

Metodologia d'analisi di indagini

Regis Gras¹

Résumé

Comme les autres sciences de la nature et de l'homme, la didactique cherche à établir ses invariants, ses "théorèmes", à travers la répétition de phénomènes qu'elle aura provoqués et contrôlés. Pour cela, des expériences, des observations, des enquêtes doivent être mise en place et analysées par des méthodes statistiques. Or la statistique inférentielle suppose l'émission d'hypothèses dont ne dispose pas toujours le didacticien. Il est donc nécessaire, dans le cadre d'une rupture épistémologique de la statistique, de faire appel à des méthodes d'analyse de données. Celle-ci ne présupposent pas l'explication d'hypothèses. Nous en présentons ici. Parmi elles, figure l'implication statistique ou méthode implicative. Nous développons sa conceptualisation en justifiant les choix théoriques par des nécessités pratiques de structuration des informations.

Riassunto

Come le altre scienze della natura e dell'uomo, la didattica cerca di stabilire le sue invarianti, i suoi "teoremi", attraverso la ripetizione dei fenomeni che essa avrà provocato e controllato. Per questo devono essere predisposte delle esperienze, delle osservazioni, delle indagini analizzate con dei metodi statistici. Ora la statistica inferenziale suppone la formulazione di ipotesi di cui non sempre il ricercatore in didattica dispone. E' dunque necessario, nel quadro di una rottura epistemologica della statistica, di fare appello a dei metodi di analisi di dati. Questi non presuppongono l'esplicitazione delle ipotesi. Tali metodi verranno presentati in questa sede. Tra questi, figura l'implicazione statistica o metodo implicativo. Sarà sviluppata la sua concettualizzazione giustificando le scelte teoriche attraverso le necessità pratiche di strutturazione delle informazioni.

¹ Università di Nantes (IRESTE) e di Rennes (UFR.Math.). Traduzione a cura di Grazia Indovina. Il contenuto di questo articolo è stato esposto al seminario di "Ricerca in Didattica delle Matematiche" organizzato dal G.R.I.M. nel marzo del 1997.

Metodologia d'analisi di indagini

*Regis Gras*²

1- Problematica Didattica

La didattica non dispone attualmente di risposte ben delineate in relazione alla maggior parte delle questioni di cui si occupa. Ora, per fondarsi scientificamente, superando il livello di semplice opinione, essa deve poter formulare e avanzare ipotesi in relazione a tali questioni. Essa deve poter mettere a punto un dispositivo di indagine e dei questionari che permettano la raccolta e l'interpretazione di dati in grado di avallare o infirmare tali ipotesi, di pervenire a delle conclusioni. Certamente, questa strategia ambiziosa ma rigorosa non può bloccarsi al primo approccio con i fenomeni da osservare e dai quali sorgono le questioni. Essa deve proseguire ulteriormente, se si vuole che le decisioni didattiche siano basate su risposte che possiedano oltre ad una certa stabilità e pertinenza anche precisione, validità e predicibilità.

Per esempio, attraverso l'analisi a priori di una situazione-problema, si congetture la realizzazione di certi procedimenti di risoluzione ed una gerarchia di difficoltà. Si osserva poi uno scarto tra il modello a priori e i procedimenti effettuati. Quali conclusioni si possono trarre da questa distorsione?

Come altro esempio possiamo riferirci ad un questionario (come quello di EVAPM) che viene sottoposto ad una vasta popolazione di allievi, scelta su una parte eterogenea di un corso scolastico. Si presuppongono complessità specifiche, l'indipendenza di certi percorsi, di certi campi del sapere (per esempio alcune questioni su "Pitagora" e sul calcolo algebrico), le competenze particolari di alcune famiglie di allievi, ecc.. L'osservazione mette in evidenza l'esistenza di alcuni fattori discriminanti. Quali sono? Quale è la loro gerarchia effettiva? Che posizione occupano le famiglie degli allievi in rapporto a ciò?

Ancora un esempio: avendo osservato le strategie utilizzate dagli studenti per risolvere alcuni problemi, possiamo ad esse associare delle concezioni consistenti? Sono esse evolutive? In che modo?

Ultimo esempio: è possibile, in psicologia cognitiva, mettere in evidenza attraverso un questionario adattato, alcune relazioni implicative tra certi comportamenti?

