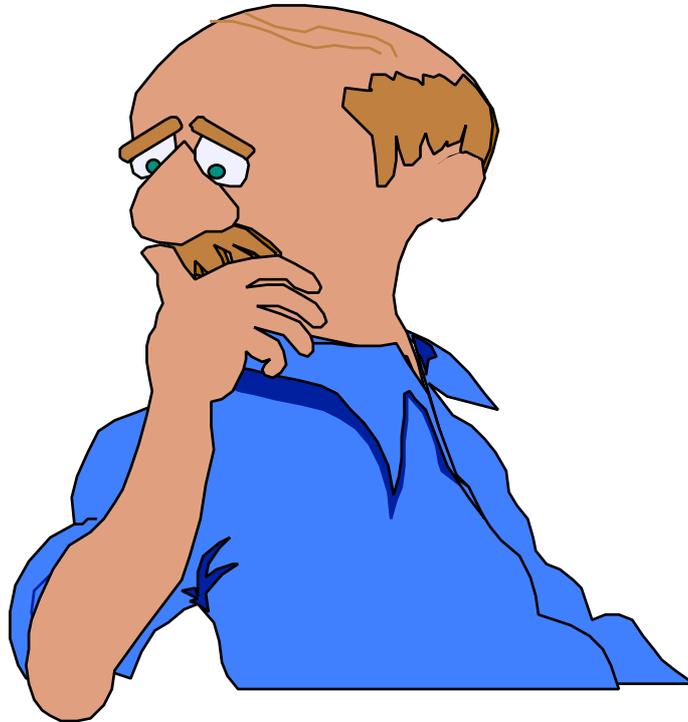


Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria
Epistemologia genetica in didattica della matematica
Filippo Spagnolo



Pre-requisiti: Relazioni di equivalenza e d'ordine. Gli approcci al Numero naturale. Conoscenza delle fasi di sviluppo Piagetiani.

Si chiede agli allievi una definizione di "Epistemologia Genetica". Le definizioni date dagli allievi vengono classificate alla lavagna per essere poi utilizzate nel corso della lezione.

L'esperienza dell'handicap: ragazzo cerebro-leso frequentante la seconda media.

Il questionario sul concetto di Numero Naturale carta e matita su: Classificare, Seriare, Mettere in Relazione.

Salvatore: non riesce a risolvere tutte le questioni dove entra la relazione d'ordine.

"Mi sono alzato alle 9 e sono uscito alle 8."

Viene rifatta l'esperienza del questionario ma con i blocchi logici.

**Quali le ipotesi teoriche che hanno permesso questa analisi?
Negli approcci al Numero Naturale abbiamo visto che la "relazione" è l'invariante. Ma questo è sufficiente?
O bisogna riferirsi ad un quadro di riferimento teorico più organico che tenga conto sia dei risultati della ricerca in psicologia, in epistemologia genetica e nella sistemazione classificatoria della matematica data dei Bourbakisti.**

Interpretazione del problema.

Le attività di sostegno sono state incentrate tutte sul recupero della relazione d'ordine.

Il ragazzo è stato poi recuperato grazie ad una intuizione sulla plasticità del cervello certamente non consapevole quando si sono svolti i fatti.

Per interpretare questi fatti ci viene in aiuto Piaget per il versante psicologico ed i Boubakisti per il versante matematico.

