573. D’Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.

Oggetti matematici e senso

Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici[1]

Bruno D’Amore
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia
Alta Scola Pedagogica, Locarno, Svizzera
MESCUD, Università Distrital “F. José de Caldas”, Bogotà, Colombia

Lavoro eseguito nell’àmbito del programma strategico di ricerca: «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*», con fondi dell’Università di Bologna.

---

[1] Una versione più breve di questo stesso articolo appare in:
D’Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: D’Amore B., Radford L. (eds.) (2006). Numero unico monotematico della rivista *Relime* del Cinvestav (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politecnico Nacional, México DF, México) sul tema: *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, con testi di: F. Arzarello (Italia), G.T. Bagni (Italia), R. Cantoral, G. Martínez-Sierra (México), B. D’Amore (Italia), R. Duval (Francia), A. Gagatsis (Cipro), J.D. Godino (Spagna), M. Otte (Germania), A. Sáenz-Ludlow (USA), L. Radford (Canada). In corso di stampa.
Una versione molto più corta, rielaborata grazie al contributo di Martha Isabel Fandiño Pinilla, di questo stesso articolo appare negli Atti del Joint Meeting of UMI-SIMAI / SMAI-SMF “Marhematics and its Applications”; Panel on Didactics of Mathematics, July 2006, 6th, Torino. Numero speciale de *La matematica e la sua didattica*, in corso di stampa (2007).

Summary. *In this paper I want to show a consequence that sometimes reveals in treatment and conversion semiotic transformations of a semiotic representation whose sense derives from a shared practice; the shift from a representation of a mathematical object to another through transformations, on the one hand maintains the meaning of the object itself, but on the other sometimes can change its sense. This is shown in detail through an example, although it is inserted within a wide theoretical framework that takes into account mathematical objects, their meanings and their representations.*

Resumen. *En este artículo intento mostrar una consecuencia que se evidencia algunas veces en las transformaciones semioticas de tratamiento y conversión de una representación semiotica cuyo sentido deriva de una práctica compartida; el pasaje de la representación de un objeto matemático a otra por medio de transformaciones, de una parte conserva el significado del objeto mismo, pero en ocasiones puede cambiar su sentido. Esto hecho está aquí evidenciado detalladamente por medio de un ejemplo, pero insertándolo en el seno de un amplio marco teórico que llama en causa los objetos matemáticos, sus significados, sus representaciones.*

Sunto. *In questo articolo intendo mostrare una conseguenza che si manifesta talvolta nelle trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione di una rappresentazione semiotica il cui senso deriva da una pratica condivisa; il passaggio dalla rappresentazione di un oggetto matematico ad un'altra attraverso trasformazioni, da un lato conserva il significato dell'oggetto stesso, ma talvolta può cambiarne il senso. Questo fatto viene dettagliatamente mostrato attraverso un esempio, ma inserendolo all'interno di una vasta cornice teorica che chiama in causa gli oggetti matematici, i loro significati, le loro rappresentazioni.*

Resumo. *Neste artigo quero mostrar uma consequência que, ás vezes, se apresenta nas trasformações semióticas de processamento e conversão de uma representação semiótica, o sentido da qual resulta de uma pratica compartilhada; a passagem da representação de um objeto matemático para uma outra através de trasformações, mantêm o significado do mesmo objeto, mas ás vezes pode trocar o seu sentido. Isso è mostrado com detalhes através de um exemplo, inscrito dentro de um grande quadro teórico que o relaciona com os objetos matemáticos, seus significados, suas representações.*

Resumé. *Dans cet article j'entends montrer une conséquence qui se manifeste quelquefois dans les transformations sémiotiques de traitement et de conversion d'une représentation sémiotique, dont le sens découle d'une pratique partagée; le passage d'une représentation d'un object mathématique à une autre, au moyen de transformations, d'un côté il conserve la signification de l'object pris en considération, mais il peut aussi changer son sens. Ce fait peut être montré par un exemple, mis à l'intérieur d'un cadre théorique, qui prend en considération les objects mathématiques, leurs significations, leurs représentations.*

Zusammenfassung. *In diesem Artikel möchte ich eine Folgerung, die sich manchmal in den semiotischen Veränderungen der Behandlung und der Umwandlung einer semiotischen Dartstellung erweist, deren Sinn von einer billigten Praxis stammt; der Übergang mittels Veränderungen von der Darstellung eines matematischen Gegenstandes zu einer anderen Darstellung bewahrt einerseits den Sinn des Gegenstandes selbst, aber kann es manchmal die Bedeutung ändern. Dies wird ausführlich durch ein Beispiel gezeigt, welches aber in einem grossen theoretischen Rahmen eingereiht wird, der sich die mathematischen Gegenstände, sowie deren Bedeutungen und Darstellungen bedient.*

1. Premessa

Questo lavoro è diviso in due parti ben distinte.
Nella prima parte intendo fornire, soprattutto attraverso citazioni opportune, un percorso generale, di tipo epistemologico, ontologico e semiotico, verso la problematica, tanto dibattuta oggi, di alcuni approcci teorici alla ricerca in didattica della matematica. Questa parte ha dunque lo scopo di circoscrivere e delimitare bene il campo teorico in cui intendo successivamente muovermi, per evitare ogni possibile fraintendimento teorico.
Nella seconda parte, attraverso la narrazione di un episodio centrale e di molti altri al contorno, si vuole proporre una discussione che verrà ripresa al momento delle conclusioni; tale discussione si centra sull’attribuzione di sensi diversi a diverse rappresentazioni semiotiche che potrebbero invece rappresentare lo stesso oggetto matematico, attribuzione effettuata da studenti di qualsiasi livello scolastico e da insegnanti, in formazione o in servizio, di qualsiasi livello scolastico.

