Leggi logiche e schemi di ragionamento

M. V. Di Leonardo[1]

Sommario

La logica, in quanto riflessione sui modi di ragionare, può essere usata come valido strumento per la comprensione di una dimostrazione.

Questo articolo si propone di mostrare in quale modo la logica matematica si può usare come modello per il ragionamento. Si analizzano gli schemi di deduzione più frequentemente usati, utilizzando alcuni elementi di calcolo enunciativo e predicativo. Si fa vedere come si possono ricavare dalla tautologia principi utili al ragionamento matematico e si esaminano alcune semplici dimostrazioni per individuare lo schema di ragionamento in esse adoperato.

Summary

Logic, in that reflection upon the ways of reasoning, can be used as efficient tool to understand a demonstration.

This article is intended to show how mathematical logic may be used as a model for mathematical reasoning. The schemes of deduction more frequently used are analysed, utilising rudiments of statement and predicative calculus. Is showed as useful principles of mathematical reasoning can be obtained from tautologies and some simple demonstrations are examined to single out the scheme of reasoning that is employed.

Résume

La logique, comme réflexion sur la façon de raisonner, elle peut être employé comme instrument pour la compréhension d'une demonstration.

Cet article se propose de montrer dans quelle manière on peut utiliser comme modèle pour le raisonnement la logique mathématique. On analyse les schémas de deduction plus fréquemment employés, en utilisant quelques éléments du calcul énonciative et prédicative. On fait voir comme on peut déduire a partir de la tautologie, principes utiles au raisonnement mathématique et on examine quelques simples démonstrations pour repérer le schéma y employé du raisonnement

---

[1] -Componente del GRIM, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo. Lavoro eseguito nell'ambito del MURST.

Leggi logiche e schemi di ragionamento

M. V. Di Leonardo

Premessa

Gli insegnanti costatano di continuo le difficoltà, che gli studenti incontrano quando si trovano di fronte ai primi teoremi e alla richiesta di fornire una dimostrazione. Tale difficoltà, a volte, rimane nascosta, ma ciò non significa che sia stata superata; gli studenti, di solito, riescono a ripetere le dimostrazioni proposte dall'insegnante, ma per lo più non sono capaci di produrre una dimostrazione in modo autonomo, e quando lo fanno non sono certi della sua correttezza.

Gran parte degli studenti non comprende né la necessità di una dimostrazione in matematica, prima ancora delle sue modalità, né quale sia la differenza tra "provare", "verificare" e "dimostrare", forse perché in altre materie scientifiche (fisica, chimica) il concetto di dimostrazione è inevitabilmente associato ad osservazioni, misurazioni empiriche e prove sperimentali.

Anche se, in matematica, come in ogni teoria scientifica, molti concetti si imparano sulla base di esperienze ed osservazioni, quando si vuole costruire un insieme di conoscenze "sicure", occorre precisare le "regole del gioco"; pertanto bisogna stabilire, quali sono gli enti fondamentali da considerare, quali relazioni intercorrono tra essi e quali ragionamenti sono corretti.

In ogni teoria scientifica le prime verità sono di solito suggerite dall'intuizione, s'introducono cioè certe proposizioni evidenti dette postulati o assiomi. Ma l'intuizione non basta per scoprire nuove verità ed interviene allora il ragionamento, cioè l'elaborazione, fatta dal pensiero, dei dati forniti dall'intuizione e dall'esperienza. Il ragionamento, oltre a dimostrare ogni singolo teorema, serve a stabilire se vi sia un legame logico tra una qualsiasi proposizione e quelle trovate o ammesse precedentemente, quale grado di certezza vi sia in tali proposizioni e quali di esse siano strettamente necessarie per la costruzione della teoria.

La matematica costituisce un'educazione formativa della mente, sviluppa tutte le facoltà dell'intelletto, affina in particolare le facoltà logiche, insegna a ragionare e a parlare con precisione.

J. Dieudonné [2], uno dei grandi matematici del nostro tempo dice che: *«il risveglio della vocazione matematica* [che] *si ha il più delle volte verso i quindici anni* […] *può essere ritardato da un insegnamento che non preveda il concetto di dimostrazione»*

Nell'insegnamento della matematica il ruolo delle dimostrazioni è perciò fondamentale; lo studente che non capisce la necessità di dimostrare potrà impadronirsi delle tecniche dimostrative, memorizzandole senza esserne consapevole e perciò le userà a caso. Sapere è diverso da sapere usare, lo studente che sa eseguire un'addizione ne conosce l'algoritmo ma ciò non significa che sappia cosa sia l'addizione, una cosa è eseguire ed un'altra eseguire con consapevolezza.

Lo studente quindi, non deve in alcun modo cercare di imparare a memoria una dimostrazione, perché ciò non ha alcun valore. Egli deve invece sforzarsi di capire, e così facendo si accorgerà che a poco a poco si svilupperà in lui l'attitudine a trarre le conseguenze dalle premesse, e proverà il "piacere" di fare proprie le dimostrazioni che gli saranno insegnate.

Lo studente diventa consapevole di una dimostrazione se ne capisce la logica interna e le regole logiche che la rendono accettabile (soprattutto se si tratta di una dimostrazione indiretta); è preferibile perciò una riflessione sui modi di fare dimostrazioni e l'individuazione di schemi e strategie dimostrative, piuttosto che considerare ciascuna dimostrazione come un caso a sé separata dalle altre.

In ambito scientifico-matematico per logica s'intende una disciplina che si occupa di controllare la correttezza di un ragionamento, si può affermare che essa costituisce l'impalcatura nascosta di qualsiasi ragionamento scientifico.

In altre parole la logica, in quanto riflessione sui modi di ragionare, può essere usata quindi come valido strumento per la comprensione di una dimostrazione.

Che cosa è una dimostrazione matematica?

Il concetto di dimostrazione in matematica, come già accennato, è fondamentale, si potrebbe affermare che non c'è matematica senza dimostrazione, tuttavia non è semplice rispondere alla domanda:

Che *cosa* è una *dimostrazione matematica*?

I matematici P.J.Davis e R.Hersh hanno risolto la questione in maniera scherzosa nel seguente modo:

STUDENTE: Professore, che cos'è una dimostrazione matematica?

MATEMATICO IDEALE: *Non lo sa ?* [...] Incredibile! Una dimostrazione è quello che lei mi ha visto fare alla lavagna tre volte alla settimana per tre anni! Ecco cos'è una dimostrazione.

