Processi di traduzione ed il concetto di funzione[1]

Athanasios Gagatsis[2]

Abstract

In this paper we examine the ability of 14-15 year old Greek students (third Junior-High class) to do translation from one kind of representation to another in the field of relations and functions. In the first part, we provide a classification of some studies related to the concept of representation. In the second part, we present in some different ways the study of the concept of function. Finally, in the third part we present our theoretical framework supported by relative findings. In particular, we use two questionnaires, which consist of different translation tasks related to the concept of function: questionnaire A employs the act of translation from verbal expression to algebraic expression and/or to graphical representation. Questionnaire B employs translation from graphical representation to verbal and/or algebraic expression. The results indicate that these two questionnaires function as completely different tasks from the students' part, that is, there is no semantic congruence between the two kinds of translations.

Résumé

Dans ce texte nous examinons l´habileté des élèves grecs de 14-15 ans (troisième classe du collège) à faire des traductions d´un type de représentation à un autre dans le domaine des relations et des fonctions. Dans une première partie nous présentons une classification de quelques études reliées au concept de représentation. Dans une deuxième partie nous présentons quelques différentes manières d´étudier le concept de fonction. Enfin dans une troisième partie nous présentons notre cadre théorique supporté par des résultats relatifs. En particulier nous utilisons deux questionnaires qui consistent en taches de traduction différentes reliées au concept de fonction: le questionnaire A propose des traductions des expressions verbales vers des expressions algébriques et des représentations graphiques; le questionnaire B propose des traductions de représentations graphiques vers des expressions algébriques et verbales. Les résultats indiquent que,en ce qui concerne les élèves, ces deux questionnaires fonctionnent comme des taches de traduction complétement différentes, c´est-à-dire qu´il n´y a pas de congruence sémantique entre les deux types de traduction.

Riassunto

In questo testo si esaminano l'abilità degli allievi greci di 14-15 anni (terza classe delle medie) di fare delle traduzioni di un tipo di rappresentazione ad un'altra nel dominio delle relazioni e delle funzioni. Nella prima parte presentiamo una classificazione di alcuni studi sul concetto di rappresentazione. In una seconda parte presentiamo alcune differenti maniere di studiare il concetto di funzione. Infine nella terza parte presentiamo il nostro quadro teorico supportato dai relativi risultati. In particolare utilizzaiamo dei questionari che consistono in prove di traduzione differenti sul concetto di funzione: il questionario A propone delle traduzioni delle espressioni verbali in espressioni algebriche e rappresentazioni grafiche; il questionario B propone delle traduzioni di rappresentazioni grafiche in espressioni algebriche e verbali. I risultati indicano che, per quel che riguarda gli allievi, questi due questionari funzionano come dei compiti di traduzione completamente differenti, cioè che non vi è congruenza semantica tra i due tipi di traduzione.

[1] Testo presentato al seminario del GRIM di Palermo il 9.5.2000.

[2] Dipartimento di Scienza dell'Educazione, Università di Cipro.

Processi di traduzione ed il concetto di funzione[3]

Athanasios Gagatsis[4]

1.0 Introduzione.

Perché oggi vi sono molte ricerche sul ruolo delle rappresentazioni nell'apprendimento delle matematiche?

Una caratteristica dell'intelligenza umana è l'uso di tipi differenti di rappresentazioni. Questa caratteristica differenzia l'intelligenza umana dall'intelligenza degli animali come pure dall'intelligenza artificiale. L'elemento che differenzia l'intelligenza umana da quella animale non è solamente l'uso di un sistema semiotico di comunicazione - una lingua - ma l'uso di varietà di sistemi di rappresentazioni: lingua verbale e lingua scritta (disegni, dipinti, diagrammi ecc..). Nel caso dell'intelligenza artificiale si riscontra un singolo sistema semiotico, quello di Boole (Leiser, 1987; Duval, 1993, Gagatsis, 1993, 1999).

D'altro canto con il procedere dello sviluppo della conoscenza compare la creazione e lo sviluppo di nuovi sistemi semiotici più specializzati, che coesistono con il sistema iniziale, quello della lingua naturale (Granger, 1979).

Le ragioni che spiegano la necessità di una tale varietà di rappresentazioni semiotiche generalmente enfatizzano il costo dell'elaborazione e le limitate capacità di rappresentazione per ciascun dominio di simbolismo. Per esempio, quando ci riferiamo alle funzioni i differenti modi di simbolismo (algebrico, verbale, grafico) si completano a vicenda. Un grafico da maggiori informazioni che riguardano il concetto che viene presentato piuttosto della versione algebrica o verbale. Quest'ultima, inoltre, implica difficoltà ancora maggiri per quanto riguarda il costo dell'elaborazione se confrontata con la versione algebrica. (Duval, 1993)

Duval insiste sul fatto cheper la comprensione completa di un concetto matematico è necessaria la coordinazione di almeno due registri differenti di rappresentazione. (Duval, 1993)

In questo testo presenterò alcuni problemi di traduzione tra le differenti rappresentazioni del concetto di funzione.

2. Rappresentazioni ed apprendimento della matematica.

Data l'importanza dei vari tipi di rappresentazioni nello sviluppo del pensiero matematico, ci sono numerosi articoli di ricerca che trattano questo argomento. (tabella 1) 8Vedi: Gagatsis et alii, 1999).

Tabella 1: Categorizzazione degli articoli di ricerca importanti per le rappresentazioni, secondo il loro argomento specifico.

A. Teoria delle rappresentazioni o rappresentazioni e teoria dell'apprendimento.
B. Rappresentazioni e problem solving.
C. Rappresentazioni e particolari concetti matematici.
D. Rappresentazioni e passaggio da un tipo di rappresentazione ad un altro.

[3] Testo presentato al seminario del GRIM di Palermo il 9.5.2000.
[4] Dipartimento di Scienza dell'Educazione, Università di Cipro.

La prima categoria comprende articoli che prospettano una teoria della cognizione o una teoria delle rappresentazioni o dei simboli o una teoria che includa tutte le precedenti. Von Glaserfeld (1987, pp. 3-18), per esempio, ritiene che l'apprendimento sia un'attività di costruzione. Basandosi su questa convinzione propone alcuni elementi fondamentali che dovrebbero far parte di ogni teoria delle rappresentazioni (Von Graserfeld, 1987, pp.215-226). La strategia di Kaput per lo sviluppo di una teoria è basata sull'assunzione che lo sviluppo di una teoria dovrebbe stabilire la realtà psicologica/linguistica delle costruzioni e collegare le creazioni di simboli esterni con le strutture e procedure cognitive interne (Kaput, 1987, pp.19-26). Goldin e Kaput esaminano il ruolo delle rappresentazioni nell'apprendimento della matematica. Essi insistono sulla distinzione fra rappresentazioni interne (mentali) e rappresentazioni esterne (questo articolo usa il termine "semiotiche").

Rappresentazioni interne - mentali
½
Rappresentazioni esterne - naturali

(Goldin, Kaput, 1996, pp.397-430)

Tale discriminazione è ritenuta importante per la Psicologia dell'apprendimento e per l'apprendimento della matematica.

Roth e McGinn suggeriscono per quanto riguarda le rappresentazioni una nuova prospettiva teorica basata sull'approccio sociologico alle scienze ed alla tecnologia: tale approccio enfatizza il concetto di "iscrizioni", vale a dire rappresentazioni grafiche scritte su un materiale (carta, schermo, di un computer, ecc..) (Roth e McGinn, 1998, pp.35-59): Houser suggerisce una teoria semiotica dell'apprendimento basata sulla teoria di Peirce (Houser, 1987, pp.251-274). Infine, Demetriou e Raftopoulos ritengono che la questione delle rappresentazioni mentali sia inclusa in una teoria generale dell'architettura della mente. Più specificatamente, ogni dominio del pensiero tende bad usare quel particolare tipo di rappresentazione appropriato per esprimere e trattare con i processi e le procedure che caratterizzano il dominio (Demetriou e Raftopoulos, 1999, pp.1-50). Infine Hall (1998) propone una teoria analogica procedurale per l'apprendimento della matematica.