Si presentano continuamente nuove difficoltà, e l'insegnante o il ricercatore isolati si trovano disarmati davanti alle scelte fatte e alle decisioni da prendere. Ad esempio, come trattare le informazioni qualitative? Come codificare i dati? Quale è il numero di allievi sufficiente ad assicurare la credibilità di un risultato? Quale metodo statistico possiamo adottare per tirare fuori dai dati invarianti e strutture? Come interpretare i risultati? Si tratta di trovare un giusto equilibrio, nella ricerca di una convalida delle ipotesi, tra l'impovertimento dei metodi statistici, il rifiuto di investire energie in tale dominio e la statisticomania che conduce ad una pletora di risultati inutilizzabili, accompagnati dall'illusione della trasparenza (cfr. A. Bodin³).

² Università di Nantes (IRESTE) e di Rennes (UFR.Math.). Traduzione a cura di Grazia Indovina.

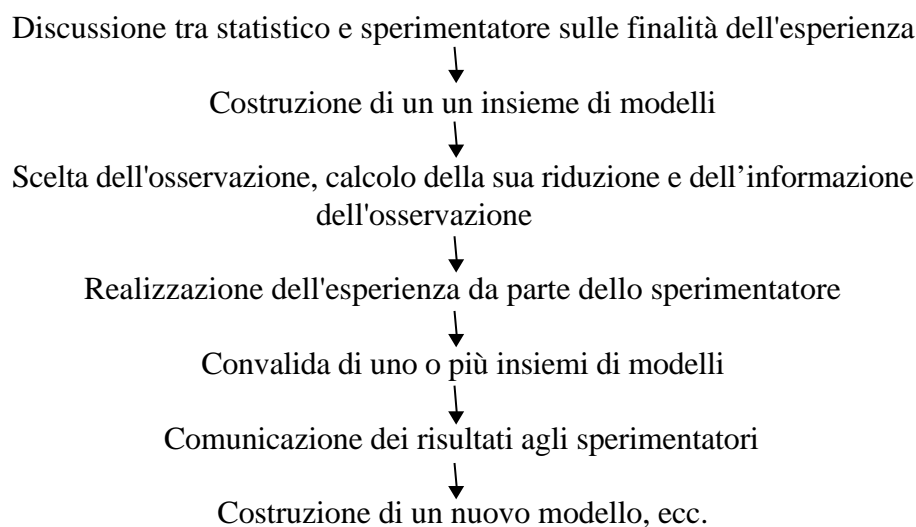
Il contenuto di questo articolo è stato esposto al seminario di "Ricerca in Didattica delle Matematiche" organizzato dal G.R.I.M. nel marzo del 1997.

³ Antoine Bodin, *Autour de l'évaluation: pistes de réflexion didactique*, Actes de l'université d'été, Brochure n° 102, Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

2.- RISPOSTE DELLA STATISTICA CLASSICA

La statistica descrittiva classica permette, tra l'altro, di descrivere talvolta in maniera molto suggestiva la distribuzione di una variabile, o meglio l'interazione di due variabili. Questo metodo utilizza sia parametri indicatori di questa distribuzione (media, coefficiente di correlazione,...) che rappresentazioni grafiche (istogrammi, rette dei minimi quadrati,...). Essa appare tuttavia limitata nei suoi obiettivi e mutilante nel caso di dati multidimensionali. In effetti essa limita il suo studio alle intersezioni successive di due, tre variabili, cosa che impone calcoli lunghi, ripetitivi e insufficienti a dare una visione globale.

I modi di risposta della statistica inferenziale e decisionale sono compatibili con le cosiddette tappe scientifiche. In effetti, rileggendo Didier Dachuna-Castelle, si nota il seguente schema della situazione generale:



Questo schema ritaglia l'essenziale del comportamento dello statistico e delle sue relazioni con la realtà. Tali comportamenti possono essere riassunti nel modo seguente: a partire da un campione di una popolazione, campione che si suppone realizzato mediante prove indipendenti e della stessa distribuzione (nel caso della cosiddetta statistica parametrica):

- vengono stimati, al fine di costruire modelli probabilistici, dei parametri relativi alle variabili osservate nell'esperienza o tutto al più degli intervalli di fiducia che contengano questi parametri;
- viene adattata induttivamente, ad una o due altre variabili, una variabile dipendente con finalità di predizione o di spiegazione;
- si decide di convalidare o no i giudizi e le ipotesi di modelli con dei tests chiamati tests di ipotesi (si tratta ancora di statistica non parametrica).

