Avanzamento progetto di ricerca

Congetturare, argomentare dimostrare anche in situazione di multicultura

Il ruolo delle tecnologie nelle dimostrazioni, anche in situazioni di multicultura

Il progetto di ricerca prevede un approfondimento riguardo ai passaggi: ***argomentare, congetturare, dimostrare*** .

Per fare questo ritengo utile un approccio al tema che tenga conto:

- **dei luoghi**
- **dei tempi**

In altre parole partendo dalla considerazione che i concetti matematici non seguono un percorso unico, ma che ogni cultura li ha sviluppati in maniera diversa, si potrà considerare come si dimostra matematicamente in culture diverse dalla nostra, in contesti, per esempio, in cui la logica aristotelica non ha influenzato il successivo corso storico.

2008

argomentare, congetturare, dimostrare

Un’altra pista di ricerca prenderà in esame il concetto che effettivamente viene veicolato agli studenti quando il docente parla di “dimostrazione”, ripensando di conseguenza al significato che si attribuisce all’espressione “verità matematica”.

Si metterà in evidenza il ruolo della dimostrazione:

- nella scuola secondaria inferiore (si pensi ad esempio all’ambiguità che può suscitare la geometria euclidea a causa della sua doppia anima: descrizione del mondo fisico e metodo assiomatico rigoroso);
- nella scuola secondaria superiore (facendo riferimento alle tesi di Balacheff).

Esperienza di ricerca precedente

L'apprendimento della geometria nell'ambiente Cabrì può essere conseguito enucleando i seguenti passi:

1. gioco, manipolazione, ricerca, esplorazione;
2. osservazione delle caratteristiche varianti e delle proprietà invarianti; individuazione delle regolarità;
3. evidenza empirica delle osservazioni, mostrare regolarità e dipendenze per evidenza visiva o per rilevazione metrica;
4. evidenza logica, giustificare, dimostrare.

Si tratta dunque di focalizzare l'attenzione sul passaggio che avviene dalla congettura alla dimostrazione e, quindi, al procedimento che permette di passare da una serie di proposizioni di partenza a nuove proposizioni.

The concept of proof

- Il concetto di dimostrazione è cambiato diverse volte nel corso dei secoli
- La dimostrazione, intesa come lo strumento matematico per eccellenza, è spesso considerato persino un ostacolo allo sviluppo dell'intuizione e alla capacità di esplorazione.
- Diversi insegnanti sostengono che la dimostrazione deduttiva non può essere più insegnata.

Heuristic, exploration and visualisation

- È importante sottolineare che diversi matematici lavorano usando metodi che sono sempre più simili ad esperimenti e che le congetture vengono testate attraverso l'uso del computer.
- Molti di loro hanno affermato che una dimostrazione "semirigorosa" potrebbe essere sufficiente.

La “prova” in classe

- Se ci poniamo da un punto di vista realistico il ruolo della “prova” in classe è quello di aiutare nell’insegnamento (Hanna 1990)
- Il dimostrare ha diverse funzioni: una sociale, il convincere della correttezza di una propria affermazione; una educativa di spiegazione completa. Questo evidentemente coinvolge l’uso del linguaggio.

La sperimentazione

Nella ricerca ho utilizzato registri rappresentativi diversi di uno stesso significato. Mi sono chiesto in che modo gli studenti intervistati cogliessero le relazioni tra: rappresentazione grafica, tabulare, algebrica e la lingua naturale.

Per la matematica il funzionamento cognitivo di base di base comprende le due condizioni seguenti:

- *il fatto di disporre* ***non di uno****, ma di parecchi sistemi di segni che funzionano come registri di rappresentazione per funzioni cognitive di trattamento;*
- *il* ***necessario coordinamento*** *di questi registri.*

Experimentation: first stage

È stato assegnato il seguente problema.

Il Esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

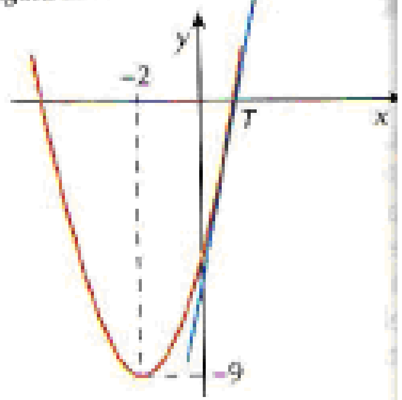
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (***figura 27***).

Figura 27



Descrivi il procedimento seguito dal libro per risolvere l'esercizio cercando di rendere il significato e la necessità dei passaggi proposti in termini quanto più "liberi" e prossimi al linguaggio comune.

Esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

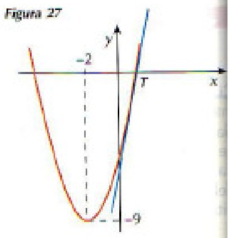
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (*figura 27*).

Figura 27



1° passaggio: sistema formato da due equazioni

____

____

____

____

____

____

2° passaggio: creazione dell'equazione equivalente

____

____

____

____

____

____

3° passaggio: riflessione sul discriminante

____

____

____

____

____

Descrivi il procedimento seguito dal libro per risolvere l'esercizio cercando di rendere il significato e la necessità dei passaggi proposti in termini quanto più "liberi" e prossimi al linguaggio comune.

II Esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

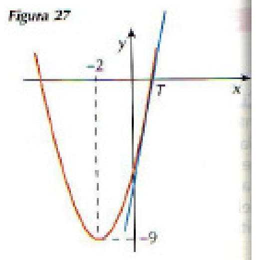
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (***figura 27***).

Figura 27



1° passaggio: sistema formato da due equazioni

2° passaggio: creazione dell'equazione equivalente

3° passaggio: riflessione sul discriminante

Microsoft Excel - sperimentazione

File Modifica Visualizza Inserisci Formato Strumenti Dati Finestra ?

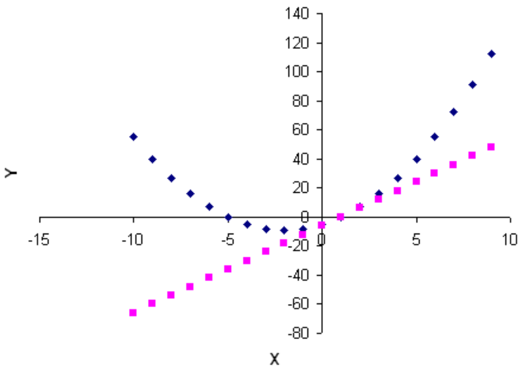
Compila **solo** le parti su sfondo rosso

tutto il resto è automantico

→ Scegli il minimo valore da attribuire alla variabile indipendente: -10

→ Scegli il massimo valore da attribuire alla variabile indipendente: 10

… quindi verranno proposti valori con un intervallo di … 1



y= x^2 + 4x - 5			
P_1	(-10,0000	, 55,0000	)
P_2	(-9,0000	, 40,0000	)
P_3	(-8,0000	, 27,0000	)
P_4	(-7,0000	, 16,0000	)
P_5	(-6,0000	, 7,0000	)
P_6	(-5,0000	, 0,0000	)
P_7	(-4,0000	, -5,0000	)
P_8	(-3,0000	, -8,0000	)
P_9	(-2,0000	, -9,0000	)
P_{10}	(-1,0000	, -8,0000	)
P_{11}	(0,0000	, -5,0000	)
P_{12}	(1,0000	, 0,0000	)
P_{13}	(2,0000	, 7,0000	)
P_{14}	(3,0000	, 16,0000	)
P_{15}	(4,0000	, 27,0000	)
P_{16}	(5,0000	, 40,0000	)
P_{17}	(6,0000	, 55,0000	)
P_{18}	(7,0000	, 72,0000	)
P_{19}	(8,0000	, 91,0000	)
P_{20}	(9,0000	, 112,0000	)