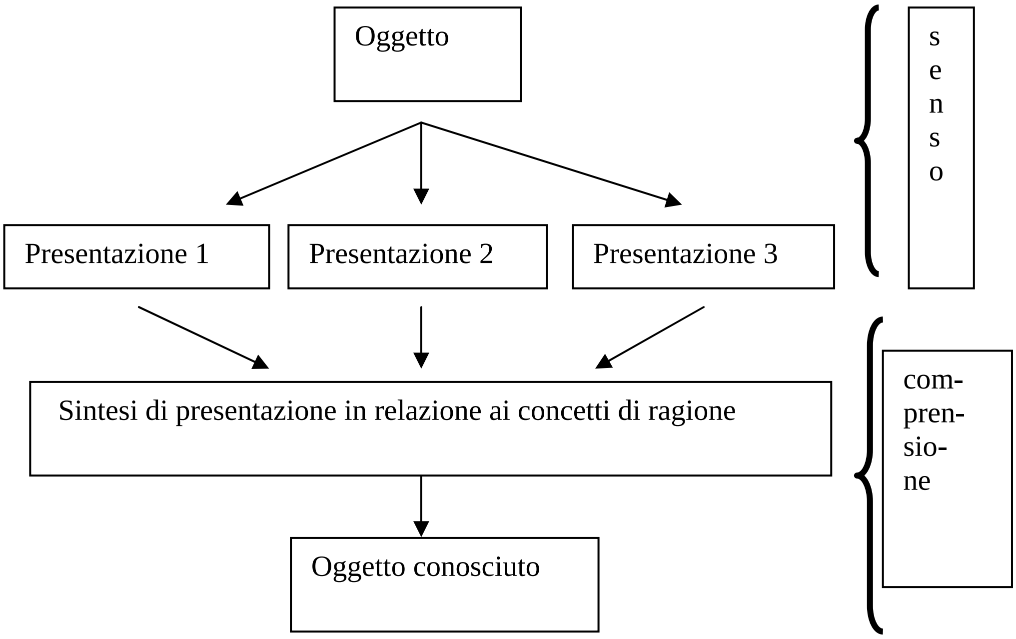
2. Prima parte

2.1 Un percorso teorico

2.1.1 Ontologia e conoscenza

Già in diversi lavori della fine degli anni ’80 - ’90, dichiaravo che, mentre il matematico può fare a meno di interrogarsi sul *senso* degli *oggetti matematici* che usa e sul senso che ha la *conoscenza matematica*, lo studioso di didattica non può farne a meno; per esempio, la cosa è riassunta in D’Amore (1999, pagg. 23-28, ma anche altrove). Non posso quindi che aver piacere della conferma che trovo in Radford (2004): «Si può sopravvivere bene facendo matematica senza adottare alcuna esplicita ontologia, cioè una teoria che tratti della natura degli oggetti matematici. (…) La situazione è profondamente diversa quando parliamo di *conoscenza matematica*. (…) Le questioni teoriche circa i contenuti della conoscenza ed il modo in cui un contenuto viene trasmesso, acquisito o costruito ci ha condotto al punto in cui non possiamo più a lungo evitare di prendere in seria considerazione l’ontologia».
È precisamente a causa di questa convinzione che ho dedicato molto

tempo allo studio della conoscenza concettuale, dopo aver stabilito una credenza ontologica che parte dal *modo* che hanno gli esseri umani di *conoscere* i concetti (D'Amore, 2001a,b; 2003a,b).
Il dibattito è antico e lo si può far risalire alla Grecia classica; ma apprezzo lo sforzo di Radford di riportare il dibattito a termini assai più moderni: «Gli uomini, egli disse, hanno una precedente conoscenza intellettuale dei concetti grazie ad un'autonoma attività della mente, indipendentemente dal mondo concreto» (Radford, 2004) [quell'"*egli disse*" è riferito al matematico Pietro Catena (1501-1576), a lungo professore presso l'università di Padova, autore di *Universa Loca*, il quale asserì che «gli oggetti matematici erano entità ideali ed innate» (Catena, 1992)].
Il dibattito diventa davvero moderno quando si riesce a fare la distinzione tra i "concetti dell'intelletto" (umano) ed i "concetti di oggetti", cioè con la *Critica della ragion pura* di Immanuel Kant (1724-1804): «[Questi] concetti dell'intelletto puro non sono concetti di oggetti; essi sono schemi logici senza contenuto; la loro funzione è rendere possibile una riorganizzazione o una sintesi delle intuizioni. La sintesi è la responsabilità di ciò che Kant ha identificato come la facoltà cognitiva della conoscenza» (Radford, 2004).
Segue questo grafico che apprezzo molto a causa del tentativo di porre le idee di *senso* e di *comprensione* al loro giusto posto:



2.1.2 Approccio antropologico

Dovendo prendere posizione, per molti di noi la scelta è stata quasi obbligata: approccio antropologico, prima, scelta pragmatista, poi (D'Amore, 2003b, ma anche altrove). Anche in questo caso, mi confortano le asserzioni di Radford: «In questa linea di pensiero non si può non tener conto di un approccio antropologico; (…) i modi nei quali noi usiamo diversi tipi di segni e di artefatti durante i nostri atti di conoscenza sono sussunti in prototipi culturali di significati mediati (…). Ciò che è rilevante è che l'uso di segni e di artefatti altera le nostre modalità di ricezione degli oggetti del mondo, vale a dire i segni e gli artefatti alterano il modo in cui gli oggetti ci sono dati attraverso i sensi (…). Per ricapitolare, dal punto di vista di un'antropologia epistemologica, il modo nel quale io ritengo che l'enigma degli oggetti matematici possa essere risolto è considerare gli oggetti matematici come modelli fissi di attività incorporati nel regno sempre mutevole della pratica sociale mediata e riflessiva» (Radford, 2004).

Su questa linea c'è una generale condivisione di consenso: «Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo. Nella nostra concezione, quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno di certe istituzioni, si realizzino determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati ed alle attività realizzate dagli esseri umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica» (D'Amore, Godino, 2006).

2.1.3 Sistema di pratiche

Tale condivisione viene ulteriormente chiarita da propositi espliciti: «Le nozioni di "significato istituzionale" e "personale" degli oggetti matematici hanno comportato quelle di "pratica personale", "sistema di pratiche personali", "oggetto personale (o mentale)", strumenti utili per lo studio della "cognizione matematica individuale" (Godino, Batanero, 1994; 1998). Ciascuna di tali nozioni ha poi un suo versante istituzionale. Fare chiarezza su questi punti è stato necessario per precisare e rendere operative le nozioni di "relazione personale e istituzionale all'oggetto" introdotte da Chevallard (1992)» (D'Amore, Godino, 2006).