Ma chiaramente, questi comportamenti vengono legittimati da diverse condizioni:

- avere chiaramente identificato, separato e probabilizzato le variabili: ma, in didattica, dati e variabili possono essere numerosi e intricati;
- presupporre molto spesso certe ipotesi di normalità delle variabili, ipotesi restrittive e a volte difficilmente verificabili;

- accettare dei metodi lunghi e fastidiosi di accoppiamento a due a due di queste variabili, identificandole;
- saper formulare delle ipotesi dette "nulle", cioè messe in questione e confutabili mediante l'esperienza con un rischio di errore predefinito;
- distruggere l'individualità dei soggetti nel campione.

Queste condizioni, allo stato attuale di scientificità della didattica, sono difficilmente soddisfatte, come avviene per altro in altre discipline come l'epidemiologia, le scienze economiche, la psicologia, ecc. . Se il loro stato attuale autorizza a fare delle congetture (cioè delle ipotesi di primo livello in antitesi alle ipotesi "nulle" che chiameremo di secondo livello) appare però indispensabile l'essere ricorsi a metodi diversi dai precedenti per sintetizzare e strutturare i dati e poter altresì identificare le variabili, i fattori in gioco, i loro collegamenti, la loro gerarchia, ecc..

Ad esempio, supponiamo di voler esaminare gli eventuali collegamenti tra due fenomeni che presentano diverse modalità. Ciò si verifica, ad esempio, quando studiamo i comportamenti "riuscita-errore-non risposta" degli allievi sottoposti ad un questionario che presenta diverse possibilità. La principale funzione del test detto χ^2 è quella di sottoporre a osservazioni sperimentali l'ipotesi di indipendenza, che sostituisce la modellizzazione teorica. Una certa "distanza" tra il legame osservato e quello che ci sarebbe se ci fosse indipendenza, serve da indicatore della distorsione tra il modello e la realtà. Se l'esperienza mostra che essa é incredibilmente grande sotto l'ipotesi d'indipendenza, allora tale ipotesi viene rigettata, con un rischio di errore che si cerca di minimizzare il più possibile. Questo test, pur presentando un grande interesse legato alla sua semplicità, presuppone che la popolazione effettivamente osservata secondo ciascuna modalità, sia sufficiente a rendere valida un'approssimazione gaussiana. Per di più, se, come per l'appunto, nel caso di un questionario-allievo, dobbiamo anche intersecare un grosso numero di percorsi, il lavoro é lungo e soffre della mancanza di una visione globale o, per meglio dire, di un procedimento sistematico.

E' necessario dunque trovare altri metodi.

3. ROTTURA EPISTEMOLOGICA DELLA STATISTICA: ANALISI DEI DATI, SUE POSSIBILITÀ' E SUOI MODI DI RISPOSTA

Una doppia congettura ci permetterà di dare risposte più soddisfacenti alla nostra problematica:

- probabilità, ci permetterà di elaborare nuovi metodi di manipolazione dei dati;
- dall'altra, il computer ci permetterà di raccogliere, di effettuare rapidamente dei calcoli su strutture complesse senza mutilare la dimensione delle tabelle da trattare e di fornire rappresentazioni diversificate dell'informazione ottenuta.

In effetti, l'analisi dei dati, metodologia di interpretazione dei dati, al fine di visualizzare, ma anche di strutturare, modellizzare e facilitare l'esplicazione dei fenomeni, ci fornisce oggi molti metodi, che ci permetterebbero, contrariamente alla loro designazione, di condensare e sintetizzare i dati, sotto un aspetto multidimensionale e olografico, di ottenere fattori discriminanti, tipologie, gerarchie ...