y=6x - 6			
Q_1	(-10,0000	, -66,0000	)
Q_2	(-9,0000	, -60,0000	)
Q_3	(-8,0000	, -54,0000	)
Q_4	(-7,0000	, -48,0000	)
Q_5	(-6,0000	, -42,0000	)
Q_6	(-5,0000	, -36,0000	)
Q_7	(-4,0000	, -30,0000	)
Q_8	(-3,0000	, -24,0000	)
Q_9	(-2,0000	, -18,0000	)
Q_{10}	(-1,0000	, -12,0000	)
Q_{11}	(0,0000	, -6,0000	)
Q_{12}	(1,0000	, 0,0000	)
Q_{13}	(2,0000	, 6,0000	)
Q_{14}	(3,0000	, 12,0000	)
Q_{15}	(4,0000	, 18,0000	)
Q_{16}	(5,0000	, 24,0000	)
Q_{17}	(6,0000	, 30,0000	)
Q_{18}	(7,0000	, 36,0000	)
Q_{19}	(8,0000	, 42,0000	)
Q_{20}	(9,0000	, 48,0000	)

Analysis of the collected data…

2008-09

- Gli studenti hanno preferito di gran lunga *vedere* la rappresentazione di ciò che essi stavano studiando. E il computer dà loro questa possibilità. La maggiorparte degli studenti è pertanto perfettamente soddisfatto dalll'uso del computer
- Durante il terzo passo, grazie all'esperienza fatta nell'esercizio precedente, tutti gli studenti hanno preferito l'uso del software, ma poiché non riuscivano a trovare il punto di intersezione hanno intrapreso strade differenti.

Alcuni di loro si sono rivolti al linguaggio algebrico, anche se avevano mostrato di non riuscire ad afferrare pienamente il significato delle operazioni che svolgevano.

Altri hanno valutato i valori ottenuti così accurati da stabilire con assoluta certezza che le due curve si intersecano

Esiti del secondo anno

- ***Partecipazione attiva a comvegni e seminari***

Dresden, Saxony, Germany, September 11-17, 2009 International Conference "Models in Developing Mathematics Education" (titolo della presentazione "*How to Solve It*"

Firenze, 17 maggio 2009, 4° seminario nazionale sul curricolo verticale promosso dal C.I.D.I. (Centro di Iniziativa Democratica degli insegnanti (titolo della presentazione presentata "*Argomentare e dimostrare in diversi registri semiotici")*

Rackova Dolina, Slovacchia, 15 – 18 / 10 / 2008 : Seminario didattica della Fisica (titolo della presentazione presentata "*Argumentation in different semiotic registers*"

Firenze, 20 / 04 / 2008 : "Una scuola di qualità per tutti"; seminario organizzato dal C.I.D.I. (titolo della relazione presentata "*Se la matematica non serve a niente*")

- ***Pubblicazion***i

"How to solve it"; proceeding*s* International Conference "Models in Developing Mathematics Education"; http://math.unipa.it/~grim/21_project/21Project_dresden_sept_2009.htm

"Argomentare e dimostrare in registri semiotici differenti"; Quaderni di Ricerca in Didattica, n.19, Palermo

"Argumentation in different semiotic registers"; Acta Didactica 4; Univerzita Konstatina Filosofa v Nitre; Fakulta Prirodnych Vied

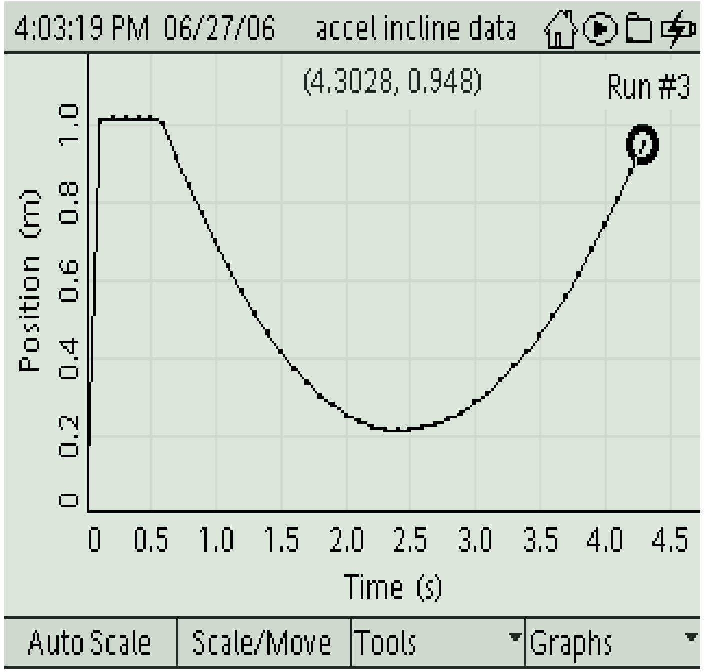
Experimentation

Questa sperimentazione è stata portanta avanti in classi di scuola secondaria superiore e attraverso interviste a docenti. La metodologia usata è "La teoria delle situazioni" (Brousseau, 1997, Spagnolo et alii, 2009).

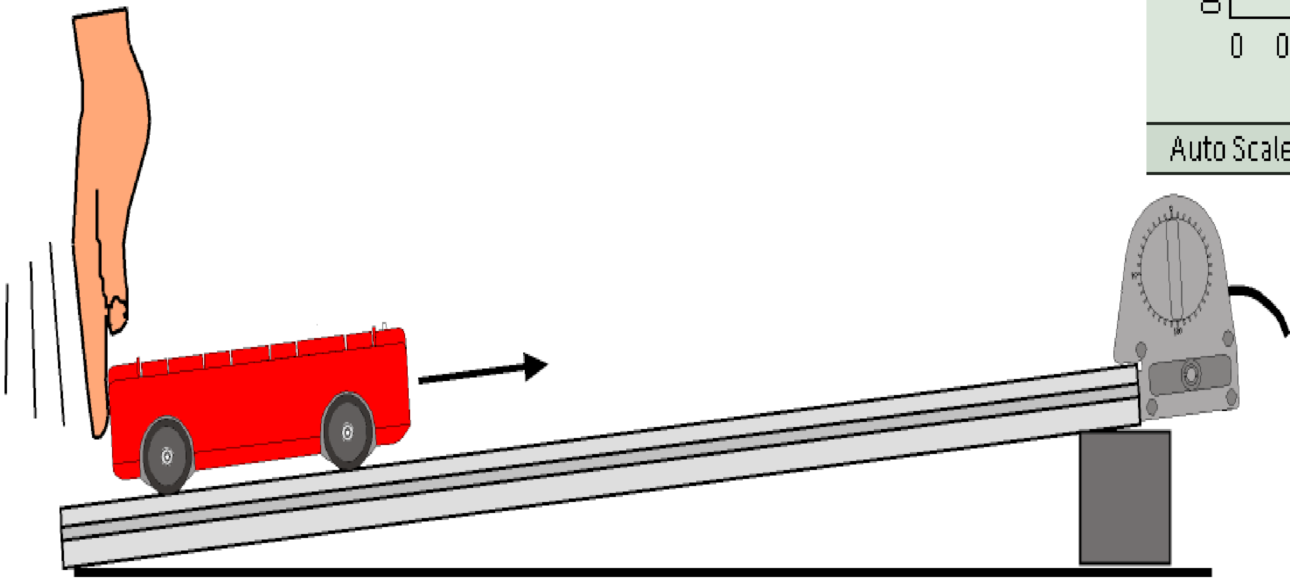
1st step

Un semplice esperimento: il modo di un carrello lungo un piano inclinato

We just verified an implicit idea with experimental data.



