All’origine della dinamica complessa: il contributo di Pincherle

Umberto Bottazzini

Dipartimento di Matematica

Università di Milano

Dicembre 1915

Grand Prix des Sciences Mathématiques

(Académie des Sciences de Paris)

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Prix du Budget : 3000fr.)

Prix biennal à sujet variable.

L'*itération* d'une substitution à une ou plusieurs variables, c'est-à-dire la construction d'un système de points successifs $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, dont chacun se déduit du précédent par une même opération donnée :

$$P_n = \varphi(P_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

(φ dépendant rationnellement, par exemple, du point P_{n-1}) et dont le premier P_0 est également donné, intervient dans plusieurs théories classiques et dans quelques-uns des plus célèbres Mémoires de Poincaré.

Jusqu'ici les travaux bien connus consacrés à cette étude concernent surtout le point de vue « local ».

L'Académie estime qu'il y aurait intérêt à passer de là à l'examen du domaine entier des valeurs que peuvent prendre les variables. Dans cet esprit, elle met au concours, pour l'année 1918, la question suivante :

Perfectionner en un point important l'étude des puissances successives d'une même substitution, l'exposant de la puissance augmentant indéfiniment.

On considérera l'influence du choix de l'élément initial P_0, *la substitution étant donnée, et l'on pourra se borner aux cas les plus simples, tels que les substitutions rationnelles à une variable.*

Henri Poincaré (1854-1912)

Poincaré (1890)

$$F_i(su) = \phi_i[F_1(u), .., F_n(u)]$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

$|s| > 1$

$$F(su) = \phi[F(u)]$$

Pierre Fatou (1878-1929)

Data

$$\phi_2(z) = z^2 / z^2 + 2$$

La funzione ha un unico punto di attrazione in 0. Ogni punto del disco *D*: $|z| < 1$ converge a 0 per iterazione di $\phi_2(z)$

Se z (arbitrario) converge a 0 per iterazione della $\phi_2(z)$ allora esiste un intero positivo N tale che per $n > N$, $[\phi_2(z)]^n$ appartiene a D e viceversa. Un punto z converge a 0 per iterazione della $\phi_2(z)$ sse l'iterato di z finisce per stare in D.

L'insieme dei punti J che non convergono a 0 è un insieme perfetto totalmente disconnesso.

PRIX ET SUBVENTIONS ATTRIBUÉS EN 1918.

RAPPORTS.

MATHÉMATIQUES.

PRIX FONDÉ PAR L'ÉTAT.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Jordan, Appell, Painlevé, Hadamard, Boussinesq, Lecornu; Émile Picard et Humbert, rapporteurs.)

L'Académie avait mis au concours l'étude de l'*itération* d'une substitution, en rappelant que le point de vue *local* avait seul été considéré jusqu'alors et en invitant les concurrents à se placer au point de vue *général*.

Les travaux antérieurs, notamment les travaux fondamentaux de M. Kœnigs, avaient, pour une substitution S, $z_1 = \varphi(z)$, à une variable, conduit à la notion des *points d'attraction :* si ζ est un point laissé fixe par S ou par une de ses puissances (*point invariant*), et si une quantité correspondante, dite *multiplicateur*, est de module *inférieur* à l'unité, les transformés successifs (*conséquents*) d'un point z, pris au voisinage de ζ, tendent tous vers ζ, ou tendent périodiquement vers p points, dont l'un est ζ, et dont les autres sont ses $(p - 1)$ premiers conséquents.

Ces résultats initiaux soulevaient bien des problèmes : les points attractifs sont-ils en nombre limité; quel est le domaine exact d'attraction de l'un d'eux ; quelle division du plan est ainsi associée à une fonction $\varphi(z)$ donnée?

Sur ces questions fondamentales, on ne possédait qu'une Note de M. Fatou (octobre 1906), où l'auteur montrait, sur des exemples, que les régions de la division pouvaient être limitées par des courbes non analytiques, mettant ainsi en évidence les difficultés et la complexité de la question.

Enfin, à un autre point de vue, Poincaré avait établi que, dans certains cas, on peut associer à S une fonction méromorphe dans tout le plan, $\theta(u)$, telle que, si l'on pose $z = \theta(u)$, on ait $z_1 = \theta(su)$, s étant une constante de module *supérieur* à 1, ce qui ramène l'étude de l'itération à celle de $\theta(u)$; mais aucune application n'avait été faite de cette méthode d'*itération paramétrique*.