La rottura epistemologica concerne dunque allo stesso tempo, le aspirazioni e le aspettative, i mezzi tecnici per il loro raggiungimento (informatica), i dati trattati (numeri, natura, varietà,...), i soggetti dell'analisi (variabili o individui), i modi di resa

dell'informazione, i modi di procedere (i dati vanno verso i modelli e non viceversa), i metodi matematici utilizzati, i concetti in gioco, ecc. In questo senso l'analisi dei dati si distingue dunque sia dalla statistica inferenziale e decisionale che dalla statistica descrittiva classica.

Ma le nuove prospettive offerte, apparentemente ditirambiche senza riserva, creano o mantengono l'illusione che dati raccolti e trattati senza una metodologia opportuna e senza ipotesi a monte, possano fornire informazioni chiare e risultati organici. Troppi ricercatori, che d'altronde hanno in seguito abbandonato tale metodologia esattamente per questi motivi, si sono ritrovati con una montagna di carta piena di dati, di risultati numerici e di grafici assolutamente inutilizzabili. Spreco economico e intellettuale! Dopo più di vent'anni dai miei primi approcci con l'analisi dei dati, mi sembra indispensabile procedere nel modo seguente:

- formulare delle ipotesi, senza crearsi l'illusione che esse verranno in seguito o confutate o definitivamente confermate, ma solamente messe in dubbio o confortate;

- scegliere un metodo di analisi appropriato tra le due grandi classi: analisi fattoriale e classificazione automatica; ad esempio, se si vuole mettere in evidenza:

1. i principali fattori discriminanti all'interno di una popolazione con l'uso di variabili: una analisi fattoriale,
2. una ripartizione tra le variabili: le nuvole⁴ dinamiche,
3. ..una tipologia o una classificazione: una classificazione gerarchica delle similarità,
4. una implicazione tra variabili o classi di variabili: un grafo implicativo o una gerarchia implicativa, ecc.
5. codificare ed elaborare una tabella di dati esaustiva, pertinente, omogenea, compatibile con il metodo scelto;
6. avere le conoscenze di matematica essenziali necessarie per la sintesi (spazi vettoriali euclidei, algoritmi e criteri di classificazione), conoscenze che facilitano il controllo e l'interpretazione;
7. interpretare in modo sintetico i risultati numerici e grafici mediante un certo distacco e saper estendere o restringere quei dati sui quali appare necessario un secondo passaggio per poter confermare o mettere in discussione le prime interpretazioni. In tal caso praticare, eventualmente, un metodo inferenziale.

E' necessario che il ricercatore vada al di là dell'evidenza di certi risultati, servendosi di queste indicazioni, per rendere credibili le interpretazioni più nascoste e sorprendenti che sole possono giustificare l'uso di un metodo così sofisticato.

4- BREVE PRESENTAZIONE DI DUE METODI

4.1- L'Analisi Fattoriale delle Corrispondenze

Essa si propone di dare una rappresentazione geometrica, generalmente in uno spazio a più dimensioni, di una distribuzione congiunta di due insiemi: l'insieme E (insieme degli individui) e l'insieme V (insieme delle variabili o dei modelli di variabili).

Sia l'insieme E che l'insieme V ammettono uno spazio di rappresentazione dove i punti, dotati di un medesimo peso quando occorre, sono i profili di uno sull'altro,

⁴ L'espressione "nuvola" riguarda la rappresentazione geometrica dell'analisi fattoriale attraverso l'utilizzo di spazi vettoriale. (n.d.r.)

traducendo così le relazioni, le corrispondenze tra E e V. Questi spazi sono muniti di una distanza Euclidea (detta del e^2): diremo, ad esempio, che due soggetti sono tanto più vicini quanto più hanno lo stesso comportamento rispetto alle variabili e, in particolare, rispetto a quelle meno frequenti, cioè, le meno banali.

Il metodo analitico consiste dunque nel ricavare, a partire dagli spazi di rappresentazione, dei sottospazi di dimensione ridotta, ma tali che la nuvola di punti E o V vi sia rappresentata in maniera ottimale mediante le sue diverse proiezioni. Agli assi di questi sottospazi corrispondono fattori discriminanti negli insiemi E e V: il primo è quello più significativo dal punto di vista delle informazioni, il secondo lo è meno, ecc. Il didatta deve allora, mediante un gioco di opposizione-rassemblaggio delle proiezioni dei punti, determinare il significato di questi fattori. Questo gli servirà ad analizzare e quindi interpretare le informazioni più nascoste che vengono fuori proprio dallo stesso significato. Il ricercatore si interesserà ai contributi di alcuni punti a questi fattori, ad esempio, alle posizioni relative di sottogruppi della popolazione studiata.

