rimane sfiduciati e ad un certo punto (a volte a seguito di qualche episodio particolare) si *alza bandiera bianca*:

- Chiara: Al Liceo ero nella sezione sperimentale di matematica e quello che facevo mi risultava impossibile da comprendere. Questo mi ha fatto perdere fiducia nelle mie capacità, il risultato è stato che ho smesso di applicarmi come avrei dovuto.

Questa osservazione può essere considerata la conferma che effettivamente atteggiamenti e convinzioni, le loro origini e le possibilità di modificarli, si giocano su tempi piuttosto lunghi, come in qualche modo sottolineano anche McLeod e Green nei loro lavori.
Alla fine i questionari e l'intervista hanno portato alla selezione dei tre studenti: Simone, Luigia e Leonardo. Tutti e tre dichiaravano di aver difficoltà in matematica, dai questionari risultava che tutti e tre avessero la convinzione di non controllare la matematica, ma le

loro *storie* sembravano essere diverse, soprattutto nelle attribuzioni di fallimento:

(1) Simone, studente pendolare, da sempre debole in matematica, ha frequentato un istituto professionale prima di iscriversi all'Università. Dalla lettura delle sue risposte al questionario colpiscono due cose: la prima è come espressamente parli di blocchi e della paura di sbagliare:

...la sensazione è quella di avere un blocco, e appena mi si presenta un esercizio qualsiasi non riesco ad eseguirlo...

...ho la paura fissa di trovarmi a un test e sbagliare...

La seconda è come attribuisca i suoi insuccessi a fattori esterni e incontrollabili; per esempio gli insegnamenti passati, che gli hanno lasciato in eredità un deficit che difficilmente potrà colmare ora:

Il mio rapporto con la matematica è stato fin dalle elementari, molto avverso nei confronti di questa materia, non so il motivo, probabilmente ho ricevuto un insegnamento sbagliato.

Anche sulla incontrollabilità della matematica sottolinea come spesso abbia paura di sbagliare per un numero o una formula che ha *sbagliato o dimenticato*, ma anche questo non dipende da lui, è proprio la matematica che per le sue caratteristiche non è controllabile in quanto:

...sembra una materia molto complicata, troppe formule e numeri da ricordare....

Dai brani citati colpisce anche, per usare la nomenclatura introdotta da Skemp, come Simone abbia un'idea della matematica *instrumental*, piuttosto che *relational.* Parla solo di esercizi (mai di problemi), le sue difficoltà sono nell'**eseguire** un esercizio, e nel non **ricordare formule** o **sbagliare numeri**.

(2) Luigia, studentessa fuori sede, ha frequentato il liceo classico. Dalla lettura del suo questionario emerge da una parte la sua apprensione per avere avuto un'esperienza piuttosto limitata con la matematica:

Al Classico la matematica viene presa sottogamba.

E con il passare del tempo la situazione sembra peggiorare irrimediabilmente:

Le cose non capite si sommano agli argomenti non fatti e la voragine di ignoranza si allarga sempre più.

Dall'altra la speranza di potercela fare e di poter arrivare comunque almeno a dei livelli sufficienti:

la matematica è come il canto; nessuno è stonato, basta esercitarsi; però ci sono alcuni più intonati di altri e altri ancora che riescono ad arrivare ad ottave altissime a cui gli altri non arrivano...e io spero di imparare a non stonare.

Un'altra cosa che colpisce è la sua *naturale* diffidenza per la matematica, in quanto poco legata all'esperienza concreta:

Effettivamente non mi ero mai preoccupata più di tanto di non conoscere questa materia, anche perché secondo me la matematica non mi sarebbe servita a niente, dato che non riuscivo a trovare una relazione tra la matematica e il reale, il concreto.

A volte riconducendo tutte le sue difficoltà a questo motivo, anche quando sembrerebbero di altro tipo:

Il professore butta lì sulla lavagna una equazione di secondo grado e mette a fianco all'espressione un grafico. Io non riuscivo a capire effettivamente che cosa volesse dire quella parabola e a che cosa servisse: ok, è una parabola; ok, è una funzione; ok, ne prendo atto...ma ora? Che ci faccio? Che significa? Perché? Fammi un esempio CONCRETO!!! Non riuscivo a percepire la matematica perché troppo astratta.

È interessante (da un punto di vista didattico) quello che afferma sulla prima volta che ha percepito la matematica come qualcosa di astratto:

La prima volta che intesi la matematica come qualcosa di astratto è stato in seconda (o terza?) elementare quando la maestra spiegò la divisione: c'erano dieci fagioli sulla cattedra e io dovevo spostare quei fagioli a due a due sul mio banco; alla fine avevo fatto sotto e sopra cattedra-banco cinque volte...ma cosa significava?

È interessante, proprio perché, probabilmente, la maestra intendeva proprio legare l'algoritmo della divisione a qualcosa di concreto, ma per chi non aveva ben chiaro cosa stava accadendo, il legame con il concreto è sembrato artificioso, provocando l'effetto opposto a quello desiderato.

(3) Leonardo, studente pendolare, ha frequentato un istituto tecnico industriale. A differenza degli altri due le sue risposte al questionario sono molto più concise, ma rivelano un rapporto problematico con la matematica:

Dire che è un rapporto 'difficile' sembra banale, ma è così.

E inoltre a differenza degli altri sembra caricare su di sè, e in particolare sulla propria insicurezza le proprie difficoltà. Sottolinea più di una volta che quel che riesce a casa, o che è convinto gli riuscirebbe con più tempo e calma, spesso si rivela un ostacolo insormontabile in classe per via di fattori emozionali:

Ricordi particolarmente traumatizzanti no; però forse un po' fastidiosi forse sì. Ad esempio non riuscire a svolgere correttamente un esercizio alla lavagna, che forse a casa con più calma avrei potuto risolvere.

Forse sono insicuro e durante gli esami mi innervosisco o mi agito pur avendo studiato.

I tre studenti, da questa prima indagine, risultano quindi diversi nonostante l'accordo sulla incontrollabilità della matematica: c'è quello che attribuisce le proprie difficoltà soprattutto a cause esterne e in qualche modo incontrollabili, non direttamente collegate con la specificità della disciplina, ma più che altro al tipo di insegnamento ricevuto in passato. C'è lo studente, proveniente da un superiore poco *matematizzato*, preoccupato per la mancanza delle cosiddette *basi*, che associa le proprie difficoltà con la matematica soprattutto alla caratteristica di quest'ultima di essere poco concreta. E infine c'è lo studente che associa le proprie difficoltà a cause interne (insicurezza), non si sa quanto controllabili.
A parte quest'ultima tipologia, che è un po' più rara, le prime due si riscontrano anche in altri questionari (in maniera forse meno decisa rispetto ai rappresentanti scelti):

- Willy: *Avendo frequentato il Liceo Classico, la mia preparazione è ridotta.*
- Pamela: *Al liceo ero nella sezione sperimentale di matematica e quello che facevo era impossibile da comprendere. Questo mi ha fatto perdere fiducia nelle mie capacità, il risultato è stato che ho smesso di applicarmi come avrei voluto...essendo consapevole delle mie incertezze dovute in parte dalla mia provenienza da un liceo classico.*
- Carlo: *Penso che in parte dipenda proprio dalla sua struttura così rigida e schematica; credo di non riuscire a volte, a capire in maniera completa la funzione della matematica, la maggior parte delle volte mi rimane nella mente come un qualcosa di astratto, che appunto non riesco a 'dominare'.*

3.2. Organizzazione incontri. Dopo aver selezionato i tre studenti il tutorato si è strutturato in sei incontri per studente di circa due ore ciascuno su argomenti ben determinati del programma del corso:

(1) Successioni reali.
(2) Limiti di funzioni reali.
(3) Continuità di funzioni reali.
(4) Derivabilità di funzioni reali.
(5) Grafici di funzioni reali.
(6) Integrali.

La frequenza era più o meno di un incontro ogni settimana-dieci giorni e ogni incontro è stato audioregistrato (con il consenso degli studenti, solo Luigia la prima volta ha preferito non essere registrata, ma poi non ha avuto problemi dal secondo incontro). Alla fine dei 6 incontri, è stato programmato un incontro comune con i tre studenti, poco prima della prova di esame scritta (a questo incontro però Simone non si è presentato).
La strutturazione degli incontri era di questo tipo:

(1) Prima mezz'ora dedicata a domande su cosa non avevano capito della spiegazione in classe e su difficoltà che avevano trovato nei compiti che lasciavo loro da fare a casa.
(2) Il resto del tempo di esercizi e problemi sull'argomento che proponevo (consigliati anche dall'insegnante titolare del corso), che dovevano provare a risolvere esplicitando a voce alta tutti i loro processi di pensiero.

Avevo esplicitato che in tutti e due i casi il mio ruolo non sarebbe stato solo quello di dare loro esercizi e registrare i loro tentativi, ma anche quello di aiutarli quando si trovavano in difficoltà, a patto che sapessero circoscrivere quale era la difficoltà e si sforzassero anche di esprimere la stessa (cosa tutt'altro che facile).
In particolare l'organizzazione degli incontri pensata nella maniera descritta è un modo di cercare di *responsabilizzare* gli studenti nel recupero delle loro difficoltà, in sintonia con quanto afferma Balacheff (1990, p.259): *pupils'learning depends on their recognition and re-construction of problems as being their own (...) A problem is a problem for a student only if she or he takes the responsability for the validity of its solution. This transfer of the responsability for truth from teacher to pupils' must occur in order to allow the construction of meaning.*
D'altra parte, anche dal punto di vista affettivo, osservano Pellerey e Orio (1996, p.60) come:*per sviluppare reazioni affettive positive alla proposta di problemi da risolvere sia necessario promuovere pratiche didattiche diverse da quelle specificatamente dirette a costruire una piattaforma comunicativa positiva e carica di comprensione.*

Tra i compiti che sono stati dati da fare a casa ai tre studenti c'è stato anche quello di svolgere il tema: 'Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari fino ad oggi', che tutti e tre hanno fatto e mi hanno consegnato dopo le prime tre settimane di tutorato.
Ovviamente l'organizzazione *a priori* del tutorato, non conoscendo ancora i tre studenti, doveva essere pensata sull'unica caratteristica comune evidenziata dai questionari dei tre; ovvero il fatto che avessero la convinzione di non potre controllare la matematica.
Il primo passo è stato quello di spostare l'attenzione dalla controllabilità della matematica in generale alla controllabilità delle loro difficoltà in matematica. Non solo per permettere a loro di circoscrivere i problemi, e già questo in qualche modo avrebbe dovuto diminuire il senso di impotenza, ma anche far sì che molte cause percepite come *esterne* (cioè spesso dipendenti dalle difficoltà intrinseche della matematica) fossero percepite come interne e quindi maggiormente controllabili[13].
Un'ultima considerazione è sul fatto che preoccupandosi di intervenire su fattori cognitivi e affettivi in studenti con difficoltà è facile che ci si scontri con convinzioni errate su fatti matematici (quelle che qualche ricercatore chiama misconcetti). Data la duplice finalità di questo tutorato (osservazione finalizzata a validare un'ipotesi di ricerca / intervento di recupero) mi si è posto il problema di cercare di modificare tali convinzioni e, convinto della inadeguatezza rispetto ad obiettivi sia cognitivi che affettivi di un intervento di tipo autoritario, ho cercato di *mettere in crisi* tali convinzioni.
A mio modo di vedere si può agire almeno in due modi diversi:

(1) Fornire uno o più controesempi all'affermazione fatta dalla persona.
(2) Cercare delle contraddizioni *interne* alle conoscenze matematiche che la persona ha.

Non si può dire a priori quale sia il più efficace, si possono però notare delle caratteristiche ben distinte dei due modi di intervenire. Mentre presentando dei controesempi la contraddizione è in qualche modo palese (anche se a volte può essere vista come un'eccezione e quindi non *perturbare* la convinzione) il cercare delle contraddizioni con altri risultati matematici noti presuppone la conoscenza di altri risultati matematici e l'individuazione di una contraddizione che può non essere

[13]Dal punto di vista del recupero inoltre l'esercizio (problema?) di circoscrivere, spiegare, le proprie difficoltà ad un'altra persona aveva la pretesa di forzarli a pensare sui propri processi di pensiero e di adeguare il proprio linguaggio per descrivere questi processi di pensiero e le convinzioni su di essi.

diretta come in un controesempio, cioè può non essere in contrasto con il focus della proposizione.
Un esempio matematico che può evidenziare questo tipo di difficoltà è la dimostrazione più diffusa dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che è di una difficoltà concettuale enorme. Innanzitutto bisogna convincersi che *non è restrittivo* supporre numeratore e denominatore di $\sqrt{2}$ primi tra loro, e solitamente questa convinzione è di origine *autoritaria*, cioè lo studente non ha idea del perché ma l'accetta perché non gli crea problemi né concettuali né mnemonici. Poi bisogna individuare la contraddizione, che si può perdere nella laboriosità di una dimostrazione che è anche per casi (bisogna riconoscere che i casi sono *esaustivi* e anche qui è probabilmente più che altro un atto di *fede*). Il problema è che quel che si contraddice non è direttamente la razionalità di 2, ma l'assunzione che avevamo fatto sulla primalità tra il numeratore e il denominatore. E il cerchio si chiude, la confusione degli studenti alla domanda *e allora perché avremmo dimostrato l'irrazionalità di* 2*?* è giustificata da quella premessa usata in maniera troppo *leggera* inizialmente: *non è restrittivo supporre*. L'aver accettato questa affermazione *passivamente* evita una fatica allo studente, ma può causare problemi per il riconoscimento della contraddizione. Infine anche riconosciuta la contraddizione non è detto che ci si convinca che da questa sia implicata la tesi.
Se la seconda modalità di intervento è più complicata dal punto di vista cognitivo, la prima lo è dal punto di vista affettivo. Infatti il metodo del controesempio è del tutto *innaturale* ed in qualche modo *esternamente imposto*: perché una persona che ha una convinzione dovrebbe cercare un esempio che contraddice questa convinzione?
Anche qui provo a trovare un'analogia con il ragionamento matematico (d'altra parte la dimensione quasi-logica dei sistemi di convinzioni suggerisce che ci siano per l'appunto delle strutture logiche nella formazione e nel come vengono tenute certe convinzioni): penso a molte congetture di teoria di numeri, che si dicono *quasi sicuramente* valide. Quasi sempre la congettura può essere fatta a partire da un gran numero di prove, ma la convinzione della sua validità non dipende dal non aver trovato controesempi, ma piuttosto da risultati simili o dal fatto che un tale risultato avrebbe alcune conseguenze *molto plausibili* o da considerazioni di simmetria.
In genere ho preferito quindi, inizialmente, privilegiare il tentativo di trovare contraddizioni *interne* alla matematica, sebbene fossi conscio che più lo studente ha difficoltà e più è improbabile che si renda conto di tali contraddizioni.
Questa digressione è importante per sottolineare, una volta di più,

come perseguire obiettivi *affettivi* non voglia dire cercare la soluzione apparentemente più semplice (in questo è significativa la discussione di Skemp (1976) rispetto ai vantaggi e gli svantaggi di un approccio instrumental piuttosto che relational alla matematica): anzi di ridurre al minimo le *convinzioni autoritarie* apparentemente più semplici sia per l'insegnante che per lo studente, ma i cui limiti sono evidenti, una volta che si superi quello che Gardner (1993) chiama *il compromesso delle risposte corrette.*

3.3. Simone. La partecipazione di Simone, come del resto quella degli altri due studenti scelti, è completamente volontaria. Sicuramente hanno tutti e tre almeno una forte motivazione *esterna*: quella di superare l'esame di Istituzioni di Matematiche, che, particolare non secondario, è un esame obbligatorio del loro Corso di Laurea.
Dal nostro primo incontro Simone mostra di essere in qualche modo molto chiuso, riesco a farlo parlare poco, mentre l'obiettivo era proprio l'opposto. Ma l'interpretazione che questo sia dovuto a timidezza o comunque ad una sorta di *apprensione* da primo incontro, cambierà presto.
Simone, come già evidenziato dal questionario, *vede* il suo compito come di semplice esecutore di istruzioni, ha una visione totalmente *instrumental* dell'apprendimento matematico. Non si aspetta, nonostante che nel colloquio preliminare fosse stato chiarito, che in questi incontri gli vengano posti problemi, ma si aspetta che io spieghi come si fa a risolvere le varie tipologie di esercizio. D'altra parte la prima mezz'ora di incontro sarebbe dedicata proprio a rispondere a domande che loro pongono su difficoltà incontrate a lezione o nei problemi da fare a casa, ma Simone non propone nemmeno problemi, si aspetta che anche quelli vengano da me. Nella sua convinzione io sono l'esperto (il professore) so i problemi, gli esercizi che dovrà risolvere, quindi devo essere io a proporli e a spiegare come si risolvono questi esercizi[14]:
I: C'è qualcosa che mi vuoi chiedere?
S: *Su queste cose che esercizi si fanno di solito?*
I: C'è qualcosa in particolare su cui ti sembra di non avere le idee chiare?
S: *Penso di dover fare molti esercizi.*

Il caso di Simone (che come vedremo, sarà il più problematico dei tre) è stato molto importante dal punto di vista teorico (mentre più complicato dal punto di vista dell'intervento didattico). Innanzitutto

[14]Con la lettera I indicherò i miei interventi con S,L e Leo rispettivamente quelli di Simone, Luigia e Leonardo.

questo suo comportamento mostra come la responsabilizzazione dell'apprendimento non sia una conseguenza diretta di una forte motivazione. Questo fatto può essere interpretato in termini di tipologie di motivazione diversa: interessanti sono la distinzione che Nicholls e altri (1990) fanno su motivazioni *task-orientated* in cui la motivazione è guidata dall'obiettivo di comprensione e *ego-orientated* in cui la motivazione è guidata dall'obiettivo di dimostrare (eventualmente a se stessi) le proprie abilità.
È comunque un fatto molto frequente che anche nei casi in cui l'impegno è presente questo impegno sia mal diretto, in particolare, come sottolineato da Skemp (1976), la visione che si ha della matematica è uno dei fattori che *dirige* l'impegno.

Tornando a Simone, una sua difficoltà evidente è di non riuscire a dirmi, anche con l'ausilio degli appunti, l'argomento trattato a lezione. La difficoltà non è solo di tipo comunicativo, ma dovuta anche agli stessi appunti. Come avrò modo di verificare in tutti gli incontri avuti, anche nello scrivere e organizzare appunti Simone ha molti problemi, denunciando un tentativo quasi da *stenografo*, in cui per scrivere il più possibile di quello che viene detto o scritto a lezione si perde completamente il senso delle cose scritte. Per esempio nel primo incontro ebbi modo di vedere espressioni del tipo:

$$\lim n \to \infty \ a \cdot n = l$$

Le difficoltà evidenziate da subito da Simone hanno provocato alcune variazioni nel programma a priori stabilito soprattutto sugli argomenti trattati visto che Simone dimostra difficoltà molto grosse anche con argomenti in qualche modo *dati per acquisiti* a livello universitario. D'altra parte, come detto, in un *intervento* didattico del genere, lo spirito di fondo è che la persona deve essere centrale, è quindi fondamentale adattarsi alle necessità della persona stessa piuttosto che seguire un piano prestabilito. Nel caso di Simone, come vedremo, questo adattamento non produrrà comunque risultati soddisfacenti per il conseguimento dell'obiettivo iniziale. Questo *fallimento* può attribuirsi alle molteplici problematiche che questo caso ha evidenziato, come anche al fatto che io non sia riuscito ad adattare il tutorato a questi problemi.
I problemi di Simone mi sono apparsi molteplici, nonostante questo il primo obiettivo era importante e ambizioso, ovvero di cercare di focalizzare insieme a lui alcuni punti che non gli erano chiari, uscendo da una vaga sensazione di debolezza, che di per sé è molto poco produttiva, in quanto influisce su Simone solo in termini di insicurezza. Se vogliamo si tratta di un obiettivo metacognitivo, di consapevolezza. È altresì evidente che un tale obiettivo è legato a doppio filo con fattori

cognitivi.
Anche nel caso di misconcetti (per esempio sul significato di limite di una successione) con Simone le due tipologie di intervento che ho descritto precedentemente falliscono: in un caso infatti Simone non coglie la contraddizione, nell'altro è più portato a credere che ci sia un errore negli appunti e nel libro sul calcolo di un limite piuttosto che all'esistenza di un controesempio:
Innanzitutto chiedo a Simone la definizione di limite di una successione reale. La sua risposta è un tentativo, dal punto di vista matematico privo di senso (come probabilmente lo è la definizione di limite dal suo punto di vista), di rimettere insieme tutti i quantificatori e le lettere usate nella definizione data in classe. Gli do allora la possibilità di leggere sul libro o sul quaderno degli appunti, e la sua risposta mi colpisce molto:
S: *Ah...ecco, questa lettera qui (δ), non mi ricordavo come si diceva...*
Simone fissa la sua attenzione su un particolare del tutto trascurabile (almeno dal mio punto di vista) e crede di aver sbagliato perché non gli è venuto in mente il nome della lettera delta. Questa osservazione è particolarmente importante perché da questo si può desumere che Simone abbia la convinzione che in matematica ci voglia molta memoria, se sono importanti anche i nomi delle lettere usate!
Ma dalla sua risposta mi viene anche il dubbio che la sua attenzione si sia fissata su un particolare che in qualche modo *controlla*: il nome di una lettera. Probabilmente ho sbagliato a non fargli scrivere la sua prima risposta in modo che potesse confrontare visivamente le differenze con la risposta trovata sul libro e poi discutere punto per punto cosa significavano le varie differenze. Cioè il raffronto visuale avrebbe permesso a Simone probabilmente maggiore controllo e consapevolezza delle differenze tra la sua definizione e quella trovata sul libro.
A questo punto chiedo a Simone, leggendo la definizione trovata sul libro, se pensa di aver capito cosa significano quei simboli matematici messi in quel determinato ordine. La risposta di Simone è interessante non solo perché fa capire che ha dei problemi con la definizione di limite, ma soprattutto perché la sua interpretazione è del tutto scollegata da quei simboli matematici, ma si appoggia sul significato letterale della parola *limite*. Tra l'altro si tratta di un fenomeno diffuso e studiato in educazione matematica (lo ritroverò anche con gli altri tutorandi).
A Simone avremmo potuto dare una qualsiasi definizione formale di limite, non si sarebbe turbato, ma soprattutto non avrebbe cambiato la sua *idea* di limite, che non si sarebbe comunque basata affatto sulla

formalizzazione trovata sul libro:[15]

S: *limite vuol dire che non può mai essere superato.*
I: Superato da cosa?
S: *Cioè...che qualsiasi numero metto qui* [indica l'espressione a_n]*...non supero mai il limite.*

Come detto il significato che Simone dá al limite di una successione sembra essere un'accezione del significato nel linguaggio quotidiano della parola limite. Non possiamo dire se Simone abbia tentato e quanto di capire cosa significasse quell'espressione di simboli matematici che sul libro è data come definizione di limite, o quanto sia stato convinto da subito che fosse un modo (piuttosto complicato) di riscrivere in simboli il significato comune. Cioè due interpretazioni possibili sono (Leron e Hazzan, 1997):

(1) Simone prova a leggere la definizione di limite di una successione, ma quei simboli messi in quell'ordine non gli dicono nulla. Altre volte, probabilmente, ha provato la stessa sensazione, ma questa volta di nuovo c'è che il termine definito non è *specifico*[16] della matematica. Allora si aiuta con il significato *quotidiano* del termine che pensa (probabilmente a ragione) di dominare meglio.
(2) Simone conosce già il termine limite di qualcosa e pensa che con la stessa parola si indichi lo stesso oggetto. Cioè, probabilmente, non è consapevole della differenza di contesto. Questa

[15]Qui risalta anche il problema del *gestire* il linguaggio matematico, e non solo la *traduzione* dei singoli simboli usati, che molto spesso è conosciuta. Riporto come esempio un esercizio di esame di Linguaggio e Metodi della Matematica (LMM) del primo anno del corso di Laurea in Informatica. Si chiedeva di scrivere la proposizione *Il numero naturale x è somma di quattro quadrati* nel linguaggio del primo ordine, ovvero in qualche modo con *notazioni matematiche.* Per discernere errori di conoscenza di singoli simboli da difficoltà dovute invece alla gestione degli stessi si chiedeva poi di scrivere il significato dei singoli simboli usati.
Guido dopo aver chiesto *ma qui bisogna usare per ogni o esiste?* scrive:

$$\forall\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \in \mathbb{N} \text{ vale } x = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

A parte l'uso della parola *vale* che non appartiene al linguaggio del primo ordine, l'osservazione più interessante è che Guido, nonostante conosca il significato del simbolo $\forall$ e nonostante capisca che il *punto* stia nella scelta dei quantificatori, non riesca ad effettuare un controllo semantico adeguato sull'uso dei quantificatori.

[16]Questa ovviamente è una sua convinzione.

convinzione lo porta automaticamente ad *appoggiarsi* al significato comune della parola limite che conosce, senza perdere tempo nella definizione formale, che ha trovato sul libro.

In tutti e due i casi la convinzione che guida in qualche modo la sua risposta è che:
Se in matematica si usa una parola del linguaggio naturale, allora non c'è motivo per cui debba avere un significato diverso da quello che ha nel contesto quotidiano.
La differenza è che nel secondo caso questa è una convinzione primaria, non influenzata dalla situazione e dalle sue difficoltà nell'interpretare la definizione formale. Nel primo caso è una convinzione derivata, e molto più dipendente dalla situazione contingente e quindi forse più facilmente *attaccabile.* In ogni caso il mio primo obiettivo non era quello di dire a Simone *non è così*, ma di far sì che arrivasse da solo a *scoprirlo.*
In questo caso chiedo a Simone di ritrovare sugli appunti le proprietà del limite che aveva fatto a lezione. Simone le trova con una certa difficoltà (denotando come abbia problemi nel gestire i suoi stessi appunti[17]) e le scriviamo su un unico foglio. In particolare c'è l'aritmetica dei limiti e l'unicità del limite:

I: Cosa significa questo teorema? (Indicando il teorema di unicità del limite)
S: *Che ogni successione ha un unico limite.*
I: In realtà ti dice che se la successione ha limite allora questo limite è unico, penso che a lezione abbiate visto qualche esempio di successione che non ha limite.
S: *Non mi ricordo...*
I: Guarda sul quaderno di appunti.
Simone non sembra sapere cosa deve cercare ma poi trova una successione $a_n = (-1)^n$ su cui ha scritto che non ha limite. Non mi soffermo in questo momento a chiedergli perché tale successione non abbia limite, e da solo afferma:
S: *Ah sì, questa che cambia segno...*
I: Che valori assume questa successione?
S: 1 *e* -1*, una volta l'uno, una volta l'altro.*
I: Quindi $(-1)^n$ per quanto dici tu, ha come limite, per esempio 2. Infatti non lo supera mai vero?
Simone è perplesso, nella sua *idea* di limite, come vedremo tra poco,

[17]Osservo che essendo all'inizio dell'anno le cose scritte erano veramente poche.

c'è anche l'approssimarsi al punto limite, ma non dice niente e allora lo incalzo:
I: A maggior ragione anche 3 è limite della successione, se non supera 2, non supererà mai nemmeno 3, vero?
S: *Sì, cioè è vero che non supera mai* 2 *e anche* 3 *però...* [breve pausa]

A questo punto Simone forse non coglie la contraddizione con il teorema di unicità del limite comunque sia il mio tentativo di mettere in crisi la sua convinzione attraverso questa contraddizione fallisce. Simone infatti invece di mettere in discussione la sua convinzione *raffina* la sua definizione in modo da superare la contraddizione:

S: *il fatto è che per essere il limite deve succedere anche di avvicinarsi sempre più al limite.*
A questo punto passo a cercare un controesempio. Alla stessa pagina di quaderno vedo che c'è la successione $a_n = \frac{3n+1}{n}$ e chiedo:
I: Di questa successione avete calcolato il limite?
S: *Sì* (leggendo sul quaderno) *è* 3
I: Quindi vuol dire che la successione non supera mai 3?
S: *Sì...penso di sì...a meno che non abbia sbagliato a scrivere a lezione.*
E dopo aver fatto alcune prove:
S: *No, è sempre più grande di* 3*...*[18]
I: Quindi? Il limite non è 3?
Simone è perplesso, ma non sa cosa rispondere, non mette ancora in dubbio la propria convinzione sul significato di limite, pensa che sia sbagliato il calcolo del limite:
S: *Forse era sbagliato alla lavagna...o ho preso gli appunti male.*

L'episodio del limite di una successione rivela come sia determinante nelle difficoltà e negli interventi di recupero la connessione tra fattori cognitivi, affettivi: infatti a Simone sarebbe bastato provare a calcolare il limite per accorgersi se i risultati sugli appunti e sul libro fossero o meno sbagliati. Ma Simone non ci pensa nemmeno: da un lato può giocare la centralità psicologica della convinzione *toccata*, dall'altro il senso di auto-efficacia basso e forse l'anti-goal (Skemp, 1979) di evitare

[18]In questo caso arrivando ad una conclusione giusta, nonostante che fosse dettata da un ragionamento induttivo e non deduttivo, generalizzando cioè le prove fatte.

figuracce. Ma anche una volta forzato a calcolare il limite di cui dubitava Simone rivela difficoltà su argomenti *propedeutici* per la verifica di un limite come la risoluzione di disequazioni. È evidente che tali difficoltà rendono non tanto *secondario* ma *molto difficoltoso* un recupero come quello previsto, che cercasse di mettere in crisi convinzioni sulla matematica e su di sè, potenzialmente dannose. È infatti evidente che se Simone non ha strumenti per calcolare il limite di una successione all'innaturalezza tipica del controesempio *imposto* si aggiunge che debba essere *autoritaria* anche la certificazione che siamo di fronte ad un controesempio. Cioè le difficoltà cognitive *inibiscono* l'intervento.