Così si legge nel brano *Il matematico ideale* [1], che pone l'accento su quanto può essere incomunicabile il lavoro di un matematico, e sul fatto che, *spesso* non si è in grado di spiegare (definire) cos'è una *dimostrazione.*

Dall'etimologia del termine *dimostrazione*: che mostra a partire da, oppure dal greco *apo-deixis*, dove *deixis* significa atto di mostrare, di indicare con l'indice, si evince che, la dimostrazione si può considerare come una catena (sequenza) di ragionamenti che, a partire da enunciati già dimostrati o evidenti, detti *premesse*, determina la certezza del risultato che ne deriva (scaturisce), detto *conclusione.*

E' chiaro che la conclusione sarà valida se la catena di ragionamenti è stata costruita correttamente secondo regole che vengono fissate a seconda del contesto in cui ci muoviamo, tranne quelle logiche che sono valide in qualsiasi contesto.

Per A. Tarski [8] *«Ogni teoria scientifica è un sistema di enunciati che vengono accettati come veri e che possono venire chiamati Leggi o Proposizioni Asserite o, per brevità, semplicemente Asserti. Nella matematica questi asserti seguono uno dall'altro in un ordine definito secondo certi principi* [...] *e sono di regola accompagnati da considerazioni che tendono a stabilirne la validità. Considerazioni di tal genere vengono chiamate Dimostrazioni e gli asserti da loro stabiliti, Teoremi.* [...]».

Secondo G. Lolli [5] « […] *La dimostrazione ha una definizione canonica, consiste nel ricondurre una tesi ad altre affermazioni, da cui quella che interessa segue logicamente»*.

Una delle definizioni più comuni della logica, presenta questa disciplina, come quella parte della filosofia che studia e insegna i modi e le forme del ragionamento condotto con "rigore" scientifico (o più semplicemente come l'analisi dei metodi di ragionamento).

J. Dieudonné [2] sostiene che: *«non può esistere una dimostrazione 'rigorosa' se non all'interno di una teoria assiomatica, dove gli enti e le relazioni 'primitive' sono state specificate e gli assiomi che li collegano sono stati enumerati in maniera completa;* [...] *'mancanza di rigore' è sinonimo di 'mancanza di precisione'*[…]».

Ancora in [1] si legge: *« Si è affermato che ciò che caratterizza la matematica è una cosa chiamata dimostrazione. Secondo alcuni, dimostrazione è il nome del gioco che si fa in matematica. Secondo altri invece, quest'affermazione non ha senso; in matematica ci sono molti giochi diversi.* [...] *Astrazione, formalizzazione, assiomatizzazione, deduzione: ecco gli ingredienti della dimostrazione e le dimostrazioni della matematica moderna, anche se possono trattare materiali differenti ed essere di livello più profondo, danno allo studente o al ricercatore la stessa sensazione espressa nel verso di Edna Millay [Euclide solo ha gettato l'occhio sulla nuda Bellezza]* [...]».

Gli *ingredienti* della dimostrazione sono quelli della Logica matematica o simbolica (Logistica)[2]; infatti, uno dei compiti più importanti del logico è la formalizzazione sistematica e la catalogazione dei metodi validi di ragionamento.

Si può restringere il dominio della logica matematica affermando che uno dei suoi scopi precipui è proprio quello di fornire una precisa e adeguata definizione di dimostrazione matematica, possiamo quindi dire con H.Poincaré [6] che: « [...] *Una dimostrazione veramente fondata sui principi della Logica Analitica si comporrà di una successione di proposizioni, le une, che serviranno da premesse, saranno delle identità o delle definizioni; le altre si dedurranno dalle prime passo a passo; ma benché il legame tra ogni proposizione e la successiva si percepisca immediatamente, non si vedrà di primo acchito come si sia potuti passare dalla prima all'ultima, in modo che si potrà essere tentati di considerarla come una verità nuova. Ma se rimpiazziamo successivamente le diverse espressioni che vi figurano con le loro definizioni e se si seguirà questa operazione finché è possibile, non resteranno più alla fine che delle identità, di modo che tutto si ridurrà a una immensa tautologia* […]».

Vedremo in quale modo la logica matematica può essere usata come modello per il ragionamento, analizzando gli schemi di deduzione più frequentemente usati, servendoci d'alcuni elementi di calcolo enunciativo e predicativo.

[2]- Sistema di Logica formale, che si serve di simboli convenzionalmente fissati per evitare l'ambiguità dei termini linguistici e studiare con maggiore rigore le proposizioni e le dimostrazioni scientifiche .

Cenni di logica

Calcolo enunciativo

La parte fondamentale e più elementare della logica è il calcolo enunciativo (o meno felicemente proposizionale), che studia le proprietà di certe locuzioni dette *connettivi* mediante cui si formano enunciati composti a partire da enunciati semplici.

Per enunciato o proposizione[3] intendiamo ogni espressione linguistica alla quale si possa associare uno e uno solo dei due valori di verità:
vero (in simboli V o 1), falso (in simboli F o 0)[4].
In altre parole ciò che interessa di una frase, in logica, è il suo valore di verità, a prescindere dal contenuto specifico di ciò che afferma.

Il calcolo enunciativo è fondato sui seguenti tre principi della logica aristotelica:
principio di identità- ogni enunciato ha lo stesso valore di verità di se stesso;
principio di non contraddizione- uno stesso enunciato non può essere vero e falso contemporaneamente;
principio del terzo escluso-ogni enunciato può essere o vero o falso, non esiste una terza possibilità ("tertium non datur" dicevano i latini)

I connettivi non sono altro che delle locuzioni come: **non, e**, **o, se...allora**, **se e solo se** che in grammatica sono chiamate congiunzioni proposizionali.
Nel linguaggio naturale tali locuzioni hanno *significato variabile* secondo il contesto, nel calcolo enunciativo è *fissato* uno dei diversi significati, tramite convenzioni che riguardano soltanto la verità e la falsità degli enunciati. Essi sono, quindi degli *operatori*, che agendo su uno o più enunciati, ne producono di nuovi, la verità dei quali dipende esclusivamente dai valori di verità degli enunciati componenti.
Ad esempio due o più enunciati si possono collegare tra loro (connettere) tramite i connettivi: **e**, **o, se...allora**, **se e solo se**; ad ognuno di questi corrisponde un *operazione binaria*, interna all'insieme di tutti gli enunciati, che associa ad una coppia ordinata di enunciati (P_1, P_2), un nuovo enunciato P; mentre al connettivo **non** corrisponde un *operazione unaria*, interna all'insieme di tutti gli enunciati, che associa ad ogni enunciato la sua negazione.