La seconda categoria include articoli che mettono in relazione le rappresentazioni esterne (semiotiche) con il problem solving. Seeger (1998, pp.308-343) esamina il ruolo delle rappresentazioni nell'attività matematica quotidiana. Egli sostiene che l'uso da parte degli studenti di rappresentazioni e l'uso di materiali didattici per superare i problemi di apprendimento offre poco aiuto. Per loro c'è un problema ulteriore, in quanto devono capire il mondo dei numeri e allo stesso tempo comprendere lo scopo dell'uso delle rappresentazioni. Essi, dunque, potrebbero non essere in grado di stabilire la connessione fra i due aspetti.

Lesh, Behr e Post (1987, pp.33-40) esaminano il ruolo delle rappresentazioni e della traduzione fra un tipo di rappresentazione e l'altra nell'apprendimento della matematica e nel problem solving, mentre Goldin (1987, pp.59-66) esamina i livelli della lingua nella risoluzione dei problemi di matematica. Gagatsis et alii (2000 c) propongono agli studenti dell'università delle situazioni di traduzione sulle funzione (con procedimento simile a quello presentato in questo articolo) e problemi basati su funzioni, utilizzando il metodo dell'analisi implicativa di R. Gras hanno trovato che la riuscita ad alcuni esercizi di traduzione è condizione necessaria per risolvere dei problemi con la funzione.

La terza categoria comprende articoli centrati sullo studio delle rappresentazioni per quanto riguarda un particolare concetto. Lesh, Behr e Post (1987, pp.41-50) studiano la relazione fra numeri razionali e proporzioni per quel che riguarda i differenti modi di rappresentarli.

Janvier (1987a, pp.147-158) esamina la relazione fra le credenze degli studenti e le rappresentazioni del cerchio.

Anche la nozione di funzione è l'epicentro di molti articoli di ricerca, in questo concetto può essere espresso in diversi codici: tabelle, grafici, verbalmente, ecc.. (Avesta e Gagatsis, 1997; Duval, 1993; Kaldrimidou e Oconomou, 1998, Janvier, 1987b).

Infine Gagatsis et alii (2000 b) esaminano il ruolo della rappresentazione della linea aritmetica per l'apprendimento dell'addizione e della sottrazione (allievi ciprioti di 7-8 anni). La ricerca ha mostrato che per alcuni allievi di 8 anni la rappresentazione della linea aritmetica è un ostacolo alle operazioni di addizione e sottrazione[5].

Infine la quarta categoria comprende articoli che esaminano il passaggio da un contesto ad un altro. In alcuni casi questo passaggio sembra essere tanto naturale da venire considerato un'interpretazione spontanea (Duval, 1987): In matematica tuttavia questa è una delle difficoltà più importanti che gli studenti affrontano quando risolvono un problema matematico (Avesta e Gagatsis, 1997; Duval, 1987; Janvier, 1987c, Gagatsis 2000a, 2000b, 2000c).

Questo studio appartiene a questa quarta categoria, cioè al cambiamento di registro di rappresentazione ne caso delle funzioni. In questo senso esso è basato sulle idee teoriche di R. Duval (Duval, 1987, 1993) e sul modello sperimentale applicato nella ricerca da A. Gagatsis (Gagatsis, 1997).

3. Il concetto di funzione. Alcuni tipi di differenti approcci[6]

La nozione della dipendenza di una variabile da un'altra è antica quanto la matematica stessa. Possiamo rintracciare tale relazione nelle tabelle astronomiche babilonesi ed anche al tempo di Tolomeo, in cui bisognava registrare le relazioni fra il tempo e le posizioni angolari dei pianeti nel nostro sistema solare.

Il fatto che li antichi Greci ebbero la tendenza di studiare le relazioni che intercorrevano fra quantità geometriche, evitando l'uso di ogni espressione numerica od algebrica, può essere considerata come una possibile ragione del perché ci sia poi stato un ritardo nello sviluppo del concetto di funzione e conseguentemente nello studio di altre scienze con l'ausilio della matematica (Patronis et alii, 1991, pp. 99-100). Ci sono voluti quasi tre secoli perché il concetto di funzione fosse considerato come una speciale area della matematica con le sue proprie caratteristiche. Mentre da un lato Bernoulli inizialmente definì la funzione come una "quantità variabile costruita in qualsiasi modo con qualunque variabile e costanti" (Kleiner, 1993, 186), nel XVIII secolo Eulero definì la "funzione di una quantità variabile" come "una espressione analitica costruita in qualunque modo dalla quantità variabile a da numeri e quantità costanti" (Kleiner, 1993, 187). Dopo Cauchy (1821), secondo la teoria del quale le funzioni erano strettamente legate a quantità variabili (definizione questa già data dai suoi predecessori) ed anche dopo i risultati di Fourier (XIX secolo) secondo i quali ogni funzione può essere rappresentata da una serie trigonometrica (serie di Fourier), le funzioni sono state definite anche con l'ausilio della teoria della serie. IN particolare, la funzione viene considerata come una corrispondenza arbitraria tra due serie, non necessariamente basata su una relazione algoritmica tra le variabili x ed y (ad esempio: funzione di Dirichlet, 1837)(Gagatsis, 1997).

---

[5] Questo lavoror verrà provato con allievi Ciprioti ed Italianai con la collaborazione di F. Spagnolo (GRIM di Palermo).
[6] Per i differenti approcci alla funzione vedi Gagatsis 1997.

Dopo Fourier, Cauchy, Dirichlet e Riemann si pensa che la definizione di una funzione y di una variabile indipendente x come una corrispondenza arbitraria, contribuirà ad importanti cambiamenti dell'Analisi. Tuttavia il concetto di funzione appare di tanto in tanto in definizioni e tipo di rappresentazioni differenti, da un punto di vista epistemologico, poiché i problemi che sono collegati con tali rappresentazioni sono essi pure differenti.

Per quanto riguarda la trasposizione didattica del concetto possiamo dire che effettivamente si sono riscontrati approcci epistemologicamente differenti per le funzioni, sempre collegati sia alle particolari conoscenze degli Autori sia alla definizione di funzione che predominava in quel particolare periodo. La lunga evoluzione storica delle funzioni, la trasposizione didattica del concetto ed anche il fatto che la funzione è il concetto più interessante ed importante in confronto con altri concetti scolastici, non necessariamente matematici, sono divenuti la ragione principale del perché un gran numero di differenti articoli (studi o ricerche) delle pubblicazioni internazionali abbiano come argomento principale i differenti approcci alle funzioni.

Non possiamo in effetti fare qui una descrizione dettagliata di tutti questi articoli, dato che solo il libro di Harel e Dubinsky (1992) cita quasi 200 articoli sulle funzioni. Tuttavia riteniamo che possa essere utile fare qualche riferimento ad alcuni interessanti punti di alcuni di questi studi per chiarire il nostro obiettivo principale.

La definizione di funzione e l'approccio didattico ad essa è divenuta l'argomento base di molti articoli (Vassakos, 1994; Hight, 1968; Nicholas, 1966). Un ulteriore argomento di ricerca molto interessante sono le percezioni del concetto di funzione da parte degli alunni ed il modo in cui esse vengono formulate nel contesto d'insegnamento. In particolare Spagnolo (1982, 1983) analizza le relazioni funzionali attraverso i campi concettuali di Vergnaud. Sierpinska (1992) ritiene che le concezioni sulle funzioni degli alunni moderni non hanno alcuna relazione con le percezioni dei matematici del passato (vale a dire con le concezioni storiche). Patronis (1991) d'altro canto si meraviglia di come l'ontogenesi segua la filogenesi. La comprensione strutturale ed operazionale della nozione di funzione è stata studiata da Sfard (1992), mentre Dubinsky e Harel (1992) parlano di quattro differenti stadi nell'apprendimento delle funzioni (gli stadi della pre-funzione, dell'azione, del processo e dell'oggetto). Il terzo stadio (lo stadio del processo) è stato studiato anche da Breidenbach, Dubinsky, Hawks e Nichols (1992). Anche Lovell (1970), Markovitz, Eylon, Bruckheimer (1986), Vinner e Dreyfus (1989) ed altri ebbero come principale argomento di studio le percezioni degli studenti. In particolare negli ultimi due articoli tali percezioni venivano studiate con l'aiuto di due nuovi termini, quello di concetto immagine e concetto definizione. La differenza essenziale fra questi due termini è che, mentre il primo è collegato alla percezione del ragazzo per quanto riguarda la nozione di funzione, il secondo è collegato con la percezione che i ragazzi e gli studenti dovrebbero avere riguardo la definizione matematica del concetto, così come è stata loro presentata nei libri di testo ufficiali. Secondo questi due articoli, i ragazzi hanno la tendenza a pensare alle funzioni nello stesso modo in cui le concepivano i matematici prima du Eulero. Vale a dire come un'espressione analitica fra le due variabili che hanno come grafico una curva continua (lo stesso argomento, viene analizzato anche da Patronis ed i suoi collaboratori negli appunti che hanno preparato per gli studenti del Dipartimento di Matematica (1991, 121-127).