Ad esempio, nella sua Tesi, A.Robert mette in evidenza la separazione tra diversi modelli (primitivo, statico, dinamico) di cui dispongono gli studenti relativamente alle successioni e alle serie, identifica le procedure che ne rilevano, e ne apprezza l'efficacia e la pertinenza.

4.2- L'Analisi gerarchica delle similarità secondo I.C.Lerman

Come in tutti i metodi di classificazione, cerchiamo di costruire sull'insieme V delle variabili partizioni sempre meno fini, costruite in maniera ascendente ad albero con l'aiuto di un criterio di similarità tra le variabili. Il didatta si interessa a questo tipo di analisi che gli permette di studiare prima e di interpretare poi in termini di tipologia e di somiglianza (e di differenza) decrescente dei nuclei di variabili, costituiti significativamente a certi livelli dell'albero e in opposizione ad altre agli stessi livelli.

Il criterio di similarità si esprime nel modo seguente:

“2 variabili a e b, caratterizzanti rispettivamente le parti A e B di un insieme E di soggetti, si rassomigliano tanto più quanto l'effettivo dei soggetti che le verificano (\cap) è importante rispetto, da una parte, a ciò che sarebbe stato senza il legame a priori tra a e b, e dall'altra, alle cardinalità di A e B. Questa somiglianza si misura con la probabilità della sua inverosimiglianza”.

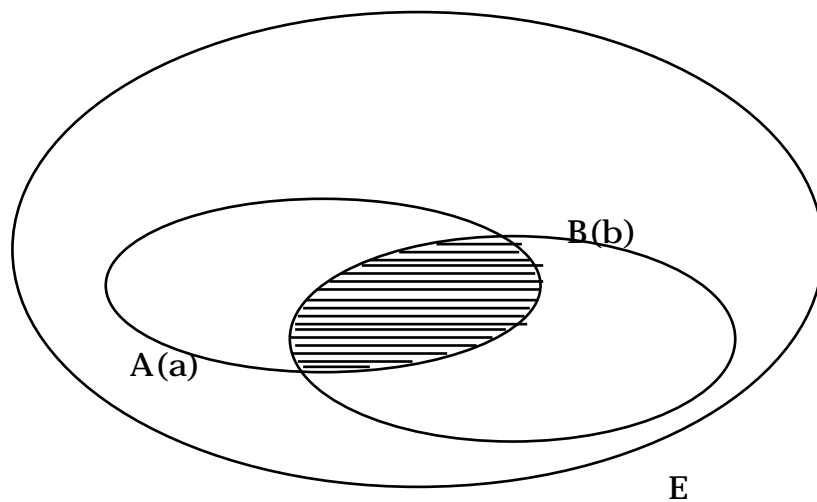


Figura 1

L'indice tra le variabili non viene dunque travisato dagli effettivi. Servirà in seguito per definire un indice di similarità tra due classi di variabili.

Così, per costruire un albero di classificazione, si riuniscono, per cominciare, al livello più basso le due variabili che più si somigliano mediante questo indice, poi altre due variabili o un'altra variabile e la classe già formata, poi altre due variabili o classi di variabili.