Il fatto di lavorare su argomenti non *attuali* fa sì che Simone probabilmente non veda un'applicazione diretta di quello che sta facendo a lezione. Inoltre noto il forte disagio che ha nel rispondere alle mie domande, si sente giudicato nonostante la mia finalità sia completamente diversa e che io l'abbia esplicitata da subito. Simone decide quindi di lasciare in sospeso l'esame di matematica e quindi di terminare con il terzo appuntamento i nostri incontri.
Questa esperienza sembrerebbe fallimentare almeno dal punto di vista del recupero didattico, ma forse qualche cosa si può salvare: se è vero che l'obiettivo primario di Simone (l'esame) lo abbiamo fallito è anche vero che forse per la prima volta a Simone è stato chiesto di dare dei perché, di risolvere quel che per lui rappresenta un problema e non di eseguire degli algoritmi prefissati. E questo (non si sa quanto duraturo nel tempo) ha cambiato in parte le sue attribuzioni di fallimento, da completamente esterne e incontrollabili a in parte interne. Questo cambiamento sarebbe comunque un risultato importante, in quanto Simone avrebbe un motivo per investire il suo tempo nel cercare di modificare queste cause interne. È molto significativo il tema che mi consegna il giorno del secondo incontro, dove è evidente la sua convinzione che tutte le sue difficoltà siano dovute a cause esterne e non controllabili. Lo riporto di seguito integralmente (la sottolineatura è aggiunta da me per evidenziare brani o parole particolarmente significative, tra parentesi quadre in italico i miei commenti). Da notare come prima osservazione che Simone è l'unico dei tre studenti che consegna il tema scritto al computer, probabilmente un'altra prova del fatto che mi veda in qualche modo come una persona che lo deve giudicare. La cosa risalta anche per la totale informalità della mia richiesta di fare il tema (proprio per cercare di evitare qualcosa del genere):

Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle

elementari fino a oggi[19]

Come descrivere il mio rapporto con la matematica? Fin dalle elementari il mio rapporto con la matematica è stato molto insicuro, non so il motivo, forse perché non prestavo sufficiente attenzione, o forse perché gli insegnanti non insegnavano correttamente. [*Risalta il carattere insicuro di Simone anche nel esplicitare la sua opinione. Sicuramente dei dubbi sui metodi di insegnamento dei suoi insegnanti delle elementari gli ha, altrimenti non li avrebbe messi tra le possibili cause della sua insicurezza. Inoltre è molto interessante il contrasto tra la sua insicurezza e l'avere convinzioni che non intacchino la sua autostima, il suo senso di auto-efficacia. È da notare come anche l'altra spiegazione, pur se interna, è una causa probabilmente per lui controllabile, se avesse voluto avrebbe potuto prestare più attenzione e superare questa difficoltà. La cosa di per sé non sarebbe negativa, anzi, potrebbe convincere Simone ad impegnarsi per superare queste cause interne e controllabili. Il problema è di capire quanto Simone sia convinto di questa controllabilità e quanto sia disposto a scoprire se davvero è così, a mettersi in gioco, a doversi giudicare da solo. Nel proseguio del tema vedremo come questa rimane l'unica causa interna sottolineata da Simone.*] Alle elementari me la cavavo così così sapevo correttamente le tabelline, cominciavo però ad avere le prime lacune soprattutto per quanto riguardavano le moltiplicazioni e le divisioni.

Le lacune che avevo peggiorarono ulteriormente alle medie, nella mia classe però non ero l'unico ad avere questo genere di problemi ma anche altri miei compagni e compagne erano in difficoltà. [*I suoi problemi devono essere legati a fattori esterni, non dipendere da lui, infatti anche altri compagni hanno gli stessi problemi.*] Secondo me la causa di queste lacune è in parte da ricercarsi nel cattivo insegnamento operato dai docenti che ho avuto, ad esempio la professoressa che ho avuto alle medie ebbe addirittura un richiamo da parte del preside, a causa delle numerose lamentele dei genitori. Alle superiori invece sia per le assenze dei docenti che per il cattivo insegnamento operato dagli stessi ho perso l'ultimo anno di insegnamento. Riconosco però che anche il cambiamento di ambiente, di insegnanti e di compagni passando dalle elementari, alle medie, fino alle scuole superiori può aver influito sulla sicurezza nei confronti della matematica e di altre materie. [*È interessante notare come anche l'ammissione di Simone, il riconoscere altre cause, sia solo apparentemente rivolta ad una maggiore responsabilizzazione, in realtà anche il cambiamento di ambiente è ovviamente esterno e incontrollabile, l'unica differenza è che in questa causa non ci*

[19] In italico riporto i miei commenti.

sono responsabilità di nessuno, ma in particolare neanche sue. Inoltre questa causa è comune con altre materie, mentre non ci è dato di sapere dal tema se il cattivo insegnamento è visto come una specificità dell'insegnamento matematico.] Insomma ogni volta che ho cambiato tipo di scuola ho come avuto l'impressione di dover ricominciare tutto da capo, sotto tutti gli aspetti, insegnamento, amicizie, ecc, questo non ha fatto altro che aumentare la mia insicurezza. [*Osserviamo come in tutti gli aspetti di Simone non sia citata nessuna specificità della matematica.*]

Dal punto di vista teorico il caso di Simone offre sicuramente molti spunti. Simone dal questionario iniziale sembrava quello dei tre ad avere le convinzioni meno dichiaratamente *ostili* nei confronti della matematica, ma è quello di gran lunga con le difficoltà maggiori: anche da un punto di vista affettivo.
Per quel che ho potuto osservare, tramite gli strumenti usati e i nostri incontri, la sua visione della matematica è completamente instrumental mentre la percezione di sè è tenuta particolarmente protetta facendo *scivolare* molti giudizi sul contesto sociale, in particolare sull'insegnamento avuto e sulle richieste in matematica nei vari livelli scolari.
È convinto che non avendo le *basi* non ci siano modi per avere successo in matematica se non quello che gli venga detto quel che deve fare, a prescindere dalla relativa spiegazione.
Riesce comunque a salvaguardare il suo senso di auto-efficacia attribuendo i propri fallimenti a cause esterne a lui e non controllabili, che non dipendono da lui.
L'unico cambiamento in Simone che si può ipotizzare dopo la breve esperienza del tutorato, è il riconoscere alcune cause di fallimento come interne. Proprio questo e la sensazione che abbia *paura* di essere giudicato può essere un'interpretazione del suo abbandono al progetto e il decidere di non affrontare, almeno in quel momento[20], l'esame di matematica.

3.4. Luigia. Come per Simone le prime informazioni che ho dagli incontri le ricostruisco dagli appunti che i ragazzi hanno preso a lezione. Proprio dagli appunti emerge una caratteristica importante di Luigia: nonostante il suo scarso senso di auto-efficacia nei confronti della matematica, sembra piuttosto sicura di sè per molte altre cose, anche riguardanti il corso di matematica stesso; per esempio, è convinta di prendere gli appunti di matematica in maniera perfettamente fedele a quanto fatto

[20]A due anni di distanza Simone si è ritirato dal Corso di Laurea senza aver provato a dare l'esame di Matematica.

in classe[21].
In effetti gli appunti di Luigia sono molto ben ordinati (e questo le permette di trovare facilmente quello che cerca), non sembrano contenere errori grossolani (tipo quelli di Simone) ma suggeriscono una *trascrizione passiva* della lezione. Ci sono molte cose sottolineate: troppe, la sottolineatura sembra essere più una coreografia che uno strumento per dare gerarchie di importanza. Proprio per testare questa prima impressione le chiedo:
Quali sono le cose più importanti che avete fatto sulle successioni?
Luigia non ha grosse esitazioni, comincia a rileggere in rigoroso ordine le cose scritte sugli appunti, il problema appunto è che praticamente legge tutto. La sua risposta sembra confermare la mia prima impressione.
Anche la sua visione della matematica appare *instrumental*: ha infatti la convinzione che in matematica teoria ed esercizi siano completamente distinti. E da questa convinzione segue la perplessità sull'utilità della teoria[22] piuttosto che, come vedremo in Leonardo, il *fastidio* per dover eseguire istruzioni a prescindere dalla correttezza delle istruzioni stesse[23].
Anche per gli esercizi sui limiti di successione che propongo, in cui l'applicazione di teoremi sull'algebra dei limiti di successioni semplificherebbe molto la risoluzione, Luigia si convince con delle prove numeriche del risultato e poi cerca di dimostrarlo, ma solo perché fa parte delle regole del gioco. Ad un certo punto chiedo a Luigia se è convinta che un limite di una successione sia 3 come lei sostiene e lei risponde di sì, quando le chiedo perché cerca di dare una giustificazione derivante dalla dimostrazione che ha fatto. Il fatto curioso è che poco prima aveva ammesso di essere sicura che il limite fosse 3, ma non che la dimostrazione fosse corretta. Allora è molto probabile che Luigia sia convinta della giustezza del limite per le prove numeriche fatte e la *sensazione* che effettivamente i valori si *avvicinino* a 3, il resto è qualcosa che si fa perché si deve fare, di cui non si capisce molto il senso.
In questo caso intervengono non solo convinzioni: la convinzione che

[21] Potremmo dire che Luigia ha uno scarso senso di auto-efficacia nei confronti della matematica, ma una discreta auto-stima. È un esempio di come queste due caratteristiche siano effettivamente distinte e quindi sia importante studiarle separatamente, come sottolineato da Bandura (1986).

[22] Ad un certo punto affermerà: *Ma questo a cosa serve? Non lo abbiamo mai usato negli esercizi fatti a lezione!*

[23] Spesso l'unica giustificazione di queste istruzioni è di tipo autoritario. Come dice Skemp, e come mostrerà anche la *fatica* iniziale di Leonardo, inizialmente questo tipo di approccio è molto meno dispendioso.

la prova empirica su alcuni casi, anche se non sia accettata come dimostrazione, dia ampi margini di sicurezza sulla giustezza della risposta e la convinzione che la dimostrazione formale, una volta che è in qualche modo *evidente* la verità dell'enunciato, sia solo una prova che serve all'insegnante per valutare (vedi ricerche sulle convinzioni e le difficoltà nella dimostrazione), ma anche problemi di gestione del linguaggio matematico (che avevamo già notato in Simone).
Inoltre spesso nei libri di testo di matematica, per aiutare la comprensione, si cerca prima di dare un'idea intuitiva di un concetto e poi se ne dá una formalizzazione[24] che quasi mai gli studenti riconoscono come *traduzione* dell'idea intuitiva data inizialmente. Questo mancato riconoscimento può essere dovuto alla convinzione che sia inutile un'ulteriore e più formale definizione se sembra chiara l'idea intuitiva, che agli studenti spesso basta e avanza anche per convincersi di alcuni risultati, ma anche alla difficoltà di *gestire* i simboli usati nella formalizzazione e il riconoscere che effettivamente la traduzione sia *fedele* all'idea originaria.
Questi problemi possono essere la causa del fatto che molto spesso la verifica secondo la definizione che un numero L sia il limite della successione a_n, diventi un esercizio di disuguaglianze, si applica un algoritmo senza possibilità di controllo sullo stesso.
Nel caso di Luigia sembra proprio così: suggerisce uno scarso controllo semantico sul procedimento *formale*, rinforzando l'ipotesi che la sua convinzione sia quella che tutti questi conti siano qualcosa di *inutile* per il calcolo effettivo del limite, ma siano solo qualcosa da fare per compiacere l'insegnante.
La visione *instrumental* di Luigia è confermata dal fatto che per alcune richieste attivi *automaticamente* degli algoritmi noti, anche se a volte si rivelano inefficienti. Queste sue convinzioni sulla matematica hanno molte implicazioni importanti: innanzitutto una visione della matematica come molto frammentaria, in cui non si può ricavare un risultato

[24] Da un testo universitario: Ciò che realmente ci interessa è il *limite* della successione a_n cioè un numero $a \in \mathbb{R}$ che sia *vicino* ai termini della successione che hanno l'indice n *grande*. Ciò si esprime più precisamente così: a, limite della successione a_n, è un numero reale tale che comunque si scelga un intervallo di numeri intorno ad a, diciamo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$, allora esiste un indice N tale che per $n > N$, a_n sta in questo intervallo, cioè $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. [...] a si dice limite di a_n e si scrive $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ se:

$$\forall\epsilon\ \exists N : \forall n > N\ |a - a_n| < \epsilon$$

In questo caso troviamo un passaggio intermedio tra l'idea intuitiva e la formalizzazione, ma per fare un esempio uno studente si potrebbe chiedere quale è il significato della notazione $\lim_{n\to+\infty}$ che non è stata in precedenza introdotta.

da un altro, ma bisogna ricordarseli tutti. Inoltre i criteri di analogia usati sono a volte molto restrittivi: per esempio nel caso in cui le definizioni di limite di una funzione appaiono tutte diverse e bisogna quindi ricordarsele tutte.
Queste considerazioni rafforzano la convinzione che per riuscire in matematica ci voglia molta memoria. Ma Luigia è anche convinta di avere l'*handicap* della mancanza di basi e quindi di dover imparare (o meglio ricordare) ancora più cose degli altri. Il suo senso di auto-efficacia è perciò basso nonostante sia convinta di saper applicare diligentemente e correttamente le istruzioni avute se le spiegano *come deve fare*.
Un'altra cosa che spesso contraddistingue Luigia è il fatto di avere bene in mente che esiste un *contratto didattico* o delle ben fissate *socio-mathematical norms*: se Simone sembrava essere *passivo* anche in questo caso, cioè pronto ad accettare che gli fosse detto cosa avrebbe dovuto fare, Luigia si porta dietro alcune convinzioni difficilmente *negoziabili.*
Queste *norme* comportano dei *doveri per lei*: per esempio la necessità di cercare di dimostrare in una certa maniera nonostante lei sia convinta che non ce ne sia bisogno; ma anche dei *doveri per l'insegnante*: in particolare il fatto di non poter usare quelli che per lei sono trucchi o comunque esempi ad hoc.
Proprio per questo in tre casi Luigia non è convinta degli esempi di funzioni da me proposti: nel caso della funzione costantemente uguale a 3, non è tanto la funzione a sembrarle *strana* ma la richiesta fatta di calcolarne il limite. Ma il fatto che la richiesta non la convinca le fa esclamare *Non è mica una funzione normale*[25]*!* e anche nel caso della funzione parte intera si chiede *come faccio? Non è una funzione come tutte le altre.* Infine nel caso della funzione definita diversamente su due intervalli distinti: *Sì, va bene, ma che funzione è questa?*
E quando le propongo di applicare i teoremi sulla somma di limiti e dei limiti noti piuttosto che ripartire da capo per calcolarsi il limite della

[25]È molto interessante questa idea di funzione normale, qui come nel caso del limite la definizione formale di funzione e limite è completamente ignorata, la definizione è data dalla consuetudine. Tutto quello che non è consuetudine non è normale, e poco importa se rientra comunque nei canoni della definizione formale: è e rimane un'eccezione. È importante osservare due cose: innanzitutto che la *consuetudine* è ovviamente personale e soggettiva e quindi *guidata* dalle convinzioni della singola persona (e anche dalle esperienze, da cui si originano tali convinzioni) e poi il fatto che spesso questi esempi che non sono consuetudine siano comunque accettati (seppur come anomalie). Questo infatti è lo stesso meccanismo che può far fallire il cambiamento di una convinzione scorretta tramite controesempi. Le eccezioni esistono, anzi a volte, come in questo caso, è l'insegnante che dice di accettarle senza convincere lo studente che non siano eccezioni.

successione:
$$a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$$
Esclama: *sì ho capito, così sarebbe utile...ma* <u>*vale*</u> *fare così?*
Insomma il profilo di Luigia sembra essere quello di una persona con un alto self-concept e con convinzioni sulla matematica di tipo instrumental e inoltre con socio-mathematical norms molto rigide che le inibiscono dei comportamenti.
L'esperienza di insuccessi in matematica si *scontra* con il fatto di credere nelle proprie possibilità e quindi spesso (per non dire sempre) questi insuccessi vengono attribuiti agli insegnanti, o a caratteristiche della matematica (ci vuole troppa memoria ritorna spesso nelle sue *esternazioni*) o infine, nel caso degli insuccessi presenti, alla mancanza di basi su cui è per lei impossibile intervenire[26].
Così si possono interpretare molti degli episodi accaduti durante i nostri incontri, uno in particolare mi sembra riassuma molte delle caratteristiche appena discusse: quello sul fatto che gli integrali non piacciano a Luigia.
L'integrale viene visto come l'inverso della derivata, ma questo dá un fastidio enorme perché a differenza della derivata il calcolo della primitiva può presentare delle scelte *strategiche*:

L: *Non mi piace, gli esempi che abbiamo visto a lezione li ho capiti ma non li avrei saputi fare, non capisco quando* <u>*devo*</u> *fare per parti e quando per sostituzione. Come si fa a decidere? Solo quelli con la frazione* [razionali fratti] *ho capito come si fanno.*

Una volta di più si nota il bisogno di Luigia di essere il più possibile indirizzata, di avere un algoritmo per risolvere un esercizio. Si sente sicura delle sue capacità di esecutrice di istruzioni, molto meno per quanto riguarda il prendere decisioni. Luigia sembra una persona molto sicura di sé che spiega le sue difficoltà rifacendosi a fattori esterni:

Noi, <u>*al classico*</u> *non si sono mai fatti gli integrali.*

[26]Il mio intervento quindi si è giocato da una parte nel cercare di mostrare i vantaggi di vedere delle *relazioni* tra i vari fatti matematici studiati, dall'altra nel cercare quanto meno di farle nascere la *convinzione* dell'importanza di alzare i suoi livelli di controllo sugli algoritmi applicati nella risoluzione di un esercizio (per questo tipo di intervento sono stati molto utili gli esercizi sui grafici di funzione: vedi appendice).

Rimane così molto perplessa quando le dico che in realtà quasi nessuno ha mai fatto alle superiori il calcolo integrale, ma ribatte:

L: *Comunque noi non c'eravamo neanche avvicinati a fare gli integrali, gli altri almeno fino a fare bene le derivate e i grafici ci sono arrivati.*

Per completare il quadro su Luigia, è molto interessante anche il tema che mi ha consegnato in cui si confermano molte osservazioni fatte nel corso dei nostri incontri. Lo riporto qui di seguito, non senza aggiungere che Luigia passerà lo scritto di matematica al primo tentativo e così anche l'orale, e che subito dopo ringraziandomi mi dirà:

L: *Ero indecisa di fare Scienze Ambientali perché c'era Matematica. Mai avrei pensato l'avrei passato subito, ma ancora meno avrei pensato che sarebbe stato il mio primo esame universitario.*

Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi

Il mio rapporto con la matematica, non è stato quasi mai idilliaco, sebbene il primo approccio con questa materia sia stato entusiasmante! [*Questa è una caratteristica della matematica come disciplina scolastica che molti sottolineano e questo penso debba fare riflettere*] Avevo circa cinque anni e sapevo già leggere, scrivere correntemente e fare di conto (addizioni e sottrazioni) con le decine, le centinaia e pure con i decimali! Tutto questo per me non era faticoso, anzi era motivo di divertimento: riassunti e problemi erano per me delle sfide...che io puntualmente vincevo. [*Luigia mostra l'alta autostima che ha di sé e il piacere di vincere le sfide, come la paura di perderle che sembra segnare il suo cambiamento nei confronti della matematica*]

La matematica ha cominciato a cadere quando è iniziata la scuola, fin da quando iniziai le elementari.

Era una noia mortale fare tutte quelle operazioni con le relative 'prove'! Iniziai ad odiare la divisione perché era troppo lunga da fare! Poi per vedere se fosse stata svolta bene, si faceva la 'prova' con la moltiplicazione: due...noie assurde!! Mi ricordo quando la maestra mi spiegò la divisione: dieci fagioli erano appoggiati su un banco e la maestra mi aveva fatto spostare quei fagioli a due a due sulla cattedra...alla fine avevo fatto 'sotto e sopra' banco-cattedra cinque volte: ecco la divisione. Non avevo capito allora, non capisco adesso il ragionamento contorto che aveva fatto per tentare di spiegarci questa operazione. Ecco cosa era la matematica, pensai: solo un ragionamento contorto che non porta da nessuna parte! [*Qui cominciano a formarsi delle convinzioni che sono difficili da cambiare, e che anzi sembrano cercare qualsiasi evidenza per rinforzarsi*] Il disinteresse e la noia per questa materia si erano impadronite di me: al solo pensiero mi veniva la febbre ossia stavo male!

Per non parlare della geometria! Tra l'altro si capiva bene che anche la maestra non digeriva tanto la materia...!! [Sarebbe stato interessante se avesse spiegato da cosa si *capiva bene* che anche la maestra non digeriva la materia]

Il mio disinteresse per la matematica era compensato da un amore sfrenato per l'italiano, soprattutto per le libere composizioni; tanto che alle medie i miei temi e miei racconti erano sempre apprezzatissimi da tutta la scolaresca. [*Luigia non parla dei suoi insuccessi in matematica che però si possono intuire, e da questo passare a dove riusciva bene, si evidenzia il bisogno di dare più risalto alle cose che le riescono. Come vedremo in questo Leonardo è diametralmente opposto*]

Alle medie continuavo a non amare la matematica ma sicuramente mi piaceva di più: la professoressa era bravissima e le cose 'ce le dava col cucchiaino', infatti andavo bene, ma non eccellevo come in musica, disegno e italiano. [*Qui si continua a notare il fastidio di Luigia di non eccellere, ma la cosa più interessante è come sottolinei la bravura dell'insegnante legata al fatto di dare le cose col cucchiaino, questo è in sintonia con quanto osservato durante gli incontri*] Continuavo a vedere la matematica come qualcosa di astratto, chiusa nei suoi schemi, rigorosa, attenta, precisa,...grigia; l'opposto di quello che io ero e che amavo: la creatività, il sentimento, il disordine, il suono, la fantasia, il blu, il giallo, il verde...[*Questa descrizione è veramente interessante, anche perché per una volta si discosta dalle proprie prestazioni e perché è una visione sicuramente non condivisibile da chi fa matematica. Allora Luigia diventa un prototipo di persona che ha una certa ostilità verso la matematica, ma che può avere un'immagine distorta della stessa, allora il problema non è nel fatto che non le piaccia la matematica, ma che la veda in questo modo*]

La matematica al liceo Classico è sempre stata un 'optional', tanto che i ragazzi venivano (e vanno) al classico perché 'non si fa matematica!', assurda convinzione! Quindi tutta la classe aveva fin dall'inizio preso sottogamba la materia. In quarta ginnasio, nel primo quadrimestre avevo quattro in matematica: il disinteresse si era trasformato in odio.

Per non includere poi la professoressa: ci odiava tanto da spiegare la lezione senza nessun entusiasmo. [*Anche qui risaltano le spiegazioni esterne ai suoi insuccessi, e addirittura c'è un primo riferimento al Classico come alibi alle sue difficoltà odierne. È interessante come anche il prendere la materia sottogamba non sia rimproverabile a lei, ma al soggetto-classe*]
Nel secondo semestre però avevamo affrontato i teoremi sui triangoli: finalmente un po' di luce dopo tanto buio. Erano bellissimi, per me facilissimi: così logici, consequenziali...filavano lisci come l'olio...'si dicevano da solo'! [*E qui risalta ancora di più come possa essere significativo, nel caso di Luigia, un obiettivo affettivo, di cambiamento di convinzioni. si può affermare che la matematica non le piace? Questo capoverso ci dice con forza di no*]
All'interrogazione la professoressa rimase sbalordita e alla fine dell'anno avevo otto in pagella! Sfortunamente il programma l'anno dopo cambiò e cambiò anche il professore, era ancora più triste della professoressa precedente. Era sempre in ritardo e spiegava gli ultimi cinque minuti alla fine dell'ora durante il suono della campanella. I compiti della classe erano tutti sotto il 6, tranne una ragazza che sapeva <u>tutto il libro a memoria</u> ma effettivamente <u>non capiva niente</u> di quello che aveva studiato...[*Qui si ribadisce l'attenzione sul fattore insegnante, e sul fatto che tutta la classe andasse male. Interessanti sono anche le teorie del successo che traspaiono da questo brano*] Argomenti non fatti si aggiungevano ad argomenti non capiti e l'approccio con la matematica era sempre più difficile: non riuscivo a capire ciò che si spiegava, ma soprattutto la domanda che mi facevo era: 'A che serve? Perché la studiamo?' Mio padre continuava a ripetere: 'Tutto è matematica![...]' 'L'astrattezza', però, era l'unica mia risposta ad una domanda tipo: 'cosa è la matematica?' Ero <u>convintissima</u> che non avrei mai preso 'qualcosa di scientifico' all'Università...ora mi trovo a Scienze ambientali con un esame di analisi da fare...chi l'avrebbe mai detto?
Ora con una voragine immensa nel mio bagaglio di conoscenze matematiche inizio a capire a cosa serve! Il mio rapporto con la matematica è molto meno astioso...la capisco meglio, forse anche perché sono intellettualmente più matura, non lo so...
...Ma la matematica non è un mostro,...<u>fa paura sì</u>, soprattutto a chi come me non sapeva neanche 'dove stava di casa' fino a qualche mese fa, ma con tanta pazienza e forza di volontà si può riuscire...speriamo!!!

È anche vero che Luigia ha avuto molte difficoltà nel secondo modulo di Matematica presente nel suo corso di laurea: solo recentemente, dopo due anni e attraverso un altro tutorato è riuscita a superare l'esame. Questo forse conferma che avesse bisogno di qualcuno che la seguisse e la indirizzasse durante lo studio, ma probabilmente è dovuto anche al carattere sempre più astratto (e quindi poco *digeribile* a Luigia) degli argomenti trattati. Un altro fattore da tenere presente e che abbiamo già sottolineato è l'importanza del fattore tempo per interventi che intendano incidere sulle convinzioni. È inoltre dimostrato in letteratura (Hannula, 2002; Yusof e Tall, 1999) come ci sia il pericolo che l'effetto di corsi ad hoc non sia duraturo nel tempo.

3.5. Leonardo. Leonardo è uno studente pendolare, che nel questionario iniziale confessa il suo *rapporto difficile* con la matematica, ma quello che colpisce di più delle sue risposte è la totale assenza di fattori esterni (insegnanti, tipo di scuola, etc.) o caratteristiche intrinseche della matematica (astrazione, complessità, vastità, etc.) come giustificazione alle sue difficoltà. È l'unico tra tutti quelli che hanno dichiarato di avere delle difficoltà in matematica che non adduce una delle precedenti motivazioni tra le cause delle difficoltà. Inoltre nelle risposte di Leonardo emergono difficoltà di natura affettiva (in particolare emotiva), è convinto di rendere meno di quello che potrebbe a causa dell'emotività.
Leonardo come vedremo dimostrerà di essere un soggetto molto interessante proprio dal punto di vista teorico, e anche dal punto di vista didattico risulterà quello che dal tutorato ha ricevuto i maggiori benefici.
Confrontando con Luigia si può notare lo stesso impegno ma sicuramente molta più confusione nel modo di tenere gli appunti e di conseguenza anche nel ritrovare quello che sta cercando.

Di Leonardo fin dal primo incontro colpisce il fatto che abbia molte curiosità poco *instrumental*. Questo è strano non solo perché non è una consuetudine tra chi è convinto di avere difficoltà in matematica, ma soprattutto perché il fatto di non trovare, a volte, risposta a queste curiosità lo *convince* della sua inadeguatezza nel fare matematica. Cioè questa visione della matematica, che si dimostrerà la sua forza, unita al fatto di non trovare risposte gli *genera* un senso di auto-efficacia basso. Questo basso senso di auto-efficacia è *rinforzato* dalle esperienze negative: spesso non riesce ad arrivare alla soluzione corretta di un esercizio. Non perde mai occasione di sottolineare questa sua scarsa

percezione di auto-efficacia: *ho sbagliato sicuramente qualcosa, nel farlo tutto sbaglio sicuramente qualcosa.*
In effetti Leonardo sembra avere dei problemi su argomenti di base (quali risoluzioni di equazioni e disequazioni) e inoltre commette molti errori di distrazione[27] e quindi spesso non arriva ad un risultato corretto. Tuttavia le sue potenzialità sembrano da subito buone. Le sue domande (che come detto a volte lo mettono in crisi) sono spesso pertinenti e in qualche modo provengono da curiosità *relational* nel vero senso della parola: cerca cioè collegamenti e di capire quello che fa piuttosto che applicare un algoritmo usuale senza essere sicuro della sua necessità.
Come detto Leonardo non ha la precisione negli appunti di Luigia, ma nonostante questo riesce a *ricostruire* definizioni, teoremi e quanto di importante è stato detto a lezione. Rispetto a Luigia (e anche a Simone, con cui è più difficile fare paragoni) però è molto più problematico e anche più insicuro. Per Luigia l'ordine negli appunti e la sicurezza con cui trova quello che cerca è la tranquillità che tutto vada bene. D'altra parte questo è tipico di un approccio *instrumental*, dove si pensa che le richieste siano di dover applicare algoritmi noti, e allora l'unica attività è quella di capire quale algoritmo utilizzare e saperlo poi applicare correttamente. Leonardo invece è preoccupato anche dalla *confusione sostanziale*, ovvero di capire quello che ha scritto sugli appunti a prescindere da quello che serve come applicazione. Spesso alle domande che si fa non trova risposta e questo mina ancora di più la sua sicurezza. È stato un obiettivo di questo percorso comune fargli capire che le sue domande non sono insensate e spesso sono segno di comprensione maggiore rispetto a chi queste domande non se le fa[28].
Per raggiungere questo obiettivo e considerando sia lo scarso senso di auto-efficacia di Leonardo che i suoi effettivi problemi nella risoluzione di esercizi, durante i nostri incontri spesso propongo esercizi meno standard in cui le *qualità* di Leonardo possano risaltare (perché non sono

[27]Definisco come errori di distrazione, quegli errori che, rileggendo quanto scritto, Leonardo avrebbe potuto riconoscere e correggere. Non so se è la miglior definizione di errore di distrazione, ma in questo caso mi interessa soltanto categorizzare questo tipo di errori.