[3] - In logica quando adoperiamo il termine 'enunciato' intendiamo sottolineare che ciò che maggiormente c'interessa è il valore di verità dell'asserto in questione; se usiamo invece il termine 'proposizione' vogliamo sottolinearne il valore concettuale (vedi [8]). La relazione che c'è tra proposizione ed enunciato è la seguente: la proposizione ci dà il significato dell'enunciato, pertanto l'enunciato esprime la proposizione. In altre parole l'enunciato è una proposizione dichiarativa.

[4] -La logica di cui ci occuperemo studia enunciati che assumono solo i valori vero e falso e viene detta, perciò, logica bivalente o binaria.

Il significato dei connettivi è fissato secondo le seguenti definizioni:

Connettivo	Simbolo	Definizione
Negazione logica	$\neg$	Si dice negazione di un enunciato P_1 e si indica con $\neg\mathbf{P_1}$, quell'enunciato che è falso se P_1 è vero e vero se P_1 è falso.
Congiunzione logica	$\wedge$	Si dice congiunzione di due enunciati P_1 e P_2 e si indica con $\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_2}$, l'enunciato che è vero se e solo se P_1 e P_2 sono entrambi veri.
Disgiunzione logica	$\vee$	Si dice disgiunzione di due enunciati P_1 e P_2 e si indica con $\mathbf{P_1} \vee \mathbf{P_2}$, l'enunciato che è vero se almeno uno dei due enunciati P_1 e P_2 è vero.
Implicazione logica (materiale)	$\Rightarrow$	Si dice implicazione di due enunciati P_1 e P_2 e si indica con $\mathbf{P_1} \Rightarrow \mathbf{P_2}$, l'enunciato che è falso solo nel caso in cui P_1 è vero e P_2 è falso.
Coimplicazione logica (materiale)	$\Leftrightarrow$	Si dice coimplicazione di due enunciati P_1 e P_2 e si indica con $\mathbf{P_1} \Leftrightarrow \mathbf{P_2}$, l'enunciato che è vero se P_1 e P_2 sono entrambi veri o entrambi falsi.

Osservazioni

1) La negazione nel linguaggio comune non è così semplice come in logica, ad esempio consideriamo la proposizione: «Qualche volta mi sveglio tardi», possibili negazioni corrette sono: «Non è vero che qualche volta mi sveglio tardi», oppure «Mi sveglio sempre presto», ma certamente non è corretto dire: «Qualche volta non mi sveglio tardi».

2) Nel linguaggio comune la congiunzione viene usata anche in senso temporale e aggiuntivo, cioè nel senso di: e poi, anche, pure, ….
In logica è usata solo nel senso di: *e contemporaneamente.*

3) Nel linguaggio naturale la locuzione **o** ha per lo meno due significati, uno inclusivo (o A o B o entrambi) e uno esclusivo (o A o B ma non entrambi)[5].
Generalmente il significato adottato in logica per la disgiunzione è quello *inclusivo*.

[5]- In latino rispettivamente 'vel' e 'aut..aut'.

4) Nel linguaggio comune quando si afferma: «Se A allora B», si intende assumere la verità di B condizionatamente a quella di A, per questa ragione, di solito, non si prende in considerazione il caso in cui A possa essere falsa.
In logica si è stabilito invece di considerare falsa la suddetta proposizione solo nel caso in cui *A sia vera e B sia falsa*, per questo motivo l'implicazione logica è chiamata anche implicazione materiale[6].
Altra distinzione con il linguaggio comune è che, in logica, l'implicazione indica soltanto $P_1 \Rightarrow P_2$ e non il viceversa come si sottintende a volte.
Non si deve confondere, inoltre, il concetto dell'implicazione con quello della deduzione logica, la prima è un'operazione che si applica alla coppia (P_1, P_2) d'enunciati non necessariamente correlati; la deduzione logica invece è la successione di ragionamenti corretti che a partire dall'ipotesi P_1 conducono ad affermare la tesi P_2 vera, si suppone *P_1 sempre vera e P_1 è sempre correlata a P_2*.

5) La coimplicazione a differenza dell'implicazione è commutativa, cioè se due proposizioni s'implicano a vicenda la verità (falsità) dell'una è sia condizione necessaria sia sufficiente per la verità (falsità) dell'altra. Analogamente a quanto già osservato per l'implicazione non si deve confondere il concetto della coimplicazione materiale con quello della coimplicazione logica.

[6] -In quanto il valore di verità dipende materialmente da quello di A e B.

Tavole di verità fondamentali:

Per determinare la verità o la falsità degli enunciati composti (mediante i connettivi) in dipendenza della verità o falsità di quelli componenti[7] si costruiscono delle tabelle dette Tavole di verità.

1) Negazione

P	**$\neg P$**
V	F
F	V

2) Congiunzione[8]

P_1	**P_2**	**$P_1 \wedge P_2$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3) Disgiunzione[9]

P_1	**P_2**	**$P_1 \vee P_2$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4) Implicazione

P_1	**P_2**	**$P_1 \Rightarrow P_2$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5) Coimplicazione

P_1	**P_2**	**$P_1 \Leftrightarrow P_2$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Da queste si possono ricavare le tavole di verità di qualsiasi enunciato composto.
Per esempio per l'enunciato $P=(P_1 \vee P_2) \Rightarrow (P_1 \wedge \neg P_2)$ si ha la seguente:

P_1	**P_2**	**$\neg P_2$**	**$P_1 \vee P_2$**	**$P_1 \wedge \neg P_2$**	**P**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V

[7] - In una logica a due valori le possibili assegnazioni di valori di verità sono 2^n , dove n rappresenta il numero degli enunciati componenti.
[8] - Detta anche prodotto logico per la sua somiglianza con il prodotto tra numeri.
[9] - Detta anche somma logica per la sua somiglianza con la somma tra numeri.

Mentre per gli enunciati $Q=(P_1 \Rightarrow P_2) \Leftrightarrow \neg(P_1 \wedge \neg P_2)$ ed $R= \neg((P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_1)$ le tavole di verità sono le seguenti:

P_1	P_2	$\neg P_2$	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$	Q
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_2$	R
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Diamo le seguenti definizioni:

1) Due enunciati composti si dicono **logicamente equivalenti** se hanno la stessa tavola di verità.[10]
2) Si definisce **tautologia** una proposizione che è sempre vera qualunque siano i valori di verità delle proposizioni che la compongono[11].
3) Si definisce **contraddizione** una proposizione che è sempre falsa, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni che la compongono[12].
4) Una proposizione che non è né una tautologia né una contraddizione si dice invece proposizione **sintetica**.[13]

Esiste un'evidente analogia tra le tautologie e le identità algebriche, tra le proposizioni sintetiche e le equazioni possibili e tra le contraddizioni e le equazioni impossibili.