Position graph



Experimentation

I due problemi assegnati

1. Determinare, tra tutti i rettangoli isoperimetrici, quello di area massima.
2. Determinare,tra tutti i triangoli con la stessa ipotenusa, quello che ha massimo il valore del rapporto tra l'ipotenusa e la somma dei due lati.

Agli studenti non è stato chiesto di risolvere i problemi.

Quindi io ho suggerito

due

diverse strategie risolutive.

Gli studenti hanno avuto a disposizione software (Excel, GeoGebra, Derive…).

La prima strategia

$$p = a + b$$

$$\begin{cases} A = a \cdot b \\ b = p - a \end{cases}$$

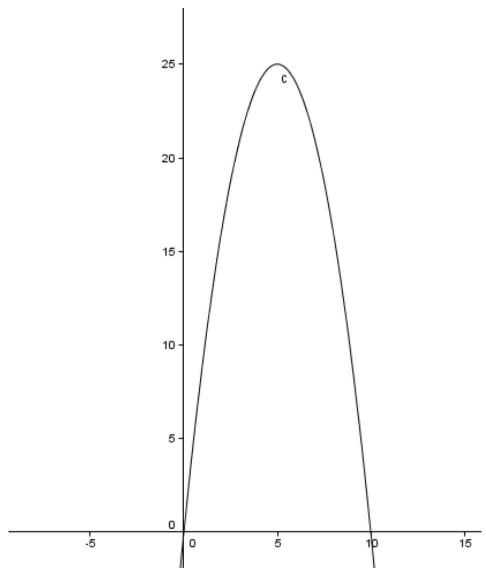
Tra tutti I rettangoli isoperimetrici quello di area massima è il quadrato.