Vari altri differenti risultati sono emersi da altri studi che hanno come loro argomento di ricerca principale il concetto di funzione in relazione al software: Retmal (1989) con l'ausilio del LOGO e Dubinsky e Harel (1992) con ISETEL.

La conoscenza dell'argomento da parte degli insegnanti di matematica costituisce una differente area di ricerca: Even (1990, 1993) e Normann (1992).

Per quanto riguarda il principale argomento di questo articolo, esso riguarda i differenti tipi di rappresentazione della nozione di funzione ed anche il passaggio da un tipo di rappresentazione ad un altro; si tratta, in effetti, di qualcosa che è già stato esaminato anche da altri ricercatori.

Tuttavia Kaldrimidou ed Ikonomou (1998) hanno chiarito molto accuratamente la questione principale ella loro ricerca nel modo seguente:

"*Una funzione può essere considerata in molti modi differenti che sono collegati ad un contesto generale che include sempre il problema in cui interviene la notazione, il modo in cui essa è rappresentata ed anche tutte le procedure (teoremi, algoritmi, strumenti) che sono strettamente legate ad essa*."

Gli stessi autori proseguono:

"*per quanto riguarda le diverse rappresentazioni delle notazioni delle notazioni delle funzioni, possiamo dire che ognuna di esse puntualizza aspetti del concetto differenti e queste tutte insieme contribuiscono ad una rappresentazione globale e perfetta del concetto, dato che nessuna di esse, separatamente, può descrivere completamente la nozione*."

La connessione di tutte queste differenti rappresentazioni ed anche il passaggio dall'una all'altra è considerato un cmpito estremamente difficile. In particlare sia Hart (1981, 120-136) sia Eisemberg (1992) studiano il passaggio dalla forma di rappresentazione grafica a quella algebrica.

Il trasferimento da rappresentazioni algebriche a grafiche non è stato esaminato solo nel contesto della scuola secondaria, ma anche a livello universitario in corsi di matematica (Artigue, 1992).

Le particolari difficoltà degli studenti dell'Istituto Tecnico di Pedagogia, riguardanti la manipolazione di rappresentazioni grafiche, vengono presentate nell'articolo di Kaldrimidou ed Ikonomou (1992). E' degno di nota il fatto che i due ricercatori giustifichino queste difficoltà dicendo che la ragione principale è il modo in cui la nozione di funzione è stata presentata ed insegnata nel contesto della scuola secondaria. Più specificatamente essi ritengono che a questo livello ci sia un collegamento molto limitato al concetto di funzione. Tuttavia i problemi attraverso cui si presentano le funzioni agli studenti sono sempre di un tipo particolare (essi quasi sempre trattano il passaggio da una forma algebrica ad una grafica) e generalmente c'è una carenza di un approccio globale alla nozione.

Eisenberg e Dreyfus (1991) si sono a lungo occupati delle principali ragioni del perché sia gli insegnati sia gli alunni evitino di usare le interpretazioni visuali, sia come modo di pensare che come strumento di dimostrazione matematica. I due ricercatori ritengono che tale esclusione sia dovuta ad una particolare caratteristica della conoscenza insegnata nelle scuole, ignorando ogni possibile fattore cognitivo e metacognitivo, che può ugualmente essere presente. Riferendosi alla teoria di Chevallard, essi puntualizzano che il modo in cui la conoscenza viene costruita nelle scuole favorisce principalmente l'elaborazione analitica della nozione che è in contrapposizione con l'approccio alle funzioni da un punto di vista grafico.

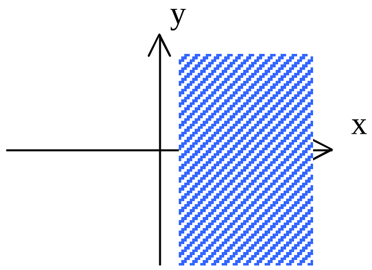
Un risultato molto interessante, secondo il nostro punto di vista, è quello ottenuto da Patronis et alii (1991, 124-125) riferito a studenti greci. In particolare questo ricercatore descrive una lezione sperimental, durante la quale l'insegnante chiese agli studenti di rappresentare graficamente la relazione algebrica $x^2+y^2=4$ ed anche di verificare se y fosse o meno una funzione della x, gli studenti hanno risposto:

"*se [la relazione data] non fosse una funzione noi non potremmo rappresentarla graficamente; quindi faremmo bene per prima cosa a controllare se questa sia o meno una funzione*."

L'autore sottolinea che non dovremmo dimenticare di:
"*tenere in considerazione le speciali caratteristiche del Programma Ufficiale Nazionale greco (che riguarda sia Matematica che Scienze) che porta i ragazzi a pensare che tutto ciò che è presentato graficamente viene considerato come la rappresentazione grafica di una funzione*". Overo "tutto ciò che viene presentato con un grafico familiare viene considerato una funzione, mentre tutto ciò che è presentato con un grafico inusuale non lo è" (Kaldrimidou, Ikonomou, 1992).

Infine non possiamo dimenticare di menzionare alcuni articoli di Duval (1987, 1993). In tali articoli viene definita la nozione di interpretazione naturale come un'attività di comprensione del significato di un concetto ed anche di riconoscimento di significati equivalenti che esistono fra due espressioni equivalenti. Questa attività di interpretazione aiuta i ragazzi a collegare tutte le proprietà corrispondenti, i teoremi e le formulazioni utili della situazione-problema che è stata presentata. Non è sempre possibile, tuttavia, che questa interpretazione abbia successo poiché può essere ostacolata da quel che Duval chiama "congruenza semantica" (Vedi anche D'Amore B., 1999). In particolare,
"*Sebbene l'interpretazione naturale possa essere talvolta immediata ed intuitiva nel caso in cui le due espressioni coinvolte siano semanticamente congruenti, essa può anche venire interrotta a portare risultati errati quando le due espressioni non siano semanticamente congruenti. Ciò può anche accadere nel caso in cui le due espressioni sono equivalento; quando l'equivalenza, esistente fra i significati di due rappresentazioni differenti, è nascosta, il passaggio da un'espressione ad un'altra è difficoltoso. E' un nuovo tipo di difficoltà di natura cognitiva che è indipendente dall'altro tipo di difficoltà che abbiamo largamente incontrato e che sono correlate alla complicazione semantica della nozione*."

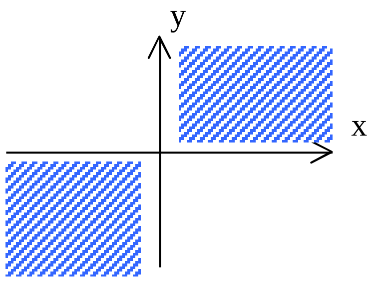
Duval, per chiarire che cosa intenda pre congruenza semantica, dà alcuni esempi di tali espressioni (le espressioni che seguono sono state usate nei suoi questionari ed anche nei nostri).