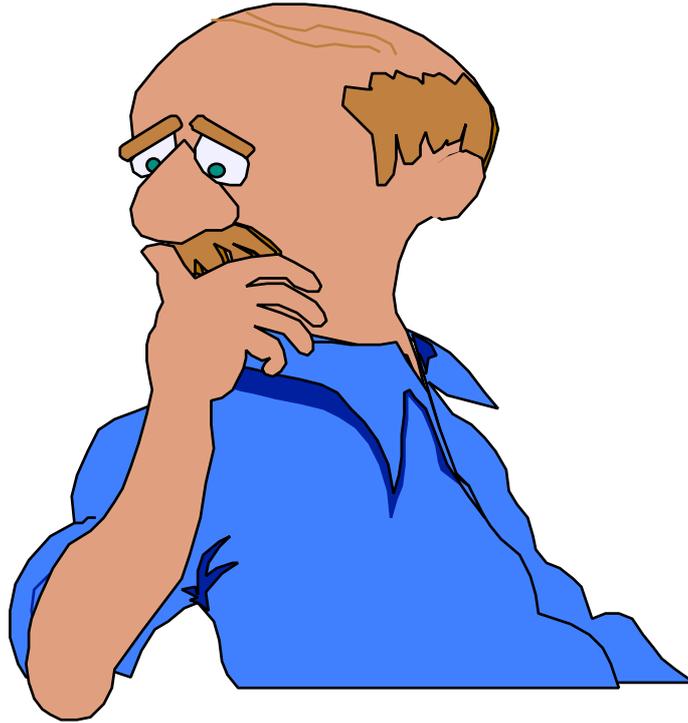
La definizione di epistemologia genetica. Conoscenza delle fasi di sviluppo Piagetiane.

Richiamiamo la definizione di epistemologia in generale.

Per epistemologia si intende “discorso critico intorno alle scienze (naturali e matematiche)”. Oggi viene anche considerata come “Teoria della conoscenza”, nel senso di riorganizzazione sistematica delle procedure che rendano possibile la descrizione, il calcolo o la previsione controllabile di un oggetto.

Per rappresentazioni epistemologiche si intendono le rappresentazioni degli eventuali percorsi conoscitivi riguardo un particolare concetto matematico o scientifico in generale. Tali rappresentazioni possono essere messe a punto da un soggetto apprendente o da una comunità scientifica in un determinato periodo storico.

L'epistemologia genetica è una Teoria della Conoscenza che tiene conto dello sviluppo di un determinato concetto secondo fasi di sviluppo. L'analisi storico-epistemologica dei concetti trattati è necessaria e fondante (citare la collana di epistemologia genetica).



La posizione di Piaget.

(Queste posizioni sono degli inizi degli anni '70)

La formazione matematica dipende da:

- **Interpretazione dello sviluppo psicologico;**
- **Apprendimento delle strutture logico-matematiche.**

Correlazione tra significato epistemologico e psicogenesi.

Quello che accade nell'insegnamento della matematica:

- **sia per il Platonismo (oggetti matematici che esistono indipendentemente dal soggetto)**
- **sia per il positivismo logico (riduce tutto a sintassi e semantica generali)**

Conviene usare il linguaggio degli insegnanti senza preoccuparsi del linguaggio spontaneo degli allievi.

Cosa bisogna fare:

Costruzione spontanea e graduale di strutture logico-matematiche e che queste strutture "naturali" sono molto vicine a quelle usate dalla matematica "moderna" (Moderna per gli anni '70).

Relazioni tra linguaggio ed azione.

La logica non nasce dal linguaggio ma dalla coordinazione generale delle azioni.

Per gli schemi senso-motori.

- **Schemi coordinati e dissociati (unione);**
- **Uno schema parzialmente annidato in un altro (inclusione);**
- **Avere una parte in comune con l'altro (intersezione);**
- **Due o più schemi possono ammettere un ordine invariante di successioni;**
- **Per le permutazioni: vari tipi di ordine;**

L'elaborazione di strutture. Il gruppo "pratico" descritto da Poincare. (verrà analizzato in seguito)

Quindi per Piaget la manipolazione con gli oggetti concreti favorirebbe lo sviluppo di questi schemi.

Il linguaggio viene dopo.

Questo tipo di esperienza, Piaget la chiama esperienza logico-matematica: non dalle proprietà degli oggetti ma dalle azioni compiute (o meglio dalla loro coordinazione) dal fanciullo. Piaget porta l'esperienza dell'invarianza del numero.

