EFFICACITÉ DE L´ENSEIGNEMENT DU CALCUL VECTORIEL

F. Spagnolo[1], I. Trenèanský[2]

Résumé

Le calcul vectoriel est compris dans les programmes de tous les écoles secondaires. Nous avons posés des questions: est-ce que les éleves à la sortie du lycées connaisent bien language du calcul vectoriel, est-ce qu´ils sont capables de l´appliquer en géométrie, en physique, en statistique? Pour trouver les réponses sur les les questions posées on a utilisé le notion du barycentre. Aprés une étude théorique et une expérimantation réalisées dans plusieurs écoles sécondaires on peut constater que les réponses aux questions ci-dessus ne sont pas très satisfaisants. L´expérimentation a confirmé même les problèmes esquissées avec le passage du langage algébrique au langage géométrique.

Súhrn

Vektorový poèet je zahrnutý v uèebných osnovách cšetkých typov stredných škôl. Položili sme si preto nasledovné otázky: ovládajú žiaci po skonèení strednej školy uspokojivo jazyk vektorového poètu, sú schopní aplikova• ho v jednoduchých situáciách v geometrii, vo fyzike, v matematickej štatistike? K nájdeniu odpovedí na uvedené otázky sme použili pojem barycentra. Na zklade teoretického štúdia a po realizovaní experimentu sme dospeli k záveru, že odpovede na uvedené otázky nie sú uspokojivé. Experiment potvrdil i naznaèené problémy súviace s prechodom medzi jazykom algebry a jazykom geometrie.

[1] Filippo Spagnolo, GRIM-Diparimento di matematica di Palermo, Università di Palermo, Via Archirafi,34, 90123 Palermo, Italia.
E-mail: spagnolo@dipmat.math.unipa.it.

[2] Ivan Trenèanský, KZDM FMFI, Université Comenius, Mlynska dolina, 84248 Bratislava, Slovaquie.
E-mail: ivan.trencansky@fmph.uniba.sk.

Riassunto
Il calcolo vettoriale è compreso nei programmi di tutte le scuole secondarie. Ci siamo posti delle domande: gli allievi all'uscita del liceo conoscono bene il linguaggio del calcolo vettoriale, sono capaci di applicarlo alla geometriam alla fisica ed alla statistica? Per trovare le risposte sulle questioni poste si è utilizzata la nozione di baricentro. Dopo uno studio teorico ed una sperimentazione in parecchie scuole secondarie si può constatare che le risposte alle questioni poste non sono molto soddisfacenti. Il lavoro sperimentale ha confermato anche i problemi esistenti nel passaggio tra il linguaggio gemetrico e quello algebrico.

Abstract
Vector calculus is a part of the curriculum at all types of secondary schools.Therefore we asked these questions: Do students understand the vector calculus language after finishing their study at secondary schools satisfy? Are they able to apply its in simple situations in geometry, physics or statistics? To find answers to the questions we used the term of the barycentre. Based on the theoretical study and after the realisation of an experiment we came to the conclusion that the answers were not satisfied. The experiment also confirmed the indicated problems connected to the transformation between the language of algebra and language of geometry.

EFFICACITÉ DE L´ENSEIGNEMENT DU CALCUL VECTORIEL

F. Spagnolo, I. Trenèanský

Préface

Depuis plusieurs année nous suivons les résultats des examens d'entrée des élèves qui veulent faire leurs études à l'Université en Slovaque après avoir finir leurs études à l'école secondaire. Bien que les résultats ne soient pas elaboré statistiquement, ils sont devenus d'une impulsion à éclairer plusieurs questions, par exemple: à quoi sert l'enseignement du calcul vectoriel à l'école secondaire? Est-ce que les élèves à la sortie du lycée en Slovaque connaissent le langage du calcul vectoriel seulement de manière formelle? Est-ce qu'ils sont capables de l'appliquer? Quelles sont les parties des mathématiques secondaires qui utilisent le calcul vectoriel? Est-ce que un élève à la sortie du lycée va calculer l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme ou le volume d'une pyramide ou d'un parallélépipède en utilisant les formules qu'il a appris au collège ou en utilisant le produit vectoriel?

Les questions posées visent les connaissances d'un élève à la sortie du lycée (même au cours de l'étude secondaire) sur le calcul vectoriel élémentaire - la somme de deux vecteurs, la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, la décomposition d'un vecteur en une somme des vecteurs (la propriété de Chasles), etc., la capacité des élèves à utiliser ces connaissances semble formelle. D'après la réalisation du programme actuel de l'école secondaire on peut observer qu'il ne sert que pour l'introduction des équations de droites, de plans.

1. Regard épistémologique

La notation de barycentre ou de centre de masse est directement empruntée à la physique: Etant donné un ensemble de points massiques, un champ (homogène) de pesanteur définit en chacun des points une force (les poids) d’intensité proportionelle à la masse. Le barycentre ou centre de masse est un point d’application de la résultante de cette ensemble de forces parallèles. La résultante a une intesité correspondante à une masse égal à la somme de masses de tous les points du système.

Analogiquement des questions et problèmes relatifs à la moyenne d’une série statistique, à l’équilibre d’une balance en mechanique, au centre de gravité d’un triangle en géométrie, etc., font intervenir, à des degrés divers, la notion de barycentre.