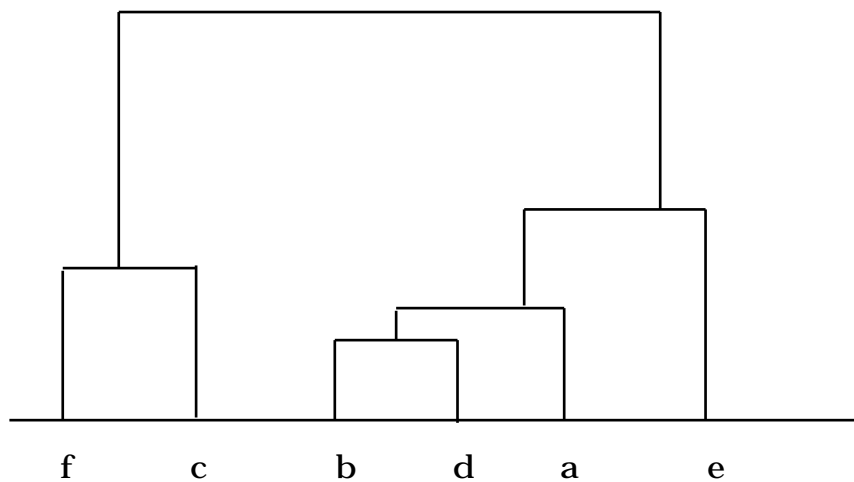


Figura 2

Nella mia tesi, questo tipo di analisi mette in evidenza una importante tipologia di lavoro nella risoluzione di esercizi basati sulla simmetria centrale, tipologia nella quale si contrappongono in particolare gli svolgimenti nel contesto geometrico e in quello algebrico.

Il contributo di certe categorie di allievi a questa tipologia presenta un grande interesse, perché permette di mettere in evidenza la relazione esistente tra i descrittori di allievi ed il loro comportamento vis-a-vis con le questioni poste.

5- L'ANALISI IMPLICATIVA

5.1 Implicazione tra variabili

Contrariamente ai metodi citati precedentemente, dove distanza e indice di similarità sono simmetrici, il metodo implicativo è non simmetrico. L'elaborazione di questo metodo è stata generata da una questione che mi sono posta nel 1978⁵ a proposito di una gerarchia di complessità organizzata secondo un ordine parziale. La problematica che la ha introdotta, nel caso in cui le variabili considerate sono binarie (un individuo soddisfa o no una variabile), è la seguente:

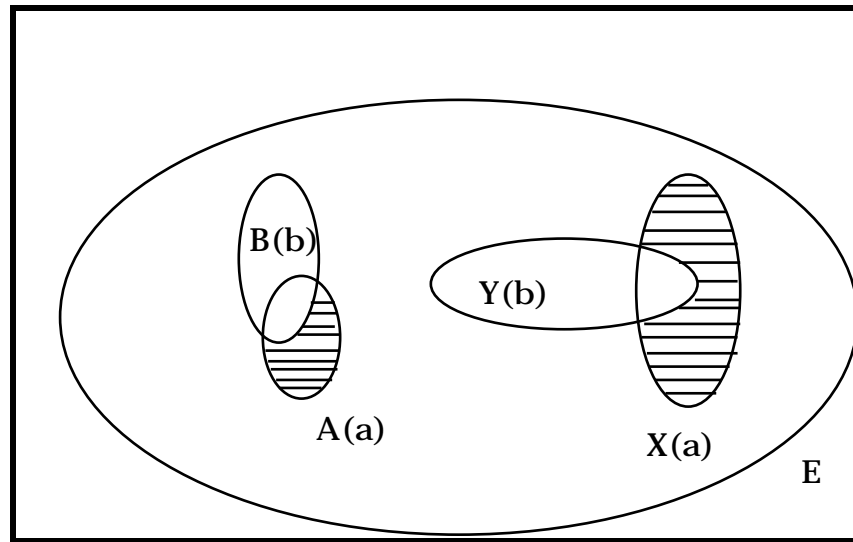


Figura 3

Se A e B sono le sottopopolazioni di soggetti aventi rispettivamente soddisfatto le variabili a e b, in che misura si potrà dire: "se a allora b", senza che l'implicazione sia connotata a priori di causalità.

Se $\bar{A} \cap \bar{B}$, la proposizione è verificata, ma generalmente i casi correnti presentano una intersezione $\bar{A} \cap \bar{B}$ non vuota, ma che può essere piccola.

L'indice di implicazione misura, in maniera paragonabile alla similarità, il grado di "sorpresa" della esiguità di $\bar{A} \cap \bar{B}$ rispetto all'indipendenza a priori e agli effettivi osservati. Diremo così, per esempio,, se X e Y sono due parti aleatorie di E della stessa cardinalità, rispettivamente, di A e di B,

"a==>b" è ammissibile a livello di speranza o con l'intensità implicativa 0,95 se e solo se: $\text{Prob}[\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B}) < \text{card}(\bar{X} \cap \bar{Y})] < 0,05$.