Quel che noi intendiamo per "sistema di pratiche personali" è nella stessa linea dell'approccio semiotico antropologico (ASA) di Radford: «Nell'approccio semiotico antropologico (ASA) del quale stiamo parlando, l'idealità del concetto dell'oggetto concettuale è direttamente collegata al contesto storico - culturale. L'idealità degli oggetti matematici -cioè ciò che li rende generali- è del tutto tributaria dell'attività umana» (Radford, 2005).

Gli aspetti sociologici di questa aderenza all'attività umana ed alla pratica sociale è così ribadita: «Ritengo che l'apprendimento matematico di un oggetto O da parte di un individuo I all'interno della società S non sia altro che l'adesione di I alle pratiche che gli altri membri di S sviluppano attorno al dato oggetto O» (D'Amore, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006) e: «le pratiche d'aula possono essere considerate come sistemi di adattamento degli studenti alla società» (Radford, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

2.1.4 Oggetto e oggetto matematico

Occorre però giungere ad una definizione di questo “oggetto matematico”; noi abbiamo preferito fare ricorso ad una generalizzazione dell’idea di Blumer: «*Oggetto matematico* (Godino, 2002): tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica; l’idea è tratta da Blumer (1969, pag. 8): un oggetto è “tutto quello che può essere indicato, tutto quel che può essere segnalato o al quale possa farsi riferimento”.

Distinti tipi di oggetti matematici di diversi livelli:

- **“linguaggio” (termini, espressioni, notazioni, grafici, …) nei vari registri (scritto, orale, gestuale, ….)**
- **“situazioni” (problemi, applicazioni extramatematiche, esercizi, …)**
- **“azioni” (operazioni, algoritmi, tecniche di calcolo, procedure, …)**
- **“concetti” (introdotti mediante definizioni o descrizioni) (retta, punto, numero, media, funzione, …)**
- **“proprietà o attributi degli oggetti” (enunciati sui concetti, …)**
- **“argomentazioni” (per esempio, quel che si usa per validare o spiegare gli enunciati, per deduzioni o di altro tipo, …).**

A loro volta questi oggetti si organizzano in entità più complesse: sistemi concettuali, teorie…» (D’Amore, Godino, 2006).

Nel lavoro citato, si sfrutta l’idea di: «*Funzione semiotica*: si dice che si stabilisce tra due oggetti matematici (ostensivi o non ostensivi) una funzione semiotica quando tra i due si determina una dipendenza rappresentazionale o strumentale, cioè uno di essi si può porre al posto dell’altro o uno è usato invece dell’altro» (D’Amore, Godino, 2006).

E, più oltre: « (…) gli oggetti matematici che intervengono nelle pratiche matematiche e gli emergenti dalle stesse, secondo il gioco linguistico al quale partecipano, possono essere considerati a partire dai seguenti aspetti o dimensioni duali (Godino, 2002):

- **personale – istituzionale: come abbiamo già rilevato, se i sistemi di pratiche sono condivisi nel seno di una istituzione, gli oggetti emergenti si considerano "oggetti istituzionali"; mentre se questi sistemi sono specifici di una persona li consideriamo come "oggetti personali";**
- **ostensivi (grafici, simboli,…) - non ostensivi (quelli che evocano il fare matematica, rappresentati in forma testuale, orale, grafica, gestuale,…);**
- **estensivo - intensivo: questa dualità risponde alla relazione che si stabilisce tra un oggetto che interviene in un gioco di linguaggio come un caso particolare (un esempio *concreto*, per esempio la funzione $y=2x+1$) e una classe più generale (*astratta*, per esempio la famiglia di funzioni $y=mx+n$);**
- **elementare – sistemico: in alcune circostanze gli oggetti matematici partecipano come entità unitarie (che si suppone siano conosciute in maniera previa), mentre in altre intervengono come sistemi che vengono scomposti per il loro studio;**
- **espressione – contenuto: antecedente e conseguente di qualsiasi funzione semiotica.**

Questi aspetti si presentano raggruppati in coppie che si complementano in modo duale e dialettico. Si considerano come attributi applicabili ai distinti oggetti primari e secondari, dando luogo a distinte "versioni" di tali oggetti» (D'Amore, Godino, 2006).

Se però ci si riferisce alla pratica linguistica di rappresentazione: «Credo si debbano distinguere due tipologie di oggetti nell'ambito della creazione della competenza matematica (apprendimento matematico): l'oggetto matematico stesso e l'oggetto linguistico che lo esprime» (D'Amore, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

Ma sulla rappresentazione, in modo specifico tornerò tra breve.

2.1.5 Apprendimento di oggetti

Nei miei tentativi di sintetizzare le difficoltà di apprendimento dei concetti / della conoscenza degli oggetti, ho spesso fatto uso dell’idea espressa nel *paradosso di Duval*: «(…) da una parte, l’apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d’altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un’attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l’apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L’impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche» (Duval, 1993, pag. 38).

Queste frasi chiamano fortemente in causa soprattutto un certo modo di concepire l’idea di semiotica.

Anche in questo, mi ritrovo perfettamente in linea con quel che scrive Radford: «Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?» (Radford, 2005).

2.1.6 La rappresentazione degli oggetti

A proposito della rappresentazione degli oggetti, sfrutto questa felice sintesi di Radford: «In una celebre lettera scritta il 21 febbraio 1772, Kant mette in dubbio il potere delle nostre rappresentazioni. In questa lettera, inviata a Herz, Kant dice: "su quale fondamento si basa il rapporto tra ciò che chiamiamo rappresentazione e l'oggetto corrispondente?". (…) In questa lettera, Kant dibatte la questione della legittimità che avrebbero le nostre rappresentazioni nel presentare o rappresentare gli oggetti. In termini semiotici, Kant si interroga sull'adeguatezza del segno.(…) La natura del dubbio kantiano è di ordine epistemologico» (Radford, 2005).

Tutto ciò chiama in causa, in particolar modo, l'idea di segno, giacché per la matematica questa forma di rappresentazione è specifica; il segno è di per sé specificazione del particolare, ma esso può essere interpretato dando senso al generale; anche in tal caso sfrutto una citazione di Radford: «Se il matematico ha il diritto di vedere il generale nel particolare, è, come osserva Daval (1951, pag. 110), "perché è certo della fedeltà del segno. Il segno è la rappresentazione adeguata del significato"» (Radford, 2005). Ma i segni sono artefatti, oggetti a loro volta "linguistici" (in senso lato), termini che hanno lo scopo di rappresentare per indicare: «(…) oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione» (Radford, 2005). Essi hanno un ruolo molteplice, sul quale non entro per evitare compiti enormi che legano segno - cultura - umanità: «(…) l'intera cultura viene vista come un sistema di sistemi di segni in cui il significato di un significante diventa a sua volta significante di un altro significato o addirittura il significante del proprio significato» (Eco, 1973, p. 156).