2. Transposition didactique

La démarche adoptée, concernant l'introduction du barycentre peut être résummée de la façon suivante:

1. À partir des situations au-dessous, dégager les relations vectorielles qui caractérisent de tels points „moyens" ou points „d'équilibres", pour pouvoir définir le barycentre de deux points pondérés (et par extension de trois, quatre, ...) en Géométrie.
2. Illustrer le rôle du barycentre en Géométrie (en abordant quelques exemples simples de problèmes d'alignement et de concours) et ensuite dans la Physique et dans la Statistique.

D'après les experiences, la deuxième possibilité est plus efficace. Quand même, on peut se poser plusieurs de questions comme montre cet article.

3. Hypothèses.

Les questions précédentes nous ont amenées à la formulation des hypothèses suivantes:

H_1: Les connaissances des propriétés du calcul vectoriel ne sont que des connaissances formelles.

H_2: Le passage d'un répertoire linguistique à un autre est un obstacle pour les élèves, (langage élémentaire, points, droites, plans d'une part et langage vectoriel d'autre part, droite, le point d'intersection de deux ou trois droites, la co-linéarité.)

H_3: Du fait du programme actuel, les élèves ne connaissent du calcul vectoriel que les définitions

Pour falsifier les hypothèses précédentes nous avons préparé une expérimentation: donner aux élèves une situation *de type* a-didactique utilisant les seules connaissances du lycée.

Cette situation nous permet de proposer l'hypothèse suivante:

H_4: Si on change un répertoire sémantique, les élèves argumentent de même façon, si les données sont fournies dans le langage vectoriel et les questions en termes des droites – les élèves ne seront pas capables de relier les deux.

4. Formulation du problème

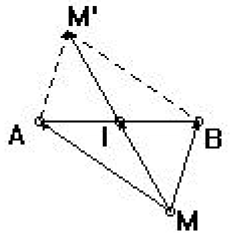
On cosidère deux points A et B et deux réels a et b. On souhaite construire (ou chercher une construction le plus simple possible) des

$$\overrightarrow{MM'} = a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} ;$$

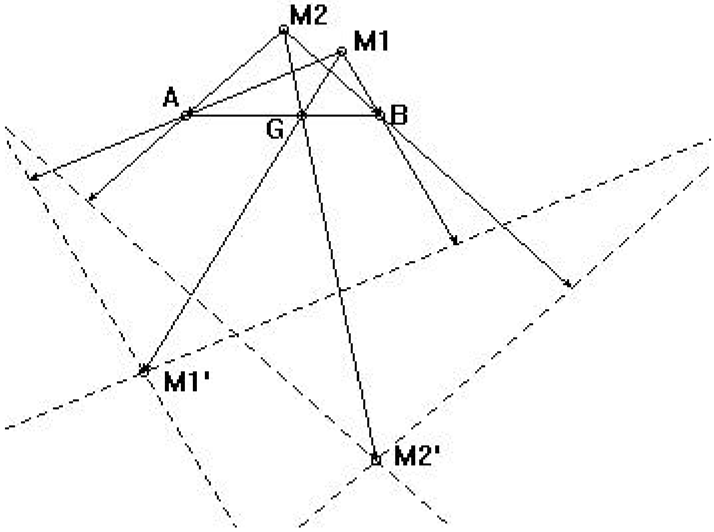
vecteurs du type:

M étant un point quelconque.

a) Etude du cas $a = 1$ et $b = 1$:



$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MI}$ ou I est le milieu du segment AB



Il semble que les droites (AB), (M_1M_1') et (M_2M_2') se coupent en un même point G : On va vérifier si ce point G existe-t-il vraiment.
De l'expression donnée:

$$\overrightarrow{M_i M_i'} = 2.\overrightarrow{M_i A} + 3.\overrightarrow{M_i B}$$

en utilisant la relation de Chasles on a:

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 2(\overrightarrow{M_iG} + \overrightarrow{GA}) + 3.(\overrightarrow{M_iG} + \overrightarrow{GB})$$

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 5.\overrightarrow{M_iG} + 2.\overrightarrow{M_iA} + 3.\overrightarrow{GB}$$

La construction du point M_i' serait simplifiée si G vérifié:

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

cette égalité équivaut à:

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

ou encore

$$5.\overrightarrow{AG} = 3.\overrightarrow{AB}$$

ou encore

$$\vec{AG} = \frac{3}{5}.\vec{AB}$$

A l'inverse, soit G le point tel que

$$\vec{AG} = \frac{3}{5}.\vec{AB},$$

ce qui équivaut à

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB} = \vec{0} .$$

On a pour tout M_i (ou tout vecteur $\overrightarrow{M_iM_i'}$)

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 5.\overrightarrow{M_iG}$$

(la construction est évidement très simple, 2+3=5).

Plus généralement, étant données deux points A et B et deux réels a et b, pour tout point M du plan, on a:

$$\overrightarrow{MM'} = a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} = a.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$$

qui s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = (a+b).\overrightarrow{MG} + a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} \;;$$

Cherchons une position du point G qui peut simplifier la construction du vecteur $\overrightarrow{M_iM_i'}$.