[28]A questo proposito è interessante un confronto con Luigia: con tutti e due mi sono trovato in una situazione in cui hanno esclamato soddisfatti *Ho capito, penso proprio di aver capito!*, ma mentre nel caso di Luigia la sua sicurezza derivava dal fatto che il risultato *tornava* e alcune domande successive hanno mostrato che forse non era così, nel caso di Leonardo questo accadeva per la dimostrazione di un teorema, e lui stesso dopo aver detto di aver capito *sente l'esigenza* di andare a controllare da solo se tutti i passaggi mentali fatti sono corretti.

previsti molti calcoli). Parallelamente facciamo anche esercizi in cui Leonardo deve risolvere equazioni e disequazioni, nella convinzione che dal punto di vista cognitivo le difficoltà, che a lui sembrano enormi, siano molto localizzate.
Dal punto di vista di quelle che chiamiamo convinzioni *sul contesto sociale* a parte il fatto che Leonardo non ritiene opportuno esplicitare a lezione le sue domande e curiosità (e nel sentirle come inadeguate lui stesso afferma che gioca la sua convinzione che non siano pertinenti), spesso inferisce dalle mie richieste o domande dei messaggi impliciti.
Uno degli episodi che in qualche modo riassume queste caratteristiche di Leonardo è quello sulle funzioni continue. Anche lui dopo avermi ricordato la definizione di continuità, mi spiega che se una funzione è continua si vede dal grafico: è continua se non ci sono salti. Ma interessante è come spiega questa conclusione:

Leo: *All'inizio non capivo cosa c'entrava il salto con la definizione che ci era stata data, con i limiti. Il fatto è che spesso non capisco e mi sembra di essere l'unico perché tutti annuiscono e quindi quasi mi vergogno e non chiedo niente. Allora rinuncio a capirci qualcosa, ma questo mi dá noia, non mi fa stare tranquillo. Per esempio in questo caso non capivo che c'entrava il fatto che il limite della funzione fosse* $f(x_0)$ *con il fatto di non aver salti. Poi forse ci sono arrivato...ma non sono sicuro. Allora la definizione di limite significa che la funzione va verso quel numero, supponiamo che sto arrivando di qua* [disegnando uno schizzo di funzione partendo da sinistra] *e che il limite in zero è* 1*, allora vuol dire che la funzione fa così* [disegna la funzione che arriva fino a 1 in 0]*, se ora, tutto d'un tratto la funzione in* 0 *vale* 1000 *allora devo ripartire da* 1000 *e quindi c'è un salto. Magari sto dicendo una marea di cavolate, ma me lo sono spiegato così, certo che a prima vista gli epsilon i delta e i valori assoluti non sembrano avere molto a che fare con i salti della funzione.*

Se le curiosità di Leonardo sono sicuramente punti di forza, il suo problema, evidenziato in questi incontri, sta nel gran numero di errori di calcolo che commette per distrazione o, come nel caso della radice quadrata, per lacune nella conoscenza dei simboli usati. Il mio intervento, come del resto per tutto il corso del tutorato, è in questo caso duplice: se dal punto di vista didattico cerco dei modi per forzare il controllo di Leonardo ottenendo anche risultati interessanti, dal punto di vista teorico sono interessato a capire perché Leonardo non attivi

spontaneamente processi di controllo visto che è consapevole della frequenza dei suoi errori.
Chiedo esplicitamente a Leonardo perché non cerca di porre più attenzione ai conti che fa e poi non li controlla visto che spesso quando li riguardiamo insieme lui stesso si accorge degli errori che ha fatto. Leonardo risponde che è inutile che controlli perché tanto sa che se fa il conto 100 volte lo sbaglia 90 volte e che comunque non riuscirà a vedere tutti gli errori che ha commesso in un conto[29]. Questo può essere anche vero, ma il processo di controllo non richiede di fare il conto ogni volta da capo e poi confrontare i risultati ottenuti, ma di ricontrollare i passaggi già fatti e in questo Leonardo è molto più efficiente. Facciamo dunque una specie di gioco, lui calcola un limite richiesto in un esercizio, io lo correggo mentalmente e gli dico il numero di errori, così ha un controllo superiore sulle correzioni da fare, inoltre gli dico se il risultato è giusto e quanti errori sono ininfluenti dal punto di vista del risultato finale.
È importante il fatto che in questo modo Leonardo riesce a trovare tutti gli errori quasi sempre alla prima rilettura.

I risultati ottenuti da Leonardo confermano le sue potenzialità, infatti non solo passa al primo tentativo l'esame di Istituzioni, ma passa subito anche il secondo modulo. Penso che questo sia dovuto proprio al suo approccio molto poco *instrumental*, questo fa sì infatti che i benefici che ha avuto dal tutorato (e che dichiara anche nel tema che ha consegnato) siano duraturi nel tempo. È da sottolineare come anche lui avesse molte difficoltà in matematica all'inizio, addirittura maggiori a quelle di Luigia per quanto riguarda la risoluzione di esercizi su equazioni e disequazioni.
Anche lui, come Luigia, alla fine dell'anno, finiti gli esami di matematica, era molto sorpreso di averli superati entrambi al primo tentativo.
È molto interessante infine, come anche per gli altri due, il suo tema:

Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi
La Matematica, già il nome crea brutti ricordi nella maggioranza delle persone che ci si sono scontrate, almeno così dicono.
Sembra di ascoltare un'avventura epica quando si racconta della famosa *bestia nera* con la coda a forma di esponenziale e lo spaventoso muso

[29]Questo sottolinea il suo fatalismo in questo senso, rinuncia ad applicare tutte le sue risorse perché si sente vinto in partenza.

a forma di parabola. Per giunta si narra che con il suo sguardo penetrante sia in grado di farti sentire incapace di affrontarla; quindi anche se potresti batterla non ci riusciresti dandoti sconfitto a priori. [*È proprio quello che succede spesso a Leonardo, ha paura della matematica e si dá sconfitto prima di affrontarla.*]
Scrivendo ciò sembrerebbe, dal tono un po' ironico, che io non creda assolutamente a queste cose e che non abbia problema alcuno con la Matematica; ma devo affermare il contrario. Il nostro rapporto è veramente complicato da descrivere. Potrei recitare la tipica frase: *amore e odio*! Hmm, non mi sembra il caso, poi è banale, si scrive per comodo e comunque è vera solo per metà.
Dovrei risalire alle radici del nostro *eterno dissidio* che affondano dove la memoria non può arrivare.
A dire il vero, Matematica, non mi è mai stata simpatica fin dai nostri primi rapporti ai tempi delle superiori, ma probabilmente anche prima. Non dubito che io, in quegli anni, fossi scontroso e testardo nei suoi confronti, ma non riuscivo a trovare un punto in comune. Mi sforzavo invano cercando di ottenere qualche risultato, ma non arrivai a nulla. [*Anche qui risalta una caratteristica di Leonardo già sottolineata, ovvero quella di non fare mai menzione a fattori esterni per spiegare la difficoltà nel rapporto con la matematica. In tutto il tema, per esempio, non c'è nessun riferimento a insegnanti da cui siano derivate difficoltà. Inoltre risalta anche il fatto che non si chieda se l'inefficienza del suo impegno sia dovuta anche a come è stato indirizzato l'impegno. Sembra rassegnato ad ammettere che non c'è niente da fare: mi sforzavo invano.*] Deluso del mio impegno gettato al vento, decisi poco prudentemente di dimenticarmi di lei. Non volevo più vederla sapendo che i nostri due caratteri erano incompatibili l'uno all'altro. [*Anche qui torna la convinzione che non ci sia niente da fare, Leonardo è convinto di non potercela fare.*] Non incontrai più Matematica per un po', o meglio quando la vedevo cercavo di cambiare strada. Questo durò qualche tempo fino a quando non compresi che un giorno o l'altro avrei dovuto affrontarla...
Era molto che non la incontravo, Matematica era molto cambiata e non certo in meglio; sempre più difficile e complicata nei suoi pensieri compresi solo da pochi.
Sembrava che le difficoltà di un tempo fossero aumentate in maniera esponenziale, [*Da notare che l'esponenziale usato prima per descrivere la coda del mostro ora è usato in maniera pertinente con le sue caratteristiche matematiche di funzione rapidamente crescente. È vero che*

è un modo di dire di uso comune ormai, ma è una coincidenza interessante.] e i problemi da affrontare erano veramente numerosi che ti inglobavano in una voragine senza via di uscita. [*Qui ritorna il fatalismo di Leonardo che è convinto di non potercela fare, di non avere vie di uscita.*]
Forse se a suo tempo non l'avessi tralasciata non ci sarebbero questi problemi. [*Questa è la prima attribuzione di fallimento che Leonardo menziona, finora ha spiegato anche le difficoltà in maniera fatalistica.*] Ma ora vorrei trovare una soluzione per eliminare i nostri contrasti; penso che mi impegnerò a fondo e spero che il mio rapporto con Matematica cambi, almeno me lo auguro. [*Forse è cambiato qualcosa in Leonardo, ora almeno spera che l'impegno possa portarlo a qualche risultato.*]
Oggi non posso dire con certezza che tutto questo si sia verificato, ma penso che qualcosa sia accaduto. [*Qui è sottolineata l'importanza di una nuova consapevolezza. Da notare come al momento del tema Leonardo non avesse ancora affrontato nessuna prova scritta e quindi la sua fiducia si basa interamente sul suo rapporto con la materia e non sui risultati.*]
Chiaramente ho lacune e basi non troppo solide, questo non mi aiuta a studiare matematica, ma ci provo ugualmente anche se ottengo risultati non troppo soddisfacenti. [*Qui la seconda menzione ad attribuzioni di fallimento e la puntualizzazione che la sua nuova fiducia non sia dovuta a risultati, come valutazioni positive a compiti o cose simili.*]
Credo che, in particolar modo in quest'ultimo periodo di tempo, sto affrontando la materia con meno fatica di prima, sempre abbastanza, ma sta diminuendo e spero continui a farlo. [*Questa osservazione è interessante perché è in un certo senso poco instrumental, Leonardo sente che qualcosa è cambiato perché affronta la materia con meno fatica! Il suo cambiamento è di natura affettiva e non solo questo ha dato benefici dal punto di vista dei risultati, ma anche come obiettivo in sé. Leonardo infatti è consapevole che qualcosa è cambiato e spera che continui a cambiare in meglio.*]
Concludendo penso che non sia una materia impossibile da apprendere e mi piacerebbe riuscire a capirla e utilizzarla facilmente così che non sia un peso, senza dimenticare che alla fine dovrei anche sostenere l'esame d'analisi che prima o poi spero di superare. [*Anche qui è interessante che alla fine Leonardo si ricorda dell'obiettivo superamento esame, ma lo menziona dopo la speranza di riuscire a far sì che matematica non sia un peso. Inoltre proprio alla fine sembra cominciare a credere che ce la può fare a capirla.*]

CAPITOLO V

Conclusioni

1. Discussione dei risultati

Le prime conclusioni riguardano la mia ipotesi di ricerca: se vogliamo che effettivamente il costrutto delle *convinzioni* costituisca uno strumento teorico utile per interpretare i comportamenti, e quindi anche per suggerire interventi, è necessario considerare le convinzioni insieme alla loro struttura (sistemi di convinzioni).
Come detto, avendo assunto l'importanza delle convinzioni come costrutto che aiuta a comprendere i comportamenti matematici degli allievi, l'ipotesi precedente richiede solo di evidenziare che le singole convinzioni non forniscono invece uno strumento utile per comprendere tali comportamenti.
Ricordo che la metodologia seguita è stata quella di un approccio multiplo, che ha integrato diversi tipi di osservazione, di analisi di dati, e quindi di evidenza. I dati raccolti provengono da:

- temi
- risposte ad un questionario appositamente costruito
- tre case studies.

L'analisi dei temi, condotta con modalità diverse (facendo riferimento alle classificazioni di Lieblich et al., 1998, con un approccio sia olistico che categoriale) mette in evidenza:

(1) la varietà di sistemi che possono essere associati ad una stessa convinzione;
(2) il fatto che le singole convinzioni dei soggetti che descrivono un'esperienza globalmente fallimentare (o meglio: percepita come fallimentare) con la matematica non sono necessariamente diverse da quelle di soggetti che riportano di non aver avuto difficoltà. In altre parole le singole convinzioni non sono *localmente* significative (tanto che localmente possono essere condivise da soggetti con comportamenti estremamente diversi);
(3) alcuni sistemi particolarmente diffusi fra soggetti che riportano un'esperienza fallimentare (ad esempio: visione instrumental

della matematica associata a scarso senso di auto-efficacia, a teorie del successo in cui la memoria ha un ruolo importante, ad attribuzioni di fallimento percepite come incontrollabili), suggerendo quindi la significatività di tali sistemi;

(4) che la reazione emozionale associata ad una convinzione (ad esempio alle teorie del successo) è in realtà associata ad un sistema di convinzioni collegato (ad esempio: all'interazione fra le teorie del successo e le convinzioni su di sé in relazione alle caratteristiche individuate come necessarie nelle teorie del successo).

In definitiva già l'analisi dei temi ha costituito quindi una prima verifica dell'ipotesi di ricerca.
Per ottenere ulteriori evidenze con strumenti profondamente diversi, è stato utilizzato un questionario, appositamente costruito, che indagasse sui sistemi di convinzioni anziché sulle singole convinzioni. La costruzione è avvenuta per gradi, nel senso che la versione definitiva ha integrato due versioni precedentemente preparate, sperimentate e analizzate.
L'analisi delle risposte al questionario articolato IQB (Integrated Questionnaire on Beliefs):

(1) porta ulteriori evidenze sulla varietà di sistemi che possono essere associati ad una singola convinzione;
(2) porta ulteriori evidenze all'ipotesi emersa dall'analisi dei temi che la reazione emozionale associata ad una convinzione è in realtà associata ad un sistema di convinzioni collegato.

Se il primo e il secondo passo del percorso di ricerca descritto coinvolgono modalità di osservazione profondamente diverse (temi nel primo caso; questionari seppure aperti nel secondo), il terzo passo integra vari tipi di osservazione (temi / questionari aperti / osservazione diretta), attraverso tre case studies.
L'osservazione relativa a questi case studies evidenzia ancora la varietà dei sistemi che possono essere associati ad una singola convinzione, ed anche l'importanza di tale varietà in relazione ai comportamenti osservati. In particolare evidenzia come la convinzione di non poter controllare la matematica sia associata nei tre casi a convinzioni diverse:

(1) per quanto riguarda la visione della matematica, S e L sembrano avere una visione di tipo instrumental, mentre Leo una visione di tipo relational
(2) legate a tale visione appaiono le teorie del successo: ad esempio per S e L la memoria è importante, mentre per Leo no

(3) le attribuzioni di fallimento di S rimandano a cause esterne (gli insegnanti, la difficoltà della materia), di L a cause interne ma controllabili (le lacune di base, superabili con l'impegno e lo studio), di Leo a cause interne percepite come incontrollabili.

Queste differenze appaiono significative anche alla luce dell'interazione realizzata, e degli esiti completamente diversi che l'intervento ha avuto nei tre casi.

Come avevamo anticipato, anche se la ricerca si poneva l'obiettivo di evidenziare la necessità di considerare sistemi e non singole convinzioni, dando per assunto il ruolo delle convinzioni nei comportamenti matematici, il percorso di ricerca seguito ha permesso di portare ulteriore evidenza in favore di questo ruolo, in particolare nei tre case studies.
Inoltre i risultati ottenuti complessivamente con le tre modalità differenti di osservazione *dimostrano* che i questionari tradizionali, chiedendo l'accordo del soggetto su singole convinzioni, appiattiscono in una stessa categoria *profili* significativamente diversi. Suggeriscono quindi che proprio a questo si possa ricondurre il ben noto conflitto beliefs espoused / in action. D'altra parte l'analisi critica della letteratura del settore, presentata nel secondo e terzo capitolo, volutamente non limitata alla letteratura specifica sui beliefs ma allargata a quella sull'affect, ha permesso di discutere ed evidenziare alcuni nodi, ma anche (proprio per il fatto che non era limitata ai beliefs) di inquadrare tali nodi in un contesto di ricerca più generale.
Le critiche mosse sopra ai questionari standard, che non prendono in considerazione i sistemi di convinzioni ma le convinzioni isolatamente, rimandano quindi in generale alla scarsa coerenza fra quadro teorico costruito e strumenti di osservazione utilizzati. Il lavoro di Green (1971), con l'illustrazione della struttura dei sistemi di convinzioni, è infatti inserito nel quadro teorico della maggior parte dei ricercatori che studiano le convinzioni (laddove è richiamato un quadro teorico), ma raramente questa teoria influenza le scelte metodologiche e quindi la pratica del ricercatore.

Un ulteriore *prodotto* di questa ricerca si può considerare anche il questionario IQB, in quanto i risultati ottenuti attribuiscono una duplice rilevanza a tale strumento: non solo quella di *smascherare* l'inadeguatezza di strumenti tradizionali, ma le sue potenzialità nel tener conto dei sistemi.
Infine i risultati ottenuti suggeriscono l'opportunità di tenere in considerazione i legami fra le convinzioni anche nella loro categorizzazione.

Suggeriscono in altre parole un modello a più livelli:

(1) Ad un primo livello ci sono in pratica le tre categorie proposte da Op't Eynde e altri:
  - Le convinzioni sulla matematica, che possono essere a loro volta suddivise in convinzioni sulla matematica come scienza, come disciplina scolastica e su oggetti o risultati matematici. Le prime due sotto-categorie si può dire che in qualche modo siano di natura più filosofica, mentre la terza di natura più contenutistica (in particolare in questo caso è a volte ammissibile parlare di convinzioni errate, che in letteratura vengono a volte chiamate *misconcetti*).
  - Le convinzioni su di sé (self-concept).
  - Le convinzioni sul contesto sociale (socio-mathematical and social norms).

(2) Ad un secondo livello ci sono le convinzioni che hanno origine spesso dall'interazione tra le precedenti convinzioni e altre ad esse collegate e che vengono alimentate e rafforzate con l'esperienza quotidiana. Dall'interazione tra le convinzioni sulla matematica e quelle sul contesto sociale nascono le cosiddette *teorie del successo*. Legate alle teorie del successo ci sono, come abbiamo visto, le convinzioni sulle caratteristiche individuate dalle teorie del successo (in letteratura ci sono lavori soprattutto riguardo le teorie sulla memoria e sull'intelligenza).

(3) Ad un terzo livello ci sono le convinzioni che si originano dall'interazione tra le convinzioni su di sé e le teorie del successo ovvero il *senso di auto-efficacia*: cioè la percezione di adeguatezza delle proprie caratteristiche personali con le richieste necessarie a raggiungere un obiettivo, in questo caso particolare, l'obiettivo di riuscire in matematica.

La maggior distinzione tra questa categorizzazione e quelle presentate nel capitolo tre è la strutturazione in tre livelli: si cerca di considerare la complessità dei sistemi di convinzioni e le relazioni tra le convinzioni anche nella categorizzazione mentre in genere si cerca di trovare *un contenitore* per ogni convinzione anche se queste sembrano essere frutto dell'interazione tra più oggetti. Per esempio nella categorizzazione proposta da Op't Eynde e altri (2002) tra le convinzioni su di sè vengono considerate le convinzioni di controllo: *se studio in modo appropriato, allora riuscirò ad imparare i contenuti del corso* e quelle di auto-efficacia: *sono fiducioso di poter capire i contenuti più difficili presentati nel corso di matematica*. Può darsi che queste valutazioni

esistano a prescindere dalle convinzioni sulla matematica, ma mi sembra più interessante (dal punto di vista dell'educazione matematica) quando la convinzione di auto-efficacia ha origine dall'interazione tra le convinzioni su di sé e quelle sulla disciplina.
Come già sottolineato, questa categorizzazione è il risultato della volontà di tenere in considerazione la struttura dei sistemi di convinzioni che appaiono, alla luce dei risultati precedenti, molto più significativi dello studio di singole convinzioni.

2. Implicazioni didattiche

Le implicazioni didattiche del lavoro di ricerca presentato sono notevoli, e diverse in relazione ai vari *segmenti* della ricerca: l'analisi critica della letteratura, l'indagine condotta con i temi, le risposte al questionario IQB, i case studies. L'analisi critica della letteratura porta soprattutto a sottolineare l'importanza di considerare la componente delle convinzioni (ma non solo) nell'apprendimento. La parte sperimentale con cui ho affrontato il problema di ricerca più specifico che mi sono posto porta invece un'ulteriore chiarificazione del punto precedente, sottolineando l'importanza di *ragionare* per sistemi, più che per singole convinzioni. Come già detto, il lavoro di ricerca fatto ha permesso anche di descrivere particolari sistemi di convinzioni, e ne ha suggerito la significatività. Più nello specifico le implicazioni didattiche in relazione al problema delle difficoltà in matematica, che è stato il problema da cui è partita questa ricerca, si possono ulteriormente diversificare a seconda che facciano riferimento a recupero, prevenzione, ma anche alle responsabilità delle scelte dell'insegnante nell'insorgere delle difficoltà stesse.
In particolare le *storie* che emergono dai temi oltre a suggerire momenti, attività ed argomenti critici nel percorso scolastico (la cui gestione è comunque a carico dell'insegnante), sottolineano con forza il ruolo dell'insegnante stesso nella costruzione della visione della matematica, delle teorie del successo, del senso di auto-efficacia.
Dal punto di vista della prevenzione l'importanza dei sistemi di convinzioni evidenzia, in particolare dalla lettura dei temi, la necessità di monitorare l'interpretazione dell'esperienza matematica che costruiscono gli studenti, mentre l'importanza di certi sistemi suggerisce la necessità che l'insegnante favorisca attività matematiche significative per l'allievo, che promuovano una visione della matematica tesa a sviluppare relazioni piuttosto che a insegnare procedimenti, e che utilizzi il contesto della matematica per costruire il senso di auto-efficacia dei suoi allievi, e non per demolirlo.

Infine, per quanto riguarda il recupero, l'importanza dei sistemi di convinzioni suggerisce la necessità, per un intervento mirato, di una *diagnosi* iniziale. L'intervento potrà essere diverso se finalizzato a scardinare convinzioni epistemologicamente scorrette sulla disciplina, o teorie del successo che si ritengono inadeguate, o un basso senso di auto-efficacia.
Una conseguenza della struttura in sistemi è che, laddove si ritiene che un comportamento fallimentare sia motivato da certe convinzioni, l'intervento dovrà riuscire a sradicare il sistema: la struttura in sistema implica che tale cambiamento può essere possibile con un intervento che *parte* da contesti apparentemente lontani. Mi spiego meglio: se uno studente risponde a caso o addirittura rinuncia a rispondere in problemi di geometria, può essere risolutivo un intervento mirato a modificare la sua visione della matematica, intervento che potrà eventualmente avvenire nel contesto dell'aritmetica, con una riflessione sui processi che giustificano le regole ben note di calcolo. Oppure può essere risolutivo lavorare sul suo senso di auto-efficacia, convincerlo, naturalmente attraverso attività matematiche, che in realtà ce la può fare, se dirige in modo mirato il proprio impegno. In fondo i case studies esemplificano proprio interventi differenti su comportamenti fallimentari *apparentemente* (cioè in base ad un'osservazione limitata) simili: la differenza degli interventi corrisponde alla differenza dell'interpretazione di tali comportamenti. Questo naturalmente comporta l'importanza della fase diagnostica, ed in particolare l'importanza per l'insegnante di avere a disposizione strumenti di osservazione, operativi ma anche teorici, quale può essere il costrutto stesso di sistema di convinzioni.

3. Problemi aperti, direzioni future

Come ogni ricerca anche quella presentata lascia aperti dei problemi, e ne individua di nuovi, suggerendo quindi anche nuove direzioni di ricerca. Fra i problemi aperti quello del cambiamento dei sistemi di convinzioni, appena accennato in questa tesi (quasi esclusivamente nel resoconto integrale dei case studies riportato in appendice).
Fra le direzioni di ricerca suggerite:

(1) L'approfondimento e l'affinamento del modello di categorizzazione proposto, e lo studio delle sue potenzialità, ad esempio come guida al processo di osservazione.
(2) La generalizzazione della struttura del questionario IQB ad altre convinzioni, in particolare quelle più utilizzate nell'osservazione tradizionale, e l'analisi dei sistemi di convinzioni associati che potranno risultare dalle risposte.

(3) Più in generale la costruzione e sperimentazione di strumenti di osservazione in grado di rilevare i sistemi di convinzioni.
(4) L'approfondimento del legame fra emozioni e sistemi di convinzioni.
(5) Lo studio evolutivo dei sistemi di convinzioni, in particolare delle loro possibili origini.
(6) Soprattutto: l'identificazione di eventuali sistemi di convinzioni associati a insuccesso / successo in matematica, e la conseguente costruzione di *profili* di convinzioni significativamente diversi.

Bibliografia

[1] Aczel A. (1998): *L'enigma di Fermat: soluzione di un giallo matematico durato più di tre secoli*, Il Saggiatore.

[2] Adams V., McLeod D. (Eds.) (1989): *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[3] Aiken L. (1961): 'The effect of attitudes on performance in mathematics', *Journal of Educational Psychology*, vol.52, n.1.

[4] Aiken L. (1970): 'Attitudes toward mathematics', *Review of Educational Research*, n.40.

[5] Arcuri L. e Flores D'Arcais B. (1974): *La misura degli atteggiamenti*, Giunti-Barbera.

[6] Balacheff N. (1990): 'Towards a problématique for research on mathematics teaching', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.21, n.4.

[7] Bandura A. (1986): *Social foundation of thought and action: a social cognitive theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[8] Bassarear T. (1989): 'The interactive nature of cognition and affect in the learning of mathematics: two case studies', in Maher C., Goldin G., Davis R. (Eds.) *Proceedings of the* 11^{th} *PME-NA*, New-Brunswick.

[9] Bernardi C. (1987): 'La logica nella didattica: le definizioni', *Nuova Secondaria*, vol.5, n.1.

[10] Bombieri E. (2001): 'La matematica nella società di oggi', *Bollettino U.M.I.*, vol.IV-A, Aprile.

[11] Borasi R. (1996): *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*, Ablex Publishing Corporation.

[12] Brosseau G. (1980): 'L'échec et le contract', *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.2, n.1.

[13] Brown, L. (1992): 'The influence of teachers on children's image of mathematics', *For the learning of mathematics* v.12, n.2.

[14] Brown S. e Cooney T. (1991): 'Stalking the dualism between theory and practice', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.4.

[15] Bruner J. (1991): 'La costruzione narrativa della realtà', in Ammaniti M. e Stern D. (Eds.) *Rappresentazioni e narrazioni*, Laterza, Roma.

[16] Burton L. (2002): '*Confidence is everything:* perspectives of teachers and students on the learning of mathematics', Lecture given to ICMI, Maggio 2002 Singapore.

[17] Campione J., Brown A., Connel M. (1988): 'Metacognition: on the importance of understanding what you are doing', in Charles R., Silver E. (Eds.) *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, Lawrence Erlbaum Associates.

[18] Chapman O. (1997): 'Methapors in the teaching of mathematical problem solving', *Educational Studies in Mathematics*, vol.32.

[19] Charalambos C., Philippou G. (2002): 'The relation between teachers'beliefs about mathematics and about its pedagogy', in Di Martino P. (Ed.) *Proceedings of the MAVI-XI*, Pisa.

[20] Cifarelli V., Goodson T. (2002): 'The role of mathematical beliefs in the problem solving actions of college algebra students', in van den Heuvel M. (Ed.) *Proceedings of the* 25^{th} *PME*, vol.2, Utrecht.

[21] Cobb P. (1985): 'Two children's anticipations, beliefs, and motivations', *Educational Studies in Mathematics*, n.16.

[22] Cobb P. (1986): 'Contexts, goals, beliefs and learning mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol.6, n.2.

[23] Cobb P., Yackel E. e Wood T. (1989): 'Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving', in Adams V., McLeod D. (Eds.) (1989): *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[24] Cohen L., Manion L. (1994): *Research Methods in Education*, London:Routledge.

[25] Cooney T. (1993): 'On the notion of autorithy applied to teacher education', in Becker J., Pence B. (Eds.) *Proceedings of the* 15^{th} *PME-NA*, vol.1, Pacific Grove.

[26] Cooney T., Shealy B., Arvold B. (1998): 'Conceptualizing beliefs structures of preservice secondary mathematics teachers', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.29, n.3.

[27] Copi I., Cohen C. (1994): *Introduction to logic*, New-York: The MacMillan Company. (Trad.it.: *Introduzione alla logica*, Il Mulino, 1997.)

[28] Corcoran M., Gibb E. (1961) 'Appraising attitudes in the learning of mathematics', *Evaluation in Mathematics.* 26^{th} *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.*

[29] Di Martino P., Zan R. (2001a) 'Attitude toward mathematics: some theoretical issues', in van den Heuvel M. (Ed.) *Proceedings of the* 25^{th} *PME*, vol.3, Utrecht.

[30] Di Martino P., Zan R. (2001b) 'The problematic relationship between beliefs and attitudes', in Soro R. (Ed.) *Proceedings of the Mavi X*, Kristianstad.

[31] Di Martino P., Zan R. (2002) 'An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics', in Di Martino P. (Ed.) *Proceedings of the Mavi XI*, Pisa.

[32] Di Martino P., Zan R. (2003) 'What does 'positive' attitude really mean?', in Pateman N., Dougherty B. e Zilliox J. (Eds.) *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, vol.4, Honolulu.

[33] Duncker K. (1935): *Psychologie des produktiven denkens*, Springer. (Trad.it.: *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, 1969.)

[34] Dweck C. (1983): 'Children's theories of intelligence: consequences for learning', in Paris S., Olson G. e Stevenson H. (Eds.) *Learning and motivation in classroom*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale: New-Jersey.

[35] Ernest P. (1988): 'The attitudes and practices of student teachers of primary school mathematics', in Borbás (Ed.) *Proceedings of the* 12^{th} *PME*, Veszprém.

[36] Ernest P. (1991): *The philosophy of mathematics education*, Falmer-Press.

[37] Fennema E., Behr M. (1980): 'Individual differences and the learning of mathematics', in Shumway R. (Ed.) *Research in mathematics education*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[38] Fennema E., Peterson P., Carpenter T., Lubinsky C. (1990): 'Teachers' attributions and beliefs about girls, boys and mathematics', *Educational Studies in Mathematics*, n.21.

[39] Ferrari M. (1988): 'Uno strumento per definire e dimostrare: il principio di induzione matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.11, n.12.

[40] Ferrari P. (1995): 'Constructivism, education and the philosophy of mathematics', in IREM de Montpellier (Ed.) *Proceedings of the First European summer university in history and epistemology in mathematics education*, Montpellier.

[41] Ferrari P. (2001): 'Linguaggio quotidiano e linguaggio matematico', relazione presentata ad un seminario tenuto a Pisa, marzo 2001.

[42] Ferrari P. (2004): *Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi*, Report del seminario nazionale della didattica della matematica, Pisa 5-7 febbraio 2004.