Non ultimo come importanza, è il “ruolo cognitivo del segno” (Wertsch, 1991; Kozoulin, 1990; Zinchenko, 1985) su cui sorvolo per brevità, non senza averlo riconosciuto, però, nelle basi stesse della semiotica generale: «*ogni processo di significazione tra esseri umani* (…) *presuppone un sistema di significazione come propria condizione necessaria*» (Eco, 1975, p. 20), il che vuol dire un accordo culturale che codifica ed interpreta, cioè produce conoscenza. La scelta dei segni, anche e soprattutto quando si compongono in linguaggi, non è neutra o indipendente; essa segna il destino in cui si esprime il pensiero, il destino della comunicazione; per esempio: «Il linguaggio algebrico impone una sobrietà a chi pensa e si esprime, una sobrietà nei modi di significazione che è stata impensabile prima del Rinascimento. Impone ciò che abbiamo chiamato altrove una *contrazione semiotica*. Presuppone anche la perdita dell’*origo*» (Radford, 2005). La perdita dell’*origo* (origine, principio) è stata studiata da Radford anche in altri lavori (2000, 2002, 2003).
Ed è proprio su *questo punto* che si chiude la mia lunga premessa, che è anche il punto di partenza per quanto segue.

3. Seconda parte

3.1 Oggetto, suo significato condiviso, sue rappresentazioni semiotiche: la narrazione di un episodio

3.1.1 L’episodio

Siamo in quinta primaria e l’insegnante ha svolto una lezione in situazione a-didattica sui primi elementi della probabilità, facendo costruire agli allievi, almeno tramite qualche esempio, l’idea di “evento” e di “probabilità di un evento semplice”. Come esempio, l’insegnante ha fatto fare uso di un normale dado a sei facce, studiando le uscite casuali da un punto di vista statistico. Ne emerge una probabilità frequentista che, però, viene interpretata in senso classico. A questo punto propone il seguente esercizio:
Calcolare la probabilità del seguente evento: uscita di un numero pari nel lancio di un dado.

Gli allievi, discutendo in gruppo e soprattutto compartendo pratiche sotto la regìa dell'insegnante, giungono a decidere che la risposta è espressa dalla frazione $\frac{3}{6}$ perché «le uscite possibili nel lancio sono 6 (al denominatore) mentre le uscite che rendono vero l'evento sono 3 (al numeratore)».

Dopo aver istituzionalizzato la costruzione di questa conoscenza, soddisfatto dell'esperienza efficace, contando sul fatto che questo risultato è stato ottenuto piuttosto rapidamente e sul fatto che gli allievi hanno dimostrato grande abilità nel maneggiare le frazioni, il maestro propone che, valendo l'equivalenza fra $\frac{3}{6}$ e $\frac{50}{100}$, si possa esprimere quella probabilità anche con la scrittura 50%, che è molto espressiva: significa che si ha la metà delle probabilità di verifica di quell'evento rispetto alla generalità degli eventi possibili, presa come 100. Qualcuno nota che «allora va bene anche la [frazione] $\frac{1}{2}$»; la proposta viene validata attraverso le dichiarazioni del proponente, rapidamente è ben accolta da tutti e, ancora una volta, istituzionalizzata dall'insegnante.

3.1.2 Analisi semiotica

Se si analizzano le rappresentazioni semiotiche differenti che sono emerse in questa attività, relative allo stesso evento: "uscita di un numero pari nel lancio di un dado", troviamo almeno le seguenti:

- **registro semiotico lingua naturale: probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado**
- **registro semiotico linguaggio delle frazioni:** $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$
- **registro semiotico linguaggio delle percentuali: 50%.**

3.1.3 Il senso compartito da diverse rappresentazioni semiotiche

Ciascuna delle precedenti rappresentazioni semiotiche è il significante *a valle* di uno stesso significato *a monte* (Duval, 2003). Il “senso” compartito a proposito di quel che si andava costruendo era sempre identicamente presente e dunque la pratica matematica effettuata e così descritta ha portato a trasformazioni semiotiche i cui risultati finali sono stati facilmente accettati:

- **conversione: dalla la rappresentazione semiotica espressa nel registro lingua naturale alla scrittura** $\frac{3}{6}$
- **trattamento: dalle scritture** $\frac{3}{6}$ **e** $\frac{50}{100}$ **alla** $\frac{1}{2}$
- **conversione: dalla scrittura** $\frac{50}{100}$ **alla 50%.**

3.1.4 Conoscenze previe necessarie

Sono in gioco diverse conoscenze, apparentemente ciascuna ben costruita, che interagiscono tra loro:

- **conoscenza ed uso delle frazioni**
- **conoscenza ed uso delle percentuali**
- **conoscenza ed uso dell’evento: uscita di un numero pari lanciando un dado.**

Ciascuna di queste conoscenze si manifesta attraverso l’unitarietà e la condivisione delle pratiche nel gruppo classe.

3.1.5 Séguito dell'episodio: la perdita del senso condiviso a causa di trasformazioni semiotiche

Terminata la sessione, si propone agli allievi la frazione $\frac{4}{8}$ e si chiede se, essendo equivalente a $\frac{3}{6}$, anche questa frazione rappresenta l'evento esplorato poc'anzi. *La risposta unanime e convinta è negativa*. Lo stesso maestro, che prima aveva condotto con sicurezza la regìa della situazione, afferma che «$\frac{4}{8}$ *non può* rappresentare quell'evento perché le facce di un dado sono 6 e non 8». All'insistenza del ricercatore nel sapere il suo pensiero al riguardo, l'insegnante dichiara che «Esistono non solo dadi a 6 facce, ma anche dadi a 8 facce; in quel caso, sì, la frazione $\frac{4}{8}$ rappresenta l'uscita di un numero pari nel lancio di un dado».

Esaminerò quel che sta accadendo in aula da un punto di vista semiotico; ma sono prima costretto a generalizzare la questione.