L'égalité

$$a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

équivaut successivement à (même si G est un point quelconque):

$$(a+b).\overrightarrow{GA}+b.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\vec{AG}=\frac{b}{a+b}.\vec{AB}$$

(avec la condition $a+b\neq 0$)

qui définit la position du point G: la construction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ on pourra réaliser à l'aide du point G d'une manière très simple:

$$\overrightarrow{MM'}=(a+b).\overrightarrow{MG}$$

pour n'importe quel point du plan.

5. Analyse du texte de l'exercice

Les questions initiales (du côté d'un enseignant)

1. Est-que les élèves (E) sont capables d'observer que les droites (M_iM_i'), déterminées par un couple de réels (2,3), sont concourantes <u>sur un point fixe</u> de (AB), déterminé par ce couple?
2. Les E, sont-ils capables de généraliser?
3. Les E, sont-ils capables de justifier l'existence d'un point (avec des autres couples de réels, avec des lettres) commun à ces droites?

Le text de l'exercice 1 (la formulation initiale)

Étant donné deux points A et B du plan (tels que AB = 8cm), un couple (2,3) de réels, M_1, M_2, M_3, . . . les points d'un même plan. Construire les points M_1', M_2', M_3', . . . respectivement associés à M_1, M_2, M_3, . . . par la relation

$$\overrightarrow{M_iM_i'}=2.\overrightarrow{M_iA}+3.\overrightarrow{M_iB}$$

Qu'observez-vous? Expliquez.

Les questions possibles (du côté d'un élève):

Q_1: M_i et M_i' ne sont pas dans le même demi-plan (déterminé par la droite (AB))?

Q_2: Si $M_iM_j = M_jM_k$, est-ce que $M_i'M_j' = M_j'M_k'$?

Q_3: Si M_i, M_j, M_k sont alignés, M_i', M_j', M_k' sont-ils alignés aussi?

Q_4: Si $M_iM_j < M_jM_k$, est-ce que $M_i'M_j' < M_j'M_k'$ ou $M_i'M_j' > M_j'M_k'$?

Q_5: Si $(M_iM_j) \parallel (M_jM_k)$, est-ce que $(M_i'M_j') \parallel (M_j'M_k')$?

Q_6: Si $(M_iM_j) \parallel (AB)$, est-ce que $(M_i'M_j') \parallel (AB)$?

Q_7: Si $(M_iM_j) \perp (AB)$, est-ce que $(M_i'M_j') \perp (AB)$?

Plusieurs de ces questions sont hors de but visé. Pour ça on a fait une correction du text de l'exercice (pour exclure les questions non souhaitables).

Par suite on a posé la formulation suivante, plus proche (à notre avis) à l'objectif attendu:
Exercice:

Étant donné deux points A et B du plan (tels que AB = 8cm), un couple (2,3) de réels, M_1, M_2, M_3, . . . les points d'un même plan. Construire les points M_1', M_2', M_3', . . . respectivement associés à M_1, M_2, M_3, . . . par la relation

$$\overrightarrow{M_i M_i'} = 2.\overrightarrow{M_{iB} A} + 3.\overrightarrow{M_i}$$

Observez la relation entre la droite (AB) et les droites déterminées par un point M_i et son image M_i'. Qu'observez-vous? Expliquez.

Puis nous avons analysé cette formulation du côté de la théorie des situations didactiques (adidactique) en posant les questions suivantes:

- Quelles sont les connaissances nécessaires?
- Qu'est-ce que c'est un savoir qui est l'objet du jeu?

De ce côté, la formulation précédente, elle semble toujours trop large. Après la correction on a accepté la formulation suivante:

Formulation finale

Étant donné deux points A et B du plan (tels que AB = 8cm), un couple (2,3) de réels, M_1, M_2, M_3, . . . les points d'un même plan. Construire les points M_1', M_2', M_3', . . . respectivement associés à M_1, M_2, M_3, . . . par la relation

$$\overrightarrow{M_i M_i'} = 2.\overrightarrow{M_i A} + 3.\overrightarrow{M_i B}$$

Construire un **représentant** de $\overrightarrow{M_i M_i'}$ associé à chacun des vecteurs $\overrightarrow{M_i M_i'}$ au moins pour les 3 points. Les droites (AB) et (M_iM_i') ont-elles une propriété commune? Si oui, justifiez -la.

6. Milieux des situations adidactiques

Le texte final de l'exercice nous amène de définir les composantes suivantes:

Etat terminal gagnant: propriété commune
Répertoire de l'élève (milieu de base ou milieu matériel)
Côté matériel: - la règle
- les dessins

Côté cognitif:

A. *(sur les connaissances géométriques concernant les droites):*
plusieurs droites peuvent: - être parallèles
- être concourantes
- être perpendiculaires
- être confondues
- avoir un angle α avec (AB)
- se couper en un seul point de (AB)
- se couper "assez près" de (AB)
etc.