In effetti, si dimostra che, per una certa modellizzazione, la variabile aleatoria $\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B})$ segue una legge di Poisson di parametro $\frac{\text{card} \bar{A} \cdot \text{card} \bar{B}}{n}$. Se centriamo e riduciamo questa variabile aleatoria, la nuova variabile segue approssimativamente, per degli effettivi abbastanza grandi, una legge normale centrata ridotta. Se tali effettivi non sono sufficienti a legittimare l'approssimazione gaussiana, è sufficiente restare nel modello poissoniano. In pratica è dunque sufficiente determinare:

⁵ L'implicazione statistica viene implementata in un software messo a punto dal R.Gras e dai suoi collaboratori che si chiama "CHIC". Esso è disponibile al seguente indirizzo: Prof. Regis Gras IRMAR Institut Mathématique Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.(n.d.r.)

$$q(a, \bar{b}) = \frac{\text{card}(A \cap \bar{B}) - \frac{\text{card}A \cdot \text{card}\bar{B}}{n}}{\sqrt{\frac{\text{card}A \cdot \text{card}\bar{B}}{n}}}$$

e calcolare l'intensità di implicazione:

$$\varphi(a, \bar{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varphi(a, \bar{b})}^{\infty} dt \text{ Prob}[\text{card}(X \cap \bar{Y}) \geq \text{card}(A \cap \bar{B})]$$

Se $\varphi(a, \bar{b}) \geq 0,95$ l'implicazione è ammessa con la soglia 0,05.

Questa nozione è estesa (vedi le tesi di A.Larher e di M.Bailleul) alle variabili modali e numeriche, unificate in variabili frequenziali a valori in $[0,1]$.

Un grafo implicativo evidenzia l'ordine parziale indotto da questa intensità di implicazione. Per esempio:

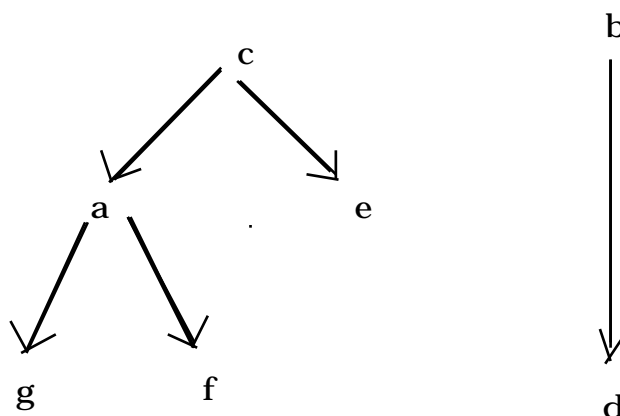


figura 4

Nella sua tesi, A. Robert esplicita un ordine parziale tra le procedure usate dagli studenti nello svolgimento di esercizi su successioni e serie, procedure rientranti nella definizione di concezioni o di modelli più o meno funzionali e sottolinea inoltre i rispettivi apporti dei metodi d'analisi che ha impiegato. H. Londeix mette in evidenza, a partire da un test, una gerarchia di stadi secondo Piaget e uno sfasamento differenziale dal fatto dei contesti degli esercizi del testo. A.Totohasina mostra che due concezioni limitative, l'una cronologista, l'altra causalista, diventano per gli studenti ostacolo alla comprensione della nozione di probabilità condizionale.

5.2- Implicazione tra classi di variabili

Insufficientemente sintetica, l'implicazione tra variabili è concettualmente prolungabile ad una implicazione tra classi di variabili. Poiché l'esame di una tale relazione tra due classi ha veramente senso solo nel caso di una "buona chiusura" delle classi, definiamo il concetto di coesione di una classe come antinomico a quello di "disordine implicativo" (nel senso dell'entropia in teoria dell'informazione). Da qui, l'implicazione tra

due classi ben "coesive", cioè ordinate nel loro interno, traduce la forza implicativa dell'una sull'altra.