4. Un simbolismo per le basi della semiotica

Mi servirò delle definizioni usuali e della simbologia da me introdotta (D'Amore, 2001a, 2003a,b, ma anche altrove):

semiotica $=_{df}$ rappresentazione realizzata per mezzo di un sistema di segni

noetica $=_{df}$ acquisizione concettuale di un oggetto.[2]

Indicherò, d'ora in poi:

r^m $=_{df}$ registro semiotico m-esimo

$R^m_i(A)$ $=_{df}$ rappresentazione semiotica i-esima di un concetto A nel registro semiotico r^m ($m = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots$).

[2] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

Si può notare che, se cambia il registro semiotico, cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Uso un grafico per illustrare la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace:[3]

	rappresentazione	**(implicano**
caratteristiche della	***trattamento***	**attività co-semiotica**
	conversione	**gnitive diverse)**

concetto A da rappresentare ⇒ **scelta dei tratti distintivi di A**

⇓

RAPPRESENTAZIONE **di A $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m**

⇓ **trasformazione di rappresentazione** ***TRATTAMENTO***

nuova rappresentaz ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m

⇓ **trasformazione di registro** ***CONVERSIONE***

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$) ($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \dots$)

---

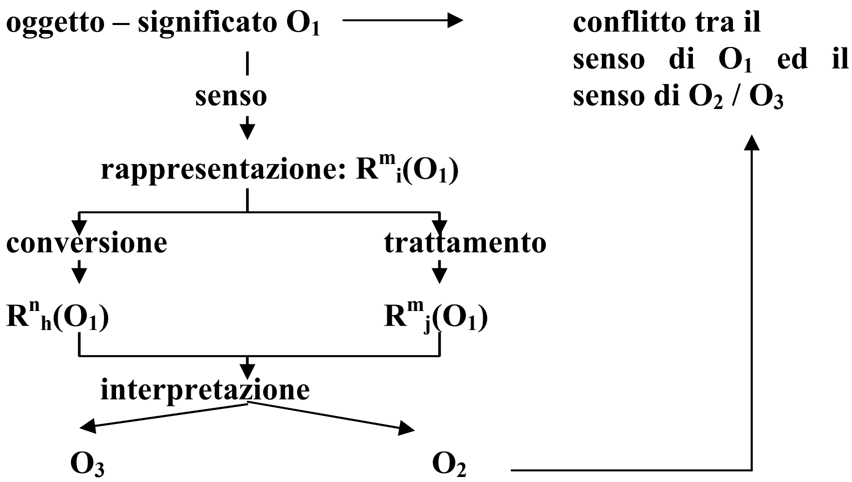
[3] Faccio riferimento a Duval (1993).

5. Torniamo all'episodio

- **C'è un oggetto (significato) matematico O_1 da rappresentare: probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado;**
- **gli si dà un *senso* derivante dall'esperienza che si pensa condivisa, in una pratica sociale che viene costruita in quanto compartita in aula;**
- **si sceglie un registro semiotico r^m e in esso si rappresenta O_1: $R^m{}_i(O_1)$;**
- **si opera un trattamento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$;**
- **si opera una conversione: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$;**
- **si interpreta $R^m{}_j(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_2;**
- **si interpreta $R^n{}_h(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_3.**

Che relazione c'è tra O_2, O_3 ed O_1?
Si può riconoscere identità; e ciò significa allora che c'è una conoscenza previa a monte, in base alla quale l'identità può essere stabilita.
Si può non riconoscere affatto identità, nel senso che l'"interpretazione" è o sembra essere diversa, ed allora si è perso il *senso* dell'oggetto (significato) originario di partenza O_1.

Uno schema come il seguente può riassumere quel che è accaduto in aula da un punto di vista complesso, che chiama in causa gli elementi che voglio porre in connessione tra loro: oggetti, significati, rappresentazioni semiotiche e senso:



Nel nostro esempio:

- **oggetto - significato O_1: «probabilità dell’uscita di un numero pari nel lancio di un dado»;**
- **senso: l’esperienza condivisa come pratica d’aula in situazione a-didattica e sotto la regìa dell’insegnante, porta a ritenere che il senso di O_1 sia quello descritto dagli allievi ed auspicato dall’insegnante: tante uscite possibili e, rispetto ad esse, tante uscite favorevoli al verificarsi dell’evento;**
- **scelta di un registro semiotico r^m: numeri razionali Q espressi sotto forma di frazioni; rappresentazione: $R^m{}_i(O_1)$: $\frac{3}{6}$;**
- **trattamento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a $\frac{1}{2}$;**
- **trattamento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_k(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$;**
- **conversione: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a 50%;**
- **si interpreta $R^m{}_j(O_1)$ riconoscendo in esso l’oggetto (significato) matematico O_2;**
- **si interpreta $R^m{}_k(O_1)$ riconoscendo in esso l’oggetto (significato) matematico O_3;**
- **si interpreta $R^n{}_h(O_1)$ riconoscendo in esso l’oggetto (significato) matematico O_4.**

Che relazione c'è tra O_2, O_3, O_4 ed O_1?
In alcuni casi (O_2, O_4), si è riconosciuta identità di significante; e ciò significa che c'è a monte una conoscenza già costruita che permette di riconoscere lo stesso oggetto; il *senso* è condiviso, unico;
in un altro caso (O_3), non si è riconosciuta identità di significante, nel senso che l'"interpretazione" è o sembra essere diversa, ed allora si è perso il *senso* dell'oggetto (significato) O_1.
La tematica relativa a più rappresentazioni dello stesso oggetto è presente in Duval (2006).

Non è detto che la perdita di senso avvenga solo a causa della conversione; nel nostro esempio, come abbiamo visto, è avvenuta a causa di un trattamento (il passaggio da $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$).

L'interpretazione di $\frac{4}{8}$ data dal maestro non ammetteva come plausibile oggetto lo stesso O_1 che aveva tratto origine dal senso condiviso che aveva portato alla rappresentazione $\frac{3}{6}$.

Ho fatto ancora l'esperimento descritto in 2. con studenti più maturi e con studenti in formazione come futuri insegnanti di scuola primaria e di secondaria. Se la conversione nel passaggio di trattamento da $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$ è un esempio di perdita di senso, lo è assai di più quello da $\frac{3}{6}$ a $\frac{7}{14}$; mentre assai meno lo è la conversione da $\frac{3}{6}$ a 0.5.