Essa è propedeutica, non appena vengono interiorizzate danno origine all'astrazione logico-matematica. Che Piaget chiama riflettente:



Tra i 7 e gli 11/12 anni sviluppo spontaneo delle operazioni deduttive con conservazione e reversibilità.

Ciò permette l'elaborazione della logica elementare delle classi e delle relazioni, la costruzione dei numeri interi mediante la sintesi delle nozioni di inclusione e di ordine. (Ordinale e Cardinale, riferirsi alle polemiche Piaget, Dienes ed a lavori sperimentali)



Le relazioni d'equivalenza e d'ordine:

- **La relazione come organizzatore cognitivo fondamentale: equivalenza (concettualizzazione), d'ordine (la categoria del tempo, della lateralizzazione, ecc...).**
- **I rapporti con la classificazione piagetiana delle strutture cognitive e la classificazione Bourbakista:**
 - **Strutture algebriche: attività psico-motorie (Il Gruppo dei Movimenti). Reversibilità.**
 - **Strutture d'ordine: lateralizzazione, reciprocità nella relazione d'ordine;**
 - **Strutture topologiche: idea di continuità (trasformazioni bicontinue), vicinanza e separazione. Acquisizione dello spazio da parte del bambino. Lo spazio metrico arriva molto dopo.**

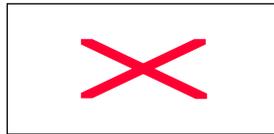


Indicazioni psico-pedagogiche da parte di Piaget sull'insegnamento/apprendimento della matematica:

1. **La reale comprensione di una nozione o di una teoria implica la reinvenzione di questa da parte del soggetto. La ripetizione non è la re-invenzione. La comprensione si manifesta attraverso nuove applicazioni spontanee. Organizzare situazioni che destano curiosità attraverso contro esempi.**
2. **L'allievo è più capace di "fare" che di "comprendere l'azione". Una gran parte delle strutture che utilizza rimane allo stato inconscio. La "consapevolezza" segue di gran lunga l'azione. (Euclide non era consapevole di tutte le strutture operazionali da lui utilizzate). I**

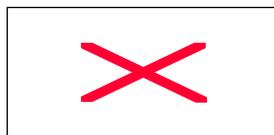
lavori in gruppo possono agevolare questi processi (consapevolezza e verbalizzazione).

- 3. Nella matematica tradizionale una gran quantità di problemi. Con la "matematica moderna" il rischio della eccessiva formalizzazione. Bisogna partire dai "livelli concreti qualitativi". La rappresentazione o i modelli usati dovrebbero corrispondere alla logica naturale dei livelli degli allievi (la formalizzazione poi come momento di sistemazione). "La formalizzazione ha diritto di costituirsi quando è giunto il suo momento, quando ne è maturata la necessità e non per una forzatura imposta da costrizioni premature."**



Recupero oggi dell'epistemologia genetica per la didattica della matematica:

- E' un riferimento storico che ha permesso di riprendere il ruolo dell'azione nell'insegnamento della matematica nella scuola di base (Matematica nella Realtà: E. Castelnuovo ad esempio);**
- E' stata utile e può essere ancora utile per poter schematizzare o meglio matematizzare alcuni fenomeni di insegnamento/apprendimento (vedi caso dell'Handicap);**



Questioni aperte relative al superamento dell'epistemologia genetica nella didattica delle matematiche:

- **La ricerca in didattica della matematica oggi ha ripreso il problema del linguaggio, dell'incidenza della cultura. Vygotsky ¹ sostiene che è proprio nel significato della parola che il pensiero e linguaggio si uniscono in un pensiero verbale. Ed è proprio nel significato che si possono trovare le risposte ai quesiti sul rapporto tra pensiero e linguaggio. In poche parole il linguaggio verbale è un mediatore tra contesti interni ed esterni dell'individuo. Possiamo pensare la grammatica del linguaggio come uno dei modelli della grammatica del pensiero. Ma lo stesso Vygotsky sostiene che: *"il pensiero verbale non include affatto tutte le forme del pensiero o tutte forme del linguaggio."*[op. cit., p. 68]**
- **Alcuni seguaci ortodossi delle tesi Piagetiane hanno portato a certi integralismi metodologici come lo strutturalismo e non hanno permesso lo sviluppo della ricerca nella direzione dell'incidenza del linguaggio e della cultura.**
- **Analisi dei fenomeni di insegnamento/apprendimento nella situazione classe. (Vedi lucido sulla situazione didattica)**
- **Manca il problema della motivazione e della presa in carico della conoscenza da parte dell'allievo.**
- **Analizziamo le fasi che nella comunicazione delle matematiche portano dal "Saper fare" alla consapevolezza sintattica dei linguaggi matematici:**

Contesto Concreto "saper fare"



Si riorganizza per approssimazioni successive



Modelli sempre più complessi



Categorie semantiche tali che



Riorganizza la sintassi.

¹ L.S. Vygotsky, *Pensiero e Linguaggio*, Ed. Giunti, Firenze, 1976.

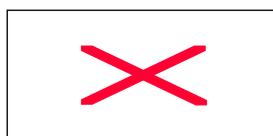
Osservazioni per la comunicazione significativa delle matematiche:

- 1) Non sempre si ha chiaro il linguaggio su cui si lavora;**
- 2) Il numero delle esperienze concrete per tentare di costruire categorie semantiche significative dovrebbe essere estremamente elevato e in un intervallo di tempo abbastanza grande.**
- 3) Si pensi alla difficoltà di poter far raggiungere agli allievi la consapevolezza delle regole della grammatica nelle lingue naturali (Analisi Logica) ed al suo travaglio epistemologico.**



Argomenti per lezioni successive:

- **Studio di alcune esperienze Piagetiane per capire la metodologia di lavoro.**
- **Confronti con la teoria delle situazioni di G. Brousseau.**
- **Le fasi della situazione a-didattica;**
- **L'analisi di una ricerca in didattica oggi per vedere cosa è possibile recuperare dal passato.**



Riferimenti Bibliografici di approfondimento:

- **J. Piaget, Jean Dieudonné, André Lichnerowicz, Gustave Choquet, Caleb Gattengo, L'Insegnamento della Matematica, La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1960. (In particolare: Le strutture matematiche e le strutture operatorie dell'intelligenza di J. Piaget)**
- **J. Piaget, Alcune considerazioni sull'insegnamento matematico, La Didattica della Matematica oggi, Quaderno UMI n.10, 1979, Pitagora Editrice. (Nel volume "Developments in Mathematics Education", Atti II ICI-Exter, Cambridge University Press, 1973)**
- **F. Spagnolo, Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, La Nuova Italia, 1998. L'appendice 4 raccoglie una bibliografia ragionata sulla comunicazione delle matematiche e difficoltà di apprendimento.**
- **F. Le Lionnais (a cura), Les grandes courantes de la pensée mathématique, L'Architecture des mathématique, Cahiers du Sud, 1948.**

Schema della Lezione:

Definizione di Epistemologia Genetica

Il caso di un portatore di handicap

*Una definizione di epistemologia ed epistemologia
genetica*

La posizione di J. Piaget

*La correlazione tra strutture matematiche e di
apprendimento*

Cosa si può recuperare oggi

Quali sono i problemi aperti

Lezioni successive

Bibliografia per approfondimenti



Modelli astratti

"La logica e la teoria degli insiemi forniscono i fondamenti delle strutture matematiche in due modi diversi. La logica fornisce sia l'inquadramento per una definizione o convenzione implicita secondo la quale qualsiasi struttura che soddisfi certi postulati si chiama campo, o gruppo, o altro ancora, sia anche una giustificazione ipotetica dei teoremi sulle strutture come teoremi condizionali della logica. La teoria degli insiemi fornisce la gamma delle possibili interpretazioni dei risultati."