$$A = p \cdot a - a^2$$

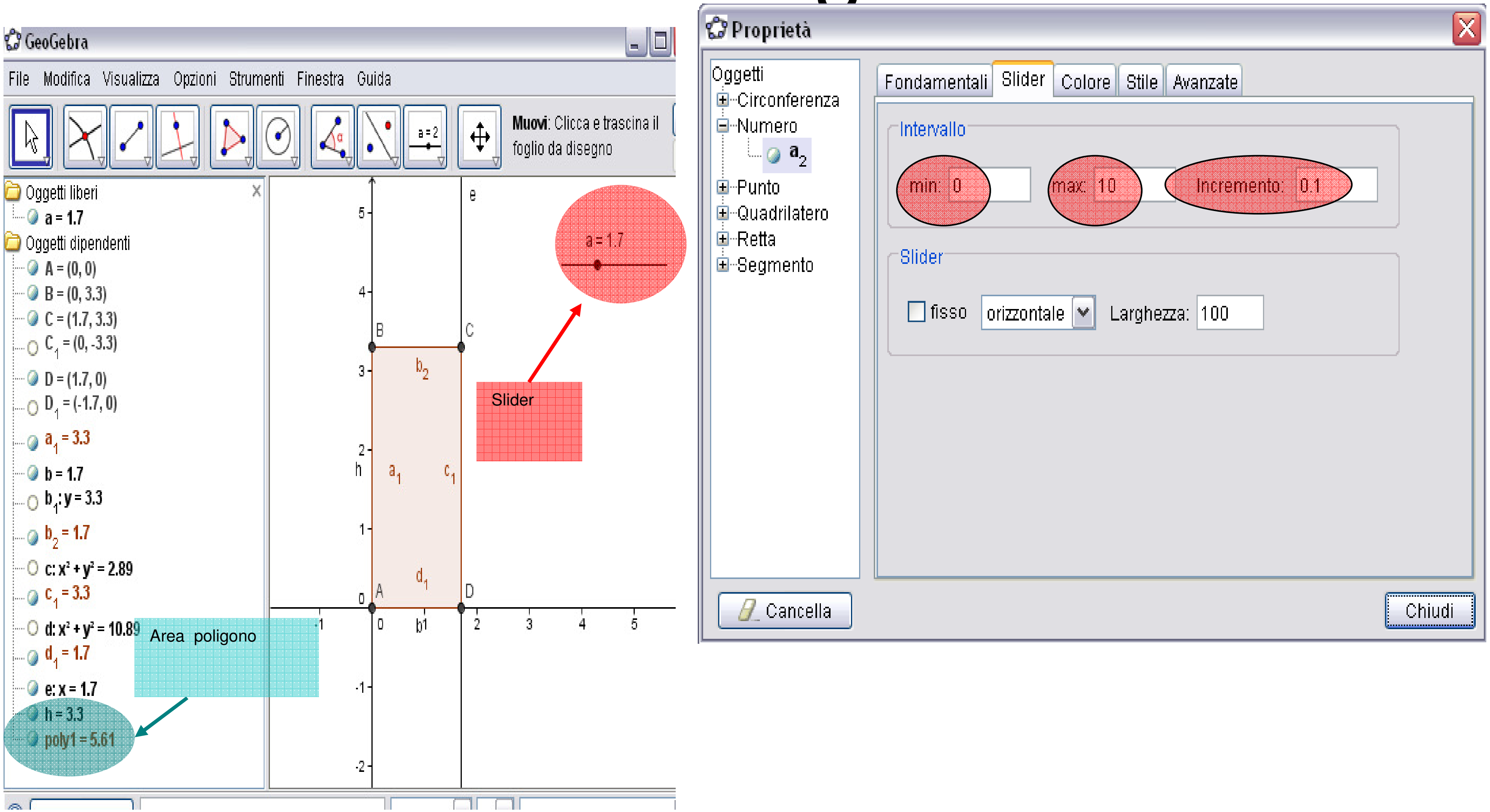
$$y(x) = p \cdot x - x^2$$

$$y' = p - 2x$$

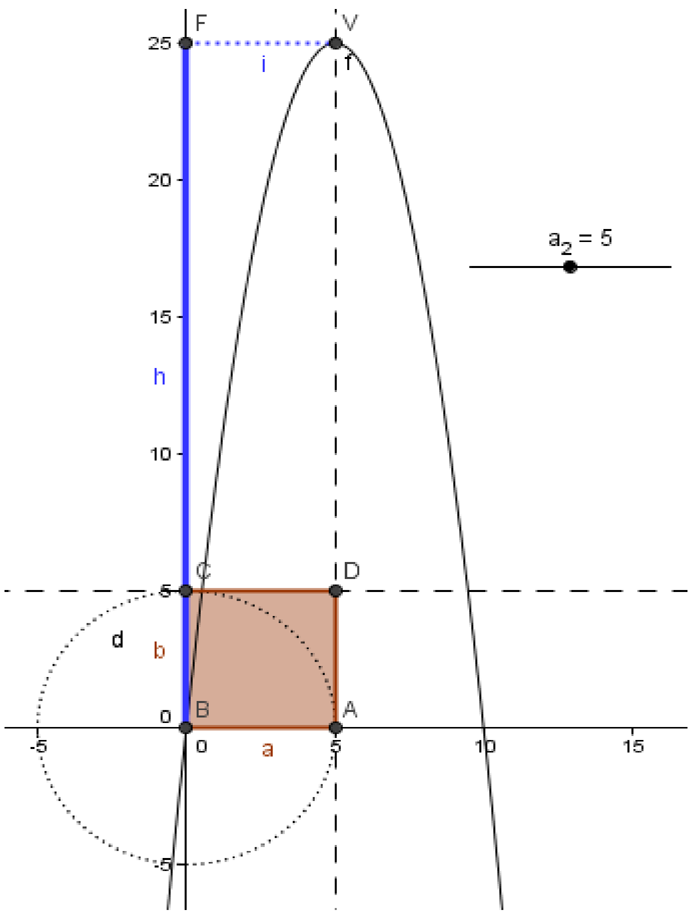
$$p - 2x > 0$$



La seconda strategia

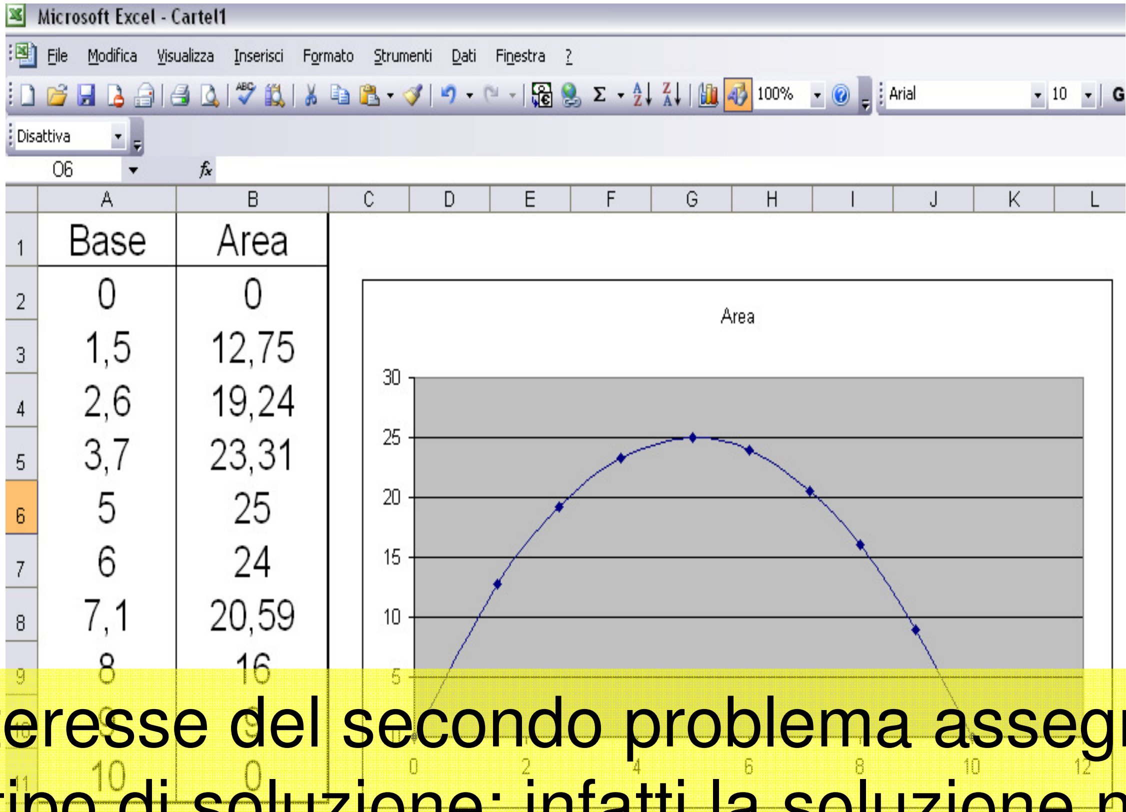


Usando lo *slider*, possiamo avere differenti dimensioni del rettangolo e, di conseguenza, diverse misure dell'area.



Vedi file ggb

Muovendo lo *slider* avremo dunque, in corrispondenza alla base, valori dell'area che potremo disporre in una tabella.



Base	Area
0	0
1,5	12,75
2,6	19,24
3,7	23,31
5	25
6	24
7,1	20,59
8	16
[illegible]	[illegible]
10	0

L'interesse del secondo problema assegnato è dato dal tipo di soluzione: infatti la soluzione non è un numero razionale.

Quindi ho chiesto agli studenti di rispondere a 3 domande. Ho specificato che non richiedevo terminologie specifiche:

- Secondo te, I due approcci usati sono corretti?
- C’è qualche somiglianza tra le argomentazioni usate nell’esperimento di fisica e nella seconda strategia usata?
- Se potessi scegliere, quale strategie useresti per risolvere i problemi?

Do you think these two approaches I used to solve the two exercises are correct?

The expected answers to the question were:

- The student do not make any difference between the two strategies because they both lead to the solution.
- The student considers the second strategy wrong because the teacher did not mention it.
- The student believes the second strategy absolutely wrong because the computer does not guarantee the general result.
- The student believes the second strategy correct for the first exercise and incorrect for the second one; because in the first case it gives the exact result and in the second case it is only an approximation.
- The student considers correct both strategies, but prefers the first one since the computer is rather approximate in its calculations.
- The student prefers the second approach because it allows him to work on the mathematical objects presented in the text of the problem (squares and rectangles) instead of having to work on other (parabolas)

Do you find any similarities between the argumentation used to resolve the physics experiment and the second proposed strategy?

The expected answers to the question were:

- The student believes there is nothing in common between a physics experiment and a mathematics one as the logic used is inductive in the first and deductive in the second.
- The student answers that they are similar, but while in physics the curve is an approximation that represents all the experimental points, in mathematics the curve is created exactly on the found points.
- The similarity between the two cases is total

If you could choose, which strategy would you use to solve the problem?

The expected answers to the question were:

- The first because it is the only acceptable strategy
- The first is the correct one but the second (which should not be used!) provides the fastest solution
- They are equivalent
- Since the student wouldn’t have obtained the proof by means of the first strategy, he considers the second most effective.

… to the teachers…

Come valuteresti un tuo studente (16 -18 anni)
se ai problemi dati fosse proposta una soluzione
mediante una strategia euristica utilizzando
GeoGebra ed *Excel* ?

The problems given were:

1. Determine, among all the rectangles with the same perimeter length, the one with the maximum area.
2. Determine, among all the triangles with a given hypotenuse, the one that has the maximum ratio between the hypotenuse and the sum of the other two sides.

The expected answers to the question were

- Completely wrong.
- In this type of problems, we consider such a procedure wrong because an analytical approach is to be preferred to solve the problem for all values of R. on the contrary, for other types of problems it would be an acceptable procedure.
- It might be fine if we could integrate the deductive procedure to some rigorous argumentations about continuity and the specific function used.
- Correct.

the answers I’ve been studying were the following:

The students’ responses were rather ambiguous.

- Those students considered "good" by their teachers said that the only strategy to be used was the first, but they did not provide any reasons.
- A small group answered they could not solve the problem using the first method, but they immediately understood the second strategy.

- Another group, most of students, wrote that the first method was to be used, but they considered the second one acceptable.

It seemed that the only reason why the students preferred the first strategy was “elegance” together with the fact that it was the method used by their teachers. Some of them, however, greatly appreciated the procedure of Geogebra which could show at the same time the parable and the rectangle. Some students (especially the youngest), noting that the slider could show the correspondence between the area of the rectangle, the base and the points of the parabola, referred to such a mathematical procedure as "*powerful*", “*charming*” and “*elegant*".

As for the teachers …

- Most of the teachers identified a fault in the second method, as the students did, because of the lack of guarantee that the solutions could be generalized to any value of R.
- “Beauty” turned out to be a constant element in the responses of both students and teachers, this search for a “beautiful” solution does not help when solving problems, nonetheless
- Another constant element is the need for a generalization of solutions in a continuous time range; it is as if students and teachers exclude any point of discontinuity in our problems. It's like always repeating the Aristotelian "it is ever true".