B. *sur les connaissances des vecteurs:*
- un représentant du vecteur
- la multiplication d'un vecteur par un réel
- L'addition de deux vecteurs
- le théorème de Chasles
- la décomposition d'un vecteur

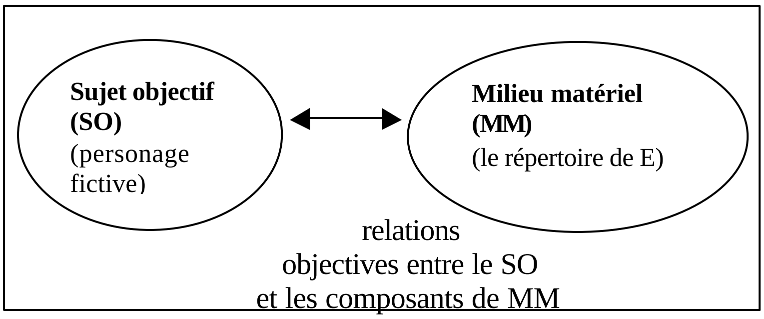
C. *sur les connaissances générales*: - l'utilisation des indices par exemple.

Côté social: relations entre des élèves

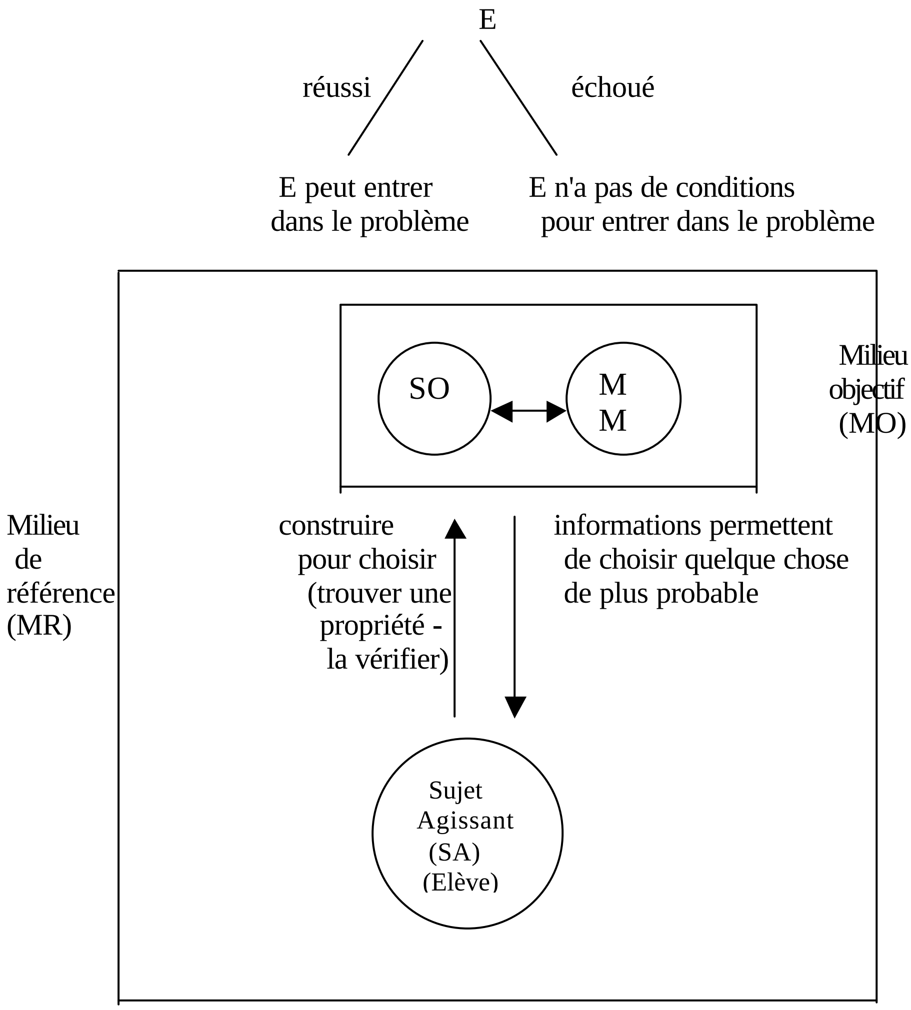
Question: Faire une figure, choisir 3 points au moins M_1, M_2, M_3. Construire les trois points associés M_1', M_2', M_3'.

A travers cette question on vérifie que E peut se mettre en une position de sujet objectif.