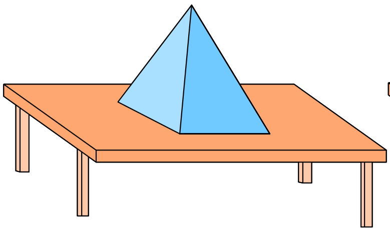
6. Repertorio di altri episodi

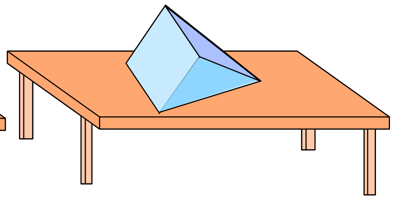
6.1 Allievi di scuola dell’infanzia

5

5

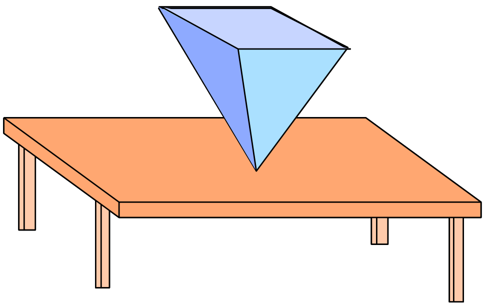
«Questo è un numero grande» **«Questo è un numero piccolo»**





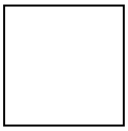
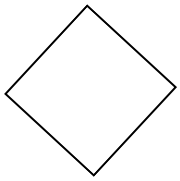
«Questa è una piramide **«Questa è una piramide sdraiata»**

«Questa no, non è una piramide; non vedi che non può stare su?»



6.2 Allievi di scuola primaria

7+3=10 è un'addizione, ma 10=7+3 no

«Questo è un quadrato»   «No, questo no, questo è un rombo»

«0,5 vuol dire la metà»; «anche 1:2 è la metà»; «2:4 fa 0,5 ma no, non è la metà»

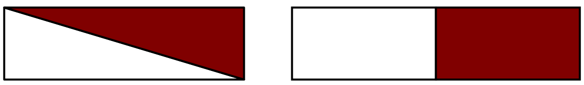
6.3 Allievi di scuola media

$\frac{1}{2}$ **è esprimibile come 0,5 o come 50%;**

ma, mentre $\frac{1}{2}$ **equivale a**  **, 0,5 no, e ancora meno 50%.**

«$\frac{1}{2}$ **è una frazione che si usa a scuola, ½ invece si trova sui libri»**

«Queste sono due metà *diverse* dello *stesso* rettangolo»



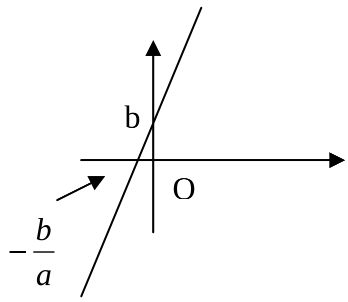
6.4 Allievi di scuola superiore

«Un punto è un ente geometrico che ha *dimensione zero*; è un tondino; se ne modifico la forma non è più un punto»

«$y=x^2-2x+1$ è una parabola»; (si fanno trattamenti espliciti e si arriva a $x^2-2x+y+1=0$); «$x^2-2x+y+1=0$ è *quasi* una circonferenza»

«(…) $(x-1)(x+2)=0$ non è una equazione, (mentre) $x^2+x-2=0$ sì»

La spesa totale di *y* € per l'affitto di un locale per una festa per *x* ore ad *a* € all'ora, più la spesa fissa di *b* €; gli studenti e l'insegnante arrivano alla rappresentazione semiotica: $y=ax+b$; si esegue la trasformazione di trattamento che porta a $x-\frac{y}{a}+\frac{b}{a}=0$ che viene rappresentata come:



ed interpretata universalmente come "una retta". Tale rappresentazione semiotica ottenuta per trattamento e conversione a partire dalla rappresentazione iniziale non viene più riconosciuta come lo stesso oggetto matematico di partenza; essa assume un altro *senso*.

6.5 Allievi di università

$$x^2+y^2+2xy-1=0 \xrightarrow{\text{TRATTAMENTO}} x+y=\frac{1}{x+y}$$

senso: da «Una circonferenza» a «Una somma che ha lo stesso valore della sua reciproca»; Ric: «Ma è o non è una circonferenza?»; allievo A: «Assolutamente no, una circonferenza deve avere x^2+y^2»; allievo B: «Se si semplifica, sì» [cioè è la trasformazione semiotica di trattamento che dà o no un certo *senso*: se si compissero i passaggi inversi, allora si tornerebbe ad una circonferenza];

$$(n-1)+n+(n+1) \xrightarrow{\text{TRATTAMENTO}} 3n$$

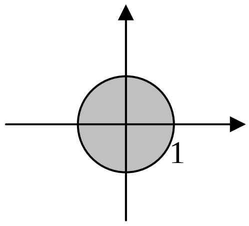
senso: da «La somma di tre interi consecutivi» a «Il triplo di un numero naturale»; Ric: «Ma si può pensare come somma di tre interi consecutivi?»; allievo C: «No, *così* no, *così* è la somma di tre numeri uguali, cioè n».

Si considera la somma (di Gauss) dei primi 100 naturali positivi; risultato semiotico finale di successivi cambi operati con alcune trasformazioni di conversione e trattamento: 101×50; questa rappresentazione non viene riconosciuta come rappresentazione dell'oggetto di partenza; la presenza del segno di moltiplicazione obbliga tutti gli allievi a cercare un senso in oggetti matematici nel quali compaia il termine "moltiplicazione" (o termini simili).

6.6 Allievi di corsi postlaurea

Corso (postlaurea) di formazione per futuri insegnanti di scuola secondaria

Oggetto matematico: La somma di due quadrati è minore di 1; rappresentazione semiotica universalmente condivisa: $x^2+y^2<1$; dopo cambi di rappresentazione semiotica a seguito di operazioni di trattamento: $(x+iy)(x-iy)<1$ e di conversione:



fino a giungere a: $\rho^2+i^2<0$. Nonostante le varie trasformazioni vengano effettuate in totale evidenza, in modo esplicito, discutendo ciascun cambio di registro semiotico, nessuno è disposto ad ammettere l’unicità dell’oggetto matematico in gioco. L’ultima rappresentazione viene interpretata come “disequazione parametrica in C”; il *senso* è stato modificato.