[10]- Dall'enunciato Q si deduce che: $\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$ è logicamente equivalente a $P_1 \Rightarrow P_2$ (v. quarta e sesta colonna), pertanto il connettivo logico dell'implicazione può essere considerato soltanto un'abbreviazione di scrittura.

[11]- Per esempio Q.

[12]- Per esempio R.

[13]- Per esempio P.

Le tautologie occupano un posto rilevante in logica, rappresentano «schemi di ragionamento» che sono sempre validi e per questo motivo sono dette anche leggi della logica. Importanti tautologie sono le seguenti:

1)	$\mathbf{P_1 \Rightarrow P_1}$	(principio di identità)
2)	$\mathbf{\neg(P_1 \wedge (\neg P_1))}$	(principio di non contraddizione)
3)	$\mathbf{P_1 \vee (\neg P_1)}$	(principio del terzo escluso)
4)	$\mathbf{P_1 \Leftrightarrow \neg\neg P_1}$	(legge della doppia negazione)
5)	$\mathbf{((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3)) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)}$	(legge del sillogismo ipotetico)
6)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow ((P_2 \Rightarrow P_3) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3))}$	(legge del sillogismo ipotetico)
7)	$\mathbf{((P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_2)) \Rightarrow P_1}$	(legge del sillogismo disgiuntivo)
8)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1)}$	(legge di contrapposizione)
9)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow P_2) \Leftrightarrow \neg (P_1 \wedge \neg P_2)}$	(legge di Filone Megarico)
10)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow P_2) \Leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_2)}$	(legge di Crisippo)
11)	$\mathbf{\neg P_1 \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$	(ex falso sequitur quodlibet)
12)	$\mathbf{P_1 \Rightarrow (P_2 \Rightarrow P_1)}$	(verum sequitur a quodlibet)
13)	$\mathbf{(\neg P_1 \Rightarrow P_1) \Rightarrow P_1}$	(legge di Cardano - Clavio)
14)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow \neg P_1) \Rightarrow \neg P_1}$	(legge di Cardano - Clavio)
15)	$\mathbf{(P_1 \Rightarrow (P_2 \wedge \neg P_2)) \Rightarrow \neg P_1}$	(riduzione all'assurdo)
16)	$\mathbf{(\neg P_1 \Rightarrow (P_2 \wedge \neg P_2)) \Rightarrow P_1}$	(riduzione all'assurdo)
17)	$\mathbf{((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow (P_3 \wedge \neg P_3)) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$	(riduzione all'assurdo)
18)	$\mathbf{((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow P_2) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$	(riduzione all'assurdo)
19)	$\mathbf{((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow \neg P_1) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$	(riduzione all'assurdo)

Mediante apposite regole, dette d'inferenza da tautologie si possono ricavare altre tautologie.
In genere come **regole d'inferenza** del calcolo enunciativo si adottano le seguenti:

1) la regola di **sostituzione** per la quale si ha che:
se X è una tautologia e P_1, P_2,......, P_n i suoi enunciati componenti, e se inoltre X' è il risultato della sostituzione in X di ogni componente P_i con un qualsiasi enunciato e la sostituzione è tale che ogni P_i venga sostituito, per ogni i, sempre con lo stesso enunciato, allora X' è una tautologia.

2) la regola del **modus ponens** (o del distacco) per la quale si ha che:
se X e Y sono due enunciati, se l'implicazione $X \Rightarrow Y$ è una tautologia e se inoltre X è una tautologia, allora anche Y è una tautologia.

Calcolo dei predicati

Il calcolo enunciativo, pur costituendo il fondamento di tutta la logica, rappresenta una schematizzazione riduttiva del linguaggio naturale, e a volte non è sufficiente per la trattazione di svariati temi di carattere scientifico-matematico.

Gli elementi costitutivi di un enunciato sono nomi e verbi, questi ultimi hanno il compito di stabilire un legame tra i nomi, enunciando una proprietà o una relazione tra essi. In logica i nomi si chiamano **argomenti** e le forme verbali **predicati**. Quando un argomento di un enunciato non è specificato si dice che esso è una **variabile.**

Un'espressione del tipo "*x* è pari" non è un enunciato, anche se ne ha la forma grammaticale, perché non conoscendo *x* non possiamo dire se è vera o falsa. La precedente espressione diventa un enunciato quando in essa sostituiamo un numero definito, si tratta quindi di un enunciato dipendente dalla variabile *x*.

In generale un'espressione dipendente da variabili, che diventa un enunciato quando esse sono sostituite da costanti, è detta **predicato**, enunciato aperto oppure funzione enunciativa.

E' evidente che i valori che le variabili possono assumere dovranno appartenere ad un particolare insieme se si vuole che l'espressione abbia senso. Ad esempio nel predicato "*x* è minore di 7", *x* potrà essere un elemento di un qualsiasi insieme numerico, ma non potrà essere un elemento dell'insieme dei giorni della settimana.

L'insieme in cui le variabili di un predicato possono assumere i loro valori è detto **dominio** del predicato.

Gli elementi del dominio che rendono vero il predicato costituiscono l'**insieme di verità** del predicato stesso. Ritornando al predicato "*x* è minore di 7", se consideriamo come dominio l'insieme dei numeri naturali l'insieme di verità sarà $V=\{1,2,3,4,5,6\}$[14];

Un altro modo per ottenere un enunciato da un predicato consiste nell'applicare alle variabili, da cui esso dipende, i quantificatori universale ed esistenziale. Ad esempio le espressioni "ogni numero *x* è pari", " esiste un numero *x* pari" sono enunciati, ed in particolare il primo è falso e il secondo vero.

Dato che fissando il significato delle variabili o vincolandole tramite quantificatori i predicati diventano enunciati veri o falsi, é possibile estendere in modo naturale il calcolo logico e le leggi logiche, date precedentemente, dagli enunciati ai predicati.

Nel calcolo enunciativo la verità degli enunciati composti, tramite i connettivi logici, dipende dai valori di verità degli enunciati componenti; nel calcolo dei predicati, analogamente, i connettivi generano predicati il cui insieme di verità dipende da quello dei predicati componenti.

[14] -Nel seguito indicheremo il dominio e l'insieme di verità di un predicato X rispettivamente con D_X e V_X.