Milieu objectif



C'est une condition nécessaire pour entrer dans le problème



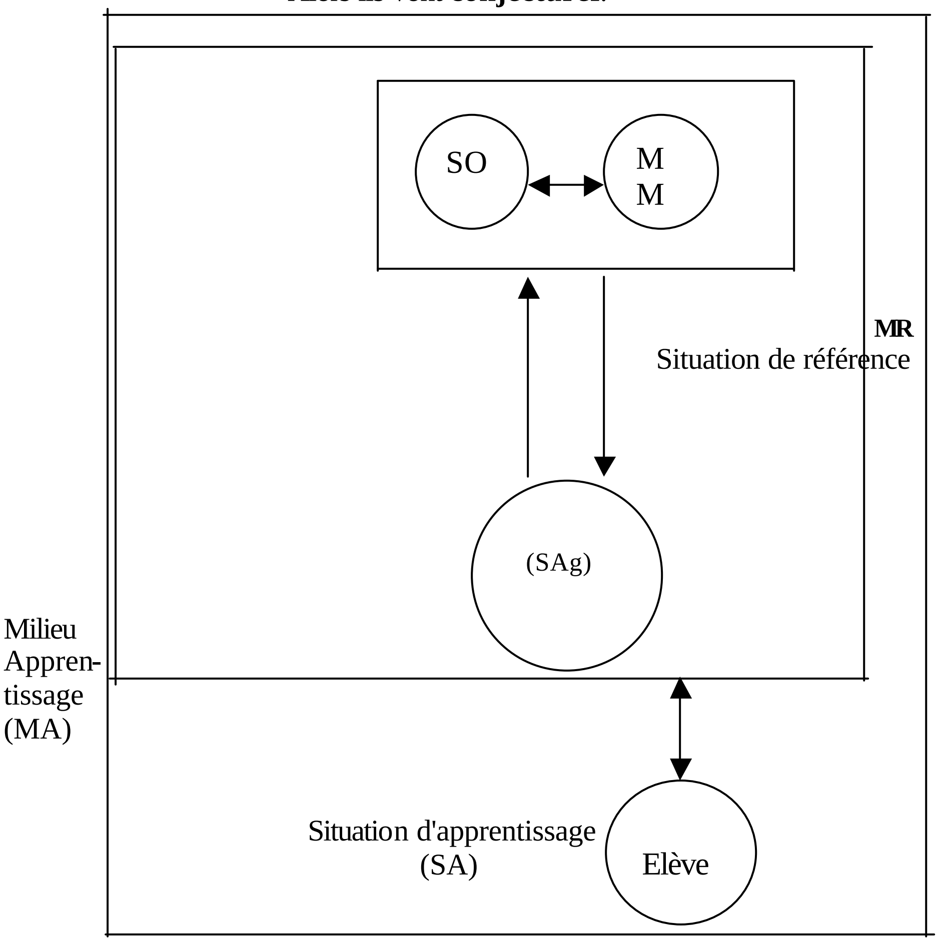
Les informations réelles et maximales que un élève peut tirer de la construction:
Si "les droites" sont comprises comme des tracés, l'interprétation suivante est possible:

Toutes les droites (M_iM_i') passent par une zone très étroit contenant une petite partie de (AB).

Si "les droites" sont comprise comme des objets théoriques dont on se donne une idée

d'un point unique avec les tracés.

Alors ils vont **conjecturer**.



Conclusion 1 (H_1): Les droites se coupent en un point G (tous les droites (M_iM_i') et (AB) passent par G), alors tous les triples des points M_i, M_i' et G sont alignés.
D'où :

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = k.\overrightarrow{M_iG}$$

(car les vecteurs $\overrightarrow{M_iM_i'}$ et $\overrightarrow{M_iG}$ sont colinéaires - la **connaissance C_1**)
mais

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = \overrightarrow{M_iG} + \overrightarrow{GM_i}$$

et

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 2.\overrightarrow{M_iA} + 3.\overrightarrow{M_iB} = 5.\overrightarrow{M_iG} + 2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB}$$

d'où

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 5.\overrightarrow{M_iG}$$

s'il existe un point G tel que - **connaissance C_2**

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

c'est à dire, tel que

$$2.\dot{AG} = \frac{3}{5}.\dot{AB}$$

Il peut arriver que le point M appartienne à la droite (AB), puis il faut vérifier si le résultat précédent est valable - **connaissance 3**

Conclusion 2 (H_2): Les droites se coupent en G

- calculer les coordonnées de l'intersection de (AB) avec les droites (M_iM_i')
- calculer les coordonnées de l'intersection de (M_iM_i') avec (M_kM_k')
- montrer qu'on obtient le même point

Interprétation des résultats

I_1: Si l'élève n'est pas C_1 disponible, il ne décompose pas $\overrightarrow{M_iM_i'}$ en introduisant $\overrightarrow{M_iG}$, alors

- il pourrait I_2
- il ne pourrait pas

I_2: S'il décompose, il fait l'hypothèse qu'ils ont C_1
I_{21}: s'il réussit C_2

I_{22}: s'il bloque C_2 - il manque C_2 ou C_3
- il fut des erreurs de calcul et ne s'en rende pas compte
- c'est trop complexe

I_3: Une conclusion correcte avec la preuve

6. Analyse a priori

Avant de faire une expérimentation, nous avons réalisé une analyse a priori. Pour ça, nous avons comparé les modes d'introduction du barycentre et les propriétés du calcul vectoriel des plusieurs de livres scolaires franc ais et slovaques.

Puis, nous avons choisi la formulation suivante du problème visé à une expérimentation:

Problème:
Etant donné deux points A et B du plan, tels que AB = 8 cm, un couple (2 ;3) de réels, $M_1, M_2, M_3, \ldots$ des points d'un même plan. Construire les points $M_1', M_2', M_3', \ldots$ respectivement associés à $M_1, M_2, M_3, \ldots$ par la relation:

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 2.\overrightarrow{M_iA} + 3.\overrightarrow{M_iB}$$
$$\overrightarrow{M_1M_1'} = 2.\overrightarrow{M_1A} + 3.\overrightarrow{M_1B}$$
$$\overrightarrow{M_2M_2'} = 2.\overrightarrow{M_2A} + 3.\overrightarrow{M_2B}$$
$$\vdots$$

Construire un **représentant** de $\overrightarrow{M_iM_i'}$ associé à chacun des vecteurs $\overrightarrow{M_iM_i'}$ au moins pour les 3 points. Les droites (AB) et (M_iM_i') ont-elles une propriété commune? Si oui, justifiez -la.
Réalisez la même construction pour le couple (1,5), puis pour les couples (2,5), (3,3), … (choisissez les autres couples) :
Les conclusions obtenues généralisez pour le couple (a,b) de réels a et b.