Rappresentazione grafica	**Espressione verbale**	**Espressione algebrica**
	La regione "ombreggiata" Rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa Positiva.	x>0

Le rappresentazioni grafica e verbale danno la stessa informazione ed hanno le stesse caratteristiche. La presentazione simbolica x>0 è considerata come un acaratteristica strettamente correlata alla nozione di numero positivo. L'espressione algebrica non è differente da quella verbale. Queste tre rappresentazioni della stessa informazione sono semanticamente congruenti.

Mentre:

- nel caso seguente

Rappresentazione grafica	**Espressione verbale**	**Espressione algebrica**
	La regione "ombreggiata" Rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa e coordinata dello stesso segno.	x>0

Le tre espressioni non sono semanticamente equivalenti. Per trovare la forma algebrica quando siano date sia l'espressione grafica che verbale dobbiamo pensare all'equivalenza "l'ascissa e la coordinata hanno lo stesso segno $\Leftrightarrow$ il loro prodotto è un numero positivo" (Duval R., 1987, 61).

4.0 La ricerca.

4.1Necessità di coordinazione dei registri delle rappresentazioni.

A che cosa corrisponde l'esistenza di parecchi registri di rappresentazioni e quale è l'interesse della loro coordinazione per il funzionamento del pensiero umano?

Raymond Duval (1993, p.48) presenta due dati relativi a questa questione:

1. L'utilizzazione di parecchi registri di rappresentazione sembra caratteristico del pensiero umano se lo si compara con l'intelligenza animale, da una parte, e all'intelligenza artificiale, dall'altra. Ciò che caratterizza il funzionamento del pensiero umano rapportandolo all'intelligenza animale non è tanto il ricorso a un sistema semiotico per comunicare (un linguaggio) piuttosto **il ricorso a parecchi sistemi di rappresentazione**: linguaggio e immagine grafica (disegno, pittura, pittogramma …). E per quello che concerne l'intelligenza artificiale si è sottolineato che uno di questi limiti è la difficoltà "a superare la rigidità funzionale che trasporta la specializzazione del modo della rappresentazione" (Leiser, 1987, p.1869). La specializzazione del modo di rappresentazione ricpre **la riduzione ad un solo sistema semiotico**, quello della scrittura booleana.
2. Il progresso delle conoscenze si accompagna sempre con la creazione e con lo sviluppo dei sistemi semiotici nuovi e specifici, che coesistono più o meno con **il primo tra essi**, quello del **linguaggio naturale** (Granger, 1979; Duval, 1993).

Due risposte sono generalmente proposte per spiegare questa necessità di una diversità di registri nel funzionamento del pensiero umano. Essi sono centrati sui **costi del trattamento** e sulle **limitazioni rappresentative** specifiche ad ogni registro. Noi ne proporremo una terza centrata sulla condizione necessaria di una **differenziazione tra rappresentante e rappresentato**.

Va da se che queste risposte non si escludono. ***Ma è importante vedere che esse si situano a dei livelli di descrizione differenti dell'attività cognitiva***.

Prima risposta: l'economia del trattamento.

L'esistenza di parecchi registri permette di cambiare registro, e questo cambiamento di registro permette di effettuare dei trattamenti in maniera più economica e più potente. Sembra che questa risposta sia stata esplicitamente esposta per la prima volta da Condillac nel "Il linguaggio dei calcoli" a proposito della scrittura dei numeri e delle notazioni algebriche. Essa mostra, in termini di costo nella memoria, i limiti nel registro della lingua naturale per il trattamento di questo calcolo. Una tale risposta può evidentemente essere estesa ad altri trattamenti: le relazioni tra gli oggetti possono essere rappresentati in maniera più rapida, e più semplice da capire, da delle formule letterali che dalle frasi, come è il caso per esempio degli enunciati del V libro degli Elementi sulle proposizioni (Euclide).

Questa risposta è molto importante per il trattamento delle funzioni. Non solamente la lingua naturale ma anche le rappresentazioni grafiche danno luogo ad un trattamento difficile e non economico. La rappresentazione grafica presenta parecchie difficoltà concernente la decodifica delle informazioni che essa contiene. Da queste difficoltà possiamo citare il carattere olistico della rappresentazione grafica e la maniera economica e selettiva di un codice dei dati (Kaldirimidou, 1990).

Questa difficoltà tra i differenti registri di rappresentazione concernenti l'economia del trattamento, cominciano ad essere coscienti ai redattori dei programmi scolastici ed agli autori dei manuali scolastici di matematica. Così nei programmi di matematica negli Stati Uniti si prevede - per tutti i livelli scolastici - gli esercizi di traduzione da un registro ad un altro.

Raymond Duval descrive un esempio simile di un manuale di matematica (quello di Deledicq e Lassave):

Una tabella espone in maniera sinottica tre differenti tipi di rappresentazioni differenti di una stessa uguaglianza: una frase, una scrittura letterale ed uno schema. Questa tabella è fornita del seguente commento: "Con un po’ di abitudine (e tu cominci ad averne), è più facile "capire" una scrittura letterale che una frase che descrive un calcolo in francese. Spesso uno schema che descrive un calcolo è molto interessante, ma d'altra parte prende più posto di una scrittura letterale e d'altra parte non si "trasforma" facilmente. Quale linguaggio preferisci? (Deledicq & Lassave, 1979, p.80). In maniera più generale, in matematica, l'economia del trattamento (percettivo o algoritmico) è generalmente spostato verso la lingua naturale. Il sospetto latente riguardo la lingua naturale in matematica trova lì la sua vera origine (Duval, 1993, p.49).

<u>Seconda risposta: la complementarietà dei registri</u>.

Questa risposta che è centrata sulle possibilità sulle possibilità proprie ad ogni sistema semiotico è stata avanzata recentemente (Bresson, 1987). Si può formularla così: la natura del registro semiotico che è scelto per rappresentare un contenuto (oggetto, concetto o situazione) impone una selezione di elementi significativi o informazionali del contenuto che si rappresenta. Questa selezione si fa in funzione delle possibilità e degli obblighi semiotici del registro scelto. Un linguaggio non offre le stesse possibilità di rappresentazione di una figura o di un diagramma. Questo vuol dire che *ogni rappresentazione è cognitivamente parziale in rapporto a ciò che essa rappresenta* e che da un registro ad un altro non sono gli stessi aspetti del contenuto di una situazione che sono rappresentati. (Duval, 1993, p.49).

Così, le figure, e in maniera più generale tutte le rappresentazioni analogiche, non possono rappresentare delle azioni o delle trasformazioni (Bresson, ibidem, p.943). Per rappresentare delle operazioni bisogna un registro che abbia le proprietà di un linguaggio: lingua naturale o algebra (Bresson, ibidem, p.939). Come rivincita le figure permettono di rappresentare la totalità delle relazioni tra gli elementi che costituiscono un oggetto o una situazione (Larkin & Simon, 1987).

Basandosi su questa seconda risposta concernente la complentarietà dei registri possiamo fare qualche prima constatazione concernente i registri algebrico e grafico delle funzioni:

- la transizione dell'espressione algebrica alla rappresentazione grafica di una funzione, e viceversa, non è una semplice traduzione ma una transposizione (Janvier, 1987). Cioè, una quantità di informazione non è semplicemente tradotto da un registro ad un altro ma essa è piuttosto analizzata. Questa analisi potrebbe dare una nuova informazione che poi potrebbe essere espressa in un altro registro. Per esempio, l'equazione $ax+by+c=0$, dove a,b,c sono numeri reali, rappresenta una linea retta nel registro algebrico quando il quoziente $-a/b$ da l'inclinazione della rappresentazione grafica della linea retta (Kaldrimidou, Ikonomou, 1998, p.275).
- Una espressione algebrica di una funzione è proposizionale nel senso che offre l'informazione linearmente con l'aiuto di una successione di segni che possono essere letti uno dopo l'altro. Al contrario la rappresentazione grafica di una funzione ha una caratteristica olistica. Questo significa che le relazioni tra i semplici elementi della rappresentazione grafica sono dati simultaneamente e il loro trattamento esige l'analisi dell'insieme e la sintesi delle parti. Inoltre la rappresentazione grafica contiene implicitamente più informazione di quella di cui si ha bisogno per risolvere un problema dato. Così il trattamento di una rappresentazione grafica esige la selezione di alcuni dati

che sono necessari per questa soluzione. Di conseguenza, le differenze possibili tra le interpretazioni della stessa rappresentazione grafica sono più grandi delle differenze concernenti la stesa informazione vicina ad un altro registro.