[43] Fischbein E. (1989): 'Tacit models and mathematical reasoning', *For the Learning of Mathematics*, vol.9, n.3.

[44] Fontana M. (1996): *Percorsi calcolati. Le nuove avventure della matematica*, Casa Editrice Le Mani, Recco.

[45] Forster P. (2000): 'Katie thought she couldn't do it but now she knows she can', *Educational Studies in Mathematics*, vol.43.

[46] Furinghetti F. (1993): 'Images of mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations', *For the Learning of Mathematics*, vol.13, n.2.

[47] Furinghetti F. (2002): *Matematica come processo socioculturale. Fantasmi in classe e fuori: convinzioni, credenze, concezioni, miti*, IPRASE-Trentino.

[48] Furinghetti F., Pehkonen E. (2002): 'Rethinking characterizations of beliefs', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[49] Gardner H. (1993): *Educare al comprendere*, Feltrinelli.

[50] Germann P. (1988): 'Development of the attitude toward science in school assessment and its use to investigate the relationship between science achievement and attitude toward science in school', *Journal of Research in Science Teaching*, vol.25, n.8.

[51] Goldin G. (2000): 'Affective pathways and representation in mathematical problem solving', *Mathematical Thinking and Learning*, n.2.

[52] Goldin G. (2002): 'Affect, meta-affect, and mathematical belief structures', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[53] Glaser B. e Strauss A (1967): *The discovery of grounded theory*, Chicago: Aldine.

[54] Graó (Ed.) (1997): *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.13.

[55] Green T. (1971): *The activities of teaching*, McGraw-Hill Book Company.

[56] Grigutsch S., Törner G. (1998): 'World views of mathematics held by university teachers of mathematics science', *Schriftenreihe des Fachbereichs Matematik*, Preprint 420. Duisburg : Gerhard Mercator University.

[57] Haladyna T., Shaughnessy J., Shaughnessy M. (1983): 'A causal analysis of attitude toward mathematics', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.14, n.1.

[58] Hannula M. (2002): 'Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values', *Educational Studies in Mathematics*, n.49.

[59] Hart L. (1989): 'Describing the affective domain: saying what we mean', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[60] Healy L. e Hoyles C. (2000): 'A study of proof conceptions in algebra', *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31, No. 4.

[61] Hembree R. (1991): 'The nature, effects, and relief of mathematics anxiety', *Journal for Research in Mathematics Education*, n.21.

[62] Hofer B. (1999): 'Instructional context in the college mathematics classroom: epistemological beliefs and student motivation', *J. Staff, Program and Organization Development*, vol.16, n.2.

[63] Hunsley J. (1987): 'Cognitive processes in mathematics anxiety and test anxiety: the role of appraisals, internal dialogue, and attributions', *Journal of Educational Psychology*, vol. 79, n.4.

[64] Kloosterman P. (1996): 'Students' beliefs about knowing and learning mathematics: implications for motivation', in Carr M. (Ed.), *Motivation in Mathematics*, Hampton Press.

[65] Kloosterman P. (2002): 'Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[66] Krainer K., Goffree F. e Berger P. (Eds.) (1999): *On research in mathematics teacher educations*, Onsnabrük: Forschunginstitut für Mathematik Didaktik. Internet version: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

[67] Kulm G. (1980): 'Research on mathematics attitude', in Shumway R. (Ed.) *Research in Mathematics Education*, Reston.

[68] Leder G. (1982): 'Mathematics achievement and fear of success', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.13, n.2.

[69] Leder G. (1985): 'Measurement of attitude to mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol.5, n.3.

[70] Leder G., Forgasz H. (2002): 'Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: a new approach', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[71] Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002): *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[72] Lerman S. (2002): 'Situating research on mathematics teacher'beliefs and on change', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[73] Leron U., Hazzan O. (1997): 'The world according to Johnny: a coping perspective in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics*, n.32.

[74] Lester F. (1987): 'Why is problem solving such a problem?', in Bergeron J., Herscovics N., Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the* 11^{th} *PME*, Montreal.

[75] Lester F. (2002): 'Implications of research on students'beliefs for classroom practice', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[76] Lewis H. (1990) *A questiona of values* San Francisco: Harper e Row.

[77] Lieblich A., Tuval-Mashiach R. e Zilber T. (1998): *Narrative research. Reading, analysis, and interpretation*, SAGE Publications.

[78] Llinares S., García M., Sánchez V., Escudero I. (2000): 'Changes in preservice primary school teachers'beliefs about teaching and learning mathematics', In Götz S., Törner G. (Eds.) *Proceedings of the MAVI-IX*, Vienna.

[79] Llinares S. (2002): 'Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[80] Lorenz J. (1982): 'Research since 1976 on affective student characteristics', *For the Learning of Mathematics*, vol.3, n.1.

[81] Lucock R. (1987): 'Children's attitude to mathematics: a personal construct approach', in Bergeron J., Herscovics N., Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the* 11^{th} *PME*, Montreal.

[82] Ma X., Kishor N. (1997): 'Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.28, n.1.

[83] Malmivuori M. (2001): *The dynamics of affect, cognition, and social enviroment in the regulation of personal learning processes: the case of mathematics*, University of Helsinki, Research Report 172.

[84] Mandler G. (1984): *Mind and body: psichology of emotion and stress*, New-York: Norton.

[85] Mandler G. (1989): 'Affect and learning: causes and consequences of emotional interactions', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[86] Mandler G. (1989a): 'Affect and learning: reflections and prospects', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[87] Mason J., Burton L., Stacey K. (1982): *Thinking mathematically*, Addison-Wesley, London.

[88] McDonald B. (1989): 'Psychological conceptions of mathematics and emotion', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[89] McLeod D. (1985): 'Affective issues in research on teaching mathematical problem solving', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[90] McLeod D. (1987): ' Beliefs, attitudes and emotions: affective factors in mathematics learning', in Bergeron J., Herscovics N., Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the* 11^{th} *PME*, Montreal.

[91] McLeod D., Metzger W., Craviotto C. (1989): 'Comparing experts' and novices' affective reactions to mathematical problem solving: an explanatory study', in Vergnaud G. (Ed.) *Proceedings of the* 13^{th} *PME*, vol.2, Paris.

[92] McLeod D. (1989a): 'The role of affect in mathematical problem solving', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[93] McLeod D. (1989b): 'Beliefs, attitudes, and emotions: new views of affect in mathematics education', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

[94] McLeod D., Craviotto C., Ortega M. (1990): 'Students' affective responses to non-routine mathematical problems: an empirical study', in Booker G., Cobb P. e de Mendicuti T. (Eds.) *Proceedings of the* 14^{th} *PME*, Oaxtepex.

[95] McLeod D. (1992): 'Research on affect in mathematics education: a reconceptualization', in Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics learning and teaching*, New-York: MacMillan.

[96] McLeod D., McLeod S. (2002): 'Beliefs and mathematics education', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[97] Morris J. (1981): 'Math anxiety: teaching to avoid it', *Mathematics Teacher*, September.

[98] Munby H. (1983): 'Thirty studies involving the "scientific attitude inventory": what confidence can we have in this instruments?', *Journal of Research in Science Teaching*, vol.20, n.2.

[99] Munby H. (1984): 'A qualitative approach to the study of a teacher's beliefs', *Journal of Research in Science Teaching*, vol.21, n.1.

[100] Mura R. (1993): 'Images of mathematics held by university teachers of mathematical sciences', *Educational Studies in Mathematics*, vol.25.

[101] Mura R. (1995): 'Images of mathematics held by university teachers of mathematics education', *Educational Studies in Mathematics*, vol.28.

[102] Neale D. (1969): 'The role of attitudes in learning mathematics', *The Arithmetic Teacher*, Dicembre 1969.

[103] Nespor J. (1987): 'The role of beliefs in the practice of teaching', *Journal of Curriculum Studies*, vol.19, n.4.

[104] Nicholls J., Cobb P., Wood T., Yackel E. e Patashnick M. (1990): 'Assessing students'theories of success in mathematics: individual and classroom differences', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.21, n.2.

[105] Nimier J. (1993): 'Defence mechanisms against mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol.13, n.1.

[106] Op'T Eynde P., De Corte E., Verschaffel L. (2002): 'Framing students'mathematics-related beliefs', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[107] Pajares F. (1992): 'Teachers'beliefs and educational research: cleaning up a messy construct', *Review of Educational Research*, vol.62(3).

[108] Pajares F. e Miller D. (1994): 'Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: a path analysis', *Journal of Educational Psychology*, vol.86, n.2.

[109] Pajares F. (1996): 'Self-efficacy beliefs in academic settings', *Review of Educational Research*, vol.66, n.4.

[110] Pehkonen E. (1991): 'Problem solving in mathematics', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.1.

[111] Pehkonen E. (1995): 'Using open-ended problems in mathematics', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.2.

[112] Pehkonen E. (1995a): *Pupils' view of mathematics: initial report for an international comparison project*, University of Helsinky, Research Report 152.

[113] Pehkonen E., Toërner G. (1996): 'Introduction to the theme: mathematical beliefs', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.4.

[114] Pellerey M. e Orio F. (1996): 'La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica', ISRE, n.2.

[115] Philippou G., Christou C. (1998): 'The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes toward mathematics', *Educational Studies in Mathematics*, vol.35.

[116] Philippou G., Christou C. (2002): 'A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teacher', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[117] Polya G. (1962): *Matemathical discovery*, New-York: John Wiley and Sons.

[118] Ponte J., Matos J., Guimarães H., Leal L. e Canavarro A. (1994): 'Teachers' and students'views and attitudes towards a new mathematics curriculum: a case study', *Educational Studies in Mathematics*, n.26.

[119] Ruffel M., Mason J., Allen B. (1998): 'Studying attitude to mathematics' *Educational Studies in Mathematics*, n.35.

[120] Schlöglmann (2002): 'Affect and mathematics learning', in Cockburn A. e Nardi E. (Eds) *Proceedings of* 26^{th} *PME*, vol.4, Norwich.

[121] Schoenfeld A. (1983): 'Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance' *Cognitive Science*, n.7.

[122] Schoenfeld A. (1983a): *Theoretical and pragmatic issues in the design of mathematical problem solving*, report at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal.

[123] Schoenfeld A. (1985a): *Mathematical problem solving.* New-York: Academic Press.

[124] Schoenfeld A. (1985): 'Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[125] Schoenfeld A. (1989a): 'Problem solving in context(s)', in Charles R. e Silver E. (Eds.) *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

[126] Schoenfeld A. (1989): 'Explorations of students'mathematical beliefs and behaviour', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.20, n.4.

[127] Schoenfeld A. (1992): 'Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics', in Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics learning and teaching*, New-York: MacMillan.

[128] Schoenfeld A. (1994): 'A discourse on methods', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.25, n.6.

[129] Schoenfeld A. (2002): 'Research methods in (mathematics) education', in English L. (Ed.) *Handbook of International Research in Matheatics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[130] Skemp R. (1976): 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching*, vol.77.

[131] Skemp R. (1979): *Intelligence, learning and action*, New York: Wiley.

[132] Shaughnessy J. (1985): 'Problem-solving derailers: the influence of misconceptions on problem-solving performance', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[133] Silver E. (1982): 'Thinking about problem solving: toward an understanding of metacognitive aspects of mathematical problem solving', Paper presented at the Conference on thinking, Suva: Fiji.

[134] Silver E. (Ed.) (1985): *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[135] Silver E. (1985): 'Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[136] Stake R. (1995): *The art of case study research*, Sage Publications.

[137] Stake R. (1998): 'Case studies', in Denzin N. e Lincoln Y. (Eds.) *Strategies of qualitative inquiry*, Sage Publications.

[138] Tall D. e Vinner S. (1981): 'Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, n.12.

[139] Thompson A. (1985): 'Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[140] Thompson A. (1992): 'Theacers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research', in Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics learning and teaching*, New-York: MacMillan.

[141] Törner G. (2002): 'Mathematical beliefs - a search for a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations', in Leder G., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.

[142] Underhill R. (1988): 'Mathematics learners' beliefs: a review', *Focus on Learning Problems in Mathematics*, n.10.

[143] Varani A. (2000): 'Emozioni, apprendimento e ipermedialità', *Psicologia e Scuola*, n.98.

[144] Vinner S. (2000): 'Procedures, rituals and man's search for meaning', *Lecture given at ICME 9*, Japan.

[145] Vinner S. (2000a): 'What do we remember when it's over? Adults' recollections of their mathematical experience', Nakahara, Tadao, Koyama e Matsataka (Eds.) *Proceedings of the* 24^{th} *PME*, vol.2, Hiroshima.

[146] Vygotskij L.(1954): *Pensiero e linguaggio*, Edizioni Giunti-Barbera.

[147] von Glasersfeld E. (1983): 'Learning as a constructive activity', *Proceedings of the* 5^{th} *PME*, vol.1, Montreal.

[148] von Glasersfeld E. (Ed.) (1991): *Radical constructivism in mathematics*, Kluwer Academic Publishers.

[149] Wells D. (1997): *Personaggi e paradossi della matematica*, Oscar Saggi Mondadori.

[150] Watzlawick P., Beavin J. e Jackson D. (1971): *Pragmatica della comunicazione umana*, Casa Editrice Astrolabio.

[151] Weiner B. (1982): 'An attributional theory of motivation and emotion', in Krohne H. e Laux L. (Eds.), *Achievement, stress and anxiety*, Washington D.C.

[152] Weiner B. (1983): 'Some thoughts about feelings', in Paris, Olson, Stevenson (Eds.) *Learning and motivation in the classroom*, Lawrence Erlbaum Associates.

[153] Williams S. e Ivey K. (2001): 'Affective assessment and mathematics classroom engagement: a case study', *Educational Studies in Mathematics*, vol.47.

[154] Yackel E., Cobb P. e Wood T. (1991): 'Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.22.

[155] Yackel E., Cobb P. (1996): 'Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics', *Journal for Reserach in Mathematics Education*, vol.27, n.4.

[156] Yusof M., Tall D. (1999): 'Changing attitudes to university mathematics through problem solving', *Educational Studies in Mathematics*, n.37.

[157] Zan R. (1996): 'Un intervento metacognitivo di 'recupero' a livello universitario', *La matematica e la sua didattica*, n.1.

[158] Zan R. (1999): Contributo alla tavola rotonda su 'La qualità della ricerca'. *Atti della scuola estiva italo-portoghese-spagnola di didattica della matematica*, Santarem 6-10 luglio 1999.

[159] Zan R. (2000a): 'Le convinzioni', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.23A, n.1.

[160] Zan R. (2000b): 'Emozioni e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.23A, n.3 e 4.

[161] Zan R. (2000c): 'Atteggiamenti e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.23A, n.5.

[162] Zan R. (2002): *Verso una teoria per le difficoltà in matematica: contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*, Report del seminario nazionale della didattica della matematica, Pisa 31 gennaio - 2 febbraio 2002.

APPENDICE A

Simone

Primo incontro sulle successioni, subito dopo che questo argomento è stato affrontato a lezione. Simone ha seguito le lezioni:

I: Quale argomento avete trattato questa settimana?
S: *...mmh, non ricordo bene, a con n, mi sembra...*
I: E che cosa è a con n?
S: *Sinceramente non ricordo bene, non ho ancora rimesso a posto gli appunti.*
I: Ma pensi di avere appunti che ti permettano di ricostruire cosa avete fatto?
S: *Sì...*
I: Allora riguardando gli appunti vediamo se riusciamo a ricostruire cosa avete fatto a lezione.
S: *...mmh, le successioni...a per n, quando è crescente all'infinito.*

La difficoltà evidente di Simone di dirmi, anche con l'ausilio degli appunti, l'argomento trattato a lezione, sembra non essere dovuta solo a difficoltà comunicativa, ma anche agli stessi appunti. Come avrò modo di verificare anche in seguito, anche nello scrivere e organizzare appunti Simone ha molti problemi, denunciando un tentativo quasi da *stenografo*, in cui per scrivere il più possibile di quello che viene detto o scritto a lezione sembra perdere completamente il senso delle cose scritte. Per esempio in quella prima occasione ho modo di vedere espressioni del tipo:

$$\lim n \to \infty \; a \cdot n = l$$

Da qui probabilmente Simone ha letto quel a per n, venuto fuori nello stralcio di dialogo precedente.
Visto la confusione e la mancanza di padronanza dell'argomento: Simone sembra non sapere di cosa si stia parlando, in questo primo incontro ho tentato insieme a lui una risistemazione degli appunti, riscrivendo le principali definizioni e proprietà delle successioni fino

alla definizione di limite. Il compito per il secondo incontro era di studiare le successioni sul libro e sugli appunti riscritti e segnarsi le cose poco chiare per poi chiedermele.

La settimana successiva durante il secondo incontro Simone dice di aver riletto le cose ma di non aver niente da chiedere in particolare. Gli chiedo:

I: Allora è tutto chiaro?
S: *...beh, insomma, non sono sicuro...*
I: Di cosa non sei sicuro?
S: *Di avere tutto chiaro.*

Nonostante questa *presa di coscienza* che forse non è tutto così chiaro, sembra più un cautelarsi sulla possibilità che io gli domandi qualche cosa che un vero e proprio giudizio sul suo livello di comprensione. Insomma più che di consapevolezza (che sarebbe stata un grosso passo avanti) sembra che Simone stia attivando quei meccanismi di difesa dalla matematica che Nimier descrive e cataloga nel suo articolo.
Innanzitutto chiedo a Simone la definizione di limite di una successione reale. La sua risposta è un tentativo, dal punto di vista matematico privo di senso (come probabilmente lo è la definizione di limite dal suo punto di vista), di rimettere insieme tutti i quantificatori e le lettere usate nella definizione data in classe. Gli do allora la possibilità di leggere sul libro o sul quaderno degli appunti, e la sua risposta mi colpisce molto:
S: *Ah...ecco, questa lettera qui* [indicando δ]*, non mi ricordavo come si diceva...*
Simone fissa la sua attenzione su un particolare del tutto trascurabile (almeno dal mio punto di vista) e crede di aver sbagliato perché non gli è venuto in mente il nome della lettera delta. Da questo ne segue che Simone possa avere delle buone ragioni per credere che in matematica ci voglia molta memoria, se sono importanti anche i nomi delle lettere usate!
Ma dalla sua risposta mi viene anche il dubbio che la sua attenzione si sia fissata su un particolare che in qualche modo *controlla*, il nome di una lettera. Probabilmente ho sbagliato a non fargli scrivere la sua prima risposta in modo che potesse confrontare visivamente le differenze con la definizione trovata sul libro e poi discutere punto per punto cosa significavano le varie differenze. Cioè il raffronto visuale avrebbe forse

permesso a Simone maggiore controllo e consapevolezza delle differenze tra la sua definizione e quella trovata sul libro.
A questo punto chiedo a Simone, leggendo la definizione trovata sul libro, se pensa di aver capito cosa significano quei simboli matematici messi in quel determinato ordine.

S: *limite vuol dire che non può mai essere superato.*
I: Superato da cosa?
S: *Cioè...che qualsiasi numero metto qui* [indica l'espressione a_n]*...non supero mai il limite.*

Chiedo a Simone di ritrovare sugli appunti le proprietà del limite viste a lezione. Simone le trova con una certa difficoltà (denotando come abbia problemi nel gestire i suoi stessi appunti[1] e le scriviamo su un unico foglio. In particolare c'è l'aritmetica dei limiti e l'unicità del limite:

I: Cosa significa questo teorema? (Indicando il teorema di unicità del limite)
S: *Che ogni successione ha un unico limite.*
I: In realtà ti dice che se la successione ha limite allora questo limite è unico, penso che a lezione abbiate visto qualche esempio di successione che non ha limite.
S: *Non mi ricordo...*
I: Guarda sul quaderno di appunti.
Simone non sa cosa deve cercare ma poi trova una successione $a_n = (-1)^n$ su cui ha scritto che non ha limite, non mi soffermo in questo momento a chiedergli perché tale successione non abbia limite, e da solo afferma:
S: *Ah sì, questa che cambia segno...*
I: Che valori assume questa successione?
S: 1 *e* -1*, una volta l'uno, una volta l'altro.*
I: Quindi $(-1)^n$ per quanto dici te, ha come limite, per esempio 2. Infatti non lo supera mai vero?
Simone è perplesso, lo incalzo:
I: A maggior ragione anche 3 è limite della successione, se non supera 2, non supererà mai nemmeno 3, vero?

[1]Osservo che essendo all'inizio dell'anno le cose scritte erano veramente poche.

S: *Sì, cioè è vero che non supera mai* 2 *e anche* 3 *però...* [breve pausa]

A questo punto Simone forse non coglie la contraddizione con il teorema di unicità del limite comunque sia il mio tentativo di mettere in crisi la sua convinzione attraverso questa contraddizione fallisce. Simone infatti supera la contraddizione *raffinando* la propria definizione:

S: *il fatto è che per essere il limite deve succedere anche di avvicinarsi sempre più al limite.*
A questo punto passo a cercare un controesempio. Alla stessa pagina di quaderno vedo che c'è la successione $a_n = \frac{3n+1}{n}$ e chiedo:
I: Di questa successione avete calcolato il limite?
S: *Sì* (leggendo sul quaderno) *è* 3
I: Quindi vuol dire che la successione non supera mai 3?
S: *Sì...penso di sì...a meno che non abbia sbagliato a scrivere a lezione.*
E dopo aver fatto alcune prove:
S: *No, è sempre più grande di* 3*...*[2]
I: Quindi? Il limite non è 3?
Simone è perplesso, ma non sa cosa rispondere, non mette ancora in dubbio la sua convinzione sul significato di limite, pensa che sia sbagliato il calcolo del limite:
S: *Forse era sbagliato alla lavagna...o ho preso gli appunti male.*

Simone non solo sembra avere difficoltà a gestire la verifica di un limite con ϵ e δ ma, come mi accorgo proprio in questo incontro, ha grossi problemi anche a risolvere disequazioni: fa errori di conto, applica regole non tenendo conto della loro consistenza o meno (per esempio applica $a > b \rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ senza preoccuparsi del segno di c), ma soprattutto sembra non aver chiaro cosa significhi *risolvere* una disequazione. Il suo *scopo* sembra quello di applicare un algoritmo corretto senza preoccuparsi di quello che deve trovare.

[2]In questo caso arrivando ad una conclusione giusta, nonostante che fosse dettata da un ragionamento induttivo e non deduttivo. Generalizzando le prove fatte.

APPENDICE B

Luigia

La ricostruzione del primo incontro, visto la perplessità di Luigia a farsi audio-registrare, è dovuta agli appunti che ho preso (cosa che in ogni caso ho fatto in tutti gli incontri con i tre studenti, ovviamente in questo caso ho cercato di scrivere il più possibile). È per questo che per la descrizione di questo primo incontro userò ben poche virgolettature e quelle presenti sono ricostruzioni dalle mie note.
Come prima cosa le chiedo come è stato il primo impatto con la matematica all'Università, e lei, confermando quanto scritto nella risposta al questionario iniziale, sostiene che è in difficoltà perché non ha le basi e che è abbastanza sfiduciata sulle possibilità di farcela a passare l'esame. Tra l'altro sottolinea il fatto che la sua scelta universitaria è stata in dubbio fino alla fine proprio per la presenza di corsi di matematica obbligatori.
Per quanto riguarda le prime lezioni universitarie, Luigia non ha da chiedere praticamente nulla, sostiene che ha capito alcuni esercizi che hanno fatto in classe in cui la richiesta era di trovare i limiti di successioni, ma che non capisce la teoria, a cosa le serve, è convinta che anche per fare gli esercizi sia superfluo studiare la teoria.
Per prima cosa le chiedo di dividere le informazioni che ci sono nei suoi appunti in definizioni, teoremi ed esempi.
Luigia suddivide il foglio in tre colonne e scrive:
<u>Definizioni</u>: successione, successione limitata, successione monotona, limite di una successione, successione divergente, successione infinitesima.
<u>Teoremi</u>: unicità del limite, aritmetica dei limiti (forme indeterminate), convergenza delle successioni monotone e limitate, limitatezza delle successioni convergenti, teorema di permanenza del segno, teorema dei carabinieri.
<u>Esempi</u>: calcolo di alcuni limiti, limiti notevoli, $a_n = (-1)^n$ esempio di successione limitata senza limite.
A questo punto scelgo un esempio di calcolo di limite fatto in classe:

Calcola se esiste il limite della seguente successione:

$$a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$$

L (rileggendo quanto scritto sui propri appunti): *Facendo delle prove si trova:*

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 13/4$$
$$a_3 = 28/9$$
$$a_4 = 193/64$$

che se fai conti con la calcolatrice ti accorgi che è sempre più vicino a 3*, quindi abbiamo cercato di dimostrare che* 3 *è il limite, cercando l'enne grande:*

$$|3 + \frac{1}{n^2} - 3| < \epsilon \rightarrow |\frac{1}{n^2}| < \epsilon$$

Qui abbiamo detto che n^2 *è sempre positivo quindi si può togliere il valore assoluto e si ottiene:*

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon \rightarrow n^2 > \frac{1}{\epsilon}$$

Siccome ϵ *lo dobbiamo scegliere positivo si può fare la radice quadrata e quindi:*

$$n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$$

Se per esempio ϵ *lo scegliamo uguale a* $0,1$*, allora viene radice di* 10 *che è tre e qualcosa e quindi enne grande è* 4*.*

Le chiedo se è sicura di aver dimostrato che il limite della successione è 3, Luigia piuttosto perplessa per la domanda dice *il limite è* 3*, ora non so se nei passaggi per dimostrarlo ho sbagliato qualche segno, ma comunque tornerebbe uguale, si fa così.*
Allora le chiedo cosa le dá questa sicurezza e lei risponde che è dovuta al fatto che abbiamo trovato enne grande.
Dico a Luigia di supporre di aver sbagliato a farsi un'idea del limite e di mostrare perché 4 non è limite della successione.
Luigia ricordandosi cosa mi ha risposto alla domanda precedente, sostiene che non si può trovare N, e allora le chiedo di provare, come ha fatto per 3.
Questo è quello che scrive:

$$|3 + \frac{1}{n^2} - 4| < \epsilon \rightarrow |\frac{1 - n^2}{n^2}| < \epsilon$$

A questo punto suggerisco a Luigia di studiare il segno dell'espressione fratta e Luigia trova giustamente che per ogni $n \geq 1$, l'espressione fratta è minore o uguale a zero e quindi la disuguaglianza trovata è equivalente a:

$$n^2 - 1 < \epsilon n^2$$

Anche qui devo suggerire a Luigia di raccogliere i termini con n:

$$n^2(1-\epsilon) < 1$$

Ma qui si prospetta un primo problema imprevisto, la risoluzione di questa disuguaglianza in n dipende da ϵ e Luigia sostiene che, in questo modo, ha dimostrato che 4 non è limite, perché prima (quando aveva riscritto come era stato dimostrato che 3 fosse il limite) *veniva* per ogni ϵ, come dice la definizione.
Faccio notare che comunque per ogni ϵ si trova un N grande.
L'obiezione di Luigia è che se troviamo due N grandi diversi *non vale*[1].
Convinta (non so quanto *cognitivamente* e non *autoritariamente*) di non aver ancora trovato una prova del fatto che 4 non è il limite della successione Luigia considera i due casi $\epsilon \geq 1$ e $\epsilon < 1$:

(1) $n^2 > \frac{1}{1-\epsilon} \rightarrow n > \pm\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$
Chiedo a Luigia cosa ha fatto.
Luigia motiva in qualche modo i suoi passaggi ma non si rende conto dell'errore nella risoluzione dell'ultima disequazione di secondo grado. Allora le chiedo cosa può dire su n se sa che n^2 è maggiore di 4. Istintivamente, ricalcando l'errore precedente, dice $n > \pm 2$, poi si accorge dell'errore e torna sui suoi passi anche nel caso precedente e scrive:

$$n < -\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad , \quad n > \sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Le faccio notare che sta trattando il caso $\epsilon \geq 1$ e quindi non può fare la radice quadrata di $\frac{1}{1-\epsilon}$ che è un numero minore di zero.
E anche qui, come prima, Luigia è convinta di aver dimostrato che 4 non è il limite.
Le faccio osservare che non è detto che se lei non riesce a risolverla significhi che la disequazione non ha soluzione. E le chiedo di studiare per quali n è vero che $-7n^2 < 1$.

[1] È interessante notare come nel caso precedente Luigia abbia espressamente parlato di scelta di ϵ per trovare N. La diversità sta nel fatto che in questo caso la scelta di ϵ è importante anche in fase di risoluzione della disequazione.

E lei sicura sostiene che è vera per ogni n perché $-7n^2$ è negativo, a questo punto le chiedo se vede analogie con la disequazione che sta trattando, nel caso che sta trattando (ovvero $\epsilon \geq 1$).
Luigia ci pensa un po' e alla fine afferma che è vera per ogni n perché n^2 è positivo, mentre $1-\epsilon$ è negativo e quindi il loro prodotto (*più per meno fa meno*) è negativo e minore di uno sempre.
A margine della risoluzione di questo caso le chiedo cosa significa quello che ha trovato in termini di proprietà della successione $a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$.[2]
Luigia è molto perplessa e allora cerco di farle ricordare come siamo partiti, che cosa ci siamo chiesti.

I: Cercavamo da quale n in poi la successione *distava* da 4 per meno di ϵ.
L: *E allora?*
I: Ricordati in quale caso siamo...$\epsilon \geq 1$, cioè ci stiamo chiedendo se esiste un N tale che da lí in poi la successione *dista* da 4, meno di 1, e abbiamo trovato che per ogni n la successione $a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$ dista da 4 meno di 1...
L: (dopo aver rifatto alcune prove numeriche) *Ma certo torna questa successione è al massimo* 4 *ed è sempre un po' più grande di* 3*...ho capito!*

(2) A questo punto passiamo al caso $\epsilon < 1$ che spiego essere in realtà *più interessante* per il calcolo del limite. Luigia fa i suoi conti:

$$n^2 < \frac{1}{1-\epsilon}$$

L: *Questa volta posso fare la radice, ma la devo fare a modo, è minore quindi per valori interni*

$$-\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}} < n < \sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

[2]È un tentativo di dare un significato, e quindi anche una possibilità di controllo semantico oltre che numerico, sui conti fatti. La disequazione in questione, a differenza di tanti esercizi, ha la *brillante proprietà* di provenire dallo studio di una successione e quindi di rifletterne alcune proprietà. Come detto spesso si dimentica l'origine della disequazione (nella classica dicotomia di Skemp instrumental-relational) e si applicano algoritmi noti per la risoluzione della stessa senza nessun controllo sul risultato finale.