Les stratégies gagnantes
Les stratégies gagnantes que nous avons attendu sont les suivantes:

I. Stratégie vectorielle
En partant de la figure (1ère , 2e , 3e , . . .) qui on a construit suivant le texte du problème

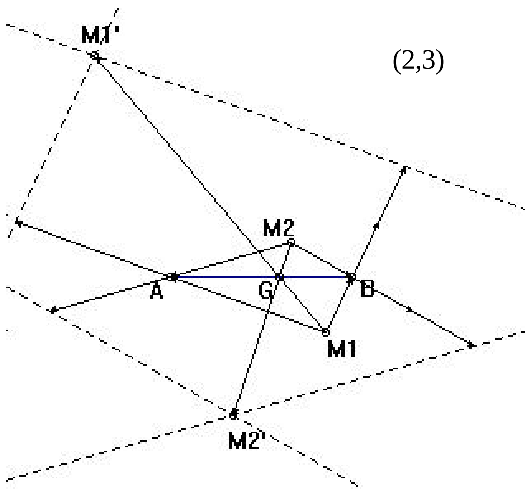


Fig. 1

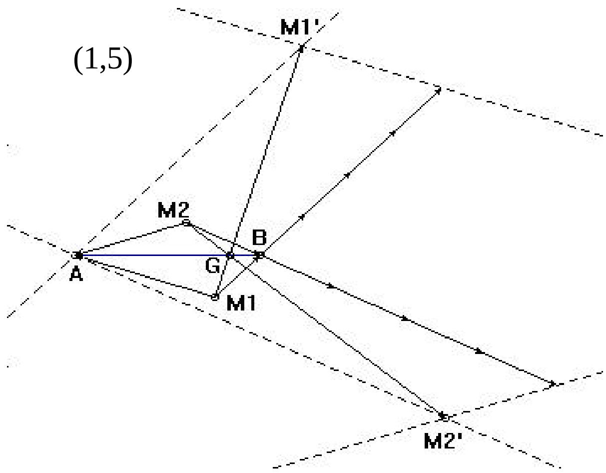


Fig. 2

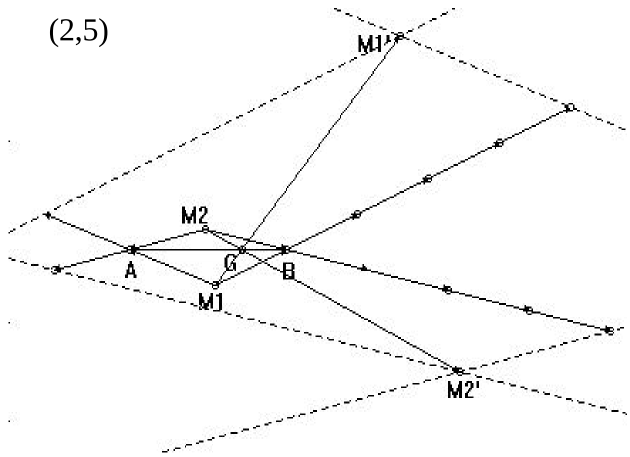


Fig. 3

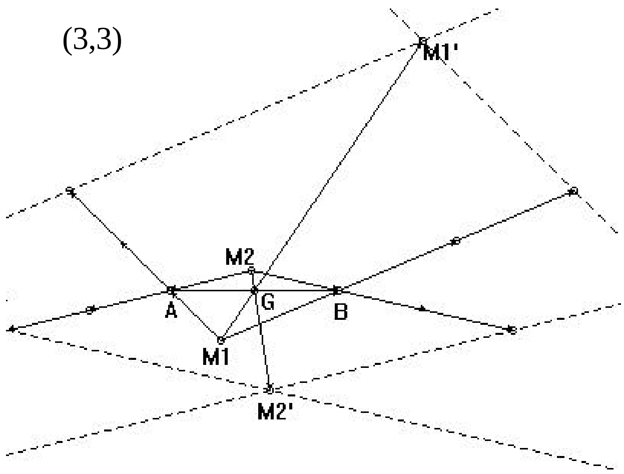


Fig. 4

La construction des vecteurs $\overrightarrow{M_i M_i'}$ sera realisé à l'aide de la règle de parallèlogramme, dans le cas du couple (2,3).

Les élèves observent que les droites $(M_1M_1'), (M_2, M_2'), \ldots$ se coupent dans un même point *G* appartenant à la droite (*A*,*B*).

Conclusion: les droites $(M_1M_1'), (M_2, M_2'), \ldots$ **,** (*A*,*B*) se coupent dans le point *G*.

