

Un percorso per l'elaborazione di una ricerca in didattica delle Matematiche

<p>Laboratori didattici</p> <p>Dall'analisi a priori di una situazione didattica alle ipotesi della ricerca in didattica</p>	<p><i>L'introduzione del nuovo tema, "la ricerca in didattica", all'interno del progetto "laboratori didattici", è in linea con la necessità di porsi in un'ottica di sperimentazione nei confronti di una didattica che ha bisogno di una autonomia pragmatica.</i></p>
<p>Percorso della ricerca in didattica</p> <p>data una situazione/problema, il punto di partenza è la relativa analisi a priori e cioè l'insieme di:</p> <p>1) rappresentazioni epistemologiche (percorsi conoscitivi in un determinato periodo storico)</p> <p>2) rappresentazioni storico-epistemologiche (percorsi conoscitivi sintattici, semantici, pragmatici)</p> <p>3) comportamenti ipotizzati</p> <p>sarà quindi possibile individuare i "problemi di ricerca" e le "ipotesi" necessarie per quella determinata classe di problemi presa in esame. La scelta del buon problema è demandata alla conoscenza dell'insegnante sia per quanto riguarda gli aspetti epistemologici e storico-epistemologici, che per quanto riguarda le conoscenze sulla comunicazione della sua materia.</p>	<p><i>Il percorso così come viene presentato è uno dei percorsi ipotizzabili. E' ovviamente possibile all'interno dello stesso modificare i "pesi" delle singole fasi di cui si compone, ottenendo così ricerche che privilegiano ora le rappresentazioni epistemologiche, ora l'analisi dei comportamenti.</i></p> <p><i>La scelta del buon problema è fondamentale se si vuole dare un carattere di significatività a tutto il lavoro. Qui è l'esperienza dell'insegnante che indirizza verso quei nodi cruciali che si incontrano durante l'insegnamento della matematica e per i quali è nota la frequenza degli insuccessi degli alunni.</i></p> <p><i>Le rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche impegnano ad un lavoro che può essere di per sé compiuto, nel momento in cui queste stesse sono state svolte attraverso una ricerca critico-comparativa sui documenti disponibili e trattano in maniera esaustiva i possibili approcci all'argomento in questione.</i></p>
<p>Dal buon problema attraverso l'analisi dei comportamenti ipotizzabili si passa alla formulazione delle "ipotesi di ricerca" che saranno formulate (implicitamente o esplicitamente) nella forma: se... allora...</p> <p>Caratteristica fondamentale di una ipotesi è la sua falsificabilità, ovvero la possibilità, attraverso tentativi sistematici, di dimostrarne la falsità.</p>	<p><i>La fase della formulazione dell'ipotesi richiede molta attenzione. Non è difficile per chi insegna intuire quali sono gli ostacoli all'apprendimento durante un percorso di insegnamento, è molto più difficile però ipotizzare in termini precisi di acquisizioni, che cosa favorisce l'apprendimento in una determinata situazione didattica.</i></p> <p><i>La falsificabilità è nei termini in cui la definisce K. Popper.</i></p>