La seguente tabella definisce l'azione dei singoli connettivi:

Connettivo	Simbolo	Definizione
Negazione logica	$\neg$	Si dice negazione di un predicato A e si indica con $\neg$**A**, quel predicato che ha come insieme di verità il complementare di $\mathbf{V_A}$ rispetto a $\mathbf{D_A}$.
Congiunzione logica	$\wedge$	Si dice congiunzione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \wedge B}$, il predicato che ha come insieme di verità l'insieme $\mathbf{V_A \cap V_B}$.
Disgiunzione logica	$\vee$	Si dice disgiunzione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \vee B}$, il predicato che ha come insieme di verità l'insieme $\mathbf{V_A \cup V_B}$.
Implicazione logica	$\Rightarrow$	Si dice implicazione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \Rightarrow B}$, il predicato che , se $V_A \subseteq V_B$, ha come insieme di verità $\mathbf{V_A}$.
Coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	Si dice coimplicazione di due predicati A e B e si indica con $\mathbf{A \Leftrightarrow B}$, il predicato che, se $V_A \equiv V_B$, ha come insieme di verità $\mathbf{V_A \equiv V_B}$.

Esempi

1) Considerato il predicato A: "x è minore di 7" se consideriamo $D_A \equiv N$ risulta $V_A \equiv \{1,2,3,4,5,6\}$, la sua negazione è il predicato $\neg$A: "x è maggiore o uguale a 7" che ha come insieme di verità $V_{\neg A} \equiv N - V_A$.

2) Dati i predicati A: "x è pari" e B: "x è primo" con $D_A \equiv D_B \equiv N$, il predicato congiunzione $A \wedge B$: "x è sia pari che primo", ha come insieme di verità $V_{A \wedge B} \equiv V_A \cap V_B \equiv \{2\}$.

3) Siano: A il predicato "x è minore di 3" e B il predicato "x è compreso tra 2 e 6", se $D_A \equiv D_B \equiv N$, il predicato disgiunzione $A \vee B$: " x è minore di 3 oppure è compreso tra 2 e 6", ha come insieme di verità $V_{A \vee B} \equiv V_A \cup V_B \equiv \{1,2,3,4,5\}$.

4a) Considerati i predicati A: "x è divisibile per 9" e B: "x è divisibile per 3" con $D_A \equiv D_B \equiv N$ si ha $V_A \subset V_B$, e chiaramente l'implicazione $A \Rightarrow B$: "se x è divisibile per 9 allora è divisibile per 3" ha come insieme di verità V_A, cioè tutti i multipli di 9.

4b) Siano A e B rispettivamente i predicati: "*x* è un quadrupede" e "*x* è un cavallo", con *x* elemento dell'insieme degli animali, si ha evidentemente $V_B \subset V_A$, quindi l'implicazione $B \Rightarrow A$: "se *x* è un cavallo allora è un quadrupede" ha come insieme di verità V_B. Consideriamo adesso l'implicazione $A \Rightarrow B$: " se *x* è un quadrupede allora è un cavallo", essa risulta vera se *x* è un cavallo, cioè se $x \in V_B$, oppure se *x* non è un quadrupede (ad esempio se è un canarino), cioè se $x \in (D_A - V_A) \subset V_B$; mentre risulta falsa se $x \in (V_A - V_B)$, per esempio se *x* è un gatto.

5) Con *x* elemento dell'insieme dei triangoli, siano: A il predicato "*x* ha due lati uguali" e B il predicato "*x* ha due angoli uguali", si ha evidentemente che $A \Rightarrow B$ con $V_A \subseteq V_B$ e $B \Rightarrow A$ con $V_B \subseteq V_A$, pertanto la coimplicazione $A \Leftrightarrow B$: "*x* ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali" ha come insieme di verità $V_A \equiv V_B$.

Applicazioni al ragionamento matematico

Quasi tutti i ragionamenti, in qualsiasi teoria scientifica, sono fondati esplicitamente o implicitamente su leggi logiche. Le forme di ragionamento più frequenti sono: i sillogismi, le leggi di contrapposizione e quelle di riduzione all'assurdo.

Non tutti gli enunciati logici sono validi principi di ragionamento, per esempio non lo è l'enunciato $(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (P_2 \Rightarrow P_1)$, e questo perché non è una tautologia. Le tautologie, come abbiamo già detto, rappresentano validi «schemi di ragionamento», vediamo adesso come si possono ricavare da esse principi utili al ragionamento matematico, analizzando alcune semplici dimostrazioni al fine di individuare il tipo di schema deduttivo in esse adoperato.

La maggior parte dei teoremi matematici sono proposizioni di tipo ipotetico, vale a dire implicazioni della forma $P_1 \Rightarrow P_2$, dove P_1 rappresenta l'ipotesi e P_2 la tesi. In ogni caso, quando un teorema non è enunciato esplicitamente sotto forma di implicazione è abbastanza semplice metterlo sotto questa forma[15].

1) Prova diretta

Il metodo fondamentale per provare l'enunciato $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_2}$ è quello di assumere $\mathbf{P_1}$ come vero e dedurre direttamente la verità di $\mathbf{P_2}$.

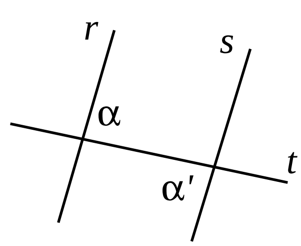
Tuttavia il calcolo enunciativo fornisce diversi metodi ausiliari per provare la suddetta implicazione, per esempio si può trovare un enunciato $\mathbf{P_3}$ tale che:

$\mathbf{P_1 \Rightarrow P_3}$ e $\mathbf{P_3 \Rightarrow P_2}$, e dedurre quindi come vero $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_2}$ per modus ponens dalla seguente tautologia $\mathbf{((P_1 \Rightarrow P_3) \wedge (P_3 \Rightarrow P_2)) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$.

Per illustrare questo metodo ci serviamo del seguente:

Teorema- «Se due rette sono perpendicolari alla stessa retta allora sono parallele.»[16]

Ip: $(r \text{ e } s) \perp t$ $\quad$ $\mathbf{(P_1)}$ $\qquad$ Ts: $r \,//\, s$ $\quad$ $\mathbf{(P_2)}$



Dim.

I. Per ipotesi $\mathbf{(P_1)}$ α e α',alterni interni formati da r e s tagliate dalla trasversale t, sono retti e quindi uguali, $\alpha=\alpha'$ $\mathbf{(P_3)}$, $\qquad$ $\mathbf{[P_1 \Rightarrow P_3]}$

II. se $\alpha=\alpha'$ [17] allora r è parallela a s $\mathbf{(P_2)}$. $\qquad$ $\mathbf{[P_3 \Rightarrow P_2]}$

---

[15] -Ad esempio l'enunciato: "Un angolo ottuso è maggiore della metà di un angolo retto" può essere trasformato in: "Se un angolo è ottuso allora è maggiore della metà di un angolo retto".