Esame di Stato 2009

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione

$$f(x) = \log x \text{ (\textit{logaritmo naturale})}$$

Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x . Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante.

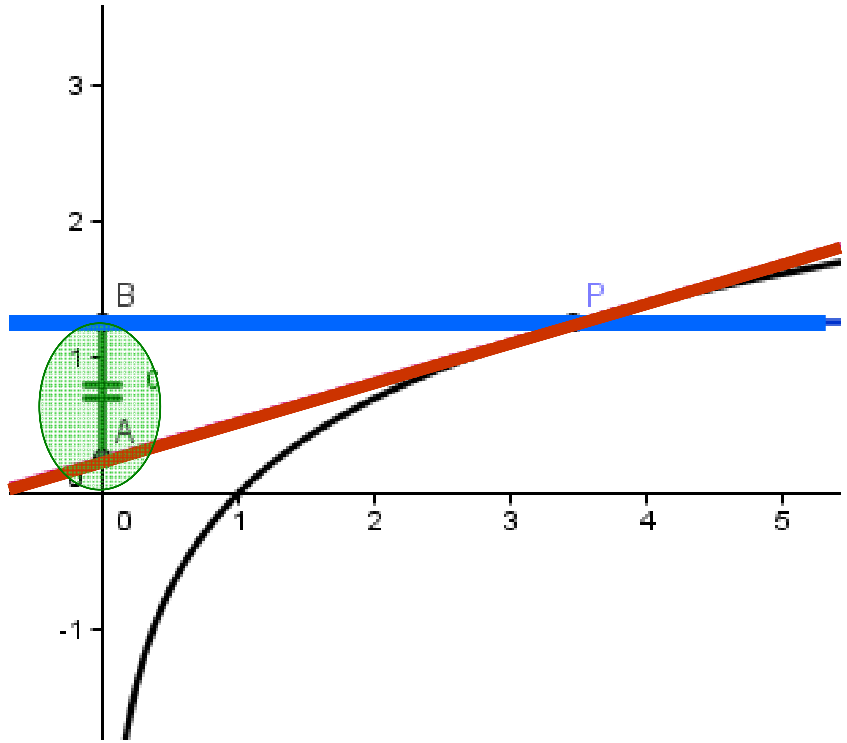
$$y = \ln x \qquad \text{Let} \qquad P(x_0, \ln x_o)$$

line parallel to x $\quad y = \ln x_0 \quad \begin{cases} y = \ln x_0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, \ln x_0)$

$$m = D[\ln x_0] = \frac{1}{x_0}$$

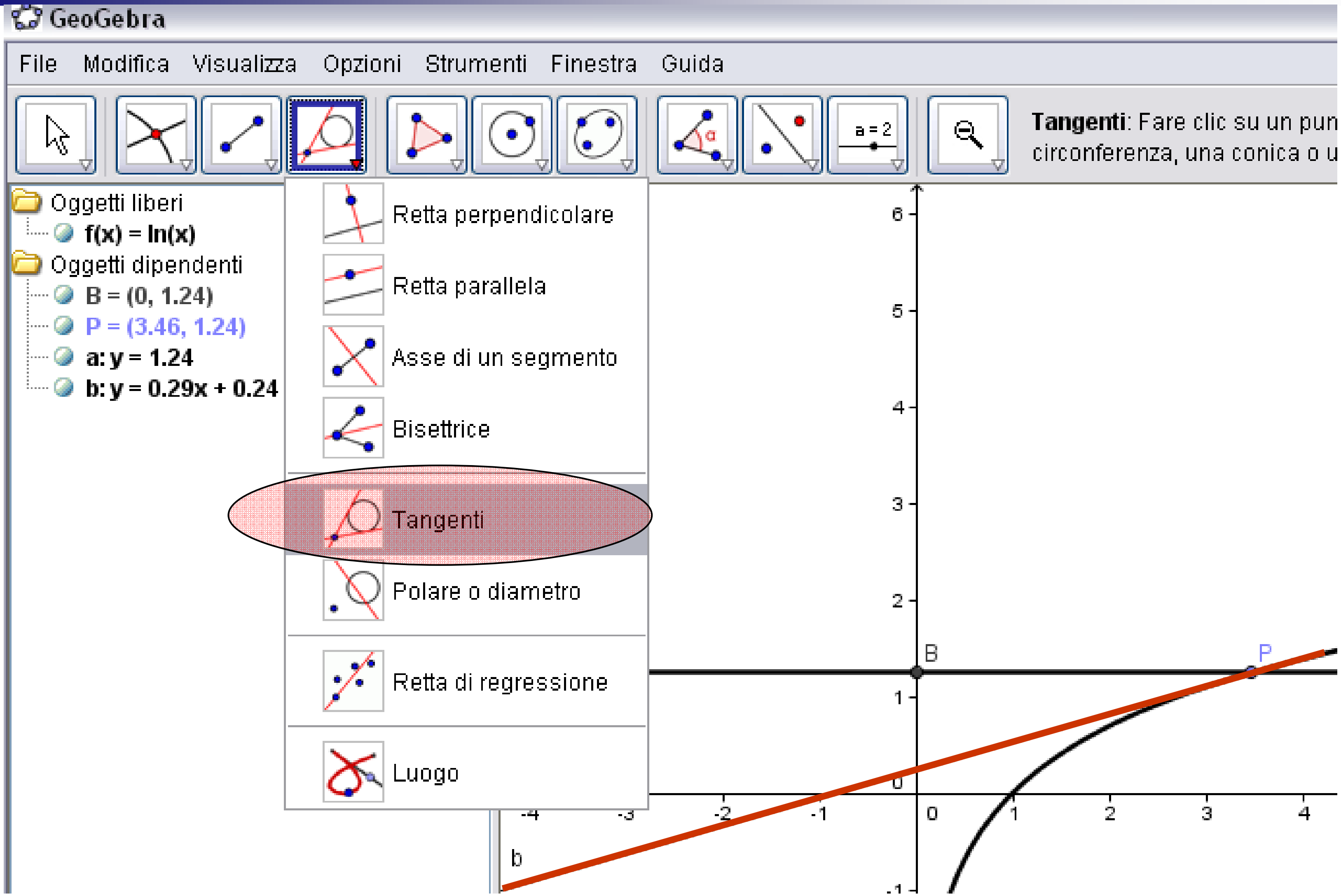
$$t : y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$$