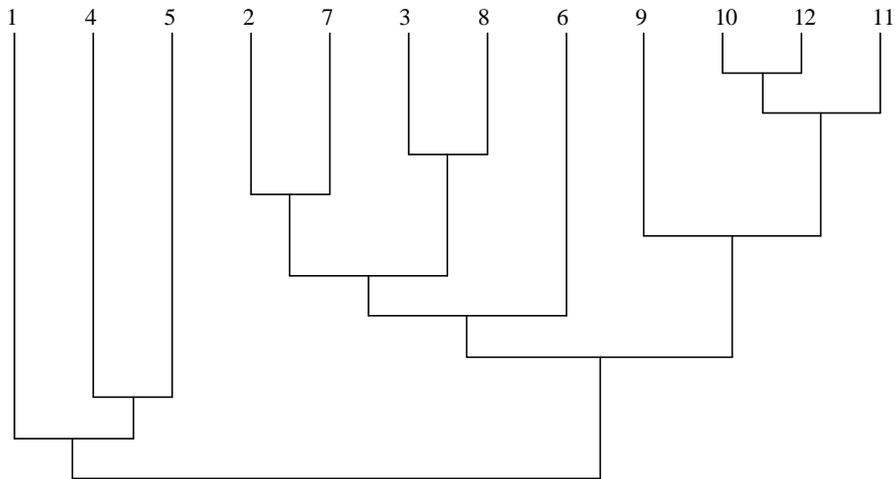
<p>La consegna per il lavoro del gruppo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Individuare delle situazioni/problema riguardanti la padronanza teorica ed operativa del “pensiero proporzionale /preproporzionale” utilizzando i linguaggi matematici • Attraverso la riflessione sui possibili percorsi s’individui un’unica situazione-problema sulla quale si centerà l’analisi a priori. 	<p><i>Nel contesto dello stage a Isola delle Femmine l’argomento è stato dato al gruppo dagli animatori.</i></p> <p><i>Secondo la propria formazione e le proprie esperienze di lavoro ciascuno ha inquadrato l’argomento nella prospettiva che riteneva più interessante e la pluralità di pensieri diversi è stata una notevole risorsa per tutto il proseguito del lavoro.</i></p>
<p>Relazioni storico-epistemologiche</p> <p>Per l’aritmetica : il postulato di Eudosso Archimede (multipli e sottomultipli, ricerca del quarto proporzionale...)</p> <p>Per la geometria elementare euclidea: gli elementi di Euclide libro V, teoria delle proporzioni fra grandezze omogenee ed archimedee, l’assiomatizzazione hilbertiana.</p> <p>Per la geometria analitica: l’equazione della retta (proporzionalità diretta), l’equazione dell’iperbole (proporzionalità indiretta).</p> <p>Per le grandezze: l’evoluzione dei sistemi di misura.</p>	<p><i>I percorsi storici ed epistemologici che fanno da supporto al pensiero proporzionale, in quella sede sono stati solo affrontati per grandi linee, cercando di individuare i possibili approcci dal punto di vista dell’insegnamento.</i></p> <p><i>Sarebbe interessante approfondire la ricerca in questa direzione anche alla luce del fatto che tutti i gruppi hanno privilegiato l’aspetto aritmetico e quello della geometria elementare euclidea.</i></p> <p><i>I riferimenti di maggiore interesse sono riportati nella bibliografia.</i></p>
<p>La situazione didattica</p> <p>Il gruppo ha scelto di lavorare nell’ambito dell’aritmetica e delle grandezze nell’intento di cogliere da questa prospettiva le possibili strategie di approccio al pensiero preproporzionale e proporzionale. Il testo del problema scelto è:</p> <p><i>Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna. Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?</i></p>	<p><i>Il problema scelto ha come caratteristica principale quella di poter essere affrontato da ragazzi in diverse età scolari. Il gruppo di insegnanti presenti allo stage era infatti eterogeneo per formazione e tipologia di insegnamento. Questo problema è proponibile sia per una quinta elementare che per una seconda media che per un primo anno di scuola superiore.</i></p>
<p>Analisi dei comportamenti ipotizzabili.</p> <p>Questa fase consiste nell’ipotizzare diverse strategie risolutive del problema, analizzarne i procedimenti e i possibili errori alla luce dell’esperienza acquisita nell’insegnamento.</p>	<p><i>Di seguito è presentata solo una parte dell’analisi dei comportamenti effettivamente affrontata durante lo stage. E’ comunque la prima strategia quella sulla quale si concentrerà l’attenzione del gruppo per arrivare alla formulazione di ipotesi di ricerca.</i></p>

<p>Strategia n. 1 L'elemento su cui si ferma l'attenzione è "l'unità" bottiglia; le scatole vengono viste come gruppi di bottiglie, ciò giustifica la prima operazione:</p> $600sc \times 12bt/sc = 7200bt$ <p>si cerca successivamente il numero di bottiglie lavorate in un'ora :</p> $\frac{7200bt}{8h} = 900 \frac{bt}{h}$ <p>si trova il numero di bottiglie lavorate in 14 ore :</p> $900bt/h \times 14h = 12600bt$ <p>quindi le bottiglie si raggruppano a 6 a 6 ottenendo così il numero delle scatole confezionate in 14 ore :</p> $\frac{12600bt}{6bt/sc} = 2100sc$	<p>Analisi</p> <p><i>Si caratterizza come procedimento di riduzione all'unità, dove di volta in volta l'unità è la bottiglia, l'ora o la scatola.</i></p> <p><i>Probabilmente nell'esecuzione l'allievo lavora con gli scalari, tralasciando le grandezze pur essendo consapevole delle dimensioni dei risultati che via via ottiene e della dimensione del risultato finale.</i></p> <p><i>L'utilizzo delle grandezze con la loro dimensione richiederebbe dimestichezza con le grandezze derivate come per esempio nella prima operazione :</i></p> $600sc \times 12bt/sc = 7200bt$ <p><i>La risoluzione del problema attraverso questa strategia rientra in un processo preproporzionale.</i></p>						
<p>Strategia n. 2 L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8:</p> $14 = 8 + 4 + 2$ <p>e cioè che 14 viene espresso come somma di addendi ognuno la metà del precedente a partire da 8, induce un processo di analogia scomposizione del numero delle scatole</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">600</td> <td style="text-align: center;">300</td> <td style="text-align: center;">150</td> </tr> </table> <p>processo dal quale si evidenzia che il numero totale di scatole da 12 bottiglie lavorate in 14 ore è :</p> $600 + 300 + 150 = 1050$ <p>L'osservazione che il numero di bottiglie per scatola (6) è, nel caso richiesto, la metà rispetto alla situazione iniziale (12), porta alla determinazione della soluzione :</p> $1050 \times 2 = 2100$	8	4	2	600	300	150	<p>Analisi</p> <p><i>In questo percorso l'attenzione resta ferma alle informazioni iniziali del testo che vengono elaborate in un processo di frazionamento e allo stesso tempo di iterazione del pensiero: "se in otto ore la macchina confezione 600 scatole da 12 bottiglie ciascuna, in quattro ore confezionerà trecento scatole da 12 bottiglie ciascuna, in due ore...". La strategia si caratterizza come procedimento dicotomico che prevede una logica di tipo informatico per la descrizione locale delle variabili :</i></p> $14 = 8 + 4 \text{ (metà di 8)} + 2 \text{ (metà di 4)}.$ <p><i>L'utilizzo della metà fa rientrare la strategia in una logica preproporzionale.</i></p>
8	4	2					
600	300	150					