[16]- Tratto da-W. Maraschini-M Palma, *Format* , Paravia (Torino), 1998, p. 376.

[17]- per il teorema 15 del testo

2) Prova per contrapposizione

Un altro modo per provare $\mathbf{P_1} \Rightarrow \mathbf{P_2}$ è quello di provare $\neg\, \mathbf{P_2} \Rightarrow \neg\, \mathbf{P_1}$ e sfruttare la legge di contrapposizione; questo metodo di prova indiretta è molto usato.

Citiamo come esempio il seguente:

Teorema- «Se n è un intero e 2 divide n^2 allora 2 divide n.»

Ip: 2 divide n^2, $n \in Z$ $\mathbf{(P_1)}$ Ts: 2 divide n, $n \in Z$ $\mathbf{(P_2)}$

Dim.

I. Se 2 non divide n esisterà $p \in Z$ tale che $n=2p+1$ $\mathbf{(\neg\, P_2)}$;

II. da $n=2p+1$ segue $n^2 = 4p^2 + 4p+1$, quindi 2 non divide n^2 $\mathbf{(\neg P_1)}$. $\mathbf{[\neg P_2 \Rightarrow \neg\, P_1]}$

Dalla tautologia $\mathbf{(\neg\, P_2 \Rightarrow \neg\, P_1) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$ per modus ponens si ricava il teorema.

3) Prova per casi

A volte nel corso di un ragionamento si presentano due o più casi possibili, e si deve provare per esempio un'implicazione del tipo $\mathbf{(P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3}$.

Si possono trovare diversi metodi, uno consiste nel provare che $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_3}$ e $\mathbf{P_2 \Rightarrow P_3}$ e quindi ricavare l'enunciato richiesto per modus ponens dalla tautologia: $\mathbf{((P_1 \Rightarrow P_3) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3)) \Rightarrow ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3)}$.

In questo schema rientrano, per esempio, i seguenti teoremi:

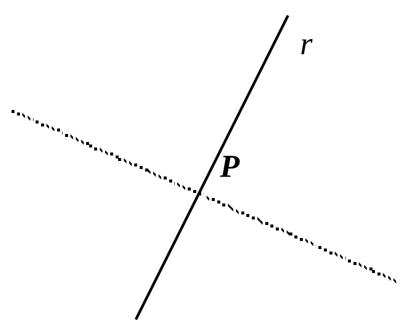
Teorema 1- «Dati una retta e un punto P, esiste una e una sola retta perpendicolare a tale retta e passante per P.»[18]

Ip: r retta, P punto Ts: $\exists!$ retta $s \perp r : P \in s$ $\mathbf{(P_3)}$

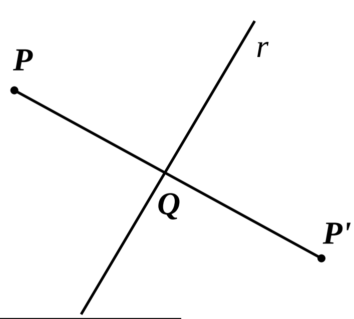
Dim.

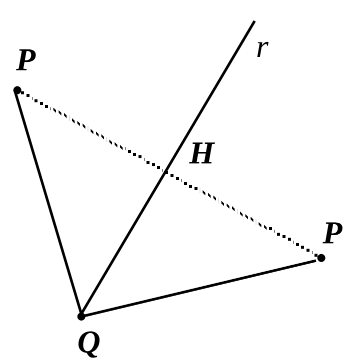
Vi sono due casi possibili:

I. Se $P \in r$ $\mathbf{(P_1)}$ la retta cercata è l'unica bisettrice dell'angolo piatto di vertice P $\mathbf{(P_3)}$, $\mathbf{[P_1 \Rightarrow P_3]}$



II. se $P \notin r$ $\mathbf{(P_2)}$ con opportune costruzioni (si vedano le figure seguenti, nelle quali Q è un generico punto di r) si deduce $\mathbf{P_3}$. $\mathbf{[P_2 \Rightarrow P_3]}$

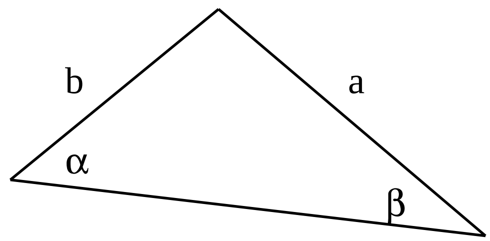




[18]- Tratto da-W. Maraschini-M Palma, *Format* , Paravia (Torino), 1998, p.377.

Teorema 2- «Se in un triangolo due angoli sono disuguali i lati opposti a questi angoli sono disuguali, e all'angolo maggiore sarà opposto il lato maggiore.» (prova indiretta per casi)

Ip: $\alpha > \beta$ Ts: $a > b$



Dim.
Si prova che, sia da a=b **(P_1)** che da a<b **(P_2)** segue che α non è maggiore di β **(P_3)**; cioè $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_3}$ e $\mathbf{P_2 \Rightarrow P_3}$, da ciò segue che $\mathbf{P_1 \vee P_2 \Rightarrow P_3}$ cioè l'enunciato contrapposto di quello da provare, e quindi per modus ponens, dalla legge di contrapposizione si ricava $\neg\, \mathbf{P_3} \Rightarrow \neg\, \mathbf{(P_1 \vee P_2)}$, cioè il teorema.

Anche se i casi possibili sono più di due si può procedere in modo analogo. Consideriamo il seguente:

Teorema 3- «Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.» **(P_4)**

Qui i casi da considerare sono tre:

I. Un lato dell'angolo alla circonferenza è un diametro **(P_1)** (v. fig.1),
II. l'angolo contiene il centro **(P_2)** (v. fig.2),
II. l'angolo non contiene il centro **(P_3)** (v. fig.3);

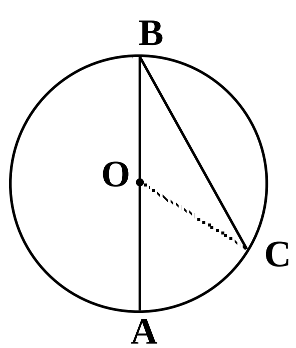


fig.1

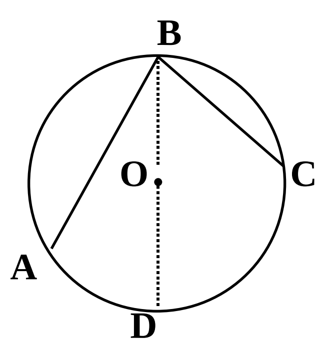


fig.2

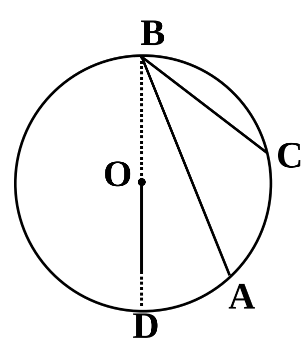


fig.3

tutti e tre i casi implicano **P_4**, quindi lo schema di ragionamento è espresso dalla seguente tautologia: $\mathbf{((P_1 \Rightarrow P_4) \wedge ((P_2 \Rightarrow P_4) \wedge (P_3 \Rightarrow P_4))) \Rightarrow ((P_1 \vee (P_2 \vee P_3)) \Rightarrow P_4))}$.