Pour le Concours, trois Mémoires ont été déposés au Secrétariat; la Commission n'a retenu que celui de M. **Lattès**, professeur à l'Université de Toulouse, et celui de M. **Julia**, lieutenant au 34e régiment d'Infanterie, lauréat du prix Bordin en 1917.

Le travail de M. Lattès est une application des idées de Poincaré et se rattache également à une théorie de M. E. Picard.

l'auteur y a fait preuve d'un esprit habile et sagace et il aurait probablement poussé plus loin ses découvertes si, cette année même, la mort ne l'avait enlevé, jeune encore et en pleine possession de son talent.

Le Mémoire de M. Julia n'étudie que les substitutions rationnelles à une variable; il introduit systématiquement, non plus les points invariants attractifs, mais les points invariants où le module du multiplicateur est *supérieur* à l'unité; leur propriété fondamentale est d'être des *points de répulsion*. D'une manière plus précise, si l'on entoure l'un d'eux d'un domaine arbitrairement petit, les conséquents successifs de ce domaine *finissent* par comprendre à leur intérieur tous les points du plan, sauf un ou deux, au plus.

Le mémoire de M. Julia porte la marque d'un esprit mathématique d'ordre élevé, dont la vigueur saisit les problèmes dans leur généralité et poursuit les conséquences jusqu'au bout; il dénote également une connaissance approfondie des résultats et des méthodes de l'Analyse moderne avec une aptitude remarquable à les utiliser. Il réalise, dans la question de l'itération, un progrès décisif et montre à nouveau combien s'introduisent naturellement, dans certaines recherches d'Analyse et dans le domaine rationnel lui-même, les propriétés les plus subtiles de la théorie des ensembles et la notion des courbes de M. Jordan.

Aussi, la commission est-elle d'avis, à l'unanimité, de décerner le Grand Prix des Sciences mathématiques à M. **Gaston Julia**; elle propose également d'attribuer, au travail de M. **Samuel Lattès**, une mention très honorable.

L'Académie adopte les propositions de la commission.

Gaston Julia (1893-1978)

- *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles* (1918)

Chi era il ‘terzo uomo’?

- Salvatore Pincherle (1853-1936)

Salvatore Pincherle

- Studia alla Scuola Normale di Pisa (1874)
- Insegna al Liceo Foscolo di Pavia
- Segue i corsi di Weierstrass (1877-78)

  Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. Weierstrass (1880)

Salvatore Pincherle

- Cattedra di Algebra complementare a Palermo (1880)
- Nello stesso anno nominato docente di Algebra complementare a Bologna

- Cattedra di analisi a Bologna (1882)

Salvatore Pincherle

- Lavori sulle serie e la trasformata di Laplace

- *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all’analisi* (con U. Amaldi), 1901
- Funktionaloperationen-und Gleichungen (*Enz. Math. Wissenschaften*), 1906
- Equations et opérations fonctionnelles (*Enc. Sciences mathématiques*), 1912

Salvatore Pincherle

- Presidente dell’Unione Matematica Italiana (1922)

- Presidente dell’Unione Matematica Internazionale (1924-1932)

- Presidente del Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna 1928)

La preistoria

Metodo di Newton per approssimare soluzioni (reali o complesse) dell'equazione $f(z) = 0$

Se z_0 è un valore 'vicino' a una radice, allora

$$z_{n+1} = z_n + f(z_n)/ f'(z_n)$$

genera 'per iterazione' una sequenza $\{z_n\}$ che può (o no) convergere alla radice di $f(z) = 0$

Ernst Schröder (1841-1902)

- Iterazione della funzione analitica:

  $N(z) = z + f(z)/ f'(z)$

  nell'intorno di una radice di $f(z)$.