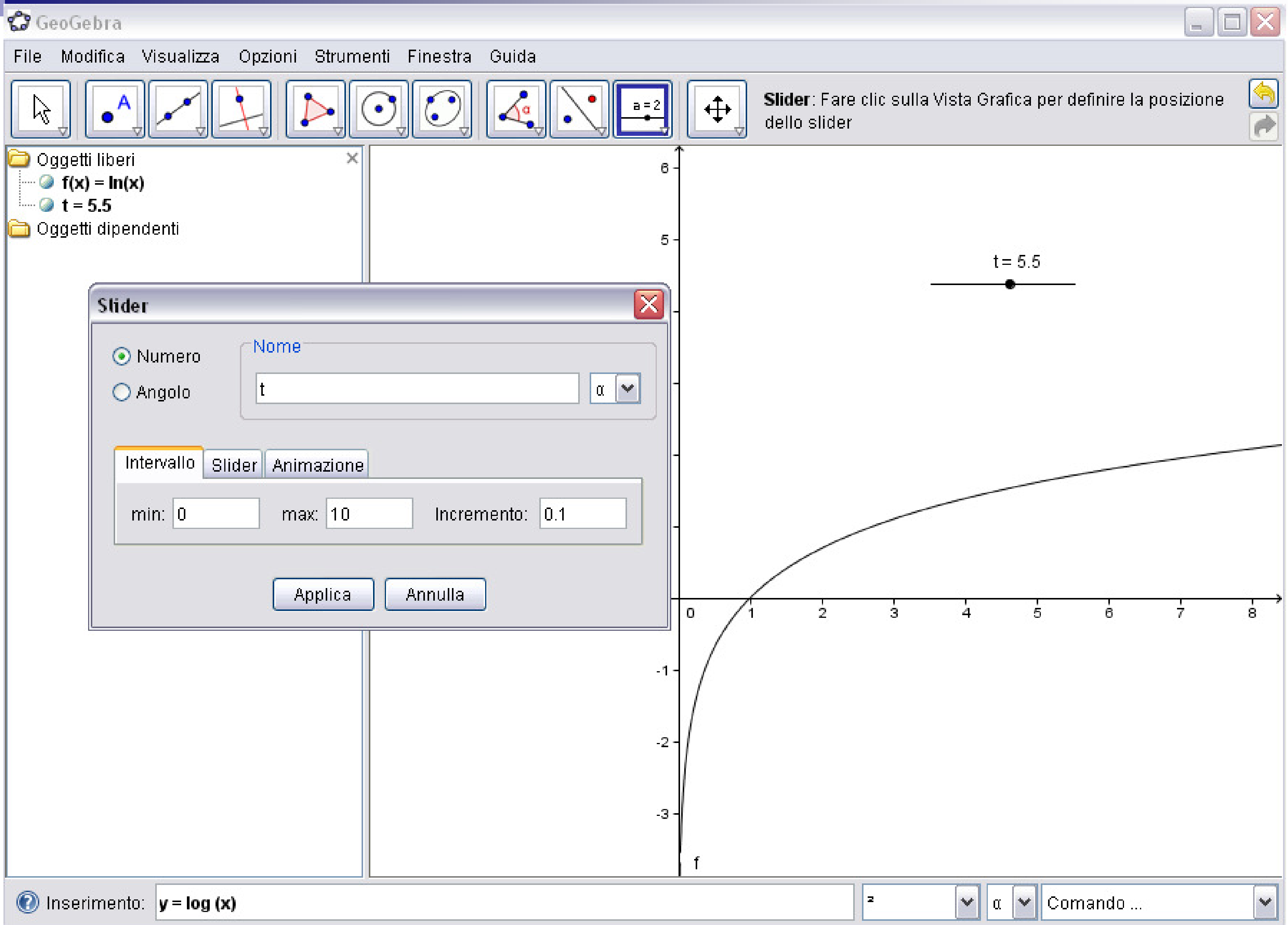
$$\begin{cases} y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1 + \ln x_0)$$