4.2 L'organizzazione della ricerca

a. Obiettivi della ricerca.

L'argomento principale di questa ricerca è collegato allo studio di Duval. I nostri obiettivi basilari sono:

- in primo luogo, verificare se i ragazzi greci trovano le stesse difficoltà dei ragazzi francesi (Duval, 1987, 1993) nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra. E' risaputo che il sistema scolastico greco è differente da quello francese. In Grecia gli insegnanti di matematica usano un diverso metodo di insegnamento ed usano un unico libro di testo contrariamente agli insegnanti francesi;
- in secondo luogo, verificare l'ipotesi di R. Duval a proposito dell'equivalenza semantica tra due espressioni;
- in terzo luogo, cercare di trovare delle implicazioni possibili tra differenti compiti di traduzione con l'aiuto dell'analisi statistica dell'implicazione di Régis Gras.

b. Soggetti.

I soggetti della nostra ricerca erano 183 allievi della terza classe del Ginnasio greco (14-15 anni). Hli allievi di questa classe avevano già lavorato sulle funzioni ed in particolare sulle rappresentazioni grafiche delle funzioni y=ax e y=ax+b.

c. Test.

Abbiamo proposto due questionari: questionario A e questionario B. Tutti e due corrispondono alle relazioni algebriche:

$$y>0,\ xy>0,\ y>x,\ y=-x,\ y=3/2,\ y=x-2$$

Nel questionario A si propone la rappresentazione grafica e si chiede agli allievi di dare l'espressione verbale e algebrica. Nel questionario B si propone l'espressione verbale e gli allievi devono produrre la rappresentazione grafica e la relazione algebrica. Non avendo dato delle consegne particolari, gli allievi possono dare prima la relazione algebrica e dopo l'espressione verbale e viceversa. Finalmente si è proposto un terzo questionario dove si propone la relazione algebrica e si chiede la rappresentazione grafica e l'espressione verbale perché gli allievi greci sono abituati a questi tipi di traduzioni. In effetti il lavoro abituale degli allievi del Ginnasio greco è di fare una rappresentazione grafica di una relazione algebrica data.

Provando a fare una analisi della complessità a-priori possiamo considerare che:

1. La prima famiglia di items corrispondono ad un dominio piano connesso a bordi paralleli agli assi;
2. La seconda famiglia di items corrispondono ad un dominio non connesso a bordi paralleli agli assi;
3. La terza famiglia di items corrispondono ad un dominio connesso a bordi obliqui;
4. La quarta famiglia di items corrispondono ad una retta oblique ma "vettoriale";
5. La quinta famiglia di items corrispondono ad una retta parallela all'asse ma "affine";
6. La sesta famiglia di items corrispondono ad una retta oblique ed "affine" (cioè non passante per l'origine).

I tre primi items sono stati proposti da R. Duval (1987, 1993) ai quali noi abbiamo aggiunto i btre seguenti items (Gagatsis, 1997).

d. Criteri di valutazione

Abbiamo notato le risposte con 0 (sbagliate) ed 1 (giuste) per ragioni che sono legate da un lato al trattamento statistico dei risultati e dall'altra parte alla semplicità dei compiti. Così abbiamo trovato per il questionario A dodici punteggi "lingua" e dodici punteggi "algebrico" e per il questionario B dodici punteggi "grafico" e dodici punteggi "algebrico".

e. Ipotesi della ricerca.

La **prima ipotesi** fa appello ad una descrizione della struttura delle rappresentazioni semiotiche ed il loro funzionamento presentato da R. Duval (Duval, 1993, 1993, p.51):

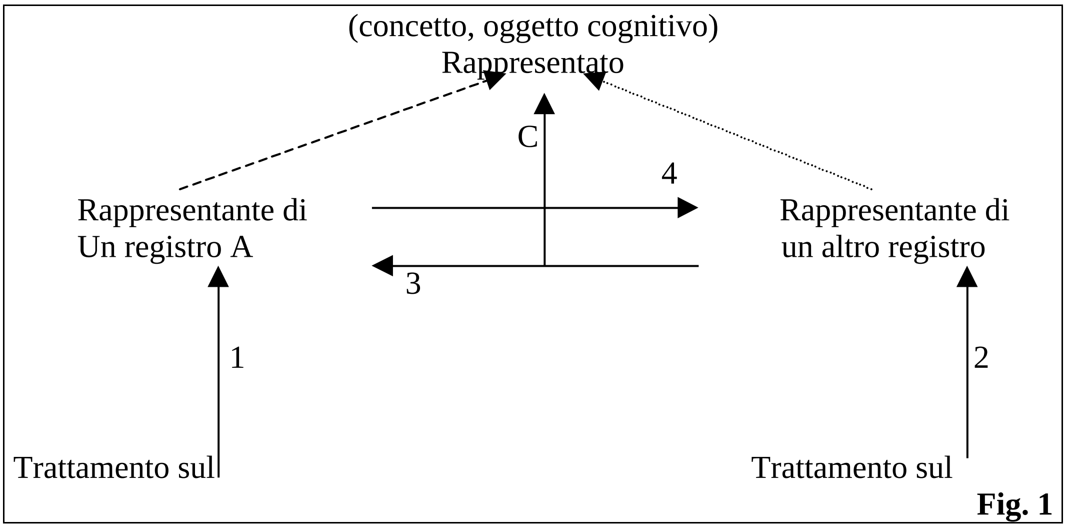


Fig.1 Struttura della rappresentazione in funzione della concettualizzazione.

Le frecce 1 e 2 corrispondono alle trasformazioni interne ad un registro. Le frecce 3 e 4 corrispondono alle trasformazioni esterne, cioè a delle conversioni per cambiamento di registro. La freccia C corrisponde a quello che noi chiamiamo la comprensione integrativa di una rappresentazione: essa suppone una coordinazione di due registri. Le frecce tratteggiate corrispondono alla distinzione classica tra rappresentante e rappresentato. Naturalmente questo schema considera il caso più semplice della coordinazione tra due registri: in certi domini, come l'algebra lineare, può essere richiesta almeno una coordinazione tra tre registri. Si può vedere ugualmente una delle possibilità importanti della rappresentazione: il rappresentante di un registro può essere considerato come il rappresentante di un altro registro, come è il caso nella relazione testo ed immagine. Infine non ci sono frecce tra il trattamento proposto ad ogni registro. Questo non esclude i casi di congruenza o di "equivalenza computazionale", ma l'interesse dei cambiamenti del registro viene dal fatto che ogni registro ha dei trattamenti propri.

<u>Ipotesi 2</u>: La comprensione (integrativa) di un contenuto concettuale è riposta sulla coordinazione di almeno due registri di rappresentazione, e questa coordinazione si manifesta con la rapidità e la spontaneità dell'attività cognitiva di conversione.

La seconda ipotesi concerne la congruenza semantica che è definita da R. Duval in maniera formale (Duval, 1993, p.53):

" I tre criteri congruenti sono:

- La possibilità di una corrispondenza "semantica" di elementi significanti: ad ogni unità significante semplice di una rappresentazione, si può associare una unità significante elementare.
- L'univocità "semantica" terminale: ad ogni unità significante elementare della rappresentazione di partenza, non corrisponde che una sola unità significante elementare nel registro della rappresentazione di arrivo.
- L'organizzazione delle unità significanti: le organizzazioni rispettive delle unità significanti di due rappresentazioni comparate conduce ad apprendere le unità in corrispondenza semantica secondo lo stesso ordine nelle due rappresentazioni. Questo criterio di corrispondenza nell'ordine nell'aggiustamento delle unità che compongono ciascuno delle due rappresentazioni non è pertinente che quando queste presentano lo stesso numero di dimensioni".