I: Allora perché sei sicura che 4 non è il limite di a_n?
Luigia sorridendo sostiene che 4 non è il limite perché sa che è 3, ma non riesce a capire come fa a dirlo da questa disuguaglianza. Allora le chiedo come ha fatto a dire che 3 è il limite dai conti precedenti.
L: *Perché trovavo N, ma anche qui lo trovo...*
I: Mi dici da quale N in poi la successione è tale che $|a_n - 4| < \epsilon$.
L: C'è scritto qui tra $-\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$ e $\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$.
I: Non è una proprietà *definitiva* della successione, se superi $\sqrt{\frac{1}{1-\epsilon}}$ la disuguaglianza non è più vera, quindi non esiste un N per cui da quel punto in poi la successione è *dista* da 4 per meno di un qualunque ϵ.
Luigia sostiene di aver capito.

L'incontro sta per finire, ma voglio sfruttare la fatica fatta da Luigia per arrivare a dire che 4 non è il limite della successione, per farle capire l'utilità di poter usare dei risultati già dimostrati:

I: Consideriamo la nostra successione

$$a_n = 3 + \frac{1}{n^2}$$

e suddividiamola nella somma di queste due successioni b_n è la successione costantemente uguale a 3 e $c_n = \frac{1}{n^2}$, puoi usare qualche teorema per calcolarti il limite di a_n attraverso i limiti di b_n e c_n?
L: *Sì, il teorema del limite della somma di successioni.*
I: E il limite di b_n e c_n lo puoi vedere sulla colonna degli esempi.
L: *Sì le successioni costanti hanno come limite la costante*[3] *e c_n ha limite 0, quindi a_n ha limite $3 + 0 = 3$.*
I: Bene, vedi questo teorema, e l'aver già mostrato che il limite di c_n è 0 ti avrebbe evitato di fare nuovamente tutti i conti per mostrare che il limite è tre. A questo punto sai[4] che 3 è il limite di a_n, il teorema di unicità del limite ti dice che 4 non può essere il limite di a_n.
Luigia non ha perplessità di merito su questo procedimento, ma di metodo: *Sì ho capito, così sarebbe utile...ma vale fare così?*
La cosa interessante è che Luigia, in qualche modo da sola, aveva nel corso dell'incontro fatto un accenno al teorema di unicità del limite, forse senza accorgersene, quando ha sostenuto che 4 non è il limite

[3]Questa cosa non è facile da accettare in quanto *viola* l'immagine di *avvicinamento* al limite che è molto diffusa. In questo caso non ho indagato sulle convinzioni di Luigia in quanto eravamo già alla fine del nostro incontro.

[4]Enfatizzato a voce.

perché sa che è 3.

Nel secondo incontro parliamo di limiti di funzioni reali. La novità è che Luigia acconsente alla audio-registrazione dell'incontro. Mi dice subito che rispetto ai limiti di successione i limiti di funzione sono più difficili *perché ci sono più casi da ricordare*, ovvero le definizioni di limite L per x che tende a x_0, a $\pm\infty$, o di funzione divergente sempre per x che tende a x_0 o a $\pm\infty$.
Chiedo a Luigia data una funzione f definita in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ cosa significa che L è il limite per x che tende a $x_0 \in A$ e Luigia guardando sugli appunti:

L: *Si dice che il limite di f di x per x che tende a x_0 è L se* $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ *si ha* $|f(x) - L| < \epsilon$.
I: Che differenza c'è tra questa definizione di limite e quella per le successioni?
L: *Qui c'è questo δ in più.*
I: Sapresti in qualche modo tradurre a parole la definizione che hai dato in simboli?
L: *Penso di sì, la professoressa lo ha fatto in classe, vuol dire che affinché L sia il limite della funzione per x che tende a x_0, deve succedere che per ogni numero ϵ maggiore di zero esiste un intervallo intorno a x_0, tale che il valore della funzione meno L è in valore assoluto minore di ϵ.*
I: Allora quale è il ruolo di δ nella definizione di limite per x che tende a x_0?
L: *È un po' come l'enne grande per le successioni è quello che dobbiamo trovare per dimostrare che il limite è quello.*
I: Che ipotesi devi fare sul punto x_0, affinché abbia senso parlare di limite della funzione per x che tende a x_0?
L: *Cioè x_0 deve essere un numero...*
I: Se guardi bene negli appunti o sul libro probabilmente troverai qualche ipotesi su x_0...
L: *mmh...non lo trovo*
I: (Guardando sul libro) Qui, c'è scritto: 'Si definisce il limite di una funzione $f(x)$, per x che tende ad $x_0 \in \mathbb{R}$, nel caso in cui x_0 risulti un *punto di accumulazione* per il dominio di $f(x)$' e poi si spiega che significa punto di accumulazione.

Non insisto su questo discorso, anche perché non è facile, per chi non ha mai avuto a che fare con la topologia, sentir parlare di punto di accumulazione[5].
Luigia afferma: *Ma questo a cosa serve? Non lo abbiamo mai usato negli esercizi fatti a lezione.*

Chiedo a Luigia, visto che ha parlato di *tanti limiti* da ricordare, se si ricorda la definizione di limite per x che tende a più infinito e lei afferma che non se la ricorda precisamente: *non mi ricordo quali cose vanno dette prima e quali dopo*, ma è più facile di quella di limite per x che tende a x_0 perché le ricorda quella di limite di una successione.
Guardando sugli appunti Luigia scrive:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : \; \forall x > M \; |f(x) - L| < \epsilon$$

I: E cosa significa?
L: *Come per le successioni che da un certo punto in poi ci si avvicina sempre più al limite.*
I: Prendi questa funzione definita su tutti i numeri reali in questo modo:

$$f(x) \equiv 3$$

Cioè la funzione che associa ad ogni reale il numero tre, quale è il limite per x che tende a più infinito?
L: *Come faccio? Qui* [indicando il tre alla destra della definizione della funzione] *non c'è x.*
I: Vediamo: supponiamo che esista il limite di questa funzione, vuoi che per ogni ϵ, da un certo punto in poi valga:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

ma cosa puoi dire sul valore della f?
L: *...non lo so, cosa posso dire?*
I: Come è definita f?
Luigia riscrive $f(x) = 3$
I: Quindi?

[5]Prendendo la definizione da un libro di testo universitario:*In generale un numero reale x_0 si dice punto di accumulazione per un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se in ogni intorno di x_0, cioè in ogni insieme $\{x \in \mathbb{R} | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, con $\delta > 0$, cade almeno un punto di A distinto da x_0* si nota subito la difficoltà di *controllare* che un punto sia di accumulazione, visto che siamo di fronte ad un quantificatore universale. Inoltre sparisce ogni riferimento al contesto per cui era stata introdotta questa definizione, non c'è nessun accenno alla funzione, si parla giustamente di punto di accumulazione di un insieme, ma questo può disorientare.

L: *Quindi è uguale a tre.*
I: Sì e puoi mettere tre qui dentro:

$$|3 - L| < \epsilon$$

L: *E ora? Dobbiamo togliere il valore assoluto?*
I: No, dobbiamo pensare a cosa può essere L, affinché tre meno L sia minore di un qualsiasi ϵ a partire da un certo punto in poi.
L: *Non ci capisco niente, queste cose non l'ho mai viste al classico*[6].
I: Ti faccio osservare due cose. Primo: quello che è dentro il valore assoluto cambia a seconda di dove scegliamo la x?
L: *x non c'è dentro la parentesi.*
I: Bene, quindi comunque tu scelga x l'argomento del valore assoluto non cambia. Cioè se trovi un numero L tale che tre meno elle in valore assoluto sia minore di qualsiasi ϵ, questa relazione varrà per qualsiasi x. Il secondo punto è proprio questo, come sceglierestiLaffinché in valore assoluto tre meno L sia più piccolo possibile?
L: *Devo scegliere qualcosa di poco più grande o piccolo di tre.*
I: E perché tre no?
L: *Se scegliamo tre viene zero.*
I: E con zero siamo appunto sicuri che sia minore di qualsiasi numero ϵ maggiore di zero...
L: *Non sono sicura di aver capito...*
I: Proviamo a calcolare il limite della stessa funzione per x che tende a mille.
L: *Perché proprio a mille?*
I: Così è un numero come un altro.
L: *Non so se si può ma se scelgo L uguale a tre come prima mi viene zero e quindi minore di ϵ.*
I: Brava, è proprio questo, una funzione costante ha come limite per ogni suo punto il valore costante della funzione, proprio perché qui [indicando nel valore assoluto precedente] ti viene zero che è minore di qualsiasi ϵ.
L: *Forse ho capito.*
I: Sai perché ti ho fatto calcolare i limiti di questa funzione?
L: *Perché così ho una regola per calcolare il limite delle funzioni che sono tutte uguali.*[7]
I: In realtà perché non mi tornava una cosa che hai detto quando hai dato la definizione di limite a parole.

[6]Da notare come per le successioni sapesse che quelle costanti hanno limite e questo è uguale al valore della costante stessa.

[7]Qui si nota molto un approccio di tipo instrumental secondo la terminologia di Skemp.

L: *Cosa?*
I: Prova a ridirla...
L: *Non mi viene...*[8]
I: Proviamo a riascoltare cosa hai detto.

Riavvolgo il nastro fino al punto giusto le faccio riascoltare il pezzo in cui dice del limite e poi le dico di aspettare fino a che non sono tornato avanti con il nastro. Luigia è visibilmente confortata dall'aver sentito cosa ha detto, confermando la propria convinzione di aver detto bene e togliendosi la paura di aver sbagliato e quindi difendendo la sua posizione:

L: *Allora ho detto bene, no?*
I: Prova a pensare all'esempio della funzione che abbiamo fatto che è sempre uguale a tre, abbiamo trovato che il limite per x che tende a più infinito è tre, giusto?
L: *Sì e allora?*
I: Ti sembra, come dici, che la funzione si avvicini sempre più a tre?
L: *È sempre tre, quindi è già tre...ma è un caso particolare! Non è mica una funzione normale!*
I: È vero, è un caso particolare, ma rientra nella definizione di limite, questo vuol dire che la definizione di limite non dice quello che hai detto te: ovvero che la funzione si avvicina sempre più al limite. Può essere che molte delle funzioni che incontrerai si comportino come dici te, ma rimane il fatto che la definizione di limite che ti hanno dato e che trovi sul libro comprende anche altri casi e quindi non è la stessa che hai dato te.

Come per le successioni anche questa volta prima di fare alcuni esercizi lasciati dall'insegnante Luigia scrive in un foglio, diviso in tre colonne, quello che ha fatto sui limiti di funzione: definizioni, teoremi ed infine esempi.
Il primo esercizio chiede di calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2+3x+2}{2x^2+7x}$$

Luigia esclama: *Questi li so fare.*
Effettivamente Luigia ha imparato *l'algoritmo*, raccoglie il termine di

[8] Probabilmente Luigia non vuole sbagliare nuovamente, ha paura di ridire la stessa cosa sapendo di sbagliare, come confermerà quello che accade dopo.

grado massimo e semplifica:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2+3x+2}{2x^2+7x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(-5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(2+\frac{7}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{7}{x}}$$

E conclude:
L: *Il numeratore tende a meno cinque e il denominatore tende a meno due e quindi il limite è meno cinque mezzi. Se invece il grado era diverso: o andava a zero, o andava a infinito.*
I: Hai visto quanti teoremi hai utilizzato per calcolare questo limite, che altrimenti sarebbe stato molto complicato da trovare? Hai usato il fatto che il limite di un rapporto è uguale al rapporto dei limiti e che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti. Per esempio come hai fatto a dire che il limite del numeratore è due?
L: *Perché questi* [indicando le frazioni] *vanno a zero per x che va a infinito.*
I: Ma hai usato una cosa che prima ti era costata molta fatica, ovvero che il limite della funzione costantemente uguale a due è proprio due. Forse lo usavi senza accorgertene.
L: *In realtà mi* <u>*tornava*</u> *e non mi sono fatta troppe domande, ma non pensavo che dovevo fare il limite di due, quello c'era già, facevo il limite di quelle altre cose e ci aggiungevo due che c'era già...*

L'ultimo esercizio che facciamo con Luigia coinvolge il teorema del limite delle funzioni composte. In realtà, sugli appunti scritti allora, scrissi che avrei voluto parlare anche di limiti da destra e da sinistra, presenti nelle definizioni e negli esempi segnati sul foglio da Luigia, ma che visto che non c'era tempo li avremmo ripresi nell'incontro successivo in cui avremmo parlato di funzioni continue. In realtà da questo esercizio verrà fuori anche qualcosa sui limiti destri e sinistri.
L'esercizio che facciamo chiede di calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\frac{1}{x^2+1}$$

L: *Anche di questi ne abbiamo fatto qualcuno, devo prima fare il limite qui* [indicando l'argomento del logaritmo] *e va a zero e poi fare il limite di tutto.*
I: Quindi?
L: *mmh...viene il logaritmo di zero...uno?*
I: Non è il logaritmo di zero, tra l'altro il logaritmo non è definito in zero, ma come hai detto devi fare un limite. Devi fare il limite per l'argomento del logaritmo che tende al limite che hai trovato, ovvero zero. E se vedi come è il grafico del logaritmo questo limite è meno

infinito. Ti volevo però far notare due cose, la prima è che come al solito qui hai usato uno dei risultati che hai su questa pagina [indicando la pagina scritta da lei e divisa in tre colonne] e la seconda che sei andata un po' di fretta sul limite dell'argomento del logaritmo.
L: *Scusa, ma sopra non c'è uno? E sotto va a più infinito, quindi uno fratto infinito va a zero*[9]
I: Quale è il segno della funzione uno fratto x al quadrato più uno?
Luigia cerca di studiare il segno del denominatore ponendo x^2+1 uguale a 0:
L: *Nessun quadrato può essere negativo, quindi come posso fare?*
I: Devi studiare il segno di questa funzione [indicando x^2+1], cioè devi studiare quando:

$$x^2 \geq -1$$

Ma come hai detto nessun quadrato è negativo...quindi
L: *Quindi cosa?*
I: Quindi come è un quadrato?
L: *Positivo.*
I: E perciò qualsiasi sia x il suo quadrato sarà sempre maggiore di meno uno che è un numero negativo. Cioè la funzione che stai studiando è sempre positiva. Quindi è vero che fai il limite del logaritmo per l'argomento che tende a zero, ma l'informazione importante è che l'argomento tende a zero da valori positivi (è un limite destro). Diverso sarebbe stato se dovevi studiare il limite della funzione:

$$\log \frac{-1}{x^2+1}$$

Infatti, secondo quanto hai fatto prima, ti verrebbe la stessa cosa perché l'argomento tende sempre a zero. Il problema è che qui l'argomento è sempre negativo e quindi ti *avvicini* a zero da valori negativi. Ma il logaritmo non è definito per valori minori o uguali a zero, quindi questo limite non ha senso.

Nei successivi due incontri si tratta la continuità e la derivabilità delle funzioni reali. L'argomento *continuità* in qualche modo è gradito a Luigia e alla sua *concretezza*, infatti a prescindere dalla definizione formale, la continuità è in qualche modo una definizione *operativa*, si

[9] L'infinito entra spesso nelle regole dell'aritmetica tradizionale, diventa un numero in piena regola. A parte le avvertenze di libri e insegnanti non è raro che accada che ci siano conclusioni del tipo $\infty - \infty = 0$ oppure $\frac{\infty}{\infty} = 1$ dalla generalizzazione dell'aritmetica.

vede:

L: *È in qualche modo qualcosa di concreto, se mi chiedono se una funzione è continua, basta che veda com'è fatta* [probabilmente qui Luigia intende il grafico della funzione] *e posso dire se è continua vedendo se ci sono o meno salti nel disegno.*
I: Hai qualcosa da chiedere sulle funzioni continue, qualcosa che ti sembra di non aver capito?
L: *Il problema è che capisco se una funzione è continua o no, appunto vedendo come è fatta, ma non so dimostrarlo, quando si torna a quelle lettere greche sono di nuovo nel buio completo.*
I: Mi scrivi la definizione di funzione continua?
L: *f è continua se il limite per x che tende a x_0 è f di x_0.*
I: E x_0 come è venuto fuori?
L: [Denotando la poca fiducia che ripone in quel che afferma risponde ad un'altra affermazione che forse ha letto implicitamente dalle mie parole o dal tono] *Non è questa la definizione?*
I: In realtà hai introdotto x_0, e la tua definizione è quella di funzione continua nel punto x_0, ma io t'ho chiesto la definizione di funzione continua, non continua in un punto particolare.
L: *Ma x_0 è un punto qualsiasi!*
I: Cosa vorrà dire che f è continua? Che differenza ci sarà con il dire f è continua nel punto 'tal dei tali'?
L: *Che è continua sempre.*
I: Proprio così, quello che mancava nella tua definizione è che dovesse valere la relazione che hai scritto per ogni x_0 del dominio di f.

In realtà questa mia precisazione può sembrare una pignoleria, e forse lo è stata dal punto di vista di Luigia, il fatto è che la continuità per come si definisce è una proprietà locale, ma poi è *vissuta* come una proprietà globale. Tanto è vero che anche la proprietà di non avere salti è di tutto il disegno. Il problema qui è anche di terminologia, si dice che una funzione è continua se lo è in tutti i punti, e che non è continua altrimenti. Una funzione non continua può essere però continua in *tanti* punti.
Mi viene in mente di fare una prova, definisco a Luigia la funzione parte intera e le chiedo di fare il grafico di questa funzione e se in $x = 0.5$ la funzione è continua.
Luigia risponde di no, perché ci sono salti nel grafico della funzione, e allora preciso la domanda:

I: non ti ho chiesto se la funzione è continua, ma se è continua in zero virgola cinque
Luigia rimane piuttosto perplessa e anche in questo caso non sente la necessità di confrontare la sua risposta con la definizione formale che mi ha dato, ma si affida completamente alla sua percezione di continuità.
I: Ricordati della definizione che mi hai dato qui, [indicando la definizione formale] prova a calcolare il limite di questa funzione per x che tende a zero virgola cinque. Anzi prima stabilisci quanto vale la funzione nel punto.
L: *Devo prendere il numero prima della virgola di zero virgola cinque, quindi zero.*
I: Bene e ora calcola il limite della funzione per x che tende a zero virgola cinque.
L: *Come faccio? Non è una funzione come tutte le altre.*
I: Guarda [Indicando il grafico] come è fatta in un intorno del punto in questione.
L: *Qui è tutta zero.*
I: Ti ricordi cosa abbiamo detto sul limite di una funzione. È una proprietà locale, ci interessa come si comporta la funzione nell'intorno del punto. Nell'intorno del punto, come hai detto te, è la funzione costantemente uguale a zero e quindi il suo limite è zero. Perciò la funzione è effettivamente continua in zero virgola cinque, nonostante non sia una funzione continua. Questo perché come abbiamo detto funzione continua vuol dire che è continua per ogni punto, noi invece possiamo trovare un punto in cui non è continua, vero?
L: *Sì, per esempio quì in zero.*
I: Proprio così, ma come fai a dirlo?
L: *Perché cè un salto.*
I: E sapresti dimostrarlo usando la definizione che hai dato? Cioè calcolando il limite e vedendo se è uguale al valore della funzione in quel punto?
L: *Ho lo stesso problema di prima, non è una funzione normale e non è neanche come prima.*[nel senso che non è costante]
I: È vero che non è costante, ma qualche particolarità ce l'ha.
L: *È fatta a scalini?*
I: Sì e quindi in un intorno a *sinistra* di zero vale *sempre* meno uno, mentre a *destra* di zero vale *sempre* zero.
I: Guarda qui [indicando il foglio con i risultati e gli esempi sui limiti], se sai fare il limite da destra e da sinistra puoi dire se la funzione ha

limite e in caso affermativo sai che è uguale a questi due limiti. Ora se fai il limite da destra, ti interessa come si comporta la funzione in un intorno destro del punto, in questo caso come abbiamo notato è costantemente zero e quindi il limite da destra è zero. Analogamente il limite da sinistra è meno uno e quindi essendo diversi, non esiste il limite della funzione per x che tende a zero, in particolare la funzione non può essere continua.
L: *Non sono sicura di aver capito e comunque io l'avevo visto subito che non era continua.*
I: E se non hai e non sai disegnare il grafico cosa fai?

Dopo aver fatto fare il solito foglio a Luigia con le tre colonne delle definizioni, dei risultati e degli esempi e aver visto che tra le funzioni continue sono citate seno e arcoseno, le chiedo se sa dimostrare che queste due funzioni sono continue, Luigia fa cenno di no con la testa e appare anche molto sconcertata dalla richiesta, si fida del fatto che siano continue, le è stato detto a lezione, che motivo c'è di dimostrarlo? Le dico che penso sia un buon esercizio, non solo per prendere dimestichezza con le prove di continuità, ma anche perché nel farlo useremo molti risultati e così noterà che hanno un'applicazione diretta anche nella risoluzione degli esercizi.
Scrivo e nel frattempo commento i vari passaggi insieme a Luigia:

I: Dobbiamo mostrare che la funzione seno di x è continua, cioè secondo la definizione che abbiamo dato che:

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Mi ricordo che sui limiti avevamo visto i limiti del coseno e del seno per x che tende a zero e che questi limiti erano rispettivamente uno e zero, ricordati questi due limiti ci serviranno.[10] (Ti faccio notare che questo ci dice che seno e coseno sono funzioni continue in zero, vogliamo dimostrare che sono continue dappertutto.) Ora qui si usa un *trucchetto* abbastanza tipico, ovvero invece di calcolare questo limite, si calcola

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h)$$

che è la stessa cosa. Ti torna?
L: *No, perché è la stessa cosa? Non c'è più x!*

[10]Qui si nota come la consequenzialità delle dimostrazioni sia spesso artificiale, così come la *pulizia* delle dimostrazioni stesse. È evidente che se dimostriamo una proprietà non possiamo sapere a priori quali risultati intermedi ci serviranno.

I: La x è in qualche modo diventata x_0 più h. Per calcolare il limite facciamo tendere x a x_0, se x la chiamiamo x_0+h, dire che deve tendere a x_0, significa che h deve diventare sempre più piccolo, cioè deve tendere a zero.
L: *Sì forse ho capito.*
I: Vediamo, la stessa cosa la possiamo fare con i limiti destro e sinistro, calcolare:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

è equivalente a cosa?
L: *Ma questa f da dove viene fuori?*
I: Ho scritto f perché questa proprietà non è tipica della funzione seno, ma di ogni funzione di cui tu voglia calcolare un limite. Se ti ricordi come ho cercato di spiegarti perché i due limiti sono equivalenti non ho mai menzionato la funzione seno o una qualche sua particolare caratteristica. Questo significa che è una proprietà dei limiti, non del limite della funzione seno. L'importanza di una proprietà sta spesso nel fatto di poter essere applicata a più casi possibili. Ma torniamo alla mia domanda, te la ricordi?
L: *Sì, sì, ma non lo so...*
I: Cosa vuol dire fare il limite per x che tende a x_0 da destra?
L: *Che si fa tendere x a x_0 da destra.*
I: E cosa vuol dire da destra?
L: [Indicando con la mano] *Da qui.*
I: Cioè da valori maggiori di x_0. Quindi se volessimo, come prima, invece di usare x usare $x_0 + h$, a cosa dovremmo far tendere h?
L: *A zero?*
I: Ci sono due osservazioni che ti fanno capire che non può essere così. La prima è che se fosse così sarebbe uguale a quello che ti ho fatto vedere io e quindi staremmo dicendo che il limite di una funzione per x che tende a x_0 è la stessa cosa che il limite per x che tende a x_0 da destra e questo non è vero, innanzitutto perché abbiamo trovato (anche prima) funzioni che hanno limite da destra, ma non hanno limite e poi per una questione di *economia*, che senso avrebbe dare due nomi diversi alla stessa cosa?[11]
L: *mmh...*
I: E la seconda è che se diciamo che h deve tendere a zero e basta, potremmo avere che h è anche negativo, e allora x_0 più h è maggiore o minore di x_0?

[11]In realtà in matematica ci sono teoremi di equivalenza, ma di solito si evita di dare nomi diversi alla stessa cosa. Solitamente si parla di equivalenza di definizioni.

L: *Se h è negativo, ci levo qualcosa e quindi è minore.*
I: Proprio così mentre per fare il limite da destra ci dobbiamo avvicinare a x_0 per valori maggiori di x_0. Questo secondo motivo ti dovrebbe aiutare a capire cosa c'è che non va a dire solo che h deve tendere a zero.
L: *Non vogliamo che h sia negativo.*
I: Proprio così, e per dire questo basta dire che h tende a zero da destra, cioè per valori maggiori di zero. Ovvero:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h)$$

Torniamo alla nostra dimostrazione. Questo che ho chiamato *trucchetto*, non è applicato a caso, ma c'è una strategia dietro: ovvero di far comparire in qualche modo x_0 che è quello che vogliamo poi ritrovare dopo [indicando con la mano l'espressione $\sin x_0$], ma non solo anche poter applicare qualche proprietà nota della funzione seno. In questo caso, quindi, a differenza di prima, si usano delle proprietà particolari della funzione seno. D'altra parte è naturale che in qualche modo dovremo usare delle proprietà della funzione seno, altrimenti dimostreremo che qualsiasi funzione è continua in qualsiasi punto,[12] mentre sappiamo che non è così. In particolare vogliamo usare le formule del seno e del coseno di una somma, le conosci?
L: *Sì, le ho fatte ma non me le ricordo più!*
I: Non ti preoccupare anche io me le dimentico, certo sarebbe meglio non fosse così, ma è già importante sapere che ci sono delle proprietà che ci possono aiutare!
In questo caso si ha:

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$

E ovviamente se queste due funzioni sono uguali, possiamo indifferentemente calcolare il limite di una o dell'altra, cioè:

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h]$$

Perché abbiamo fatto questa trasformazione?
L: *Sinceramente non lo so.*
I: Non ti sembra che il limite a destra dell'uguaglianza sia più *facile* da calcolare di quello originario? Solitamente queste trasformazioni si fanno proprio per arrivare ad espressioni che sappiamo trattare meglio,

[12] In realtà visto che useremo che seno e coseno sono continue in zero, dimostreremmo che ogni funzione continua in zero è continua dappertutto.

pensa a quello che fai con le successioni del tipo:

$$a_n = \frac{n^5 + 3n^4 + 7}{3n^5 + 1}$$

L: *Sì ho capito, ma qui non so cosa fare comunque.*
I: Intanto l'espressione a destra è il limite di una somma, cosa puoi dire sul limite di una somma?
L: *Che è la somma dei limiti.*
I: Bene perciò:

$$\lim_{h\to 0}[\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h] = \lim_{h\to 0}[\sin x_0 \cos h] + \lim_{h\to 0} \cos x_0 \sin h]$$

Ora li sai fare questi due limiti?
L: *No, ma forse ho capito, anche qui posso rispezzare perché c'è un prodotto.*
I: Esatto, perché il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.
L: *Quindi:*

$$\lim_{h\to 0}[\sin x_0 \cos h] + \lim_{h\to 0}[\cos x_0 \sin h] = \lim_{h\to 0} \sin x_0 \lim_{h\to 0} \cos h + \lim_{h\to 0} \cos x_0 \lim_{h\to 0} \sin h$$

I: E sai fare questi limiti?
L: *Allora due li sappiamo,* [indicando il limite del seno e del coseno di h per h che tende a 0] *ci mancano quelli per h che va a zero di seno e coseno di x_0.*
I: È vero, ma devi osservare che x_0 è un punto fissato cioè coseno di x_0 è un numero così come seno di x_0, sono delle costanti. Perciò quello che risulta è:

$$\sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$$

che è quello che volevamo dimostrare.
L: [visibilmente soddisfatta, aveva partecipato alla dimostrazione] *Bello!*
I: E per quanto riguarda l'arcoseno?
L: *Facciamo come prima, calcoliamo*

$$\lim_{h\to 0} \arcsin(x_0 + h)$$

I: Aspetta, prima di cominciare bisogna sapere quale è l'oggetto che stiamo trattando. Sai cosa è l'arcoseno?
L: [leggendo sugli appunti di qualche lezione precedente] È la funzione inversa del seno.
I: Bene ricordati questa definizione ci servirà e capirai, in questo caso, l'importanza della definizione. Il problema è che rispetto a prima non valgono più le proprietà che prima avevamo usato e che erano particolari della funzione seno.
L: *E allora non so come si fa a calcolare questo limite.*

I: In questo caso l'uso della teoria ci può risparmiare molta fatica: ricordati la definizione e ricorda cosa dobbiamo dimostrare.
L: *Che il limite per h che tende a zero è l'arcoseno di* x_0*.*
I: Sì, e questo che voleva dire?
L: *Che voleva dire?*
I: Che la funzione arcoseno è continua, che è quello che vogliamo provare.
L: *Sì.*
I: Ecco cerca qualche risultato di quelli che avete visto che ti può servire...è importante che tu abbia anche dei criteri per cercare questo risultato, in questo caso i criteri sono le proprietà di arcoseno, quali proprietà conosci?
L: *mmh...non lo so.*
I: La definizione ti dice che è la funzione inversa del seno (in realtà avresti dovuto dire nell'intervallo meno pi greco mezzi più pi greco mezzi, altrimenti la funzione seno non è iniettiva e non puoi considerare l'inversa).
L: *Ah forse qui...una funzione continua e invertibile ha inversa continua...ma il seno è invertibile?*
I: Nell'intervallo che ci interessa sì, e che è continuo l'abbiamo dimostrato prima. Come vedi anche se non è facile capire quali risultati conviene applicare, una volta trovata la strada è molto più semplice che mettersi a calcolare i limiti.

Visto il foglio degli esercizi lasciato a lezione prendiamo in considerazione il seguente:
Per quali valori di k la funzione:

$$y = \begin{cases} \frac{\log x}{x-1} + k & x > 1 \\ x^2 - 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$?