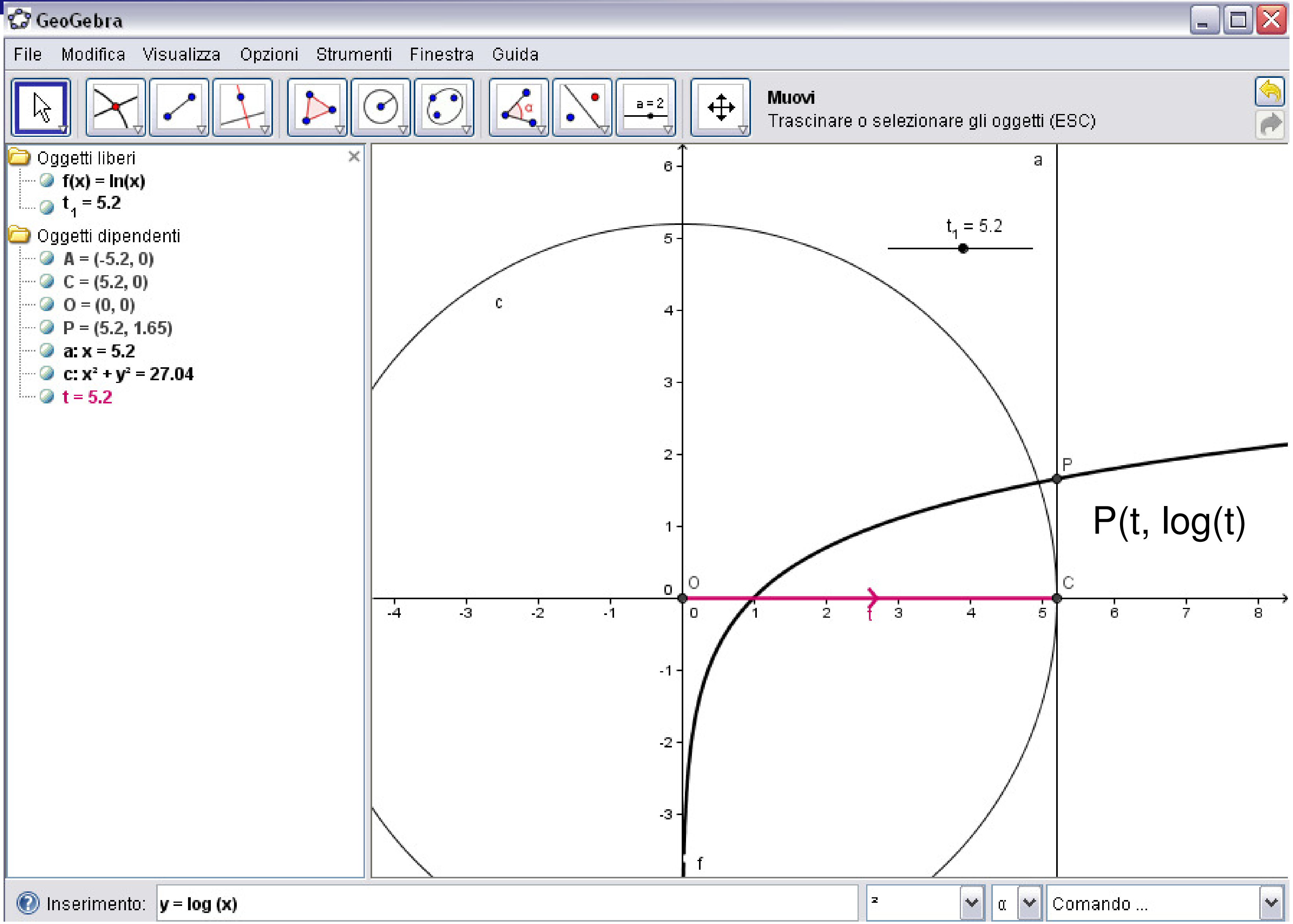


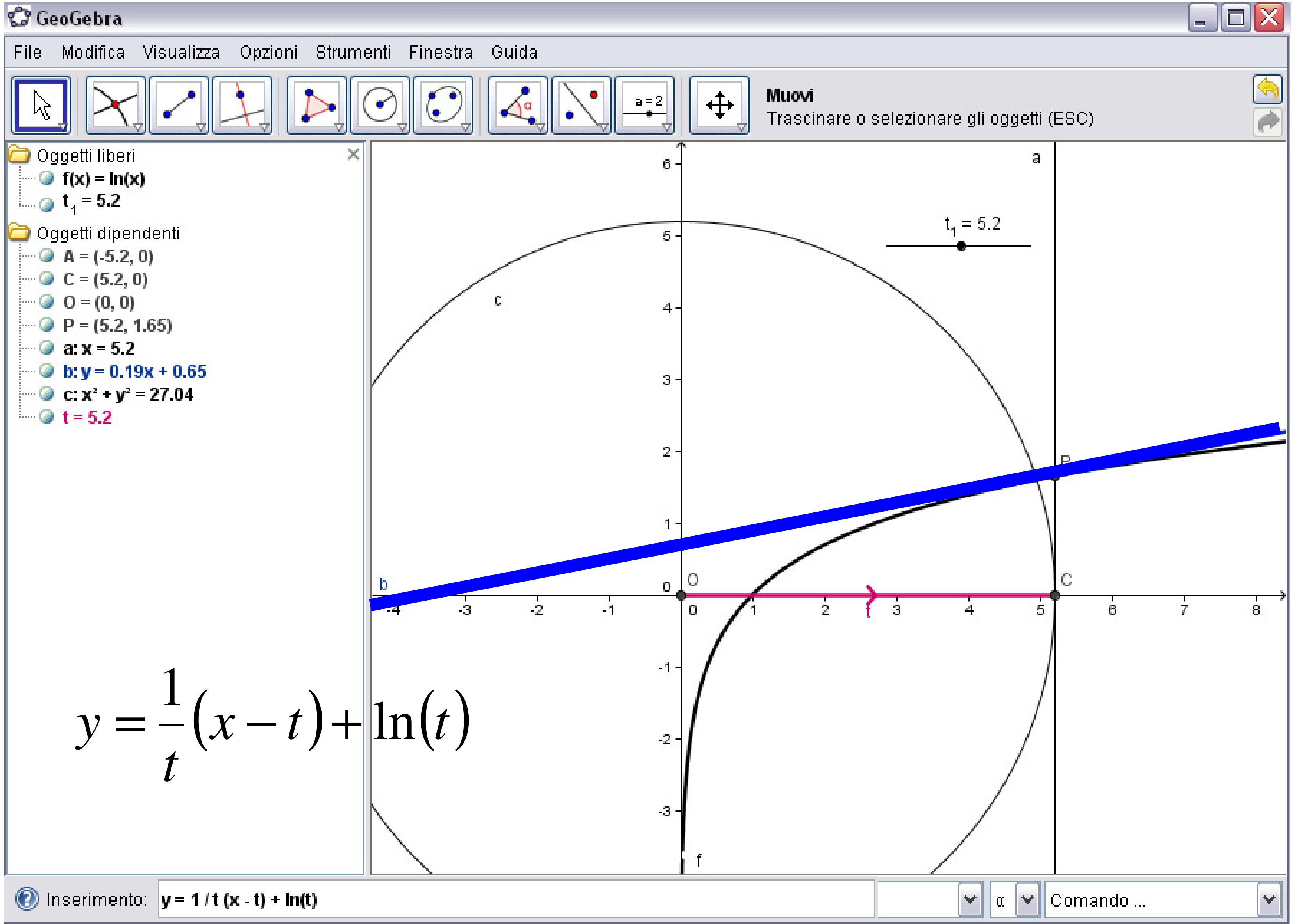
$$\overline{AB} = |\ln x_0 - (1 - \ln x_0)| = |-1| = 1$$

q.e.d.

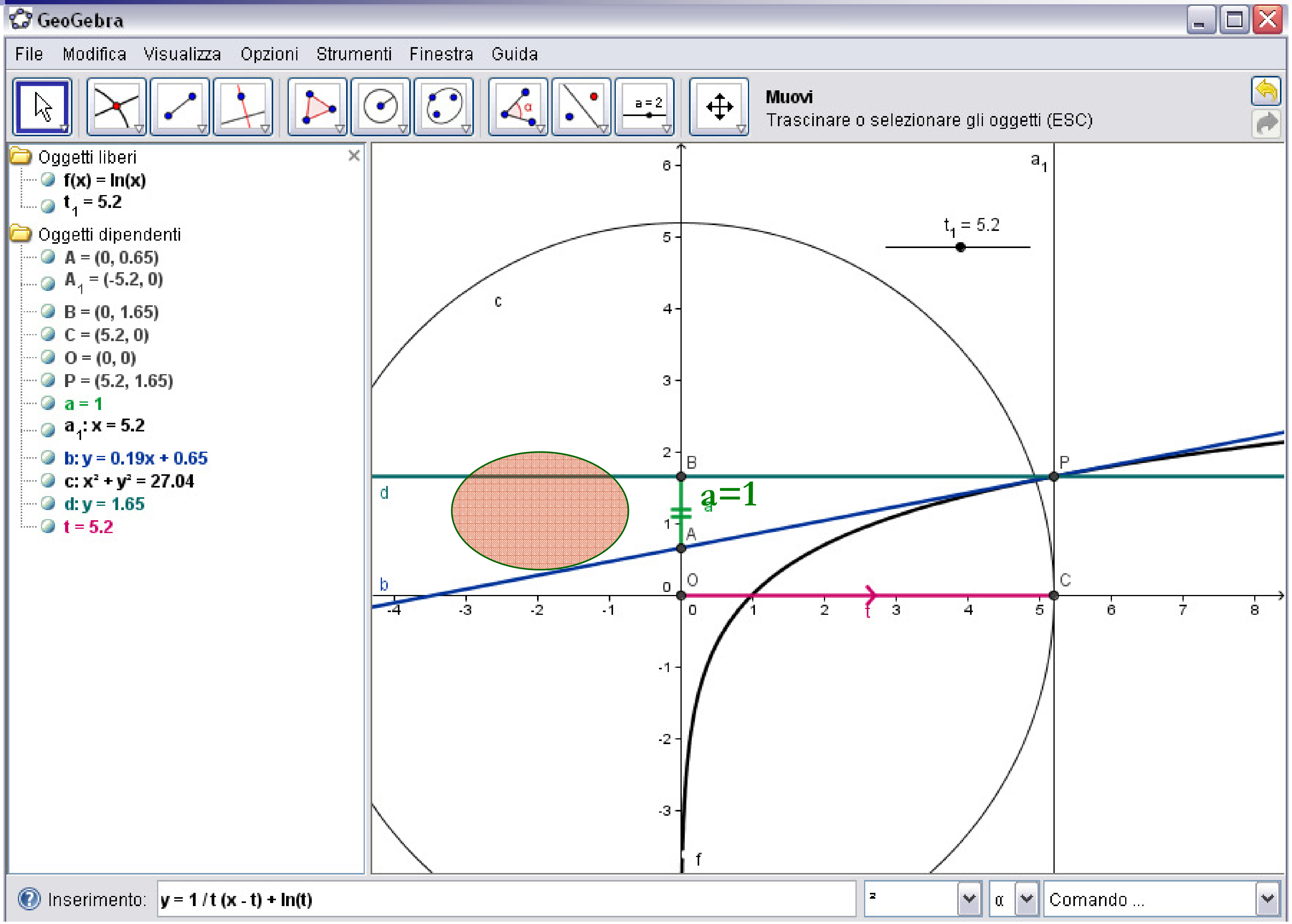

GeoGebra
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Tangenti: Fare clic su un pun
circonferenza, una conica o u
Oggetti liberi
f(x) = ln(x)
Oggetti dipendenti
B = (0, 1.24)
P = (3.46, 1.24)
a: y = 1.24
b: y = 0.29x + 0.24
Retta perpendicolare
Retta parallela
Asse di un segmento
Bisettrice
Tangenti
Polare o diametro
Retta di regressione
Luogo
B
P
b


GeoGebra
File
Modifica
Visualizza
Opzioni
Strumenti
Finestra
Guida
Slider: Fare clic sulla Vista Grafica per definire la posizione dello slider
Oggetti liberi
f(x) = ln(x)
t = 5.5
Oggetti dipendenti
Slider
Numero
Angolo
Nome
t
α
Intervallo
Slider
Animazione
min: 0
max: 10
Incremento: 0.1
Applica
Annulla
t = 5.5
f
Inserimento:
y = log (x)
Comando ...