<u>Ipotesi 2</u>: Quando vi è congruenza tra la rappresentazione della partenza e la rappresentazione dell'arrivo, la conversione è banale e potrebbe essere considerata, intuitivamente, come un semplice codice. Ma quando non vi è congruenza non soltanto la conversione diviene costosa in tempi di trattamento ma essa può creare un problema davanti al quale il soggetto si sente disarmato. Allora, la possibilità di una conversione non è più assicurata.

Finalmente la terza ipotesi concerne la natura delle questioni poste agli allievi. Dall'analisi dei questionari a priori è evidente che le tre prime questioni (regioni di punti) sono di natura differente dalle tre ultime questioni (funzioni).

<u>Ipotesi 3</u>: Deve avere una differenziazione di questioni prima delle risposte degli allievi.

g. Il metodo statistico implicativo di Régis Gras.

La ricerca di invarianti in didattica delle matematiche necessita l'analisi di produzioni degli allievi in condizioni didattiche date. Per fare ciò, non disponendo di ipotesi confutabili, il ricercatore interroga i metodi d'analisi dei dati suscettibili di fornire delle risposte in termini di stabilità, di regolarità di fattori, di similarità o d'implicazione. Disponiamo di metodi fattoriali o di metodi classificatori che danno delle strutture multidimensionali o di tipologie. La maggior parte di questi metodi sono stabiliti a partire da legami simmetrici tra le variabili in gioco che si cerca di studiare.

Il metodo concepito da Règis Gras (Università di Rennes e Nantes, Francia) e dei suoi allievi, presenta il carattere originale di considerare i legami a partire di un indice non simmetrico. (Gras, 1997a, 1997b, 1999; Nenys-Gras, 1998; Spagnolo, 1998). Precisiamo:

Sia una popolazione di soggetti E ed un insieme di variabili binarie presentate a questa popolazione, per esempio degli attributi o degli items di un questionario. Siano a e b due fra questi di cui le popolazioni sono rispettivamente A e B, parti di E. Ci interessiamo alla relazione: a implica b, tradotto su A e B, da A incluso in B. Nelle scienze umane, come nelle scienze della natura, le leggi soffrono di qualche eccezione che, se esse non sono numerose, permettono di "confermare la regola" secndo l'adagio ben conosciuto. Così poniamo l'assioma di quai-implicazione nella maniera seguente:

(a ♦ b) é ammisbile al livello di onfidenza $1-\alpha$ se e solse

$$\Pr\left[\mathrm{card}(X\ \ \overline{Y}) \le card(A\ \ \overline{B})\right] \le \alpha$$

X ed Y sono due parti di E scelti a caso e indipendenti in E avendo rispettivamente lo stesso numero di soggetti di A e B. Intuitivamente e qualitativamente, questo significa che l'implicazione $a \rightarrow b$ sarà ammissibile alla conclusione di un'esperienza se il numero di individui di E che la contraddice nell'esperienza è piccolo in rapporto al numero di individui attesi nell'ipotesi di assenza di legame a priori tra a e b. Un indice qualifica la qualità dell'implicazione. Allora è possibile strutturare secondo un grafo orientato l'insieme delle variabili, poi considerare una relazione implicativa tra classi di variabili. L'analisi di queste due rappresentazioni permette di avere una struttura di ordine parziale molto ricca in informazioni didattiche, anche se questo metodo è applicabile in altre situazioni scientifiche.

5. Risultati. Osservazioni

Osservazioni sulle tabelle di occorrenza.

Si osserva molto spesso che le frequenze nel registro verbale sono superiori a quelle ottenute nel registro algebrico.

Spiegazioni possibili.

- La tolleranza del valutatore (che è costretto a codificare in giuste-sbagliate) è generalmente più grande nella valutazione di un testo che in un linguaggio simbolico: si può contentare di un "quasi" nel caso verbale (soggettività del valutatore), allora che la risposta algebrica necessita una oggettività dunque un rigore apprezzabile, unicamente un vero-falso.
- La padronanza del linguaggio simbolico cresce con lo sviluppo cognitivo dell'allievo, con qualità d'espressioni verbali uguali.

Osservazioni sul grafo implicativo e gli alberi di similarità implicativi.

- Si osserva una organizzazione piuttosto concettuale, in particolare un blocco di variabili (3, 4, 6) corrispondente ad una relazione algebrica della forma $y=f(x)$ o $y \le f(x)$ o $y \ge f(x)$, cioè dove x ed y sono legati da una relazione esplicita, allorché gli altri items lasciano x e y indipendenti. Notiamo che le 3 variabili del blocco (3, 4, 6) conducono ad uno stesso tipo percettivo: una retta obliqua. La congruenza può transitare per questa similitudine. Questo può egualmente spiegare perché le verbalizzazioni sono vicine:
    1. Legami implicativi: (6-1 → 3-1) → 4-1 (congruenza percettivo-concettuale),
    2. Legami di similarità (3-1, 6-1, 4-1) legato a (3-2, 4-2, 6-2) (congruenza semantica).
- L'osservazione della gerarchia implicativa mostra due classi significativamente costituite attorno, da una parte del legame delle variabili 6, 3, 4 per il registro verbale, d'altra parte per il legame delle variabili 6, 4, 1, 2 per il registro algebrico. In questo ultimo caso, gli allievi che contribuiscono a questa classe manifestano una padronanza algebrica sufficiente per resistere ai cambiamenti concettuali provenienti dai cambiamenti dei grafici.
- L'osservazione del grafo implicativo mostra la non esistenza di una scala in questa popolazione. Questo prova l'assenza d'equilibrio cognitivo che si attenderebbe da una congruenza semantica affermata. E' illustrato, per esempio da:
    1. Azione in due cammini differenti di items 6-1 e 6-2, allora che nel **…………** dovrebbero essere legati
    2. **…………..**differenza frequenziale importante tra gli items 4-2 e 4-1.

Per rapporto ai legami tra gli items, si nota che, l'indipendenza tra i risultati al questionario A al questionario B è molto netta. I grafi, sia che essi siano basati sulla similarità o sull'implicazione, mostrano una separazione tra i compiti che partono da un dato grafico o un dato verbale.

Inoltre, nel senso delle riuscite agli items del questionario B, i legami sono più tenui che nel questionario A. Questo fenomeno è marcato presso gli allievi del ginnasio dove la popolazione è senza dubbio più eterogenea dal punto di vista della padronanza della congruenza tra i regstri, come se il metalinguaggio era primo ed il passaggio ai registri algebrico e grafico necessitava una maturità in corso di elaborazione.

6. Discussione

Vi è un'idea che è generalmente ammessa. Si può formularla nella maniera seguente: **Se il registro di rappresentazione è ben scelto, le rappresentazioni di questo registro sono sufficienti per permettere la comprensione del contenuto concettuale rappresentato.**

Questa ipotesi sembra sufficiente se ci si riferisce a dei soggetti aventi una buona padronanza dell'attività matematica (i ricercatori in matematica o gli insegnanti, per esempio). Essa non è più sufficiente se ci si riferisce a dei soggetti in corso di apprendimento (gli allievi delle medie o del liceo). Essa non permette di immaginare che la conversione delle rappresentazioni di un registro ad un altro possa essere una sorgente importante di difficoltà o di errori.

I risultati di questa ricerca mostrano una parte di queste difficoltà. La netta separazione tra i risultati a due questionari è un indice forte di queste difficoltà. Questo sembra una giustificazione per la nostra ipotesi 1: la comprensione di un contenuto concettuale riposa sulla coordinazione di almeno due registri di rappresentazione.

Questa coordinazione è lontana dall'essere naturale. E non sembra potersi realizzare nel quadro di un insegnamento principalmente determinato dai contenuti concettuali. Si può osservare a tutti i livelli un cambiamento di registri di rappresentazione presso la maggior parte di allievi. Questi non riconoscono lo stesso oggetto attraverso delle rappresentazioni che ne sono date in sistemi semiotici differenti: la scrittura algebrica di una relazione e la sua rappresentazione grafica (vedi per esempio i risultati alle questioni V61a, V62a, V61b, V62b). (Duval, 1993, p.52).