H. Wang op. cit. [p. 269]

Il tentativo di dare un contenuto semantico all'attività dei matematici è stato compiuto dai Bourbakisti intorno agli anni trenta attraverso la nozione di struttura. La base semantica della struttura è la teoria degli insiemi. Il programma classificatorio delle strutture matematiche si inquadra nei Modelli Semantici.

In un lavoro di F. Le Lionnais² i Bourbakisti presentano quello che può venire considerato come il loro manifesto: L'architettura delle matematiche (La Matematica, o le Matematiche?).

In questo articolo i Bourbakisti mettono in evidenza le relazioni tra formalismo logico e metodo assiomatico, tra sistema formale e struttura, questo quindi consente loro di avere uno strumento particolarmente efficace per poter classificare le matematiche secondo tre grandi categorie strutturali: algebriche, d'ordine e topologiche. In questa classificazione la teoria degli insiemi rappresenta la base semantica.

L'obiettivo classificatorio dei Bourbakisti è messo in evidenza già all'inizio dell'articolo: "...all'inizio di questo secolo, si è dovuto a poco a poco rinunciare a vedere nelle matematiche una scienza caratterizzata da un oggetto ed un metodo unico; si aveva piuttosto tendenza a considerarle come "una serie di discipline fondate su delle nozioni particolari, delimitate con precisione", collegate da "mille cammini di comunicazione", permettendo ai metodi propri ad una di queste discipline di farne progredire una o parecchie altre. Oggi, al contrario, noi crediamo che l'evoluzione interna della scienza matematica ha, malgrado le apparenze, rinchiuso più che mai l'unità delle sue diverse parti, e vi ha creato una sorta di nucleo centrale più

² Les

coerente che sia mai esistito. L'essenziale di questa evoluzione è consistita in una sistemazione delle relazioni esistenti tra le diverse teorie matematiche, e si riassume in una tendenza che è generalmente conosciuta sotto il nome di metodo assiomatico."[op. cit., p. 36-37]

La posizione è quella di formalizzare il linguaggio della matematica "ordinandone (o talvolta stabilendone) il vocabolario e chiarificando la sintassi" ma questo da solo non basta in quanto il formalismo da solo è incapace di fornire l'intelligibilità profonda delle matematiche. "...Il metodo assiomatico trova il suo punto di appoggio nella convinzione che, se le matematiche non sono una concatenazione di sillogismi sviluppantesi a caso, esse non sono nemmeno un insieme d'artifici più o meno astuti, fatti di accostamenti fortuiti in cui trionfi la pura abilità tecnica."[op. cit., p. 38]

La "struttura" viene quindi fuori come una classe d'equivalenza su un insieme di sistemi di assiomi, e tutto questo attraverso una manipolazione sperimentale sui sistemi d'assiomi.

La struttura diventa quindi uno strumento per il matematico che gli consente, una volta trovate delle relazioni soddisfacenti agli assiomi di una struttura conosciuta, di disporre di un arsenale di teoremi generali relativi alle strutture di quel tipo.

Con la nozione di struttura si viene a dare corpo alle ricerche sui sistemi formali propri della logica ed alle successive ricerche sulla teoria dei modelli.

Va dato merito ai Bourbakisti di avere operato la prima grande classificazione delle matematiche dopo Euclide che abbia avuto un assetto abbastanza organico.

Dalle ricerche dei Bourbakisti sono comunque escluse le questioni relative alla completezza dei sistemi d'assiomi ed ai risultati di Gödel. Il ruolo della semantica è quello relativo al pluralismo di sistemi di assiomi che verificano una stessa struttura, è quello cioè dei modelli.