4) Prove per assurdo

Le prove per assurdo di un enunciato sono tutte prove indirette e possono essere caratterizzate nel seguente modo:
si assume che l'enunciato da provare sia falso e si deriva da ciò una contraddizione che ci costringe a rigettare quest'assunzione.

Esistono diversi schemi di ragionamento per assurdo (v. Pag.10) esaminiamone alcuni:

4a)[19] Se si vuole provare l'enunciato $\mathbf{P_1}$, si può assumere vero $\neg\mathbf{P_1}$ ricavare da questo $\mathbf{P_1}$ e dalla tautologia $\mathbf{(\neg P_1 \Rightarrow P_1) \Rightarrow P_1}$, asserire per modus ponens $\mathbf{P_1}$; la contraddizione consiste nel fatto che in tal modo da $\neg P_1$ si ricava sia P_1 sia $\neg P_1$, si può osservare inoltre che i due enunciati $\neg P_1 \Rightarrow P_1$ e $\neg P_1 \Rightarrow (P_1 \wedge \neg P_1)$ sono logicamente equivalenti.

Come esempio consideriamo il seguente:

Teorema- «L'elemento neutro (per un'operazione $\otimes$), se esiste, è unico.» $\mathbf{(P_1)}$

Dim.

Supponiamo che esistano due elementi neutri e_1 ed e_2 $\mathbf{(\neg P_1)}$, allora:

I. Considerando e_1 come elemento neutro, risulta $e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1 = e_2$;

II. considerando e_2 come elemento neutro, risulta $e_2 \otimes e_1 = e_1 \otimes e_2 = e_1$;

da I. e II. segue $e_1 = e_2$ cioè $\mathbf{P_1}$.

4b) Un altro metodo consiste nel ricavare un enunciato contraddittorio $\mathbf{(P_2 \wedge \neg P_2)}$ dalla negazione dell'enunciato da provare $\mathbf{(\neg P_1)}$, e quindi dedurre $\mathbf{P_1}$ per modus ponens dalla tautologia : $\mathbf{(P_2 \neg P_1 \Rightarrow (P_2 \wedge \neg P_2)) \Rightarrow P_1}$.

Per illustrare ciò consideriamo il seguente:

Teorema- «Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale.» $\mathbf{(P_1)}$

Dim.

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale $\mathbf{(\neg P_1)}$, allora esistono due interi n e m coprimi $\mathbf{(P_2)}$, con m non nullo, tali che $n / m = \sqrt{2}$, da ciò segue che $n^2 = 2m^2$ cioè n^2 è pari, ma questo è vero se e solo se n è pari.

Posto allora $n=2k$ (k intero) si ha $4k^2 = 2m^2$ o ciò che è lo stesso $m^2=2k^2$ il che implica che m è pari, quindi n e m non sono coprimi cioè $\neg\mathbf{P_2}$.

4c) Se l'enunciato da provare per assurdo è un'implicazione del tipo $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_2}$,

[19] - Questa forma di riduzione all'assurdo, poco frequente, è stata usata in molte argomentazioni logiche e matematiche di grande interesse storico.

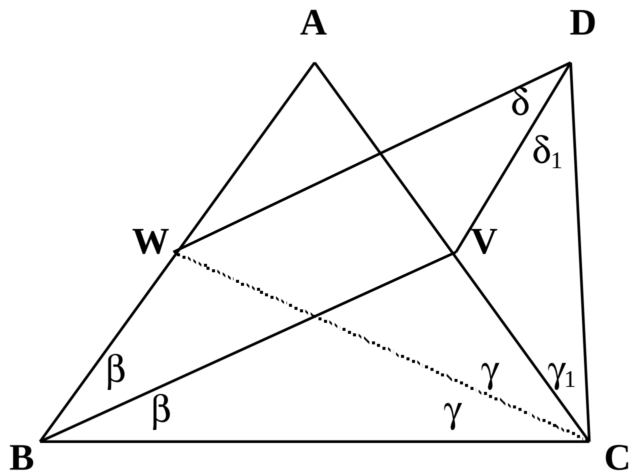
poiché l'enunciato $\neg(\mathbf{P_1} \wedge \neg \mathbf{P_2})$ è ad esso logicamente equivalente, basta assumere come vero $(\mathbf{P_1} \wedge \neg \mathbf{P_2})$ e cercare di dedurre una contraddizione del tipo $(\mathbf{P_3} \wedge \neg\, \mathbf{P_3})$, considerando quindi la tautologia:

$((\mathbf{P_1} \wedge \neg\, \mathbf{P_2}) \Rightarrow (\mathbf{P_3} \wedge \neg\, \mathbf{P_3})) \Rightarrow (\mathbf{P_1} \Rightarrow \mathbf{P_2})$ si ricava, per modus ponens, $\mathbf{P_1} \Rightarrow \mathbf{P_2}$.

Un esempio di ciò è dato dal seguente:

Teorema- «Se due bisettrici di un triangolo sono uguali il triangolo è isoscele.»

Ip: BV=CW **(P_1)** Ts: tr. ABC è isoscele **(P_2)**



Dim.

Sia BV=CW **(P_1)** e supponiamo che il triangolo ABC non sia isoscele **($\neg P_2$)**, cioè che sia $\beta > \gamma$.

Considerando che i due triangoli BVC e CWB hanno BV=CW e BC in comune da $\beta > \gamma$ segue VC>BW **(P_3).**

Adesso si traccino da V e da W le parallele rispettivamente a BA e BV.

Nel parallelogramma BWDV si ha DW=BV=CW, quindi il triangolo DWC è isoscele sulla base DC e risulta $(\gamma+\gamma_1) = (\delta+\delta_1)$, da $\delta=\beta$ segue $(\gamma+\gamma_1) = (\beta+\delta_1)$ e poiché è $\beta > \gamma$ sarà $\delta_1 < \gamma_1$.