Après les vérification avec les autres couples de réels, l'élève peut commencer à réflechir d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{M_iM_i'}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{M_iG}$ - la construction semble plus facile que la construction avec la règle de parallélogramme. Pou cela l'élève a besoin de préciser la position du point G. En utilisant la relation de Chasles il peut continuer de la manière suivante:

$$\overrightarrow{MM'} = 2.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MM'} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$$
$$\overrightarrow{MM'} = 5.\overrightarrow{MG} + 2.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{GB}$$

La construction du point M' serait simplifiée si G vérifie:

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ce qui équivaut à:

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

ou encore

$$5.\overrightarrow{AG} = 3.\overrightarrow{AB}$$

ou encore

$$\dot{AG} = \frac{3}{5}.\dot{AB}$$

Ainsi, soit G le point tel que

$$\dot{AG} = \frac{3}{5}.\dot{AB},$$

ce qui équivaut à

$$2.\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB} = \vec{0}\ .$$

On a pour tout point M (ou tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$)

$$\overrightarrow{MM'} = 5.\overrightarrow{MG}$$

(la construction est évidement très simple, 2+3=5).

Les élèves travaillent d'abord avec les couples de réels positifs (entiers), puis avec les réels négatifs, ils observent que le point G n'appartient pas toujours au segment AB; mais il est toujours sur la **droite** AB.
La dernière phase du travaille de l'élève est la phase de l'abstraction, avec des réels a et b. Nous avons présupposé le calcul suivant:

$$\overrightarrow{MM'} = a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} = a.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b.(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$$

qui s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = (a+b).\overrightarrow{MG} + a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} \ ;$$

Cherchons une position du point G qui peut simplifier la construction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

L'égalité

$$a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

équivaut successivement à (même G est un point quelconque):

$$(a+b).\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{b}{a+b}.\vec{AB}$$

(avec la condition $a+b \neq 0$)

qui définit la position du point G: la construction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ on pourra réaliser à l'aide du point G d'une manière très simple:

$$\overrightarrow{MM'} = (a+b).\overrightarrow{MG}$$

pour le point n'importe quel du plan.

II. Stratégie analytique

L'élève va utiliser le calcul analytique en choisissant un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$:

Dans le repère choisi nous avons les coordonnés: A(0,0), B(8,0), M(6 ;-4),
Puis on a:

$\overrightarrow{M_1A}(-6,4)$, $2.\overrightarrow{M_1A}(-12,8)$

$\overrightarrow{M_1B}(2,4)$, $3.\overrightarrow{M_1B}(6,12)$

$\overrightarrow{M_1M_1'}(-6,20)$

$\overrightarrow{M_2A}(0,1)$, $2.\overrightarrow{M_2A}(0,2)$

$\overrightarrow{M_2B}(8,1)$, $3.\overrightarrow{M_2B}(24,3)$

$\overrightarrow{M_2M_2'}(24,5)$

L'expression paramétrique des droites (M_1M_1') et (M_2M_2') :

(M_1M_1'): $x = 6 - 6t$
$\qquad y = -4 + 20t$

(M_2M_2'): $x = 0 + 24t$
$\qquad y = -1 + 5t$

d'où on a les équations cartésiennes

(M_1M_1'): $10x - 3y - 48 = 0$ (M_2M_2'): $5x - 24 - 24 = 0$
(AB) : $y = 0$ (AB) : $y = 0$

Le point d'intersection de ces deux droites est donc le point $G\left(\frac{24}{5}, 0\right)$ (voir fig.5).

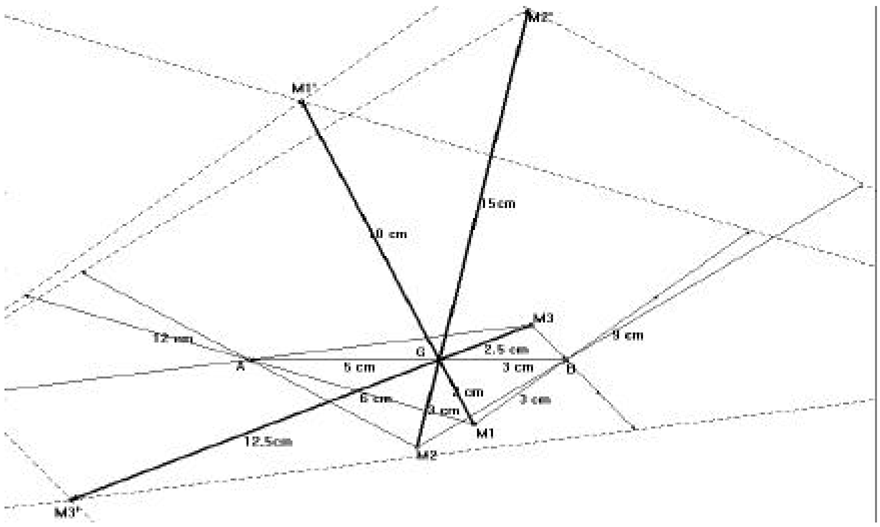
Le calcul général, pour les réels *a* et *b*, est assez long, ce n'est pas facile pour un élève sans erreurs. Nous n'avons pas attendu de conclusions générales.

III. Stratégie géométrique

Dans ce cas nous supposons que lélève n'utilise que l'observation d'une figure construit très précisément (voir fig. 6).