I: Come procederesti?
L: *Mmh...dobbiamo vedere se il limite della funzione per* x *che tende a* 1 *è uguale al suo valore in* 1*...ma cosa c'entra* k*?*
I: Vedi qui [indicando il k nella definizione della funzione], probabilmente il limite dipenderà da questo parametro e a seconda del valore di questo parametro la funzione sarà continua o no.
L: *Sì, va bene, ma che funzione è questa? Non capisco cosa è!*
I: È una funzione definita a tratti, ovvero fino ad un certo valore, in

questo caso fino a 1 compreso, è definita come $x^2 - 1$, e per valori maggiori di 1 è definita con quest'altra espressione [indicando l'espressione in questione]. Per esempio qualè il valore della funzione in $x = -1$?
L: *Non sono sicura di aver capito.*
I: -1 è minore di 1, quindi per calcolare $f(-1)$ devi usare questa seconda espressione [indicando $x^2 - 1$], cioè $f(-1)$ è uguale a $(-1)^2 - 1$, ovvero a 0.
L: *Sì, forse ho capito...*
I: E quale è il valore che ci interessa conoscere per rispondere a questo esercizio?
L: $f(1)$*...ma in questo caso quale devo prendere?*
I: C'è scritto qui, devi prendere la prima espressione se x è maggiore di 1 se invece è minore o uguale devi prendere la seconda. Ora 1 come è?
L: *La seconda! Quindi* $1^2 - 1 = 0$*...viene uguale a prima!*
I: Non succede niente, vuol dire solo che la funzione non è iniettiva...in particolare non sarà invertibile.
L: *Ma ora come faccio a calcolare il limite per* x *che tende a* 1 *di questa cosa?*
I: Puoi provare a fare il limite per x che tende a 1 da destra e da sinistra.
L: *Sì ci avevo pensato ma come faccio?*
I: Prima di vedere come fare dovresti chiederti perché farlo e supposto di riuscire a calcolare questo limite da destra e da sinistra come questo ti possa portare a rispondere all'esercizio che stiamo facendo.
L: *Bé la funzione ha limite se i due limiti sono uguali...*
I: E allora come rispondi alla domanda dell'esercizio nei due casi che si possono presentare, ovvero che la funzione abbia limite o no?
L: *Il limite della funzione deve essere uguale a* $f(1)$.
I: E se la funzione non ha limite per x che tende a 1?
L: *Non va bene?*
I: Consideriamo il caso che i due limiti esistano e siano diversi, questo vuol dire che per x che tende a 1 da destra la funzione si avvicinerà ad un valore e per x che tende a 1 da sinistra si avvicinerà ad un altro valore, perciò in 1 ci sarà un salto.
L: *E quindi non va bene, l'avevo detto!*
I: Torniamo a come calcolare i limiti da destra e da sinistra. Se x si avvicina a 1 da destra cosa significa? Come è x rispetto a 1?
L: *Più grande.*
I: Esatto e quindi quale delle due espressioni ci interesserà?
L: *Questa. [Indicando la prima]*
I: Proprio quella, mentre per x che tende a 1 da sinistra sarà il viceversa. Cioè ci si riduce a calcolare limiti di funzioni come dici te *normali.* Ora

però lasciamo in sospeso la domanda proposta dall'esercizio, risponderemo la prossima volta[13], e prova a calcolarmi, se esiste, il limite della stessa funzione per x che tende a -1.
L: *Francamente come prima non ho visto mai come si fa a calcolare un limite di una funzione così. Si dovrà calcolare il limite da destra e da sinistra. Ma qui non è come prima non cambia nulla* -1 *sia da destra che da sinistra è minore di* 1*!*
I: Proprio così, nel'intorno del punto in questione la funzione è come se fosse x^2-1. L'esercizio è quindi lo stesso che se ti chiedessi di calcolare il limite di x^2-1 in -1, lo sai fare?
L: *Dovrei sapere quanto è e poi vedere di trovare il delta* [Qui probabilmente Luigia si confonde con la verifica che un determinato valore sia il limite della funzione, esercizio che avevamo fatto la volta precedente.]
I: Cambio domanda: secondo te la funzione x^2-1 è continua in -1?
L: *Vabbè è la stessa cosa devo fare il limite...ah ho capito, vuoi dire che devo fare i limiti da destra e da sinistra e vedere se sono uguali?*
I: In realtà voglio sfruttare la continuità per trovare il limite. La definizione di continuità che abbiamo visto dice che una funzione è continua in un punto a se il limite della funzione per x che tende ad a è uguale al valore della funzione nel punto a. Quindi se calcoliamo il limite e troviamo che è uguale a $f(-1)$ cioè 0, come hai detto te possiamo dire che la funzione è continua, ma analogamente se riuscissimo a provare che la funzione è continua in -1 in qualche altro modo, questo ci direbbe che il limite della funzione è uguale al valore della funzione in -1 e quindi avremmo risolto il problema di calcolarlo.
L: *Ma come faccio a provare che è continua in un altro modo?*
I: Innanzitutto è bene ricordarsi le cose già provate e se guardi qui [indicando il foglio con le tre colonne sulla continuità] tra gli esempi di funzioni continue ci sono i polinomi. E quindi x^2-1 è sempre continua in particolare lo è in -1.
L: *Ora lo vedo, ma se uno non ce l'ha scritto non se le può ricordare tutte!*
I: È vero, ma non importa ricordarsele tutte, è molto più importante e facile (perché sono di meno) ricordarsi le proprietà e i teoremi da cui ricavare criteri generali per giudicare la continuità di funzioni. Per esempio una funzione del tipo:

$$|sen(e^x+3x^2)|$$

non la troverai tra gli esempi di funzione continua, ma è la composizione, la somma e il prodotto di funzioni *famose* e continue e quindi

[13] Volevo che avesse come strumento l'Hopital e che comunque avesse una certa dimestichezza con i confronti di infinitesimo.

puoi concludere immediatamente che è continua. Provarlo senza usare questi risultati sarebbe molto complicato presumo.

Nell'incontro dedicato all'argomento derivata le parole di Luigia all'inizio della lezione confermano il fatto che da un certo punto di vista gli esercizi di calcolo della derivata possano essere *rassicuranti*:

L: *No, mi sembra di aver capito come si fa, bisogna stare attenti perché è facile sbagliare i conti e poi bisogna ricordarsi la formula. Per esempio che la derivata di* x^n *è...ecco c'è scritto qui* nx^{n-1}.

Pensando agli esercizi da far fare a Luigia le dico di scrivere gli enunciati di due teoremi che ha fatto a lezione: il teorema della drivazione di funzioni composte e quello dell'Hopital. In particolare evidenziamo le tesi dei due teoremi con un riquadro:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) \text{ dove } y_0 = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Chiedo a Luigia di calcolare la derivata di $\log(x^3+3)$ e Luigia sicura scrive:

$$(\log(x^3+3))' = \frac{1}{x^3+3}$$

Non riconoscendo la funzione data come una funzione composta. La prima parte del nostro incontro si svolge a riconoscere funzioni composte e ad individuare l'ordine di composizione, anche questo un esercizio per niente banale per Luigia. A questo punto c'è davvero un algoritmo che viene dato dal teorema sulla derivata delle funzioni composte e che permette di ricondursi alla derivata di funzioni *elementari* nel senso già specificato. Suggerisco a Luigia, una volta individuato come una funzione possa essere scritta come la composizione di funzioni elementari, di procedere nel seguente modo che permette anche un controllo visivo. Supponiamo di voler calcolare la derivata di $f(g(h(x)))$:

$$x \underbrace{\rightarrow}_{h'(x)} \overbrace{h(x)}^{t} \underbrace{\rightarrow}_{g'(t)} \overbrace{g(t)}^{z} \underbrace{\rightarrow}_{f'(z)} f(z)$$

Il teorema sulla derivata della composizione di funzioni ci dice che:

$$(f(g(h(x))))' = h'(x) \cdot g'(t) \cdot f'(z)$$

E andando a sostituire secondo le sostituzioni fatte:

$$(f(g(h(x))))' = h'(x) \cdot g'(h(x)) \cdot f'(g(h(x))$$

I: Allora tornando alla funzione $\log(x^3 + 3)$ come si può ottenere dalla composizione di altre funzioni?
L: *È la funzione logaritmo composta con la funzione* $x^3 + 3$*.*
I: Prova a calcolare nuovamente la derivata.
L: *Allora prima calcolo la derivata di* x^3+3*, poi cambio variabile e chiamo* y *l'argomento* x^3+3 *del logaritmo e faccio la derivata di logaritmo di* y*:*

$$x \underbrace{\longrightarrow}_{3x^2} \overbrace{x^3 + 3}^{y} \underbrace{\longrightarrow}_{\frac{1}{y}} \log y$$

Quindi per trovare la derivata di $\log(x^3 + 3)$ *devo moltiplicare e poi sostituire* y*:*

$$(\log(x^3 + 3))' = 3x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{3x^2}{x^3 + 3}$$

In questo incontro all'inizio non chiedo esplicitamente la definizione formale di derivata, per evitare che Luigia, guardando sugli appunti, mi dia la definizione corretta togliendo spunti di *discussione*. Così, solo ad un certo punto, le chiedo a bruciapelo cosa è la derivata di una funzione f.

L: *Per esempio quello che abbiamo visto prima, la derivata di* x^n *è* nx^{n-1}*, questa è quella che mi ricordo meglio, poi se ci sono i numeri mi devo mettere lì e pensare cosa è* n *e cosa* $n-1$*, a volte mi sbaglio e magari ci devo mettere* 3 *e ci metto* 5*.*
A questo punto torniamo all'esercizio dell'incontro precedente, in cui in effetti, il calcolo della derivata rappresenta un aspetto marginale, utile solo nell'applicazione dell'Hopital[14].
I: Allora abbiamo detto l'ultima volta che dobbiamo calcolare il limite della funzione per x che tende a 1 da destra e da sinistra, come faresti?
L: *L'altra volta abbiamo trovato il limite di* $x^2 - 1$ *però per* x *che tende a* -1*. Se facciamo uguale quando* x *tende a* 1 *il limite è* $1^2 - 1$ *e quindi* 0*.*
I: Ma a differenza del limite per x che tende a -1, qui nell'intorno di

[14] In questo caso non è nemmeno facile avere un controllo sul risultato.

1 la funzione non si comporta come $x^2 - 1$, è per questo che facciamo due limiti distinti da destra e da sinistra. Abbiamo visto come cambia la funzione per x che si avvicina da destra o da sinistra.
L: *Sì se x è maggiore di 1 la funzione è $\frac{\log x}{x-1} + k$ e se x è minore o uguale a 1 la funzione è $x^2 - 1$. Però non so come fare...*
I: Proviamo a scrivere quello che vogliamo calcolare, per esempio il limite da destra per x che tende a 1. Sai come si scrive?
L: *Sì, dovrebbe essere scrivendo che x si avvicina a 1^+.*
I: Sì, e chiamiamo $f(x)$ la nostra funzione. Allora vogliamo calcolare:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Ma $f(x)$ a cosa hai detto che è uguale se x si avvicina a 1 da destra?
L: *A questo* [indicando l'espressione fratta con il logaritmo].
I: Bene allora sostituiamo a $f(x)$ questa funzione. Dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x - 1} + k$$

L: *Non sono sicura di saperlo fare: se faccio il limite di quello sopra viene logaritmo di 1 che è 0, e quello di sotto viene 0 e quindi c'è una forma indeterminata 0 su 0 e poi c'è k...*
I: Sì, c'è anche k...d'altra parte questa funzione la puoi vedere come la somma di due funzioni: la frazione e k e quindi, per il teorema sul limite di una somma di funzioni:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x - 1} + k = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x - 1} + \lim_{x \to 1^+} k$$

E quindi devi trovare il limite di queste due funzioni.
L: *Il primo pezzo posso fare il limite delle derivate [cioè l'Hopital] ma il secondo come faccio a farlo non c'è x?*
I: È un limite che abbiamo già visto, la funzione di cui dobbiamo fare il limite è la funzione che vale costantemente k.
L: *Ma k non cambia?*
I: No k è un parametro a cui possiamo dare come valore un qualsiasi numero reale, ma una volta assegnato, il valore di k è fissato.
L: *Allora se il valore di k non cambia, il limite è k.*
I: Dobbiamo ancora calcolare:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x - 1}$$

Avevi detto che potevi fare il limite delle derivate, che volevi dire?
L: *Che posso usare questo teorema di Hopital che abbiamo scritto...quindi fammi fare i conti...la derivata di $x - 1$ è $1 - 0 = 1$, mentre la derivata*

di $\log x$ *è* $\frac{1}{x}$*, quindi:*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

I: Quindi cosa puoi concludere? Ti ricordi quale è la domanda a cui devi rispondere?
L: *Devo dire quando è continua in* 1*...per quali valori di* k*. Il limite destro è* $1+k$*...e il limite sinistro lo devo ancora calcolare...ma se riscrivo tutto uguale e ci metto* x^2-1 *al posto di* $f(x)$*...è* 0*.*
I: Quindi?
L: *Dovrebbero essere uguali...*
I: E in che casi lo sono?
L: *Devo avere* $1+k=0$*...quindi per* $k=-1$*.*

Tra gli esercizi sulle derivate ce ne erano alcuni simili a quelli sulla continuità, ovvero di trovare per quali k una funzione definita in maniera diversa su due sottoinsiemi del dominio che ne formassero una partizione, fosse derivabile nel punto di divisione dei due sottoinsiemi.
Chiedo a Luigia di provare per quali k la seguente funzione:

$$\begin{cases} x+k & x>0 \\ x & x\leq 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x=0$.

L: *la derivata di* $x+k$ *è* 1 *e anche di* x*, e quindi il limite per* x *che tende a* 0 *è sempre* 1*, perciò...*[leggera esitazione forse perché anche un tipo di soluzione del genere che non dipende da k è una rottura di quello che si può chiamare contratto didattico] *è sempre derivabile.*
I: Consideriamo $k=1$ prova a fare il disegno di questa funzione.

Luigia traccia il grafico della funzione e, tramite il suo algoritmo (salto = discontinuità) si accorge della non continuità in zero, ma non sembra per niente in crisi da questa osservazione, non vede contraddizioni con quello che ha trovato.
Allora le chiedo se la funzione è derivabile in $x=0$ e Luigia ricordandosi dell'esercizio precedente risponde affermativamente, quindi concludiamo che la funzione è derivabile e non continua in 0. A questo punto guardando la colonna dei teoremi Luigia è costretta a dedurre che la funzione è continua in 0 ed entra in crisi perché non sa dove può aver sbagliato: il grafico è facile ed è convinta di averlo fatto bene, la

funzione è discontinua perché *lo vede* che c'è un salto, le derivate le ha calcolate bene perché sono facili [tra l'altro le ricalcola in questo caso specifico con $k = 1$].

I: Vedi non hai sbagliato nessun calcolo, il problema è che qui [indicando le derivate di x e $x + 1$] hai calcolato qualcosa che non ti serviva per il problema. Devi studiare se è derivabile in zero la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + k & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

Mentre tu hai calcolato separatamente le derivate delle due funzioni che la definiscono e poi hai uguagliato i due limiti per x che tende a 0. In questo modo hai risposto ad un'altra domanda: ti ricordi il significato geometrico della derivata in un punto?
L: *Sì è la tangente alla funzione in quel punto.*
I: Più propriamente è la pendenza della retta tangente alla funzione in quel punto[15]. E quello che dimostri con i calcoli che hai fatto è che le due funzioni distinte x e $x + 1$ (o più in generale $x + k$), che hai implicitamente supposto derivabili (ma forse lo sai che sono derivabili...) hanno in $x = 0$ la tangente che ha la stessa pendenza. Ma quello che devi vedere è se esiste la derivata in quel punto della funzione $f(x)$, ovvero se esiste il limite del rapporto incrementale. In questo caso per esistere, devi vedere se esistono i due limiti destri e sinistri del rapporto incrementale, e poi vedere se sono uguali. Prova a calcolarli, comincia a scrivere il limite di un rapporto incrementale di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0.
L: *Non te lo ricordi? L'avevo già scritto:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

I: Bene, non è che non me lo ricordavo, ma penso che possa essere utile in questo caso partire dal caso generale. Proviamo ora a calcolare il limite sinistro per x che tende a 0 della nostra funzione.
L: *Allora:*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

I: Va bene, ma al posto di $f(x)$ e $f(0)$ cosa possiamo mettere? Come è definita $f(x)$ per x che si avvicina a 0 da sinistra e quanto vale la nostra funzione in 0?

[15]Forse sarebbe stato più appropriato affermare che la tangente alla funzione $f(x)$ in x_0 si definisce proprio a partire dall'esistenza della derivata di $f(x)$ in x_0 come la retta di equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

L: *Se x si avvicina a zero da sinistra allora è minore di zero e quindi devo prendere questa come funzione [indicando x] mentre per $x = 0$ la funzione vale 0.*
I: Riscrivi il tuo limite.
L: *Se sostituisco:*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0}$$

E se semplifico viene 1! Quindi il limite del rapporto incrementale viene 1, avevo fatto bene anche prima!
I: Proviamo a calcolare il limite destro del rapporto incrementale.
L: *Devo scrivere 0^+ invece che 0^- e al posto della funzione x devo mettere $x + 1$.*
I: Proprio così, vai...
L: *Quindi, sostituisco:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x + 1 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + 1}{x} = 1$$

I: Scusa ma come hai calcolato questo limite?
L: *Allora il numeratore tende a 1 e il denominatore a 0 quindi...ah è vero non viene 1, ma infinito.*
I: Appunto, e quindi non esiste il limite del rapporto incrementale per x che tende a 0 e cioè $f(x)$ non è derivabile. Il tuo procedimento lo puoi usare solo se sai che le due funzioni che definiscono la tua funzione sono derivabili, e questo ce l'avevi, ma anche se la funzione nel punto è continua, ovvero se le due funzioni si *uniscono bene* nel punto in questione. La spiegazione è contenuta nella dimostrazione del teorema che ci dice che se una funzione è derivabile allora è anche continua, ma la possiamo vedere facilmente anche da quanto hai calcolato appena ora. Per rispondere alla domanda devi far vedere che esiste il limite del rapporto incrementale della funzione, in particolare devi fare vedere che esistono e sono uguali questi due limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Ora usiamo il teorema del limite di un rapporto, lo hai fatto anche te, ovvero per calcolare questo limite calcoliamo il limite del denominatore e del numeratore e facciamone il rapporto. Il limite del denominatore quanto vale in tutti e due i casi?
L: *Bè se x tende a x_0 viene 0.*
I: Proprio così, e quindi per esistere finito il limite del rapporto incrementale quanto deve venire il limite del numeratore?
L: *Non ho capito.*

I: Supponiamo il limite del numeratore sia 3, allora quanto è il limite del rapporto incrementale?
L: 3 *su* 0*, quindi infinito.*
I: Quindi la funzione non sarebbe derivabile. E se sopra il limite fosse 5?
L: *Uguale, sarebbe sempre infinito.*
I: Allora come deve venire il limite sopra per avere possibilità che il limite del rapporto incrementale sia finito? Guarda il caso del limite sinistro di prima che ti veniva finito, quanto era il limite del numeratore?
L: 0*...sì ho capito, deve venire* 0 *perché se qui [indica il numeratore] c'è un numero diverso da zero, viene infinito. E se sopra viene infinito va bene?*
I: Dillo te, come viene il limite del rapporto?
L: *infinito su* 0*, viene infinito e quindi non va bene.*
I: Esatto, quindi abbiamo trovato un criterio per dire quando la funzione non è derivabile. Il limite del numeratore deve essere in tutti e due i casi 0, altrimenti non esistono la derivata sinistra o destra o entrambe, a seconda dei casi. Riscriviamo questo limite:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - f(x_0) = 0$$

Sono limiti di una somma quindi sono uguali alla somma dei limiti:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^+} f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x_0) = 0$$

Sai calcolare il limite destro e sinistro di $f(x_0)$ per x che tende a x_0?
L: *Non credo...*
I: $f(x_0)$ è una costante, una volta che è fissato x_0 sappiamo quanto vale $f(x_0)$. Guarda nel caso precedente la funzione era x, x_0 era 0, e infatti $f(x_0)$ era uguale a 0.
L: *È vero, quindi il limite sia destro che sinistro è* 0*, cioè in questo caso è quanto vale* $f(x_0)$*.*
I: E quindi la nostra uguaglianza diventa:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) - f(x_0) = 0$$

Da cui aggiungendo $f(x_0)$ si ottiene:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

E cosa vogliono dire queste uguaglianze?
L: *Che la funzione è continua in* x_0*.*
I: Sì e come abbiamo notato, se la funzione è continua lo possiamo

scoprire o come al solito calcolando il limite destro e sinistro della funzione e osservando se sono uguali, come abbiamo fatto negli esercizi dell'altro incontro, oppure, ed è più comodo, direttamente calcolando i limiti dei rapporti incrementali che sono quelli che ci servono per rispondere alla domanda sulla derivabilità e che non vengono finiti se la funzione considerata non è continua.

A Luigia, come a molti, piacciono gli esercizi in cui si richiede di tracciare un grafico di una funzione (*perché so cosa devo fare, poi magari sbaglio i conti, ma se sto attenta e se la funzione non è troppo complicata per calcolare i limiti, lo so fare*).
L'incontro dedicato a questo aspetto è particolare rispetto agli altri, in quanto non è dedicato ad un argomento, ma ad un tipo di esercizio che in qualche modo coinvolge tutti gli argomenti fatti fino a quel momento per quanto riguarda le funzioni reali di variabile reale. Anche in questo caso però iniziamo con un foglio in cui scriviamo le funzioni che dovrebbero essere note (seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, logaritmo, esponenziale, radice n-esima, e funzioni razionali fratte) con relativo grafico (fatto a lezione) e soprattutto scrivendo il dominio di definizione, che è in effetti l'unica particolarità dello studio di funzioni.
Dopo questa prima fase voglio capire se Luigia ha chiaro come si *traducono* graficamente alcune proprietà. Le chiedo quindi che relazione c'è tra il grafico di una funzione e la sua inversa, e cosa significa graficamente la definizione di funzione pari e dispari. Le risposte a queste domande non sono state particolarmente significative perché erano state date a lezione e Luigia ricordava le relazioni:

(1) funzione inversa - grafico ottenuto dalla simmetria rispetto alla bisettrice.
(2) funzione pari - grafico simmetrico rispetto all'asse y.
(3) funzione dispari - grafico simmetrico rispetto all'origine.

È molto probabile che queste relazioni siano di tipo *autoritario* e slegate dalla visualizzazione delle proprietà aritmetiche. Tanto è vero che è capitato che di una funzione pari Luigia fosse indecisa se fosse simmetrica rispetto all'asse y, x o rispetto all'origine!

Con Luigia studiamo la funzione:

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$$

L: *Allora per prima cosa il dominio, il logaritmo è definito solo per* x *maggiore di* 0*, e poi deve essere il denominatore diverso* 0*, quindi* $x + 1 \neq 0$*, ovvero* x *diverso da* -1[16].
I: E quindi quale sarebbe il dominio?
L: *Tutti i numeri diversi da* 0 *tranne* 1.
I: [In questo caso l'esempio numerico può funzionare a far capire che c'è qualcosa che non va, perché il dominio è l'insieme su cui si può calcolare la funzione] Quanto vale la funzione in $\frac{1}{2}$?
L: *Allora:*

$$\log \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \log -\frac{1}{3}$$

è negativo e quindi non si può fare il logaritmo.[17]
I: Ma $\frac{1}{2}$ è maggiore di 0 e diverso da 1 quindi sta nel dominio che hai trovato.
L: *Devo aver sbagliato a fare i conti...*
I: In realtà hai fatto i conti bene, hai giustamente considerato la composizione della funzione logaritmo con la funzione $\frac{x-1}{x+1}$, mentre quando hai calcolato il dominio hai considerato le due funzioni separate. Proviamo a ripercorrere come hai tentato di calcolare il valore della funzione in un mezzo. Prima hai calcolato il risultato di $\frac{x-1}{x+1}$ in $\frac{1}{2}$, lo potevi fare con qualsiasi numero tranne che per -1 che quindi sicuramente non starà nel dominio della composizione. Poi di questo volevi fare il logaritmo, ma non hai potuto perché hai trovato un numero negativo. Il fatto è che non fai il logaritmo di x e quindi non ti interessa che x sia maggiore di zero, ma fai il logaritmo di $\frac{x-1}{x+1}$ e quindi ti sapere per quali valori di x $\frac{x-1}{x+1}$ è maggiore di zero. Devi cioè studiare il segno di questa funzione.
L: *Quindi studio il segno del numeratore e del numeratore.* $x - 1$ *è maggiore di zero se* x *è maggiore di* 1*...devo scrivere maggiore o maggiore e uguale?*
I: Se $x = 1$ cosa ottieni?
L: 0.
I: E il logaritmo è definito in 0?

[16]Come spesso capita, la composizione di funzione crea problemi (come era già successo per la derivata), le due funzioni vengono studiate separatamente, non viste come composizione. Questo problema non è tipico di Luigia ma è piuttosto frequente, addirittura, in alcuni compiti si trovano errori come questo:

$$\frac{\sin(x^2 + 3)}{\sin 3x} = \frac{x^2 + 3}{3x}$$

[17]Luigia non sembra turbata da questa *scoperta* forse non si è accorta che $\frac{1}{2}$ appartiene all'insieme che lei ha trovato come dominio.

L: *No, quindi va bene maggiore, e* $x + 1$ *è maggiore di zero se* x *è maggiore di* -1*. La funzione sarà maggiore di zero per valori esterni, ovvero per* $x < -1$ *o* $x > 1$*.*
I: Proprio così, e questo è il dominio della tua funzione, infatti in questo intervallo non c'è il punto -1 che avevi escluso all'inizio.

Dopo aver notato che la funzione non è né simmetrica rispetto all'origine né rispetto all'asse y, Luigia passa allo studio del segno della funzione, anche qui la difficoltà sta nel *coordinare* le informazioni che ha sul logaritmo (presenti nello schema che abbiamo fatto all'inizio) con la composizione di funzioni.

L: *Devo studiare il segno della funzione cioè quando* $f(x)$ *è maggiore di* 0*.*
I: Prima di tutto ricordiamoci lo studio del segno della funzione $\log x$.
L: [Guardando sugli appunti] *Il logaritmo è maggiore di zero quando* x *è maggiore di* 1*.*
I: Cioè quando l'argomento del logaritmo è maggiore di 1, nel nostro caso quale è l'argomento del logaritmo?
L: *Bisogna vedere quando:*

$$\frac{x-1}{x+1}$$

è maggiore di 1*. Quindi* $x - 1 > x + 1$*, non mi torna...*
I: Come hai risolto questa disuguaglianza?
L: *Ho moltiplicato per* $x + 1$ *da tutte e due le parti per togliere il denominatore.*
I: Il problema è che $x+1$ potrebbe anche essere minore di zero e quindi non si sa cosa accade alla maggiorazione moltiplicando per $x + 1$.
L: *E allora?*
I: Avere:

$$\frac{x-1}{x+1} > 1$$

è equivalente a risolvere:

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$$

ovvero:

$$\frac{x-1-x-1}{x+1} = \frac{-2}{x+1} > 0$$

e questa disuguaglianza scommetto la sai risolvere.
L: *Non ne sarei così sicura, posso fare il "cimitero"* [ovvero studiare segno di numeratore e denominatore e poi combinarli con la regola dei

segni] -2 *è negativo, mentre* $x + 1$ *è maggiore di zero per* $x > -1$*, quindi la funzione è positiva per* $x < -1$ *e negativa per* $x > 1$*.*
I: Ti devi ricordare anche che la tua funzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$ ma ha un dominio che hai già calcolato.
L: *Sì, ma questo lo vedo dal grafico, infatti appena trovo il dominio, cancello la parte di grafico che non sta nel dominio, così quando poi vado a fare il disegno mi fermo lì, come faccio ora con il segno: ho trovato che ptima di* -1 *la funzione è maggiore di zero, allora cancello la parte a sinistra e sotto* -1*, così come faccio con la parte a destra e sopra* -1*, così sono sicura di non sbagliare.*

Luigia in questo modo mette in piedi un efficiente sistema di controllo, ma la frammentarietà con cui affronta i vari punti rimane e le fa a volte perdere tempo: il suo cancellare parti di grafico serve infatti da utile pro-memoria, ma non le evita di fare passaggi inutili che potrebbe evitare coordinando personalmente le informazioni che trova. È il caso dell'intersezione con gli assi. Luigia comincia da capo a fare i conti. Sostituisce $x = 0$ e si accorge che il risultato è il logaritmo di un numero negativo, quando sapeva già che zero non stava nel dominio. Poi eguaglia la funzione a zero, osserva che il logaritmo è zero quando l'argomento è 1[18] e quindi cerca di risolvere l'uguaglianza:

$$\frac{x-1}{x+1} = 1$$

Come detto in nota, Luigia ripercorre in modo identico il procedimento di risoluzione usato per lo studio del segno:

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{-2}{x+1} = 0$$

E rimane perplessa su come concludere.

A questo punto Luigia calcola i limiti agli estremi del dominio. Per calcolare i limiti per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$, Luigia osserva che l'argomento tende a 1 e sfruttando (non è chiaro quanto in maniera consapevole) il teorema sul limite della composizione di funzioni trova che il limite in entrambi i casi è 0. Il calcolo del limite per x che tende

[18]È interessante notare come non vengano ricordate o comunque usate le informazioni trovate, ma si ricordino gli algoritmi usati per trovarle. In questo caso Luigia senza pensarci più di tanto passa da $f(x) = 0$, a porre l'argomento del logaritmo uguale a 1. Se questa cosa è comunque positiva, forse lo è meno il fatto che il riconoscere la somiglianza delle situazioni attivi dei processi automatici come possiamo vedere dalla risoluzione dell'uguaglianza.

a 1 e a -1, non presenta particolari difficoltà perché è forzato dal fatto che il logaritmo sia definito solo per argomenti positivi, così per esempio nel caso di limite per x che tende a -1, Luigia dice che il limite dell'argomento è infinito, senza specificarne il segno, e probabilmente non è nemmeno consapevole che sta facendo un limite sinistro. Fatto sta che non si pone il problema.
A Luigia manca solo di calcolare derivate prime e seconde della funzione e Luigia ripete un errore già fatto:
L: *la derivata è:*

$$\frac{x+1}{x-1}$$

Devo studiarne il segno e trovare quando è zero per i massimi e minimi relativi e per vedere se è crescente e decrescente.