Allora nel triangolo DVC si ha CV<VD, ma VD=BW, quindi CV<BW **($\neg P_3$).**

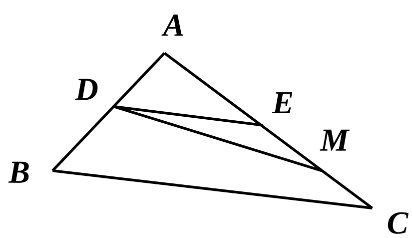
4d) Un altro modo per provare per assurdo un'implicazione consiste nel dedurre $\mathbf{P_2}$ da $\mathbf{(P_1 \wedge \neg P_2)}$ e dato che, da questo si può ricavare anche $\mathbf{\neg P_2}$, abbiamo la contraddizione necessaria per provare $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_2}$ utilizzando la tautologia:

$\mathbf{((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow P_2) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$ e la regola del modus ponens.

Illustriamo questo metodo mediante il seguente:

Teorema- «Il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato. »

Ip: $BD=DA$, $CE=EA$ $\quad$ $\mathbf{(P_1)}$ $\qquad$ Ts: $DE//BC$ $\quad$ $\mathbf{(P_2)}$



Dim.

Detti D ed E i punti medi dei lati AB ed AC rispettivamente $\mathbf{(P_1)}$, supponiamo che DE non sia parallela a BC $\mathbf{(\neg P_2)}$.

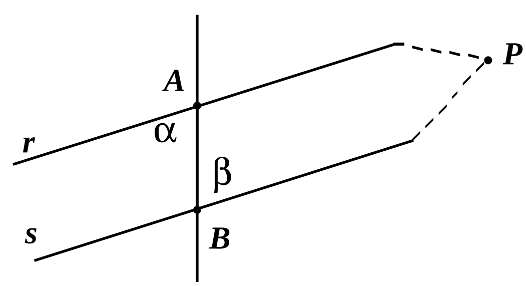
Per D allora si può condurre la parallela a BC che incontrerà il lato AC in un punto M, che sarà il suo punto medio, per l'unicità del punto medio di un segmento M deve coincidere con E, da ciò segue che $DE//BC$ cioè $\mathbf{P_2}$.

4e) Esiste ancora un altro metodo per il quale si ricava $\mathbf{\neg P_1}$ da $\mathbf{P_1 \wedge \neg P_2}$, e da ciò per modus ponens dalla tautologia $\mathbf{((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow \neg P_1) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_2)}$ si deduce $\mathbf{P_1 \Rightarrow P_2}$.

In questo schema rientra per esempio il seguente:

Teorema- «Se due rette di un piano, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali, esse sono parallele.»

Ip: $\alpha = \beta$ $\quad$ $\mathbf{(P_1)}$ $\qquad$ Ts: $r \,//\, s$ $\quad$ $\mathbf{(P_2)}$



Dim.

Supponiamo che r non sia parallela a s $\mathbf{(\neg P_2)}$, cioè le due rette s'incontrano in un punto P; nel triangolo ABP l'angolo α è esterno e perciò maggiore di β , quindi $\alpha \neq \beta$, cioè $\mathbf{\neg P_1}$.

Osservazione

In molti testi scolastici le prove per contrapposizione sono annoverate tra quelle per assurdo; si osservi, tuttavia che, sebbene entrambe le prove sono di tipo indiretto, le prime a differenza delle seconde si possono applicare soltanto ad enunciati che si presentano sotto forma d'implicazione, ed inoltre, come già visto, gli schemi di ragionamento sono diversi.
Infatti in una prova per contrapposizione di un'implicazione $P_1 \Rightarrow P_2$, si assume *falsa soltanto la tesi* P_2 e si ricava che è falsa l'ipotesi P_1 (si prova in pratica l'enunciato contrapposto $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$); in una prova per assurdo invece si assume come falso *l'intero enunciato* da provare e si deduce da ciò qualcosa che è in contrasto o con gli assiomi, o con l'ipotesi, o con asserti già provati, o che comunque porta ad una contraddizione.
Si noti comunque che la prova per contrapposizione si può sempre ricondurre (complicandola) ad una riduzione all'assurdo, dato che l'enunciato seguente è una tautologia: $(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1) \Leftrightarrow ((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow \neg P_1)$. (v.4e)
Si può affermare che, tra le prove indirette, quella per contrapposizione è la più diretta.

Conclusioni

Per dimostrare un teorema, vale a dire per accertare la verità di una proposizione a partire da certe premesse, si possono seguire diverse strade.

Spesso l'intuizione ci guida nella dimostrazione, ma per evitare di trarre conclusioni errate, è necessario essere sicuri che il nostro ragionamento si basi su criteri logici rigorosamente corretti. Nello studio della geometria, ad esempio, si schematizza una soluzione reale mediante modelli ai quali si applicano i metodi di ragionamento propri della logica.

I semplici esempi svolti mostrano come si possa schematizzare una dimostrazione condotta sia per via diretta che indiretta.
Anche le dimostrazioni che si presentano più articolate e complesse di quelle qui esemplificate, dopo un'analisi della situazione, possono essere ricondotte a semplici schemi di ragionamento.

Possiamo dire allora che il calcolo enunciativo è un serbatoio di utili principi di ragionamento e può essere usato come "modello" per il ragionamento stesso.
In altre parole le tautologie possono essere usate per giustificare gran parte dei ragionamenti matematici, nel senso che costituiscono lo schema del ragionamento usato nella dimostrazione di un teorema.

Bibliografia

[1] P. J. Davis-R. Hersh, *L'esperienza matematica*, Edizioni di Comunità (Milano), 1985.

[2] J. Dieudonnè, *L'arte dei numeri*, Mondadori (Milano), 1989.

[3] W. S. Hatcher, *Fondamenti della Matematica*, Boringhieri (Torino), 1973

[4] G. Lolli, *Capire una dimostrazione*, Il Mulino (Bologna), 1988.

[5] G. Lolli, *Capire la matematica*, Il Mulino (Bologna), 1996.

[6] C.F.Manara, *Problemi di didattica della matematica*, Editrice La Scuola (Brescia), 1989.

[7] H. Poincarè, *Les derniers efforts des Logisticiens*, in Science et Méthode (Paris), 1908.

[8] B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, Chelsea Publishing (New York), 1978.

[9] A. Tarski, *Introduzione alla logica*, Bompiani (Milano),1969.

[10] T. Varga, *Fondamenti di logica per insegnanti*, Boringhieri (Torino), 1973.