GeoGebra
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Muovi
Trascinare o selezionare gli oggetti (ESC)
Oggetti liberi
f(x) = ln(x)
t1 = 5.2
Oggetti dipendenti
A = (-5.2, 0)
C = (5.2, 0)
O = (0, 0)
P = (5.2, 1.65)
a: x = 5.2
c: x² + y² = 27.04
t = 5.2
t1 = 5.2
P(t, log(t))
Inserimento: y = log (x)
Comando ...



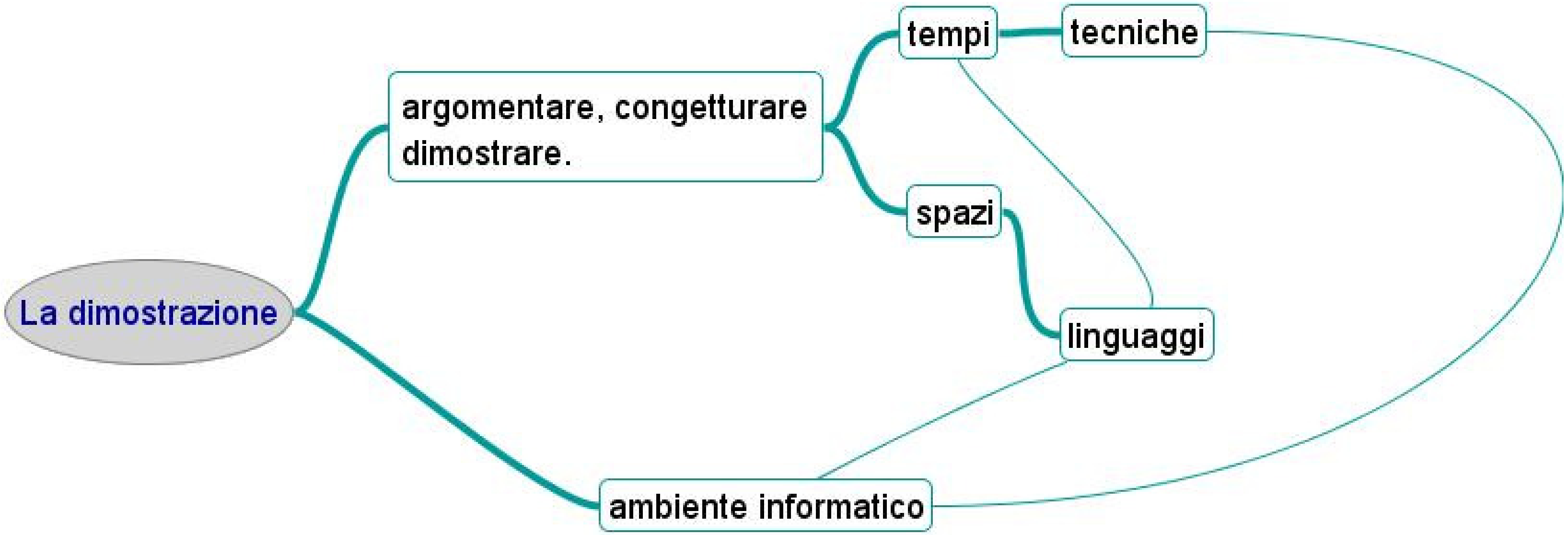
$$y = \frac{1}{t}\left(x - t\right) + \ln\left(t\right)$$



Vedi file ggb

Prospettive

- Una riflessione sull'uso degli strumenti matematici. Focalizzerei l'attenzione sull'uso di riga e compasso in Archimede
- La didattica che usa software e tecnologie.
- L'influenza della nostra cultura nell'approccio ad un problema


La dimostrazione
argomentare, congetturare dimostrare.
tempi
tecniche
spazi
linguaggi
ambiente informatico

Bibliografia

- Blum, M: 1986, *How to prove a theorem so no one else can claim it,* Proceedings of the International Congress of the Mathematician, 1444-1451.
- Duval R. (1996), *Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques?*, Recherche en Didactique des Mathématiques, 16, 3, 349-382.
- Hanna, G.: 1996, *The ongoing value of proof*, Proceedings of PME XX Valencia, v. 1, 21-34, trad. it. a cura di F. Furinghetti & D. Paola, in La matematica e la sua didattica.
- Hanna G. (2000), *A critical examination of three factors in decline of proof*, Interchange, vol. 31/1, 21-33.
- Hanna G. (2000), *Proof, explanation and exploration: an overview*, educational studies in mathematics, 44, 5-23.
- Jaffe A. and Quinn F. (1993), *Theoretical mathematics: toward a cultural syntesis of mathematics and theoretical physics,* Bulletin AMS, 29, 1-13
- Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mason J. (1991), *Question about geometry*, in D.Pimm and E. Love (eds) teaching and learning mathematics: a reader, holder and Stoughton , London, 77-99.
- Zeilberger, D. (1993), *Theorem for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture,* Notices of the American Mathematican Society, v.40 n. 8, 978-981.

- G. Brousseau, 1997, *Theory of Didactical situations in mathematics. 1970-1990*, translation M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield (Kluwer Academic Publishers).
- Di Paola B., Spagnolo, F., *Different procedures in argumentation and conjecturation in primary school: an experiencewith Chinese students, Conference of five cities*: “Research in mathematics education”, Cyprus, 2008.
- Gras R., 2000, *Les fondements de l’analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ quaderno9.htm
- Gras R., Suzuki E., Guillet F., Spagnolo F. (Eds.), 2008, *Statistical Implicative Analysis - Theory and Applications*, Springer.
- Hanna G., 2000, *A critical examination of three factors in decline of proof* , Interchange, vol. 31/1, 21-33.
- Hanna G., 2000, *Proof, explanation and exploration: an overview*, Educational studies in mathematics, 44, 5-23.
- Spagnolo F., 2000, *The role of history of mathematics in research in Mathematics Education, Proceeding*, "TheMathematics Education into the 21st Century Project", November 2000, Amman, Jordan.(http://math.unipa.it/~grim/21project.htm)
- Spagnolo F., 2001, *Semiotic and hermeneutic can help us to interpret teaching/learning?*, Proceeding "The Mathematics Education into the 21st Century Project", Palm Cove (Cairns, Australia).(http://math.unipa.it/~grim/21project.htm).
- Spagnolo F. et alii, 2004, *L’analisi implicativa per lo studio di una esperienza didattica in statistica*, Quaderni diRicerca in Didattica n.13, Palermo
- Spagnolo F., 1997, *L’analisi a-priori e l’indice di implicazione statistica di Gras*, Quaderni di Ricerca in Didattica GRIM, n.7, Palermo.
- Spagnolo F.**,** *Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non scholastic environments*, The International Conference on School effectiveness and School improvement in China, University of Shenyang, China, (pag.76), 2005.
- Spagnolo F., M. Ajello*, Schemi di ragionamento in culture differenti : i paradossi logico-linguistici nella cultura europea e cinese*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), n.18, , pp.163-182, http://math.unipa.it/~G.R.I.M./quaderno18.htm., 2008.
- Spagnolo F. et alii, *Epistemologia Sperimentale delle Matematiche*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), Supplemento n.1 al n.19, 2009.