Luigia studia nuovamente il segno di questa espressione con il *cimitero* nonostante l'avesse già fatto per trovare il dominio della funzione[19]. Quindi trova che la funzione è sempre crescente e senza punti di massimo o minimo relativo. A questo punto calcola correttamente [rispetto alla derivata prima trovata] la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

e quindi trova che la funzione è sempre concava.
In questa fase non dico niente a Luigia, anche se naturalmente le due derivate sono errate: nel caso della derivata prima però, sfortunatamente, la derivata

$$\frac{2}{x^2-1}$$

dà per la funzione le stesse informazioni trovate da Luigia, ovvero che la funzione è sempre crescente e senza punti di massimo e minimo relativo. Per la derivata seconda la cosa è un po' diversa, in quanto essendo

$$\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

ci dice che la funzione è concava per gli $x < 0$ (in questo caso per gli $x < -1$) e viceversa per gli $x > 1$ è convessa.
Luigia disegna correttamente il grafico, d'altra parte sarebbe stato *innaturale* disegnare il grafico concavo anche per $x > 1$:

[19] In realtà qui la funzione non è la stessa ma la reciproca, Luigia poteva sapere che il segno non cambiava sia tramite teoremi (il segno di $f(x)$ e di $\frac{1}{f(x)}$ è lo stesso) sia arrivarci notando la simmetria rispetto a numeratore e denominatore dell'algoritmo da lei usato per lo studio del segno.

La cosa interessante è che Luigia non confronta il disegno ottenuto con le informazioni trovate punto per punto e quindi non ha nulla da eccepire sulla sua risoluzione.
Faccio osservare a Luigia la contraddizione tra quello che ha disegnato e quello che ha trovato poco prima e lei è convinta di aver sbagliato a fare i conti, il fatto di rifarli e trovare sempre lo stesso risultato la mette in crisi.

Un esercizio interessante lasciato a Luigia a lezione chiede di riconoscere tra 3 grafici diversi quale è quello della funzione:

$$f(x) = 2x - 3\log(1 + x^2)$$

La consegna esatta è la seguente:
Riconosci, **facendo solo i controlli e i calcoli che ritieni essenziali**, quale dei grafici proposti (vedi figure 1, 2, 3) è il grafico della funzione data.
Il grassetto presente nel testo originale, cerca di evidenziare che la richiesta non è solo quella di individuare il grafico giusto, ma di farlo con *il minimo sforzo*. Probabilmente è voluto anche il fatto di lasciare una certa soggettività nella consegna, ovvero di non scrivere *facendo solo i controlli e i calcoli essenziali*, ma di aggiungere *che ritieni*. Quel che cambia è che con questa formula, una volta individuato il grafico giusto, non c'è un procedimento giusto e uno sbagliato.

Luigia fa lo studio della funzione come aveva fatto in precedenza, lasciando da parte solo lo studio del dominio e trova il grafico giusto, non senza qualche difficoltà e perplessità (in un primo tempo si era fermata prima di calcolare la derivata seconda, che invece è uno delle discriminanti per scegliere il grafico giusto).
Le chiedo se ha fatto tutti i calcoli perché pensa che siano tutti essenziali ai fini del riconoscimento del grafico, o perché ha dato poca importanza a quanto scritto in grassetto, e la sua risposta è piuttosto significativa:

L: *Il problema è che prima di farlo non potevo sapere quali erano i dati essenziali!*

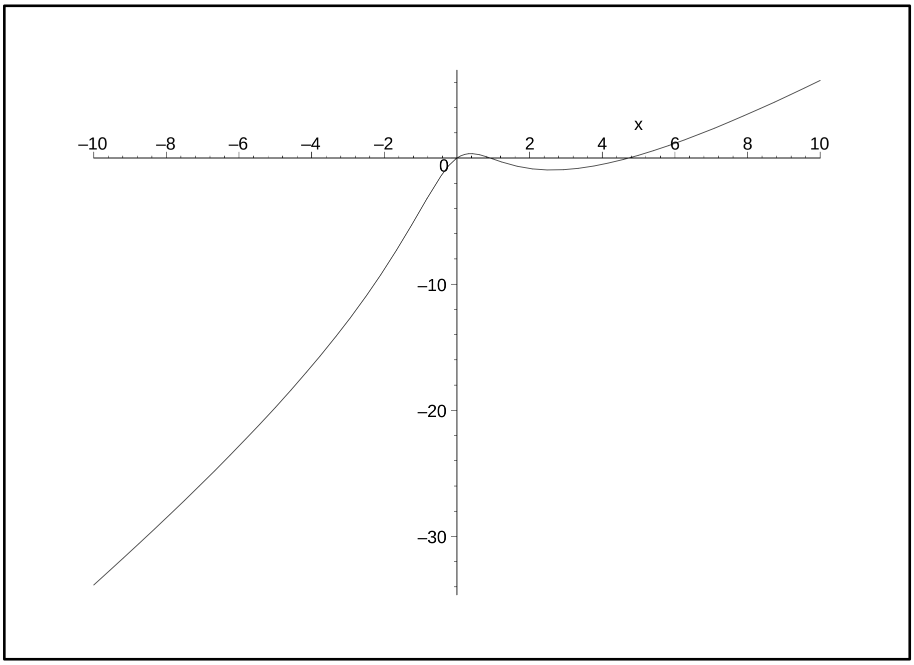


Figura 1

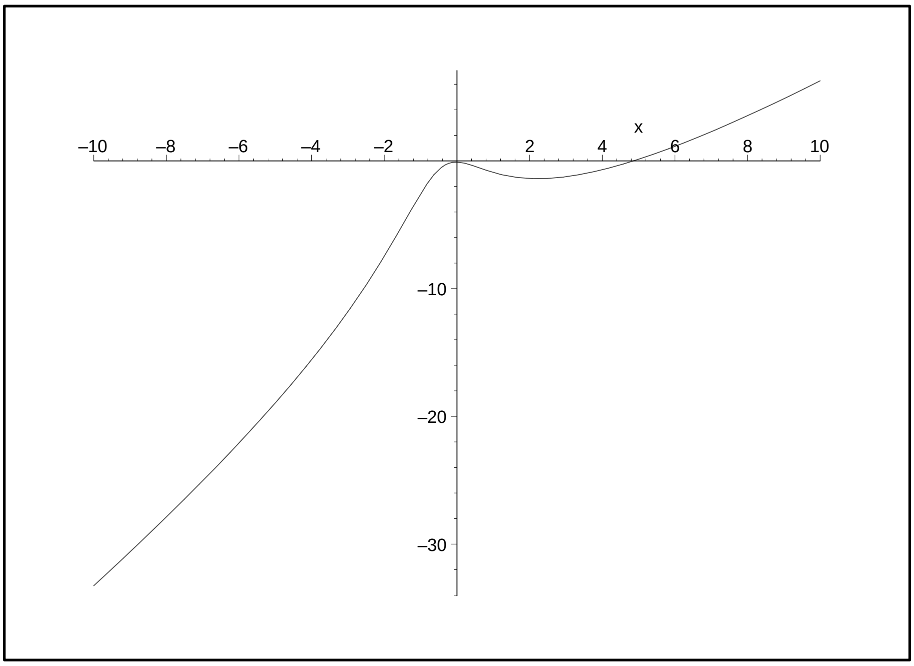


Figura 2

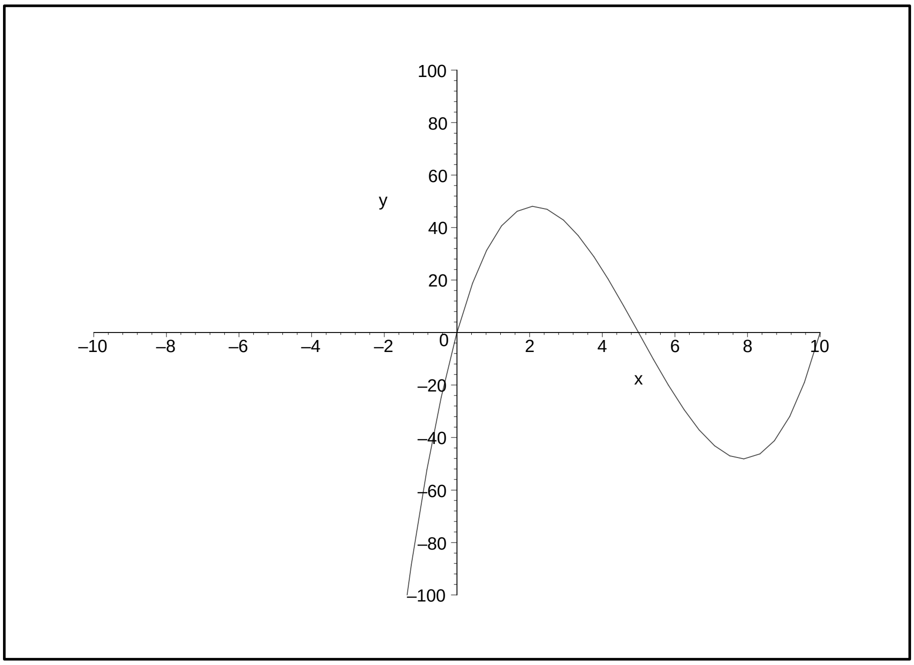
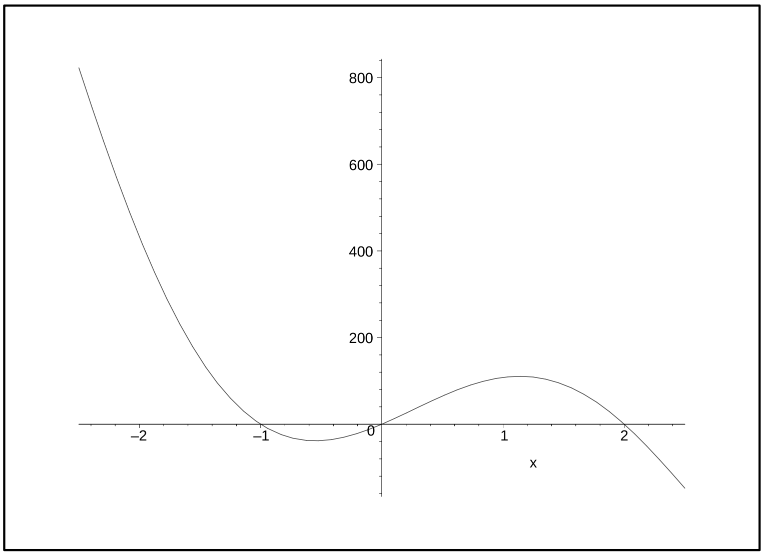


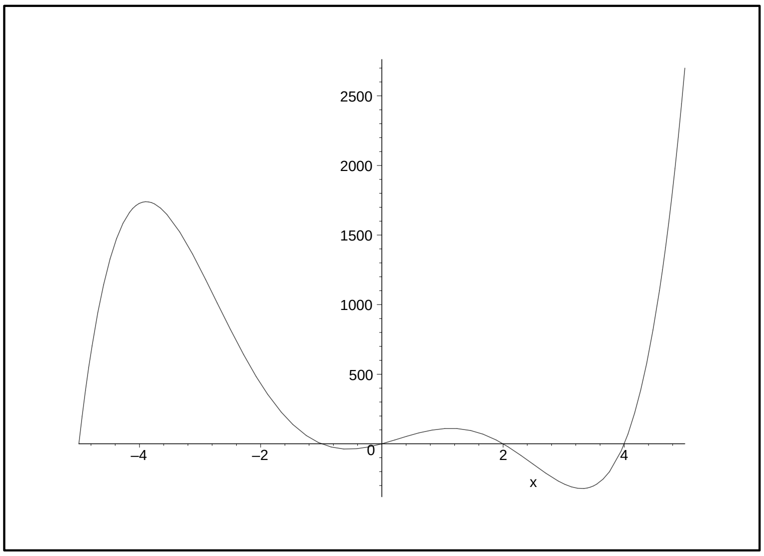
Figura 3

Allora le chiedo a posteriori quali dati avrebbe potuto non calcolare ai fini del riconoscimento del grafico giusto e per Luigia le cose inessenziali sono lo studio del segno della funzione e i limiti per x che tende a più o meno infinito[20].
Vista la convinzione di Luigia, cerco di farle capire il carattere locale delle informazioni che si possono estrarre da un grafico, con un controesempio.
Mi viene in mente di usare un grafico simile ad uno di quelli usati nell'esercizio precedente e in particolare mi faccio venire in mente anche una funzione da poter usare non troppo complicata nei calcoli, e così opto per un polinomio di quinto grado. Mostro il grafico seguente [questo è disegnato con Maple7, nel corso dell'incontro avevo fatto un disegno a mano] a Luigia e le chiedo quali sono i limiti per x che tende a più e meno infinito.

[20]Mi sembra interessante notare come è vero che lo studio dei limiti non sia di aiuto per il riconoscimento del grafico, ma (e questo fa capire l'importanza di chiedere e conoscere i perché delle risposte) non perché come dice Luigia, tutte e tre le funzioni hanno gli stessi limiti a più o meno infinito.



Luigia sicura risponde meno infinito e più infinito rispettivamente. Allora mostro un ampliamento del grafico:



E Luigia: *Ma così non vale...me lo dovevi far vedere che tornava giù!*[21]
Quando le spiego che è proprio quello che volevo farle capire, ovvero che certe informazioni non è detto che si possano *estrarre* da un grafico e che per certe richieste non è detto che valgano le regole comunicative del linguaggio naturale, Luigia esclama:

L: *E poi capace non esiste nemmeno una funzione fatta così.*
In questo momento è molto importante che, prevedendo questa perplessità, avessi pensato ad un'espressione *semplice* prima di tracciare un grafico:
I: Ma no, ho fatto il grafico di

$$3x(x-4)(x-2)(x+1)(x+5)$$

non è una funzione difficilissima da studiare. Prova a farlo a casa e vedere che il grafico è fatto come questo che ti ho fatto vedere.

L'ultimo incontro avrebbe dovuto trattare il calcolo integrale, in realtà data la vicinanza con lo scritto e il fatto che Luigia abbia saputo che gli integrali non faranno parte del programma d'esame del primo modulo, ben poco è stato fatto su questo argomento. D'altra parte in casi come questo, in cui l'obiettivo primario è quello del superamento dell'esame, sarebbe stato difficile coinvolgere Luigia nel sotto-obiettivo *intellettuale*. L'incontro è durato anche meno del solito, in quanto la prova vera e propria per lo scritto sarebbe stata fatta un paio di giorni dopo nell'incontro comune con Leonardo (Simone aveva già smesso di venire) di cui parlo a parte.
Alcune cose interessanti sono comunque emerse, in quanto l'integrale viene visto come l'inverso della derivata, ma questo dá un fastidio enorme perché a differenza della derivata il calcolo della primitiva può presentare delle scelte *strategiche*:

L: *Non mi piace, gli esempi che abbiamo visto a lezione li ho capiti ma non li avrei saputi fare, non capisco quando <u>devo</u> fare per parti e quando per sostituzione. Come si fa a decidere? Solo quelli con la frazione* [razionali fratti] *ho capito come si fanno.*
Noi, <u>al classico</u> non si sono mai fatti gli integrali.

[21]Sottolineando la sua convinzione, che da un punto di vista comunicativo non sia corretto tracciare un grafico parzialmente in modo che questa parzialità dia un'idea *ingannevole* del comportamento della funzione. Per una trattazione completa vedere Ferrari (2004).

Rimane così molto perplessa quando le dico che in realtà quasi nessuno ha mai fatto alle superiori il calcolo integrale, ma ribatte:
L: *Comunque noi non c'eravamo neanche avvicinati a fare gli integrali, gli altri almeno fino a fare bene le derivate e i grafici ci sono arrivati.*

APPENDICE C

Leonardo

Anche con Leonardo cominciamo a scrivere su tre colonne le definizioni, i teoremi e gli esempi visti a lezione sull'argomento successioni reali. Una delle prime domande che Leonardo mi fa è secondo me molto significativa:

Leo: *Le successioni reali le abbiamo definite come funzioni dai naturali ai reali, allora anche se definisco a caso è una funzione reale? Non importa che ci sia una regola precisa, posso definire la successione come mi pare?*

Leonardo, a differenza di molti, non identifica la successione con l'espressione dipendente da n, ma riesce a considerare la definizione di successione in tutta la sua generalità.
Fin da subito però appaiono evidenti alcune difficoltà con argomenti di base, come la risoluzione di equazioni e disequazioni (utili per gli esercizi iniziali di verifica di limiti di successioni):
Dovendo dimostrare, attraverso la definizione di limite di successioni, che 0 è il limite della successione:

$$\frac{2}{n-1}$$

Leonardo scrive:

$$|\frac{2}{n-1} - 0| < \epsilon$$

e poi mi chiede:

Leo: *E ora come faccio a togliere il valore assoluto?*

Inoltre, non manca mai di sottolineare la poca fiducia che ha nelle sue possibilità di risolvere in modo corretto un esercizio, ogni volta che gli chiedo spiegazioni la sua prima reazione è del tipo *ho sbagliato sicuramente qualcosa*, e anche prima di cominciare a risolvere un esercizio

spesso in maniera sconsolata afferma *non mi riesce* oppure *nel farlo tutto sbaglio sicuramente qualcosa.*
Uno degli esercizi che facciamo nel nostro primo incontro è calcolare il limite se esiste della successione:

$$a_n = \frac{1 - n^3}{n^2 + n}$$

Leonardo si differenzia dai suoi compagni di tutorato perché prima di raccogliere a fattore il termine di grado più alto (in questo caso n^3), ovvero prima di applicare l'algoritmo noto per il calcolo di limiti di successioni di questo tipo, in qualche modo fa uno studio *qualitativo* degli infiniti:

Leo: *Sopra c'è* n^3 *che è più grande di* $n^2 + n$ *e quindi dovrebbe prevalere quello che c'è sopra.*

Stesso esercizio con la seguente successione:

$$a_n = (\frac{n - 7}{2n + 1})^3$$

Leonardo calcola il cubo del numeratore e del denominatore e sbaglia i conti in tutti e due i casi, e quando gli chiedo di controllarli si rende conto di averli sbagliati. Allora gli dico:

I: Abbiamo appurato una cosa di cui eri già convinto: che fai un po' di errori di conto, ma ho notato anche che ti accorgi degli errori che hai fatto riguardando i vari passaggi, allora è bene che quando devi fare conti piuttosto lunghi alla fine tu controlli nuovamente quello che hai scritto. Ma non è tutto, sapendo che questo è un tuo punto debole, devi cercare, quando è possibile di evitare di fare conti. Per esempio, torniamo alla nostra successione, la puoi scrivere anche così:

$$a_n = \frac{n - 7}{2n + 1} \cdot \frac{n - 7}{2n + 1} \cdot \frac{n - 7}{2n + 1}$$

Ti suggerisce niente questa scrittura?
Leo: *È un prodotto! Posso considerare il prodotto di tre successioni uguali, calcolare il limite di*

$$a_n = \frac{n - 7}{2n + 1}$$

e poi basta farne il cubo alla fine.

Cerco di proporre esercizi *non standard* il primo dei quali è il seguente: Costruisci due successioni a_n e b_n tali che a_n tenda a zero, b_n tenda a $+\infty$ e risulti:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$$
$$2)\ \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$$
$$3)\ \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 5$$

Leo: *a_n potrebbe essere $\frac{1}{n}$ che sappiamo tende a zero* [indica la colonna degli esempi] *mentre b_n potrebbe essere n.*
I: Ma l'esercizio ti chiede di costruire queste due successioni in modo che sia verificata ogni volta una delle condizioni sul limite del prodotto. Come le hai scelte te, il prodotto tra a_n e b_n è 1, e quale è il limite per n che va a $+\infty$ di questa successione?
Leo: *Se vale sempre* 1 *anche il limite dovrebbe essere* 1.
I: E quindi così come le hai scelte le due successioni non vanno bene per nessuna delle tre richieste. Prima di continuare una domanda, come è possibile che il limite di un prodotto di due successioni con limite fissato possa cambiare?
Leo: *Non ho capito la domanda!*
I: Anche nell'esercizio di prima hai usato il teorema del limite del prodotto di due successioni a_n e b_n. Se sappiamo il limite delle due successioni a_n e b_n, allora possiamo calcolare il limite di $a_n \cdot b_n$, quindi questo limite è fissato una volta che sono fissati, come nel caso del nostro esercizio, i limiti di a_n e b_n. Come è possibile allora costruire successioni a_n e b_n sempre con lo stesso limite in modo che il limite del loro prodotto cambi?
Leo: [ci pensa un po'] *Ma se per esempio prendiamo $a_n = \frac{2}{n}$ e b_n come prima i limiti di a_n e b_n sono sempre* 0 *e* $+\infty$*, ma il loro prodotto è* 2 *che ha limite* 2*!*
I: Allora c'è qualcosa che non va nel teorema sul limite di una successione prodotto di altre due successioni?
Leo: *Penso di no...forse perché uno dei due limiti è zero...aspetta ma qui c'è scritto se esistono finiti i limiti di a_n e b_n, mentre in questo caso il limite di b_n è $+\infty$.*
I: Dagli esempi che hai fatto dovresti riuscire a costruire due successioni a_n e b_n almeno per uno dei tre punti.
Leo: *Sì, per l'ultimo caso basta che scelgo $a_n = \frac{5}{n}$ così almeno il prodotto viene* 5 *e così il limite è* 5.
I: Bravo, e per gli altri due casi?
Leo: *Per il secondo caso potrei prendere b_n sempre uguale a n e $a_n = 0$, almeno il prodotto viene* 0*, ma non sono sicuro, e poi questo "trucco"*

non lo riesco ad usare per far sì che il prodotto abbia limite $+\infty$.
I: Intanto guardiamo il secondo caso, perché non sei sicuro?
Leo: *Perché qui c'è scritto a_n che tende a zero, mentre se la scelgo già uguale a zero non è che ci si avvicina, c'è già!*
I: Allora cerchiamo qualche altra idea che magari ci possa aiutare anche per il primo caso. Non ti dimenticare dell'idea iniziale che hai avuto, ma cerca di riadattarla a queste nuove richieste, ricordati anche degli esercizi che abbiamo fatto finora.
Leo: *Abbiamo visto una successione che andava a $-\infty$ e una che tendeva a $\frac{1}{8}$. Forse prendendo la prima e cambiando il segno posso rispondere alla prima richiesta...se prendo:*

$$-\frac{1-n^3}{n^2+n}$$

il limite è $+\infty$.
I: È vero ma non stai cercando una successione che ha limite $+\infty$, ma due successioni con limite rispettivamente 0 e $+\infty$ tali che il loro prodotto abbia limite $+\infty$. L'idea che hai avuto non è da buttare ma ci devi lavorare un po'. Consideriamo che quella che hai detto sia la successione prodotto, allora devi *estrarre* due successioni con le caratteristiche richieste il cui prodotto sia:

$$-\frac{1-n^3}{n^2+n}$$

Leo: *Vediamo posso prendere $a_n = n^2+n$ e $b_n = -(1-n^3)$.*
I: Che limiti hanno queste due successioni?
Leo: 0 *e* $+\infty$.
I: Lo sapresti dimostrare?
Leo: *n^2 e n tendono a più infinito e quindi anche la somma tende a più infinito...mmh, no non va bene doveva tendere a zero.*
I: Tra l'altro se consideri il prodotto delle tue due successioni non ottieni:

$$-\frac{1-n^3}{n^2+n}$$

ma

$$-(1-n^3)\cdot(n^2+n)$$

Leo: *È vero...ho capito, se prendiamo $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ il prodotto torna e anche i limiti!*
I: E per quanto riguarda il secondo punto?
Leo: *Si può fare la stessa cosa, se metto sotto n^3 e sopra n^2+n, torna tutto no?*

A questo punto faccio scrivere a Leonardo la definizione di limite di una successione reale per n che tende a $+\infty$, poi propongo la seguente questione:

I: Supponiamo di avere una successione a_n che ha limite zero[1]. I termini della successione possono essere tutti negativi?
Leo: *No, se prendiamo* $\frac{1}{n}$*, sono tutti positivi, però dovrei trovarne una che ha qualche termine positivo e qualche termine negativo*[2].
I: Pensa bene alla domanda, non ti ho chiesto se tutte le successioni con limite zero hanno tutti i termini negativi, ma se ne esiste una. Se me ne trovi una che non ha tutti i termini negativi non rispondi alla domanda, perché potrei comunque pensare che ne esiste un'altra che ha tutti i termini negativi.
Leo: *Allora come posso fare?*
I: O dimostri che per avere limite zero una successione deve avere qualche termine positivo per poter rispondere no, oppure basta trovare una successione che tende a zero e che ha tutti i termini negativi.
Leo: *Non so proprio cosa fare, come faccio a capire quale è la risposta giusta?*
I: Il modo migliore è cercare di leggere cosa vuol dire che il limite della successione è zero, che è la proprietà che sai che ha a_n, e vedere che relazione c'è tra questa caratteristica e il fatto di avere termini positivi o negativi.
Leo: *Vuol dire che da un certo punto in poi il valore assoluto di* a_n *è più piccolo di* ϵ*.*
I: Quindi?
Leo: *Se c'è il valore assoluto non ci interessa del segno,* a_n *può essere negativa o positiva, basta che sia piccola...quindi direi che possiamo trovare una successione che tende a zero e tutta negativa, il problema è che ora non so come trovarla! Vedi anche se mi aiuti non ci riesco a*

[1]È bene osservare la difficoltà intrinseca di questo tipo di esercizi per chi ha un approccio instrumental, o comunque non relational. Bisogna immaginarsi una successione senza averla definita, sapendone solo una proprietà, in questo modo è anche impossibile applicare algoritmi di calcolo alla successione stessa.

[2]Qui la confusione di Leonardo è da una parte quella di fissare una successione in mente con la caratteristica richiesta, il problema è che la domanda è se esiste una tale successione e non se tutte le successioni hanno questa caratteristica. Il proporre un controesempio è dunque inadeguato come risposta. Interessante che il fatto che si chieda se i termini della successione *possono essere tutti negativi* sembra presupporre (vedi principi del linguaggio quotidiano descritti da Ferrari) che ci debba essere almeno qualche termine negativo, questo fa sì che Leonardo *percepisca* come inadeguato il suo controesempio.

risolvere tutto l'esercizio!
I: Ti stai demoralizzando per nulla, ormai il più l'hai fatto, hai capito che la risposta è sì, non è difficile trovare un controesempio anche ripensando alle successioni che abbiamo trovato finora.
Leo: *Di successioni che tendevano a zero ne abbiamo viste, prima avevo preso come a_n la successione:*

$$\frac{1}{n^2+n}$$

Ma questa non va bene perché per esempio per $n=1$ è uguale a $\frac{1}{2}$ che è positivo.
I: Certo, ma questa successione ti può servire comunque, infatti ha una particolarità oltre a quella di tendere a zero, come è il segno di n^2?
Leo: *Maggiore di zero perché è un quadrato.*
I: E il segno di n?
Leo: *Maggiore di zero per $n>0$ e viceversa per $n<0$.*
I: Ricordati cosa rappresenta l'indice n, come hai definito le successioni reali?
Leo: *Come funzioni che ad ogni naturale associano un numero*[3]*.*
I: Esatto, quindi gli indici che consideriamo sono numeri naturali e quindi non negativi.
Leo: *Quindi anche n è positivo.*
I: Proprio così e quindi cosa possiamo dire sul segno della successione:

$$\frac{1}{n^2+n}?$$

Leo: *Che è sempre positiva.*
I: Proprio, quindi qualsiasi naturale tu avessi scelto avresti trovato un numero positivo, non importava prendere 1.
Leo: *A maggior ragione non va bene per quello che mi serve.*
I: È vero non va bene, ma ti può aiutare, devi trovarne una con tutti termini negativi, può essere un buon punto di partenza partire da questa che ha tutti termini positivi!
Leo: *Non capisco a che cosa mi serve...ah sì ho capito forse, se faccio come prima che ho cambiato il segno e ho considerato $-(1-n^3)$ invece di $1-n^3$ per avere che il limite fosse $+\infty$ invece di $-\infty$...quindi posso considerare:*

$$-\frac{1}{n^2+n}$$

[3]Il non specificare significa considerarli tutti nell'accezione di Leonardo, e tutti sempre nella sua idea sono i numeri reali, quelli dove ci sono anche i numeri *strani* come π o $\sqrt{2}$.

I: Ma questa volta non vuoi che cambi il limite, vuoi che il limite sia sempre zero.
Leo: [perplesso e sfiduciato] *È vero, allora non va bene...*
I: Sì che va bene, in questo caso, cambiare segno non cambia il limite che era zero e che zero rimane!
Leo: *È vero, allora perché mi hai detto così?!*[4]
I: Perché la tua idea era giusta, ma rispetto a prima era cambiata la motivazione per cui avevi aggiunto un segno e volevo che te ne rendessi conto. Prima appunto avevi cambiato segno per cambiare di segno il limite in questo caso volevi mantenere il limite ma cambiare il segno dei termini della successione.
Supponiamo sempre di sapere che una successione tenda a zero, i termini di questa successione possono essere tutti maggiori di 10^{-30}? Questo tanto per dire un numero molto piccolo.
Leo: *Sarà come prima penso...*
I: Io non ti dico niente, come ti sei convinto che è come prima?
Leo: *Niente penso che tu voglia che trovi una successione con queste caratteristiche. Allora la definizione di limite ci dice che da un certo punto in poi il valore assoluto di a_n deve essere minore di ϵ[5]...se qui invece di ϵ ci fosse 10^{-30} allora potremmo rispondere no...ma magari ϵ è più grande di 10^{-30} e quindi esiste una successione che tende a zero e con tutti i termini maggiori di 10^{-30}.*
I: Ma ϵ chi lo sceglie?
Leo: *Lo possiamo scegliere noi, abbiamo visto a lezione che se l è il limite di a_n allora possiamo vincere la scommessa ad ogni scelta di ϵ si trova un punto n_0 tale che da lí in poi la successione meno l in valore assoluto è minore di ϵ.*
I: Proprio così in questo caso sappiamo che la successione ha limite zero, quindi per ogni scelta di ϵ si trova un n_0 tale che da n_0 in poi si ha:

$$|a_n| < \epsilon$$

Allora se scegliamo $\epsilon = 10^{-30}$ cosa possiamo concludere?
Leo: *Che da un certo punto in poi la successione deve essere minore di 10^{-30}.*

---

[4] Si può notare una convinzione da contratto didattico, quando un'insegnante ti fa un'obiezione o una domanda di chiarimento vuol dire che c'è qualcosa di sbagliato. Questa convinzione è presente con maggiore forza nelle persone poco sicure di quel che fanno.