<p>Strategia n. 3 L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8 :</p> $14 = 8 + 6 = 8 + \frac{3}{4} \times 8$ <p>dove 14 è espresso come somma di due addendi, 8 e i suoi $\frac{3}{4}$, porta ad una analoga visione del numero delle scatole da 12 bottiglie lavorate in 14 ore :</p> $600sc + \frac{3}{4} \times 600sc = 600sc + 450sc = 1050sc$ <p>e dunque</p> $1050 \times 2 = 2100$ <p>scatole da sei bottiglie.</p>	<p>Analisi</p> <p><i>Il processo si articola sull'utilizzo di una frazione come operatore e su una scomposizione di tipo additivo :</i></p> $14 = 8 + 6 = 8 + \frac{3}{4} \times 8$ <p><i>configurandosi come processo preproporzionale.</i></p>
<p style="text-align: center;">Osservazioni</p> <p>Probabilmente durante i calcoli l'alunno non fa riferimento alle relative grandezze, lavora solo con gli scalari ma comunque riconosce la grandezza del risultato finale.</p> <p>Le difficoltà che gli alunni incontrano nell'uso della proporzionalità diretta sono dello stesso livello di quelle che incontrano per la proporzionalità inversa?</p> <p>Apportando adeguate modifiche al testo si può guidare l'alunno verso un approccio risolutivo corretto?</p>	<p><i>L'analisi dimensionale delle grandezze è uno strumento di controllo della coerenza interna di un percorso risolutivo, ma anche momento incentivante di creazione di possibili strategie o di ragionamenti di tipo esclusivo. Infatti tale analisi se costantemente e correttamente applicata</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>1. evoca l'immaginario liberando le rappresentazioni mentali delle situazioni in oggetto</i> <i>2. evita tutti quegli errori di non senso che derivano dalla perdita di significato delle informazioni e dalla loro riduzione al rango di numeri senza dimensione e per questo suscettibili di essere manipolati come segni.</i>
<p style="text-align: center;">Analisi del testo</p> <p>Sono stati prodotti sei testi modificati e di ciascuno di essi è stata analizzata la possibilità di restringere il campo degli errori e delle false interpretazioni.</p> <p>E' prevalso il criterio che l'introduzione di altri quesiti relativi ai risultati intermedi possa attirare l'attenzione dell'alunno sul punto chiave del problema.</p>	<p><i>Molte osservazioni sulla natura del testo di un problema o in generale di un quesito sono state riprese alla fine di questo lavoro e hanno portato a considerazioni interessanti circa la "validità" di una prova.</i></p>