  (*J. Crelle* 1871)

Teorema di punto fisso (1870)

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un intorno di un punto x in cui $f(x) = x$ e $|f'(x)| < 1$. Se $[f(z))]^n$ è l'iterata n-esima di $f(z)$, esiste un intorno D di x tale che, per ogni z in D

$[f(z))]^n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$

"Tutti i punti z in un'area intorno a x hanno come limite, per interazione della funzione $f(z)$ la radice dell'equazione $f(z) = x$"

- Il teorema è un teorema ‘locale’ che riguarda il comportamento nell’intorno di un ‘attrattore’ e nulla dice dei punti che non appartengono all’intorno

- La dimostrazione rigorosa è stata data da Gabriel Koenigs (1858-1931) nel 1880

Equazione di Schröder

$$f(\phi(z)) = |\phi'(x)|\, f(z) \qquad (1)$$

dove ϕ è una data funzione analitica con x punto fisso

- Nel caso particolare $|\phi'(x)| < 1$ (il punto fisso è un attrattore) Koenigs fu il primo a dimostrare che esiste $f(z)$ regolare in x e soddisfacente la (1) in un intorno D di x.

Appunti su alcuni problemi d’iterazione (1917)

“Nei problemi relativi all’iterazione di una funzione analitica nell’intorno di un suo punto invariante l’attenzione si è prevalentemente fermata sul caso, che si può considerare come quello della stabilità” (cioè $|\phi'(x)| < 1$).

“il maggior risultato è dovuto al matematico francese G. Koenigs”

“Della natura analitica della funzione $f(z)$ in relazione con quella di $\phi(z)$ come dell’estensione di cui è suscettibile il suo campo di validità poco si sa in generale; lo studio di essa è stato fatto soltanto ‘in piccolo’, cioè nell’intorno del punto invariante, mentre offrirebbe molto interesse la conoscenza dell’andamento di $f(z)$ in una regione più estesa”

“Far conoscere in un altro lavoro qualche risultato in questo ordine di idee”

“mi propongo, quasi a titolo di preparazione, di indicare un metodo che mi sembra singolarmente semplice e spontaneo per la definizione della funzione di Koenigs e per la deduzione delle sue prime proprietà”

Primo lavoro di Pincherle

- *Alcune osservazioni sulla iterata di una funzione data* (1914)

  Studia l'equazione funzionale

  $$[f(x)]^n = f(x)$$

  di cui è un caso particolare l'equazione

  di Babbage $[f(x)]^n = x$.

- “Sull’iterazione della funzione quadratica z^2 - a” (1918)

- “Un teorema sull’iterazione della funzione quadratica” (1919)

- “considerando la difficoltà che offe il problema e i fatti nuovi cui dà luogo, non appena si tratta di una funzione che non sia lineare ho pensato che non fosse privo d’interesse lo studio alquanto approfondito di un caso anche assai semplice” $p(x) = x^2 - a$ (a reale positivo)

- Distingue a seconda che sia

$$0 < a < 2,\ a = 2,\ a > 2$$

Pincherle individua un sottoinsieme chiuso Z di R contenuto in $I = [-z, -\sqrt{a}-z] \cup [\sqrt{a}-z, z]$

dove $z = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$

e dimostra tre proposioni:

- Prop. 1: Se $a > 2$, l'insieme Ω dei punti del piano complesso divergenti sotto l'iterazione dell'operazione coincide col complementare di Z.
- Prop. 2 Se $a = 2$, Ω è costituito dal piano complesso escluso l'intervallo reale [-2,2]

- Prop. 3: Per $-1/4 < a < 2$ i punti del segmento

  $S = [-\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}), \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})]$

  non divergono per l'iterazione indefinitamente ripetuta di $p(x) = x^2 - a$

- Le prop. 1) e 2) consentono di stabilire che per $a > 2$ l’insieme di Julia del polinomio
  $p(x) = x^2 - a$
  è sempre un sottoinsieme di R contenuto nell’insieme I.

Gaston Julia (1893-1978)

- *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles* (1918)

Sia $\phi(z)$ una funzione razionale e G la famiglia $G = \{[\phi(z)]^n\}$. L'insieme J di Julia è l'insieme dei punti di $\bar{C}$ per cui non esistono intorni in cui G è normale. L'insieme di Fatou è il complementare di J in $\bar{C}$.

Una famiglia di funzioni G analitiche all'interno di un dominio D è *normale* in D se ogni successione di funzioni di G contiene una sottosuccessione che converge uniformemente su tutti gli insiemi compatti D' interni a D (Montel)