Naturalmente, l'assenza della coordinazione non impedisce del tutto la comprensione. **Ma questa comprensione, limitata al contesto semiotico di un solo registro, non favorisce i transferts e gli apprendimenti ulteriori**: essa rende le conoscenze acquisite poco o per niente convertibili in tutte le situazioni dove esse dovrebbero essere utilizzate. In definitiva, questa comprensione mono-registro conduce ad un lavoro alla cieca, senza possibilità di controllo del "senso" di ciò che si è fatto.

Parecchi errori in matematica dagli allievi possono essere spiegatai con questo tipo di lavoro automatico condotto da un "contratto didattico" (Brousseau, Gagtsis, 1985).
Allora una prima considerazione è che i manuali scolastici di matematica devono proporre dei differenti registri di rappresentazione e di cambiamento di registro in modo che vi sia un vero "jeux de cadres[7]" (Dyady, 1986; D'amore, 1999).

Dall'altra parte l'ipotesi 2 sulla congruenza semantica, basata sulle idee di R. Duval sembra essere difficile da verificare globalmente, almeno in questa ricerca: la netta distinzione tra le risposte ai questionari A e B mostra che almeno al livello della scuola media la congruenza non è evidente.

I risultati mostrano anche una similarità delle variabili (3, 4, 6) che conducono ad uno stesso tipo percettivo: una retta obliqua (congruenza percettivo-concettuale).

Due ricerche sembrano interessanti per l'avvenire:

[7] Letteralmente: gioco di quadri. Si intende il cambiamento di sistemi di riferimento.

- Nella prima si deve proporre parecchie varianti delle questioni sullo stesso tipo percettivo: rette oblique, curve, domini di punti, etc. a tre livelli: media, liceo, università. Così si potrebbero far apparire, forse, delle gerarchie possibili di livello o delle congruenze percettivo-concettuale.
- Nella seconda si esamina la traduzione tra differenti registri a due livelli: il primo concerne "la traduzione immediata" cioè di cambiamento di registri nei compiti di similarità ai compiti di traduzione prposti in questa ricerca, la seconda concerne "la traduzione non-immediata" cioè la risoluzione dei problemi implicanti delle relazioni funzionali dello stesso o di differente tipo di quelle utilizzate nel primo livello ($y=ax$, $y=ax+b$, $y=ax^2$, $y=ax^2+bx+c$).

E' possibile mostrare le seguenti implicazioni?

Traduzione immediata → traduzione in risoluzione di problemi

Errori alle traduzioni in risoluzione di problemi → Errori alle traduzioni immediate

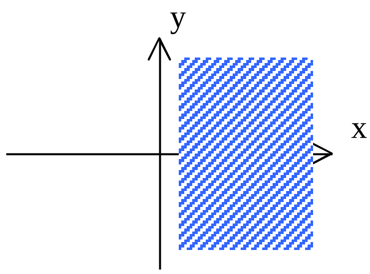
E per quali tipi di rappresentazioni?

APPENDICE 1

Questionario A

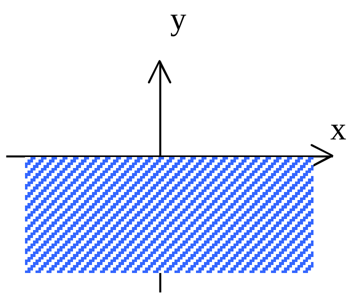
NOME:
CLASSE:
SCUOLA:

In matematica un'informazione può essere presentata in tre modi differenti: presentazione verbale, grafica ed algebrica. Per esempio.

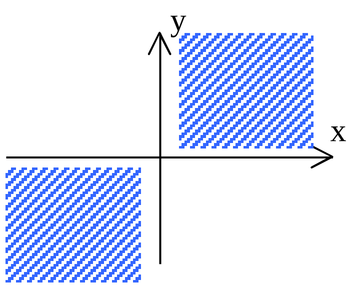
Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
	La regione "ombreggiata" Rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa positiva.	$x>0$

Trova le rappresentazioni algebriche e verbali per le seguenti rappresentazioni grafiche date.

1

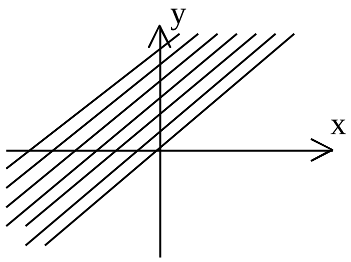
Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
		

2

Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
		

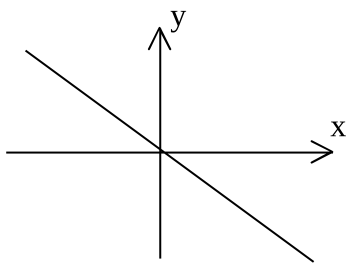
3

Grafica **Verbale** **Algebrica**



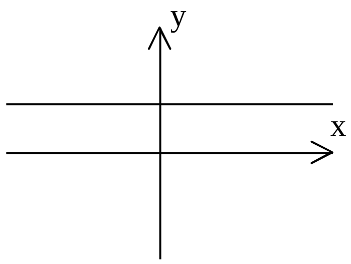
4

Grafica **Verbale** **Algebrica**



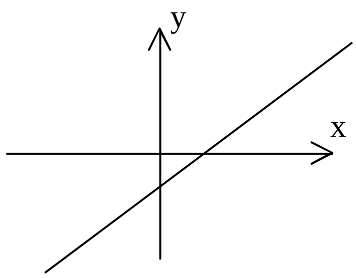
5

Grafica **Verbale** **Algebrica**



6

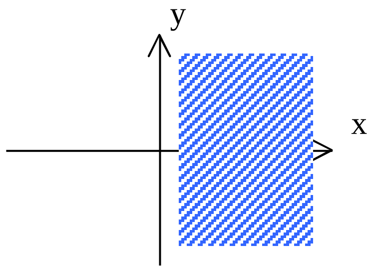
Grafica **Verbale** **Algebrica**



Questionario B

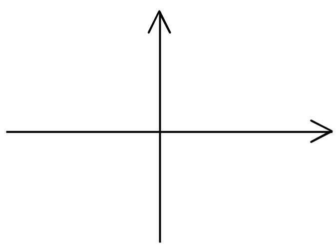
NOME:
CLASSE:
SCUOLA:

In matematica un'informazione può essere presentata in tre modi differenti: presentazione verbale, grafica ed algebrica. Per esempio.

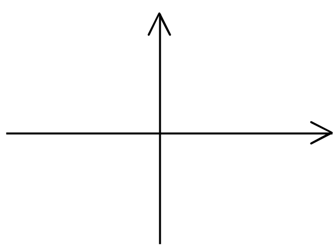
Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
	La regione "ombreggiata" Rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa positiva.	x>0

Trova le rappresentazioni algebriche e verbali per le seguenti rappresentazioni grafiche date.

1

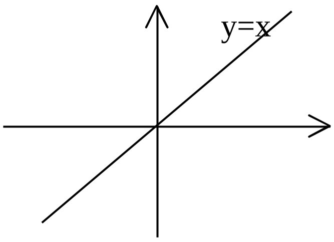
Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
	La regione "ombreggiata" rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ordinata Negativa.	

2

Grafica	**Verbale**	**Algebrica**
	La regione "ombreggiata" rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa ed Ordinata dello stesso segno.	

3

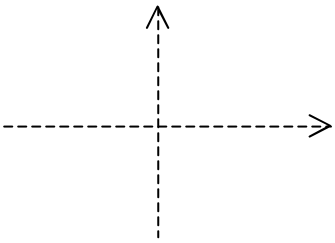
Grafica **Verbale** **Algebrica**



La regione "ombreggiata" rappresenta l'insieme dei Punti che hanno ascissa più Grande dell'ordinata.

4

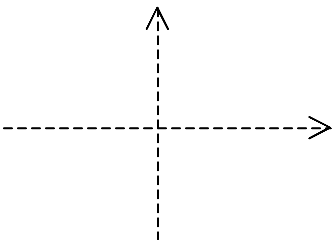
Grafica **Verbale** **Algebrica**



L'insieme dei punti la cui ascissa è un numero opposto A quello dell'ordinata.