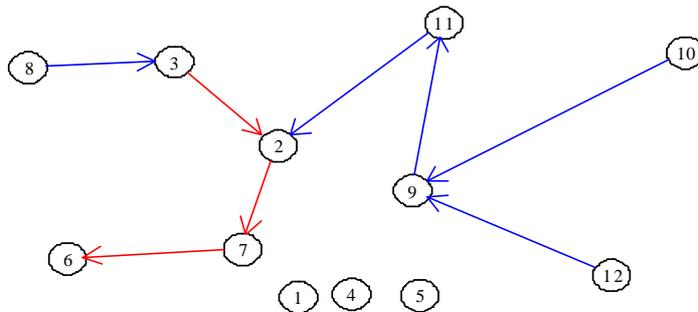
<p style="text-align: center;">Ipotesi di ricerca</p> <p>1) Se l'alunno ha acquisito la struttura moltiplicativa allora è in grado di effettuare la riduzione all'unità e la divisione come ripartizione.</p> <p>2) Se l'alunno ha acquisito il concetto di divisione come contenenza allora è in grado di usare correttamente le grandezze derivate.</p> <p>3) Se l'alunno possiede il controllo dimensionale allora ha il dominio della coerenza interna del percorso risolutivo di una classe di problemi che si modellizzano attraverso la struttura moltiplicativa e di riduzione all'unità.</p>	<p><i>La formulazione di queste ipotesi di ricerca è avvenuta in seguito alle riflessioni fatte sulla natura dei possibili errori degli alunni in presenza del problema analizzato.</i></p> <p><i>La terza è l'ipotesi presa in considerazione in questo lavoro. Nasce dalle osservazioni esposte precedentemente circa il ruolo che può avere nel percorso risolutivo di un problema, come quello preso in considerazione, il controllo sulla natura delle grandezze che man mano entrano in giuoco.</i></p>
<p>Strumenti per la falsificabilità delle ipotesi</p> <p>E' necessario predisporre, in questa fase di sperimentazione, appositi strumenti quali possono essere i questionari, le interviste singole o a coppie, le registrazioni audio/video di situazioni didattiche complesse che permettano di "andare contro" l'ipotesi.</p> <p>Deve essere ben definito anche l'insieme di alunni (per fascia di età) sui quali sperimentare le prove.</p>	<p><i>Per falsificare l'ipotesi 3 si è elaborato un questionario, di seguito allegato, che presenta sia quesiti relativi alle grandezze omogenee sia quelli relativi alle grandezze derivate ma anche problemi della stessa natura di quello qui preso in esame.</i></p> <p><i>Il questionario è rivolto ad una quinta elementare, ad una seconda media e ad un primo anno di scuola superiore.</i></p>

I dati relativi alla scuola elementare
grafo delle similarità



Arbre de similarité : C:\Drv\Documenti\Marilina\grim\queselem.csv

grafico delle implicazioni:



Graphe implicatif :

99 95 90 85

I raggruppamenti di variabili che appaiono evidenti sono tre: $R1=[Q1-Q4-Q5]$, $R2=[Q2-Q7-Q3-Q8-Q6]$ e $R3=[Q9-Q10-Q12-Q11]$.

I quesiti relativi a R2 riguardano tutti le grandezze omogenee e quelli relativi a R3 le grandezze non omogenee; complessivamente la similarità tra il gruppo R2 ed R3 può essere considerato ancora degna di attenzione.

Il grafo delle implicazioni: Il grafo è stato stampato con parametro 95 (intensità dell'implicazione 95%). La lettura è abbastanza facile: il Q12 implica direttamente o indirettamente Q9, Q11, Q2, Q7, Q6 ma non è implicato, con questa intensità, da nessuna variabile. Ciò significa che "è necessario sa per rispondere ai quesiti Q9, Q11, Q2, Q7, Q6 per poter rispondere al Q12". In altre parole, chi ha saputo rispondere a quei quesiti (Q9, Q11, ecc..) ha anche saputo rispondere al Q12.

Ad un livello di intensità molto meno significativa c'è implicazione dal Q10 al Q12.

E' stato elaborato un grafo di implicazione relativo ad una tabella che restringeva gli individui a quelli che avevano 1 in Q12: non si è avuta una doppia implicazione (cioè anche verso Q12) e questo per la natura stessa dell'analisi implicativa. Infatti in una situazione del genere non c'è più alcuna correlazione tra le variabili perché la significatività è data dagli individui che hanno risposte errate.

6.3 Formulazione della nuova ipotesi

Una nuova analisi sul questionario e sul modulo di lavoro proposto dalle insegnanti nelle tre classi, ha messo in luce che: per le classi quinta elementare e seconda media, il questionario è stato somministrato in una fase di primo approccio al pensiero proporzionale, in cui le grandezze giocano un ruolo prioritario e il rapporto tra grandezze (omogenee e non) pur essendo stato visto sotto diversi punti di vista aveva finito col perdere il significato di "divisione". Divisione per ripartizione e/o per contenenza sono infatti presenti nella categoria di problemi affrontata e convergono nell'argomento "rapporti tra grandezze" non appena si passa da grandezze omogenee a grandezze non omogenee; è proprio questo passaggio forse il punto focale dell'ipotesi. Per il primo anno di superiori, invece, l'argomento era noto ma non "attuale" rispetto al programma in corso di svolgimento; pertanto, come è stato già osservato, i risultati non sono stati ritenuti del tutto attendibili.

Queste e altre considerazioni hanno portato ad una revisione dell'ipotesi che è stata così riformulata:

"Il saper adoperare correttamente i rapporti tra grandezze omogenee e non, tenendo sempre presente il loro significato intrinseco di divisione, favorisce, con il controllo della coerenza interna, i percorsi risolutivi di una classe di problemi che si modellizzano attraverso una struttura moltiplicativa e di riduzione all'unità".

Formulazione del nuovo questionario

Conclusioni