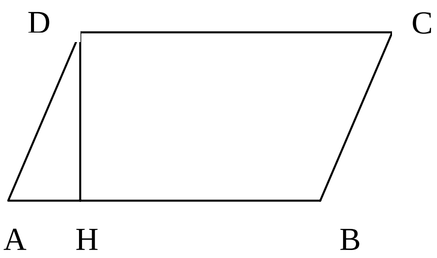
Corso (postlaurea) di formazione per futuri insegnanti di scuola secondaria.

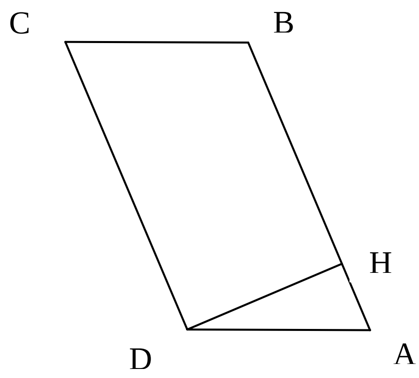
A) Oggetto matematico: Successione dei numeri triangolari; interpretazione e conversione: 1, 3, 6, 10, …; cambio di rappresentazione per trattamento: 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,….; questa rappresentazione viene riconosciuta come «Successione delle somme parziali dei naturali successivi».

B) Oggetto matematico: Successione dei numeri quadrati; interpretazione e conversione: 0, 1, 4, 9, …; cambio di rappresentazione per trattamento: 0, (0)+1, (0+1)+3, (0+1+3)+5,…; questa rappresentazione viene riconosciuta solo come «Somma delle somme parziali dei successivi dispari».

In nessuno dei casi qui brevemente illustrati gli allievi hanno accettato che il *senso* della rappresentazione semiotica ottenuta per ultima, *dopo* le trasformazioni semiotiche evidenziate, coincidesse con il *senso* dell'oggetto matematico di partenza. È ovvio che questo punto apre la strada a nuove future analisi.

6.7 Insegnanti di scuola primaria

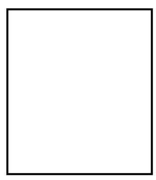




«DH è l'altezza» **«DH non è l'altezza»**

6.8 Insegnanti di scuola media

Da un testo di un problema: «Un rettangolo ha l'altezza che è i 2/3 della base, sapendo…»;



«Questa figura rappresenta la situazione…» **«… ma questa no»; perché? «Perché la base qui è più corta»**

6.9 Insegnanti di scuola superiore

«Posso mettere in *corrispondenza biunivoca* N con Z, ma Z ha più elementi di N».

7. Discussione sulle rappresentazioni di uno stesso oggetto fornite da insegnanti di primaria, ritenute adatte ai propri allievi

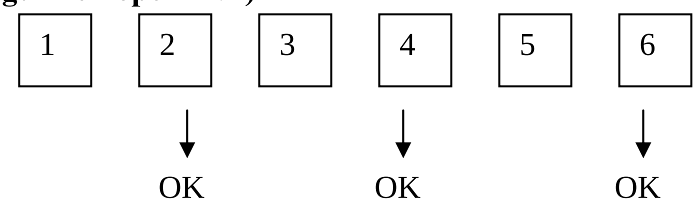
In un corso di formazione per insegnanti di primaria, abbiamo svolto il tema: *Primi elementi di probabilità.* Alla fine della unità, abbiamo chiesto ad insegnanti di rappresentare l'oggetto matematico: "uscita di un pari nel lancio di un dado", usando un simbolismo opportuno che fosse il più adatto, a loro avviso, ad allievi della primaria. Abbiamo messo in comune tutte le rappresentazioni proposte e le abbiamo messe ai voti. Ecco i risultati ottenuti in ordine di preferenza (dal più scelto al meno scelto):

$\frac{3}{6}$ **50%** $\frac{1}{2}$ **(tre e tre)** $\frac{\bullet\bullet\bullet}{\circ\circ\circ}$

(tre su sei) $\frac{\circ\circ\circ}{6}$ **(tre su sei)** $\frac{\circ\circ\circ}{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$

(2, 4, 6 rispetto a 1, 2, 3, 4, 5, 6) ${}^{2\cdot 4\cdot 6}\!\big/\!{}_{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

(figurale - operativa)



L'importanza di prendere in considerazione l'analisi della produzione degli allievi è così sottolineata in Duval (2003): «Non si può sottolineare l'importanza delle descrizioni, nell'acquisizione delle conoscenze scientifiche così come nelle prime tappe degli apprendimenti matematici, senza affrontare un'altra questione fondamentale tanto per la ricerca come per gli insegnanti: l'analisi delle produzioni degli allievi. Giacché è nel quadro dello sviluppo della descrizione che si ottengono le produzioni più personali e le più diversificate, dato che esse possono essere fatte verbalmente o con l'aiuto di un disegno, di schemi… In questo caso si tratta, per la ricerca, di una questione metodologica e, per gli insegnanti, d'una questione di diagnostica. Vedremo che ogni analisi delle produzioni degli allievi richiede che si distingua accuratamente in ogni produzione semiotica, discorsiva o non discorsiva, *diversi livelli d'articolazione del senso*, che non rivelano le stesse operazioni».

Nel caso che sto esaminando in questo paragrafo 9, gli "allievi" sono gli insegnanti di scuola primaria frequentanti il corso, mentre gli "insegnanti" sono i docenti universitari che tenevano le lezioni.[4]

---

[4] Che questo "cambio di ruolo" possa essere concepito come plausibile è ampiamente dimostrato dalla letteratura internazionale; per brevità, mi limito a citare solo l'ampio panorama proposto in àmbito PME da Llinares, Krainer (2006), ricchissimo di bibliografia specifica.