[5] È da notare che, forse dovuto anche alla sua insicurezza, Leonardo mette in dubbio le sue convinzioni derivanti da quello che pensa che io voglia ottenere dalla risposta a questa domanda. Un comportamento del genere non solo è molto importante ma anche poco comune.

I: Bene, ultima domanda, sempre per una successione che abbia limite zero, possono esserci termini della successione maggiori di un milione?
Leo: *Sì, per esempio prendo la successione* $a_n = 0$ *che ancora non so se va bene* [sorride] *e basta che magari cambi il primo elemento e scriva* $a_1 = 1000001$*. Il limite rimane sempre zero perché dopo il primo è tutta uguale a zero, ed ha un elemento maggiore di un milione.*

Gli esercizi di calcolo di limiti mettono in grossa difficoltà Leonardo, perché in molti passaggi fa errori di conto, si dimentica di qualche segno, o ha difficoltà dovute ad alcune lacune su argomenti elementari. Dovendo calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ della funzione:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{3x}$$

Leonardo come per le successioni fa una valutazione qualitativa degli infiniti:

Leo: $\sqrt{x^2}$ *è come* x*. Raccolgo a fattore* x^2*:*

$$\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-2}{3x}$$

e posso portare fuori dalla radice x^2*:*

$$\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}{3x}$$

e raccogliere x

$$\frac{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x})}{3x}$$

ora semplifico:

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}}{3}$$

Il limite del numeratore è 1*, mentre il limite del denominatore è* 3*, quindi il limite della funzione è* $\frac{1}{3}$*.*

Dopo la spiegazione, non so quanto convincente[6] sul fatto che la radice quadrata del quadrato di x sia $|x|$, per forzare ancora di più lo scollegamento tra il fatto di aver commesso errori e l'esattezza del limite calcolato chiedo a Leonardo se mi sa spiegare perché nonostante i due errori commessi posso assicurargli che il limite calcolato è esatto. Inizialmente Leonardo sceglie la via più semplice, quella della *compensazione*:

Leo: *Forse il secondo errore aggiusta il primo errore.*

La difficoltà sta nel fatto che Leonardo non si trova di fronte ad errori numerici dove può *quantificare* il peso dei suoi errori. Deve prestare attenzione al fatto che sta facendo un limite per x che tende a $+\infty$. Così gli accenno questa osservazione:

I: Osservato questo, abbiamo detto che in questo passaggio [indicando dove ha estratto la x dalla radice], avremmo dovuto mettere $|x|$ al posto di x. Quindi ci interessa cosa accade alla funzione quando x è in un intorno di più infinito, possiamo restringerci quindi a x positive, per cui $|x| = x$, diverso sarebbe stato il discorso se avessimo calcolato il limite per x che tende a un numero negativo.
Leo: *Non sono sicuro di aver capito questo discorso degli intorni, ma penso di aver capito perché il secondo errore non* <u>*conta*</u>*!*
I: Dimmi.
Leo: *Perché* $\frac{2}{x}$ *quando* x *diventa grande va a zero e quindi* $+0$ *o* -0 *è la stessa cosa.*

Il problema di Leonardo, evidenziato in questi esercizi sui limiti, sta nel gran numero di errori di calcolo che commette per distrazione o, come nel caso della radice quadrata, per lacune nella conoscenza dei simboli usati. Chiedo esplicitamente a Leonardo perché non cerca di porre più attenzione ai conti che fa e poi non li controlla visto che spesso quando li riguardiamo insieme lui stesso si accorge degli errori che ha fatto.
Leonardo risponde che è inutile che controlli perché tanto <u>sa</u> che se fa

[6]Come documentano molti lavori, subentrano molti fattori nelle difficoltà legate alla radice quadrata di x^2, tra cui il significato ambiguo dell'operazione radice quadrata, del valore assoluto di una variabile e non per ultimo la convinzione che x indichi un numero positivo e $-x$ un numero negativo, cioè difficoltà legate probabilmente all'uso del simbolismo algebrico.

il conto 100 volte lo sbaglia 90 volte e che comunque non riuscirà a vedere tutti gli errori che ha commesso in un conto.
A questo punto propongo una specie di gioco, lui calcola un limite richiesto in un esercizio, io lo correggo mentalmente e gli dico il numero di errori, così ha un controllo superiore sulle correzioni da fare, inoltre gli dico se il risultato è giusto e quanti errori sono ininfluenti dal punto di vista del risultato finale.
È molto interessante il fatto che in questo modo, quasi sempre alla prima rilettura Leonardo riesce a trovare tutti gli errori di distrazione e inoltre è significativo che Leonardo sappia bene interpretare il discorso degli errori ininfluenti, capendo che sono riferiti spesso a segni di infinitesimi o di infiniti di ordine inferiore rispetto a quelli *dominanti*.

Un altro esercizio sui limiti che ha un esito interessante è il calcolo del limite per x che tende a 0 della funzione $x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Leo: *Questo* [indicando $\frac{1}{x}$] *va a infinito quindi viene* 0 *per il seno di infinito*[7]*, il problema è che non so quanto vale il seno di infinito.*
I: Ti ricordi come è fatta la funzione seno? Guarda come è fatto il grafico anche sugli appunti.
Leo: *È* 1 *il seno di infinito?*
I: Non puoi calcolare il seno in infinito, dovresti calcolare il limite del seno di x per x che tende a più infinito, ma proprio per la periodicità della funzione si dimostra che non esiste questo limite.
Leo: *E allora non esiste il limite della funzione che devo calcolare?*[8]
I: L'unica cosa che sappiamo è che la funzione seno è limitata, è compresa tra 1 e -1, e poi sappiamo calcolare il limite per x che tende a 0 di x^2.
Leo: *Sì è uguale a zero.*
I: Ora, se guardi tra i teoremi che hai scritto all'inizio, ne trovi uno che ti dice che una funzione infinitesima per una limitata è infinitesima, quindi il limite che cercavamo è zero.

[7]Da notare che non si preoccupa del segno dell'infinito.

[8]È abbastanza naturale questa deduzione, il limite del prodotto è il prodotto dei limiti, se questi limiti esistono, se uno dei due non esiste questo prodotto non si può fare.
È da notare anche lo stupore di Leonardo, non si è abituati a trovarsi di fronte a funzioni che non hanno limite, forse è stato detto che ci sono funzioni senza limite, ma poi non ci sono esercizi su queste. È un piccolo compromesso, ben più difficile è dimostrare che un limite non esiste (problema teorico), a trovare un limite (può bastare applicare un algoritmo e la conoscenza di limiti notevoli).

Leo: *È vero, però ci sono delle cose che non mi tornano, una te la volevo chiedere subito, che senso ha parlare di una funzione limitata che non ha limite? E poi questo teorema, forse, anzi sicuramente, non l'avevo capito, mi sembrava ovvio, se moltiplico* 0 *per un numero ottengo* 0*, ma qui non moltiplico per nulla. Cioè il teorema mi dice che se ho una funzione senza limite la posso moltiplicare per una funzione e a questo punto ha limite, pensavo che se non ha limite non ce l'ha mai.*

Queste considerazioni, che possono essere considerate anche per qualche verso *ingenue*, sono segno da una parte di un disagio linguistico (l'uso della parola limitato, con il significato diverso dal linguaggio quotidiano di avere limite) e dall'altra di una riflessione su un teorema che è del tutto inusuale, a maggior ragione tra chi ha difficoltà in matematica.

Leo: *Lo so che sono domande sceme, è che non capisco!*

Nell'incontro sulla continuità, dopo avermi ricordato la definizione di continuità, mi spiega che se una funzione è continua si vede dal grafico: è continua se non ci sono salti. Ma interessante è come spiega questa conclusione:

Leo: *All'inizio non capivo cosa c'entrava il salto con la definizione che ci era stata data, con i limiti. Il fatto è che spesso non capisco e mi sembra di essere l'unico perché tutti annuiscono e quindi quasi mi vergogno e non chiedo niente. Allora rinuncio a capirci qualcosa, ma questo mi dá noia, non mi fa stare tranquillo. Per esempio in questo caso non capivo che c'entrava il fatto che il limite della funzione fosse* $f(x_0)$ *con il fatto di non aver salti. Poi forse ci sono arrivato...ma non sono sicuro. Allora la definizione di limite significa che la funzione va verso quel numero, supponiamo che sto arrivando di qua* [disegnando uno schizzo di funzione partendo da sinistra] *e che il limite in zero è* 1*, allora vuol dire che la funzione fa così* [disegna la funzione che arriva fino a 1 in 0]*, se ora, tutto d'un tratto la funzione in* 0 *vale* 1000 *allora devo ripartire da* 1000 *e quindi c'è un salto. Magari sto dicendo una marea di cavolate, ma me lo sono spiegato così, certo che a prima vista gli* ϵ *i delta e i valori assoluti non sembrano avere molto a che fare con i salti della funzione.*

Quasi sempre quando propongo a Leonardo un esercizio di quelli che sono stati lasciati a lezione, chiedo spesso prima il significato di quello che viene richiesto.
Un'occasione del genere è capitata per l'esercizio che chiedeva per quali valori di k la funzione:

$$y = \begin{cases} arctan\frac{1}{x-2} & x > 2 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} + k & x < 2 \end{cases}$$

è prolungabile con continuità in $x = 2$.

Leo: *In pratica la funzione è definita diversamente dopo* 2*, allora bisogna vedere se disegnandola si attacca bene in* 2*, l'unica cosa che non capisco è cosa c'entra k!.*

A questo punto gli chiedo come si può fare a vedere se la funzione si attacca bene (cioè gli chiedo l'algoritmo che pensa di dover applicare) e qui ricordandosi di esempi fatti in classe spiega che hanno controllato se il limite destro e sinistro nel punto considerato (in questo caso $x = 2$) coincidono. Chiedo allora a Leonardo perché secondo lui hanno fatto così:

Leo: *Mi sembra la stessa cosa di prima, cioè faccio il limite da una parte, e vuol dire che la funzione arriva da quella parte a* 2 *all'altezza di questo limite, se anche dall'altra parte arriva alla stessa altezza allora non ci sono salti*[9]*. Allora devo calcolare questi due limiti:*

$$\lim_{x\to 2} arctan\frac{1}{x-2}$$

e

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$$

I: In realtà non devi calcolare i limiti per x che tende a 2, ma il primo per x che tende a 2 da destra e viceversa per il secondo.
Leo: *Ma cosa cambia a parte il fatto di scriverlo in modo diverso?*

[9]In realtà in quello che dice Leonardo c'è qualcosa che non va. Anche lui probabilmente ha frainteso il testo, non si chiede se la funzione è continua in 2 (dove non è definita), ma se è prolungabile con continuità. Si potrebbe pensare che nel caso in cui la funzione fosse prolungabile con continuità, definendola in $x = 2$ in maniera che non sia continua, e chiedendo a Leonardo se è continua, lui risponda di sì. In quanto con il suo procedimento non distingue tra funzioni continue e con discontinuità di prima specie.

I: Intanto la funzione di cui devi verificare la continuità è definita in un certo modo per $x > 2$ e in un altro per $x < 2$ e poi anche per quanto riguarda il risultato può succedere che il limite per x che tende a 2 delle due funzioni non esista, nonostante che il limite destro, o sinistro esista.
Leo: *Mi sa che non ho mica capito la seconda parte del tuo discorso, comunque il limite destro è l'arcontangente di infinito...mi sembra che sia* $\frac{\pi}{2}$.

Anche qui Leonardo si dimentica di studiare il segno della funzione. Quando gli faccio notare, grafico alla mano, che il limite dell'arcotangente cambia se è per x che tende a più o meno infinito, Leonardo annuisce ma si blocca completamente sul da farsi.

I: Come hai fatto a dire che viene arcotangente di infinito?
Leo: *Perché se* x *è* 2 *il denominatore è zero.*
I: Esatto, quello che devi vedere è se per x che si avvicina a 2 da destra $x-2$ è maggiore di zero o minore, il segno del denominatore determinerà se il limite è più o meno infinito. In questo caso viene più infinito e quindi il limite per x che tende a 2 da destra della nostra funzione è proprio $\frac{\pi}{2}$. Come vedi però, proprio in questo caso, non esiste il limite per x che tende a 2 di $arctan\frac{1}{x-2}$ infatti se calcoli il limite da sinistra ottieni $-\frac{\pi}{2}$ ovvero i due limiti, destro e sinistro, sono diversi.
Leo: *Sì ho capito, se x viene da destra è un più grande e quindi* $x-2$ *è maggiore di zero.* 1 [il numeratore] *è maggiore di zero e quindi la frazione è positiva. Ora devo fare il limite per x che tende a* 2 *da sinistra di:*

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}+k$$

Il numeratore è $4-6+2$, *quindi* 0 *e il denominatore è* $4-10+6$, *perciò è una forma indeterminata del tipo* $\frac{0}{0}$ *e poi cè* k, *che come abbiamo detto prima* [nella spiegazione sul significato di parametro che non ho riportato] *è una costante e quindi rimane* k.

Questo esercizio è inaspettatamente più complicato, perché diverso da altri fatti: il confronto degli infinitesimi non è tipico. La cosa interessante è che Leonardo cerca comunque analogie non banali per confrontarli e si accorge che non può usare i soliti metodi (raccolta a fattore del termine di grado più alto) usati per il confronto di infiniti:

Leo: *Non posso fare come al solito, perché anche se raccolgo* x^2*, poi quando* x *mi va a due, questi termini* [indica quelli di grado minore di due] *non vanno a zero, perché sotto rimane* 2 *o* 4*. Penso che non vada a infinito né a zero, perché essendo dello stesso grado andranno a zero nello stesso modo*[10]*, però non so come fare a provarlo.*
I: Allora cerchiamo di dire quello che sappiamo sul numeratore e sul denominatore: tutti e due si annullano in $x = 2$. Questo significa che entrambe hanno un fattore $x - 2$. [Chiedo a Leonardo se conosce questo risultato (teorema di Ruffini) e lui dice che sicuramente non se lo ricorda, però forse l'ha fatto] Prova a fattorizzare i due polinomi.

Studiamo una strategia con Leonardo, che di fattorizzazione di polinomi dice di non sapere molto e anche qui, pur in maniera molto laboriosa, riesce a cavarsela in una vera e propria, per lui, attività di problem-solving. Avendo osservato che $x - 2$ è un fattore riesce a concludere che i due polinomi saranno il risultato di $x - 2$ per un altro fattore di primo grado e non avendo ancora *interiorizzato* che trovare le radici equivale a trovare i fattori di primo grado e non conoscendo l'algoritmo di divisione dei polinomi, si costruisce (con il mio aiuto per la scrittura del generico polinomio di primo grado) l'algoritmo noto con il nome di forza bruta. Ovvero moltiplica $x - 2$ per $ax + b$ e lo uguaglia una volta al numeratore e una volta al denominatore. Senza citarlo (e forse senza conoscerne l'esistenza) usa il principio d'identità dei polinomi e, con qualche errore di calcolo, riesce a fattorizzare i due polinomi e finalmente vede uno spiraglio:

Leo: *Qui anche se è zero posso semplificare vero? Quindi mi viene:*

$$\frac{x-1}{x-3}$$

[10] In realtà questo è ovviamente sbagliato perché non conta il grado del polinomio ma quello del fattore $x - 2$, ma pur nell'errore mi sembra un'osservazione interessante perché di fronte ad un fatto nuovo Leonardo cerca analogie ma di natura matematica. Per far notare questa cosa e per dare un suggerimento specifico, chiedo a Leonardo di calcolare il limite per x che tende a 2 di

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}$$

ovvero

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$$

e il limite per x che va a 2 da sinistra è -1. Quindi tutto il limite è $-1+k$ e per essere continua la funzione deve essere:

$$-1+k=\frac{\pi}{2}$$

ovvero $k=\frac{\pi}{2}+1$.

Finito l'esercizio Leonardo chiede:

Leo: *Dimmi se ho capito la storia sui limiti. In questo secondo caso, non era influente che x tendesse a 2 da sinistra, infatti anche se x tendeva a 2 da destra veniva sempre $\frac{1}{-1}$, non cambiava il segno.*

Anche l'aver risolto l'esercizio non rassicura Leonardo che è convinto che senza il mio aiuto non sarebbe riuscito a far niente:

Leo: *Questa cosa della fattorizzazione dei polinomi non la sapevo e poi se non mi correggevi te avevo fatto i soliti errori di calcolo.*

Sulle derivate il lavoro di scrivere su tre colonne le definizioni, i teoremi e gli esempi fa risaltare la gran quantità di teoremi fatti rispetto agli argomenti precedenti, così con Leonardo, oltre che a fare gli esercizi dati a lezione, discutiamo anche di questi risultati.
Partiamo però dal solito esercizio fatto con Luigia, ovvero riconoscere per quali k, una funzione definita a tratti è derivabile. I risultati di questo esercizio non sono di per sé molto interessanti, se non che, come Luigia, Leonardo calcola i limiti delle derivate e non dei rapporti incrementali. Non dico nulla al momento ma mi viene in mente di dare il solito tipo di esercizio in cui si chiede di verificare se la funzione è continua e derivabile in 0, scegliendo la seguente funzione:

$$y=\begin{cases} x^2+3x+1 & x\geq 0 \\ 3e^x & x<0 \end{cases}$$

Leo: *Per vedere se è continua faccio i due limiti da destra e da sinistra. Allora il limite per x che tende a zero da destra è $0+0+1$, quindi 1, mentre il limite per x che tende a zero da sinistra è $3e^0$, quanto è e^0?...ah sì 1, e quindi il limite è 3. Perciò la funzione non è continua. Quindi se non è continua non è nemmeno derivabile.*

Leonardo ha scritto sulla colonna dei teoremi il fatto che una funzione derivabile è continua, ma anche che una funzione se non è continua non è derivabile. Questo denota come dal punto di vista logico non si accorga dell'equivalenza delle due proposizioni, ma è da notare anche come si ricordi di questo risultato e lo applichi immediatamente all'esercizio. Cerco di tornare all'errore nell'esercizio precedente, chiedendo a Leonardo come avrebbe risolto l'esercizio se fosse stata chiesta solo la derivabilità:

Leo: *Avrei calcolato i limiti delle derivate come ho fatto prima.*
I: Proviamo per esercizio, cosa ti aspetti che venga?
L: *Come per i limiti della continuità dovranno venire due limiti diversi. Le due derivate sono* $2x^{2-1} + 3 \cdot 1x^{1-1}$*, quindi* $2x + 3$ *e* $3e^x$ *perché la derivata di* e^x *non cambia vero? Quindi il limite per* x *che tende a zero da destra è* 3*, mentre il limite per* x *che tende a zero da sinistra è...no devo aver sbagliato qualcosa negli indici della prima derivata...come al solito ho fatto qualche errore...Non riesco a trovare l'errore ma ci deve essere per forza, la funzione non è derivabile.*

È interessante notare la fiducia che Leonardo ha nel risultato teorico, non lo mette mai in discussione, tanto è vero che quando gli dico che sulle derivate e sui limiti di queste ultime non ha fatto nessun errore, Leonardo è convinto di aver sbagliato i calcoli sulla continuità:

Leo: *Allora devo aver sbagliato qualcosa prima, vuol dire che la funzione è continua.*

Come per Luigia, anche in questo caso, dopo esserci accertati che non c'è stato nessun errore di calcolo, ricordiamo con Leonardo la definizione di funzione derivabile in un punto, e partendo dalla definizione e dai limiti dei rapporti incrementali Leonardo si accorge con grande sollievo che la funzione è effettivamente non derivabile.

Le sezione sulle funzioni derivabili è effettivamente una delle più importanti del corso, con Leonardo cominciamo dal legame tra segno della derivata e studio della monotonia di una funzione derivabile. Dopo che Leonardo riporta il legame derivata positiva (negativa) - funzione crescente (decrescente), gli chiedo:

I: Sapresti ricostruire senza leggere sugli appunti un'idea della dimostrazione?
Leo: *Non credo proprio.*
I: Proviamo a farlo insieme. Intanto fissiamo cosa vogliamo dimostrare. Quale di queste relazioni dimostriamo? Scegli te.
Leo: *Non so...facciamo che se la derivata è positiva allora la funzione è crescente.*
I: Bene. Per prima cosa cerchiamo di chiarire cosa vogliamo dimostrare: quale è o quali sono le nostre ipotesi e quale è la nostra tesi?
Leo: *L'ipotesi dovrebbe essere 'se la derivata è positiva' e la tesi 'allora la funzione è crescente'.*
I: Sì, ricordando che abbiamo supposto inizialmente che la funzione sia derivabile. Inoltre bisogna dire dove ipotizziamo che la funzione sia positiva: in un punto? In un intervallo? Questo lo decido io vai, supponiamo che la funzione abbia derivata positiva in un punto x_0 e dimostriamo che è crescente in x_0. Bene, ora cerchiamo di spiegare a chi non conosce i termini che abbiamo usato cosa significano ipotesi e tesi, questo ci potrà servire anche per la dimostrazione.
Leo: *Che se la derivata calcolata in x_0 è maggiore di zero allora la funzione in x_0 cresce.*

La spiegazione di Leonardo è una parafrasi, l'unica parola tradotta nel suo significato matematico è *positiva*, è interessante notare che non gli viene in mente di spiegare cosa significa *derivata* e che traduce *crescente* come si potrebbe trovare su un dizionario di Italiano.

I: Pensi che così una persona che non sa nulla di quello di cui stiamo parlando, abbia capito almeno cosa vogliamo dimostrare?
Leo: *Sì penso che capisca cosa si vuole dimostrare, poi però non penso che capirebbe la dimostrazione.*
I: Io non sono così convinto, non gli hai spiegato cosa significa derivata, né tanto meno che la funzione cresce in x_0.
Leo: *Ah, neanche questo sa*[11]*. Quindi una funzione ha derivata positiva se il limite del rapporto incrementale è maggiore di zero:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

[11] Sembra strano che Leonardo possa pensare che ci sia bisogno di spiegare cosa significa positiva e non derivabile.

...invece crescente, vuol dire che cresce...non mi viene un altro modo per spiegarlo...che è fatta così! [e disegna lo schizzo di una funzione crescente]
I: Pensi che ti sia stata definita così? Prova a vedere sugli appunti.
Leo: [dopo aver guardato sugli appunti e sul libro] *No...qui dice che una funzione è crescente in x_0 se esiste un intervallo I di centro x_0 tale che per ogni $x < x_0$ nell'intervallo si ha: $f(x) < f(x_0)$ e per ogni $x > x_0$ nell'intervallo si ha: $f(x) > f(x_0)$...si capisce anche così però a me sembra più chiaro come l'avevo detto io!*
I: Guarda qui sul libro, queste due condizioni sono riassunte in un'unica condizione. La funzione è crescente in x_0 se esiste un intervallo di centro x_0 tale che per ogni punto x dell'intervallo diverso da x_0 si abbia:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

È facile provare che questa condizione è equivalente alle due che hai detto tu, cioè che se vale questa valgono anche le altre due e che se valgono quelle due allora vale questa, prova a farlo a casa[12].
Bene, ora sappiamo che, per ipotesi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

e da questo vorremmo dedurre che esiste un intervallo di centro x_0 tale che, per ogni x dell'intervallo, diverso da x_0, si abbia:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Leo: [visibilmente *emozionato*] *Ho capito! Ho capito!* [andando a controllare per sicurezza la colonna dei teoremi che avevamo fatto sui limiti] *Sappiamo che se il limite è maggiore di zero, allora la funzione è maggiore di zero vicino a quel punto...il problema è che non mi sembra...no non c'è scritto che esista l'intervallo di centro x_0, qui c'è scritto un intorno.*
I: Bene, l'idea è proprio questa...poi da un intorno si può *ritagliare* un intervallo di centro x_0 ma il passaggio importante è quello che hai fatto tu.
Leo: *Non avrei mai creduto che senza ricordarmela avrei saputo rifare una dimostrazione!*

[12]A posteriori non son convinto che per Leonardo questo sia risultato un esercizio facile, proprio conoscendo i suoi problemi sulla risoluzione di disequazioni.

A questo punto *alzo ancora un po' il tiro* e gli chiedo di rileggere e in modo da sapermelo raccontare l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Rolle. Leonardo prende tutto il tempo che gli è necessario e poi mi ripete enunciato e dimostrazione del teorema. Alla mia domanda se ha qualche domanda da fare sulla dimostrazione o sull'enunciato, Leonardo risponde di no, che gli sembra di aver capito, a questo punto gli chiedo se ha usato nella dimostrazione tutte le ipotesi e dove le ha usate. Leonardo forse ricordandosi di un'eccezione fatta a lezione dice:

Leo: *Se non supponiamo che la funzione sia continua anche agli estremi abbiamo visto il controesempio!*
I: Certo, questo prova che la condizione è necessaria, non la puoi togliere, ma riesci a trovare dove hai usato questa condizione che la funzione sia continua anche negli estremi nella dimostrazione?

Dopo una lunga ricerca, Leonardo non trova un punto in cui si usi il fatto che la funzione sia continua anche negli estremi. D'altra parte il rimando ad altri teoremi (Weierstrass in questo caso) confonde le idee a chi è sicuramente poco esperto di questioni di questo genere. Ma è interessante la sua reazione:

Leo: *Ma la dobbiamo usare per forza da qualche parte?*
I: Bè in generale no, vorrebbe dire che quell'ipotesi è superflua, perché il teorema si dimostrerebbe anche senza quella ipotesi. In questo caso vorrebbe dire che la tesi è vera anche per le funzioni che non sono continue negli estremi dell'intervallo.
Leo: *E invece non è vero perché appunto c'è il controesempio...però proprio non riesco a trovare dove si usa...l'ho riletto molte volte.*

E arriviamo ai grafici di funzioni, anche qui sarebbe interessante far fare cose particolari a Leonardo, ma ho l'*obbligo* come tutor di lavorare anche sui suoi punti deboli.
È poco importante riportare fedelmente gli esercizi fatti da Leonardo, la cosa interessante è la conferma di tante osservazioni fatte nel corso dei primi quattro incontri[13]. Innanzitutto la difficoltà di Leonardo in questo tipo di esercizio, dove sa di avere un algoritmo da seguire, ma dove puntualmente sbaglia qualche calcolo. La cosa lo deprime

[13]I due incontri conclusivi, come nel caso di Luigia, sono dedicati ad esercizi sui grafici di funzioni o a loro domande particolari.

molto, proprio perché, pensando che in qualche modo siano esercizi tutti uguali, crede che sia particolarmente grave sbagliare:

Leo: *Mi sembra di essere scemo, so che cosa devo fare, so come lo devo fare, ma non ne faccio uno bene!*

In effetti Leonardo commette molti errori, quasi tutti (se non tutti) sono errori di cui può accorgersi. La sua *forza* sta nel fatto di non studiare, a differenza di altri, le varie informazioni sul grafico separatamente. Quando sbaglia, e capita spesso, si accorge che le informazioni che ha ottenuto non sono coerenti con altre informazioni trovate. Non decide arbitrariamente come altri di farsi guidare da alcune informazioni e disegnare comunque un grafico *plausibile*, si rifiuta proprio di disegnare il grafico. È significativo (e naturalmente non ho fatto nessun appunto) che, fin dalla prima volta, Leonardo prima di accennare il disegno del grafico, aspetti di aver finito tutto lo studio di funzione.
Ho cercato di sfruttare questa sua capacità, proprio per l'attività di controllo. È chiaro che cercare un errore (o più) di calcolo, in tutti i conti fatti nello studio di una funzione è come cercare un ago in un pagliaio. Ma come detto Leonardo spesso si accorge quali informazioni sono *strane* se combinate tra loro, e quindi può restringere il suo controllo ai calcoli che coinvolgono queste informazioni.
Un'altra cosa interessante è che, a differenza di Luigia, Leonardo non ami questo tipo di esercizi e lo dica apertamente:

Leo: *Mi sembrano tutti uguali!*

APPENDICE D

Incontro comune

Come detto, dopo i sei incontri c'è stato un incontro comune a Luigia e Leonardo, pochi giorni prima della prova scritta. Si è trattato di una simulazione di una prova scritta, quindi in realtà il mio compito si è limitato a preparare quattro esercizi da far fare ai due in due ore e mezzo. Ho preparato quello che poteva essere un compito standard (massimi, minimi, estremi superiori e inferiori dell'insieme di valori di una successione reale, grafico di una funzione, ricerca del valore di un parametro affinché una certa funzione sia derivabile) e ho aggiunto un esercizio non standard, ovvero la produzione di esempi di funzioni con determinate caratteristiche: monotone in un certo intervallo, continue e non derivabili in un determinato punto (diverso da zero per togliere il classico esempio del valore assoluto), con integrale di valore fissato tra due estremi, etc.
Queste le cose più interessanti che ho notato:

- Luigia inizia subito dall'esercizio sul grafico di funzione, è quello che le dá più sicurezza, perché è convinta di sapere cosa deve fare. Proprio il motivo che Leonardo ha dato per giustificare il fatto che questo tipo di esercizio non gli piace.
- Leonardo inizia proprio dall'esercizio non standard. Può essere una decisione strategicamente discutibile, ma ci sono da notare due cose: non è detto che per Leonardo questo esercizio sia più difficile degli altri, e magari ne è consapevole. Inoltre in questo caso l'obiettivo non è detto che sia di prestazione, essendo una prova è forse più appropriato *provare* gli esercizi che ci sembrano meno standard per vedere come ci sappiamo muovere in questi casi, che nel compito si potrebbero verificare. D'altra parte molti, anche nel corso di Analisi ad Informatica, di cui ho tenuto le esercitazioni, tentano di *specializzarsi* nell'esercizio sul grafico di funzioni che sanno essere quasi sempre presente. Questa tattica si dimostra comunque molto rischiosa, in quanto spesso se il grafico è sbagliato, non c'è altro.

- I due potevano parlare tra loro per mezz'ora alla fine della prova per chiedere consigli. Leonardo cerca di spiegare la sua idea sull'esempio di funzione di cui sa il valore dell'integrale in un certo intervallo a Luigia, che risponde:
  L: *No, quell'esercizio non l'ho fatto, non l'avevo mai visto, e poi l'integrale nel compito non ci dovrebbe essere, non ha detto così la professoressa?*
  A conferma della diversità delle richieste dei due, Luigia chiede a Leonardo se il massimo dell'insieme dei valori della successione torna anche a lui 3.