Più precisamente, la coesione di una classe di due variabili $C(a,b)$, avendo posto $\varphi(a,\bar{b}) = p$, è così definita:

$$C(a,b) = [1 - [p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)]^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } p > 0,5$$

$$C(a,b) = 0 \quad \text{se } p \leq 0,5$$

L'espressione $[p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)]$ rappresenta l'entropia legata all'esperienza aleatoria $[card(X \bar{Y}) / card(A \bar{B})]$. Quindi, la coesione implicativa s'opponne in qualche modo al "disordine dovuta all'assenza di una relazione implicativa di a e su b". Essa ha inoltre la stessa dimensione di questa entropia.

Da qui, costruiamo la coesione di una classe **A** di r variabili (a_1, a_2, \dots, a_r) , ordinate secondo un algoritmo massimizzante passo dopo passo la coesione della classe formata, definita come una media geometrica delle coesioni delle coppie:

$$C(\mathbf{A}) = [\prod_{i \in \{1,2,\dots,r-1\}, j \in \{2,\dots,r\}, j > i} c(a_i, a_j)]^{\frac{2}{r(r-1)}}$$

Infine, la forza implicativa di una classe **A** composta dalle variabili (a_1, a_2, \dots, a_r) , sulla classe **B** composta dalle variabili (b_1, b_2, \dots, b_s) ordinate nello stesso modo, è data da:

$$Y(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\sup_{i \in \{1,2,\dots,r\}} \prod_{j \in \{2,\dots,s\}} c(a_i, \bar{b}_j)]^{\frac{1}{rs}} [c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})]^{\frac{1}{2}}$$

Un algoritmo paragonabile a quello che utilizza I.J.LERMAN per costruire una gerarchia di similarità, permette di mettere in evidenza l'aggregazione successiva di classi di coesione significativa, e in quale senso l'una implica l'altra. Una selezione dei livelli della gerarchia ai quali corrisponde una classe significativa di variabili e la determinazione del contributo dei soggetti a tali variabili sono possibili grazie al lavoro teorico di H.Ratsimba-Rajohn e di M.Bailleul.

Ad esempio, questa nozione ha permesso ad A.Larher di rigettare la relazione implicativa tra due classi di procedure sbagliate in certi esercizi in cui i giovani allievi dovevano completare delle inferenze sostituendo rispettivamente $= a // e // ad =$.

Invece, l'analisi delle gerarchie delle similarità e delle implicazioni permette di evidenziare una genesi dell'inferenza in geometria:

- due forme primitive:
 1. ripetizione dell'ipotesi nella conclusione,
 2. cambiamento delle variabili stanziate accompagnato o no dal cambiamento della relazione attesa nella conclusione;
- una forma più evoluta dove le relazioni attese vengono cambiate con relazioni vicine, senza simmetria in questi scambi;
- una forma completa che conduce al successo.

Nello stesso tempo, S.Ag.Almouloud ha dimostrato che due concezioni sintetizzano i comportamenti degli allievi nella situazione di risoluzione di problemi di geometria con dimostrazione: la prima in cui domina il concentramento sulle ipotesi e l'altro in cui prevale il concentramento sulle conclusioni. M.Bailleul, in uno studio sulle rappresentazioni di

insegnanti relativamente all'insegnamento delle matematiche, mostra l'omogeneità e la potenza di certe rappresentazioni.

In generale, i due metodi basati sulla similarità e l'implicazione ci hanno permesso, nell'ambito di lavori diversi, di definire, a partire da classi di comportamenti, delle procedure ovverosia delle concezioni stabili e consistenti che ci permettano di reperirle, anticipatamente, alla comparsa di qualche segnale. Vedremo, in *Intelligenza Artificiale*, il vantaggio di partire da concezioni realmente sintetiche in vista di una modellizzazione dell'allievo attraverso una gerarchia di regole, invece di partire da un ipotetico scarto dal modello o da un sottomodello dell'esperto.

CONCLUSIONI.

Vogliamo sottolineare due punti che ci sembrano importanti nell'uso di una tale metodologia di analisi didattica:

- i metodi con basi matematiche diverse conducono, come abbiamo visto, a risultati che, indubbiamente spesso si confortano, ma più spesso si completano; questo deve incoraggiarci a superare tale metodo;

- l'interpretazione non può farsi che a partire da questioni poste preliminarmente: non è né superfluo, né negativo, ritrovare un'informazione evidente, questa mancanza di contraddizione con il "noto" o il "verosimile", conforta al contrario la credibilità delle informazioni nuove e inattese.