5

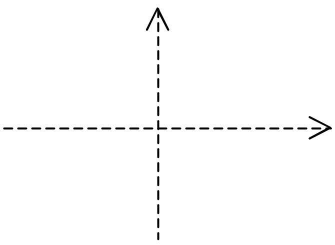
Grafica **Verbale** **Algebrica**



L'insieme dei punti la cui ascissa è costante ed é Uguale a 3/2.

6

Grafica **Verbale** **Algebrica**



L'insieme dei punti la cui ordinata è maggiore Dell'ascissa di due unità.

APPENDICE 2

Grafi Implicativi e Similarità

BIBLIOGRAFIA

- Artigue, M. (1992). *Functions from an Algebraic and Graphical Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practises*. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp.109-132). Mathematical Association of America.
- Asvesta A., Gagatsis A., Problems of interpretation related to the concept of function, Didactics and History of Mathematics, ERASMUS ICP-95-G-2011/11, Thessaloniki, pp.67-94, 475-502 (in Greek et English).
- Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (1984). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California.
- Boulton-Lewis, G. M. (1998). Children's Strategy Use and Interpretations of Mathematical Representations. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 219-238.
- Breidenbach, D. et al. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 247-285.
- Cifarelli, V. (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 238-264.
- D´Amore B., *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Franco Angeli, Milano, 1999.
- DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The Development of Early Symbolization: Educational implications**.** *Learning and Instruction, 8* (4), 325-339.
- Demetriou, A., & Raftopoulos, A. (1999). Modeling the Developing Mind: From Structure to Change. *Developmental Review, 19,* 319-368.
- Denys, B., Darras, B., & Gras, R. (1998). *Space in Mathematics, Art and Geography: Graphic Representation and Figurative Communication* in Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch, Afrigue of Sud.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992*). The Nature of the Process Conception of Function*. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp.85-106). Mathematical Association of America.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). *Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Duval,R.(1987). Il ruolo dell´interpretazione nell´apprendimento della matematica, *Diastassi*, 2 (in greco).
- Duval, R. (1993). Registres de Representation Semiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensee. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 37-65. IREM de Strasbourg.
- Eisenberg, T. (1992). *On the Development of a Sence for Functions.* In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 153-174). Mathematical Association of America.
- Even, R. (1990). Subject-matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 521-544.
- Even, R. (1993). Subject-matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Case of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (2), 94-116.
- Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 105-121.
- Gagatsis, A. (1997). Problemi di Interpretazione Connessi con il Concetto di Funzione. *La Mathematica e la sua Didattica, 2,* 132-149.

- Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, Th., Michaelidou, E., Panaoura, R., Shiakalli, M., & Christoforides, M. (1999). L'influenza delle Rappresentazioni "Semiotiche" nella Risoluzione di Problemi Additivi. *La Matematica e la sua Didattica*, *2*, 382-403.
- Gagatsis, A., Mougi, A. (2000a) Aptitude of Primary School Students in formulation of algebraic relations in a context of translation tasks, Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, *Contemporary Research in Educational Sciences*, pp.337-347(in greco).
- Gagatsis, A., Panaoura, G. (2000b) The interplay of the arithmetic line in the resolution of addizione and subtraction tasks, Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, *Contemporary Research in Educational Sciences*, pp.348-359(in greco).
- Gagatsis, A., Kyriakides, L., Michaelidou, E., Siakalli, M. (2000c) The interplay of
- translation between the different fields of representation of the concept of function to the learning of the concept, Prooceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, *Contemporary Research in Educationa Sciences, pp361-368.* (in greco).
- Goldin, G. A. (1987). *Levels of Language in Mathematics Problem Solving.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.59-65). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). *A Joint Perspective of the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics.* In von L. P. Steffe &… Mahwah, Theories of mathematical learning (pp.397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gras, R. et al. (1997a). *Implicative Statistical Analysis*, Actes du Collogue IFCS 96,
- Springer-Verlag, Tokyo.
- Gras, R., & Peter, P. (1997b). *From a Cognitive Complexity Problem to an Implicative*
- *Model*, Actes du Congres I.C.T.M.A. 8, Brisbane.
- Gras, R., & Peter, P. (1999). *From a Cognitive Complexity Problem to an Implicative*
- *Model*, Actes de l'Intensive Programme Socrates/Erasmus 1998/1999, University of Cyrpus, in A. Gagatsis (Ed.), A multidimensional Approach to Learning in Mathematics and Sciences, 491-500. Nicosia: Intercollege Press Cyprus.
- Greer, B., & Harel, G. (1998). The Role of Isomorphisms in Mathematical Cognition. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 5-24.
- Hall, N. (1998). Concrete Representations and the Procedural Analogy Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 33-52.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.
- Houser, N. (1987). Toward a Peircean Semiotic Theory of Learning. *American Journal of Semiotic, 5* (2), 251-274.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Janvier, C. (1987a). *Translation Processes in Mathematics Education.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Janvier, C. (1987b). *Representation and understanding: The notion of function as an example*. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.67-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 79-103.
- Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). *Pedagogical considerations concerning the problem of representation.* In C. Janvier (editor), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Kalchman, M., & Case,R, (1998). Teaching Mathematical Functions in Primary and Middle School: An Approach Basec on Neo-Piagetian Theory. *Scientia Pedagogica Experimentalis, XXXV* (1), 7-54.
- Kaput, J. J. (1985). *Rerpesentation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modeling.* In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp.381-398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. J. (1987a). *Representation Systems and Mathematics*. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. J. (1987b).*Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics*. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kerslake, D. (1986). *Graphs.* In K. Hart (Ed.), Children's Understanding of Mathematics: 11-16. London: J. Murray.
- Klein, A. S., Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (4), 443-464.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). *Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving*. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). *Rational Number Relations and Proportions.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Maher, C. A. & Speiser, R. (Eds.) (1998a). Representations and the Psychology of Mathematics Education. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (1).
- *Maher, C. A. & Speiser, R. (Eds.) (1998b). Representations and the Psychology of Mathematics Education.* The Journal of Mathematical Behavior, 17 *(2).*
- *Markovitz, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday.* For the Learning of Mathematics*, 6 (2), 18-28.*
- Mesquita, A. L. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 183-196.
- Norman, A. (1992). *Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function.* In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 215-230). Mathematical Association of America.
- Okamoto, Y. (1996). Modeling Children's Understanding of Quantitative Relations in Texts: A Developmental Perspective. *Cognition and Instruction, 14* (4), 409-440.
- Owens, K. D., & Clements M. A. (1998). Representations in Spatial Problem Solving in the Classroom. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 197-218.
- Paige, D. D., Thiessen, D. & Wild, M. (1982). *Elementary Mathematical Methods*, Wiley, New York.
- Presmeg, N. (1998). Metaphoric and Metomymic Signification in Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 25-32.
- Resnick, L. B. & Ford, W. B. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

- *Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Towards a Theory of Representing as Social Practice* . Review of Educational Research, 68 *(1), 35-59.*
- Seeger, F. (1998). *Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions.* In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), The culture of the mathematics classroom, pp. 308-343, Cambridge: Cambridge UP.
- Sfard, A. (1992). *Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification - The Case of Funtion.* In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 59-84). Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A. (1992). *On Understanding the Notion of Function.* In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 25-58). Mathematical Association of America.
- Spagnolo F., Enseignement integré des mathématiques et des sciences à l´école moyenne, méthode et contenu, C.I.E.A.E.M., Orleans (francia), 1982.
- Spagnolo F., Ailello Nicosia, *Etude éxperimentale á la relation fonctionnelle au point de vue de l´élève*, C.I.E.A.E.M., Lisbona (portogallo, 1983.
- Spagnolo F., Ailello Nicosia, *Studio sperimentale sulla relazione funzionale dal punto di vista dell´alunno*, XII Congresso U.M.I. (Unione Matematica Italiana, Perugia, 1983.
- Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondria*, La Nuova Italia, Firenze, 1998.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). *The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning.* In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy (356-366). Mathematical Association of America.
- von Glasersfeld, E. (1987a). *Learning as a constructive activity*. In C. Janvier (editor), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. London: LEA.
- von Glasersfeld, E. (1987b). *Preliminaries to any Theory of Representation.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 215-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.