Diverse possono essere le analisi delle precedenti produzioni degli allievi – insegnanti, mostrate all’inizio di questo stesso paragrafo, ma preferisco seguire la bipartizione che trovo ancora in Duval (2003): «(…) non si deve confondere quel che chiameremo un compito “reale” di descrizione ed un compito “puramente formale” di descrizione. (…). Un compito di descrizione è reale quando richiede un’osservazione dell’oggetto della situazione da descrivere (…). Qui, l’allievo ha un accesso a ciascuno dei due elementi della coppia {oggetto, rappresentazione dell’oggetto}, indipendentemente l’uno dall’altro. Al contrario, un compito di descrizione è puramente formale quando si limita ad un semplice cambiamento di registro di rappresentazione: descrizione verbale a partire da un disegno o da una “immagine” o viceversa. L’allievo non ha più un accesso indipendente all’oggetto rappresentato. Le descrizioni formali sono allora dei compiti di conversione che cercano di rispettare l’invarianza di ciò che rappresentano (…)».
Credo che in questa distinzione di Duval si giochi la spiegazione almeno parziale dell’episodio da me narrato nei paragrafi 2 e 5:
Rispetto ad un oggetto matematico osservabile, conosciuto in base a pratiche condivise, la “descrizione reale” risponde pienamente alle caratteristiche dell’oggetto, cioè della pratica realizzata attorno ad esso o con esso, e dunque del *senso* che tutto ciò acquisisce per chi tale pratica esplica. Ma l’uso di trasformazioni semiotiche spinge a volte a modifiche sostanziali di tale descrizione, divenendo una “descrizione puramente formale”, ottenuta con pratiche semiotiche sì condivise, ma che negano un accesso all’oggetto rappresentato o, meglio, ne negano la conservazione del *senso*.

8. Conclusione

Non sembrano necessarie lunghe conclusioni. Mi preme solo evidenziare come il *senso* di un oggetto matematico sia qualche cosa di più complesso rispetto all'usuale coppia (oggetto, sue rappresentazioni); ci sono legami semiotici tra le coppie di questo tipo:

(oggetto, sua rappresentazione) – (oggetto, sua altra rappresentazione),

legami dovuti a trasformazioni semiotiche tra le rappresentazioni dello stesso oggetto, che però hanno il risultato di far perdere il senso dell'oggetto di partenza. Sebbene sia l'oggetto che le trasformazioni semiotiche siano il risultato di pratiche condivise, i risultati delle trasformazioni possono necessitare di *altre* attribuzioni di senso grazie ad *altre* pratiche condivise. Il che arricchisce di ulteriore interesse ogni studio su ontologia e conoscenza.

Il fenomeno che appare descritto nella seconda parte di questo articolo può essere usato per completare la visione che Duval offre del ruolo delle multiple rappresentazioni di un oggetto nella comprensione di tale oggetto, e anche per rompere il "circolo vizioso" del suo paradosso. Il fatto è che, in realtà, ogni rappresentazione porta associato un "sottosistema di pratiche" *diverse*, dalle quali emergono oggetti *diversi* (in precedenza chiamati O_1, O_2, O_3 y O_4). Ma l'articolazione di questi oggetti in un altro più generale richiede un cambio di prospettiva, il passaggio ad altro contesto nel quale si fonda la ricerca della *struttura comune* nel sistema di pratiche globale nel quale intervengono i distinti "oggetti parziali".

Senza dubbio, l'uso di diverse rappresentazioni e la sua progressiva articolazione arricchisce il significato, la conoscenza, la comprensione dell'oggetto, ma anche la sua complessità. L'oggetto matematico si presenta, in un certo senso, come unico, ma, in un altro senso, come molteplice.

Qual è la natura dell’oggetto matematico, dunque? Non sembra vi sia altra risposta che non sia quella strutturale, formale, grammaticale (in senso epistemologico), e, allo stesso tempo, quella strutturale mentale globale (in senso psicologico) che noi soggetti costruiamo nei nostri cervelli mano a mano che si arricchiscono le nostre esperienze.

È ovvio che queste osservazioni aprono la strada a futuri sviluppi nei quali idee che sembrano così diverse, concorrono invece a tentare di dare spiegazioni ai fenomeni di attribuzione di senso.

Bibliografia

Blumer H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall.

Catena P. (1992). *Universa loca in logicam Aristetolis in mathematicas disciplinas*. (A cura di G. Dell'Anna). Galatina (Le): Congedo.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Versione in lingua spagnola: D'Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Con una lettera di Guy Brousseau. Prefazione all'edizione in lingua spagnola di Luis Rico. Bogotà: Editorial Magisterio].

D'Amore B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Versione in lingua spagnola: D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106].

D'Amore B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [Versione in lingua spagnola: D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 51-76].

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [Versione preliminare ridotta in lingua spagnola: D'Amore B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Università Pedagogica Nazionale. 11, 63-71].

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Versione in lingua spagnola: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF, México:

Reverté-Relme. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla]. [Versione in lingua portoghese: D’Amore B. (2005). ***As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*****. Prefácio da edição italiana: Guy Brousseau. Prefácio: Ubiratan D’Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].**

D’Amore B., Godino D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. ***La matematica e la sua didattica*****. 1, 7-36. [Versione in lingua spagnola: in corso].**

D’Amore B., Radford L., Bagni G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. ***L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*****. Già accettato: in corso di stampa.**

Daval R. (1951). ***La métaphysique de Kant*****. Paris: PUF.**

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. ***Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*****. 5, 37-65.**

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels ‘apprentissages premiers’ de l’activité mathématique? ***Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*****. 8, 13-62.**

Duval R. (2006). Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30 maggio - 1 giugno 2006. Atti in corso di stampa. [Una traduzione in lingua italiana di questo articolo appare su ***La matematica e la sua didattica*****, 4, questo stesso fascicolo].**

Eco U. (1973). ***Segno*****. Milano: ISEDI.**

Eco U. (1975). ***Trattato di semiotica generale*****. Milano: Bompiani.**

Godino J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. ***Recherches en Didactique des Mathématiques*****. 22, 2/3, 237-284.**

Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos. ***Recherches en Didactique des Mathématiques*****. 14, 3, 325-355.**

Godino J. D., Batanero C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: Sierpinska A., Kilpatrick J. (eds.) (1988). ***Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*****. (177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.**

Kozoulin A. (1990). *Vygotsky's psychology*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Llinares S., Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: Gutierrez A., Boero P. (eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V. In corso di stampa.

Radford L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*. 42, 3, 237-268.

Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*. 22, 2, 14-23.

Radford L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*. 5, 1, 37-70.

Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-23.

Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.

Wertsch JV. (1991). *Voices in the mind. A sociocultural approach to mediate action*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Zinchemko VP. (1985). Vygotsky's ideas about units for he analysis of mind. In: Wertsch J. V. (ed.) (1985). *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.