A l'aide de la règle on a:

Fig . 5



$M_1G = 2cm, \quad M_1M_1' = 10cm,$
$M_2G = 3cm, \quad M_1M_1' = 15cm,$
$M_3G = 2{,}5cm, \; M_3M_3 \; = 12{,}5cm$

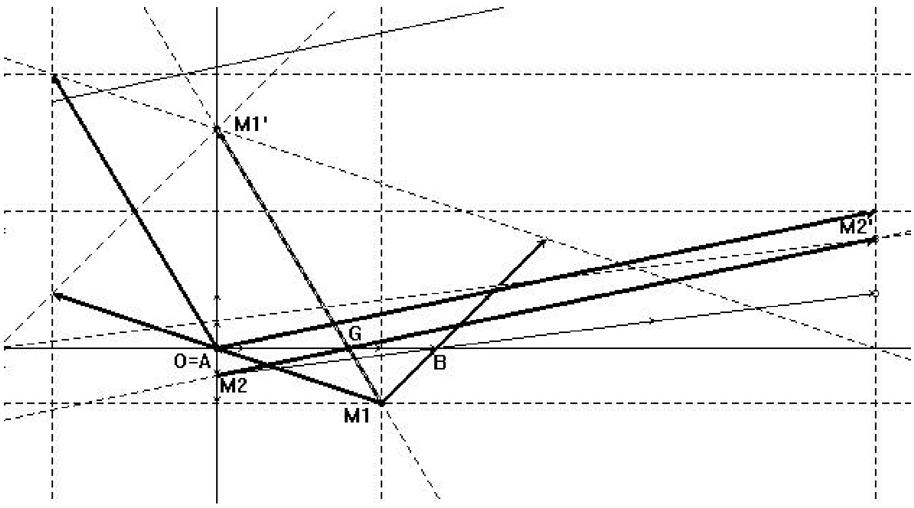


Fig. 6

On peut conclure que dans tous les cas pour les distances:

$$M_iM_i' = 5.M_iG$$

et donc pour les vecteurs

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = 5.\overrightarrow{M_iG}$$

d’où une construction plus simple que la construction de la règle de parallélogramme.

Conclusions

La vérification expérimentale des hypothèses formulées au debout de cet article ont été réalisés au courant de l'année 2000 aux plusieurs écoles secondaires; le nombre total des élèves qui ont participé à cette expérimentation est égal à 131. Le texte final du problème expliqué au-dessus a été divisé dans plusieurs de parties: le questionnaire complet est ajouté (***Annexe 1***).

Ensuite on a défini les variables didactiques pour pouvoir réaliser une analyse et des résultats statistiques, le logicielle CHIC étant copris:

Les variables

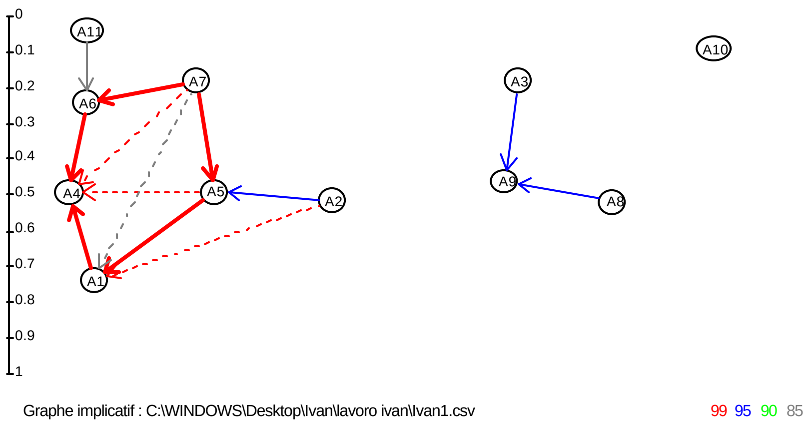
A1	Construction $\vec{M_i M_i'}$
A2	Construction (seulement) $2\vec{M_1 A} + 3\vec{M_1 B}$
A3	Seulement un représentent de $\overrightarrow{M_1 M_1'}$ construit
A4	Conclusion présente
A5	Conclusion correcte
A6	Jusification présente
A7	Justification correcte
A8	Construction droite $M_i M_i'$ (traité prolongé)
A9	Méthode vectoriele (tracé)
A10	Méthode analytique
A11	Méthode analytique avec conclusion

Des résultats obtenus permettent de constater la vérité de nos hypothèses; en ce qui concerne de l´hypothèse H1, ils sont les variables A1 et A7 que la confirment assez visiblement, dans le cas de l´hypothèse H2 et l´hypothèse H4, les variables A1 et A9 comme les variables A 10 et A 11 permettent d´obtenir les résultats positifs; le nombre des constructions correctes (73%) plus confirme que réfute l´hypothèse H3.

	Moyenne	Ecart type
A1	0.74	0.44
A2	0.49	0.50
A3	0.12	0.33
A4	0.80	0.40
A5	0.69	0.46
A6	0.37	0.48
A7	0.18	0.39
A8	0.20	0.40
A9	0.47	0.50
A10	0.09	0.29
A11	0.02	0.15

Analyse implicative

Le graphe implicative :



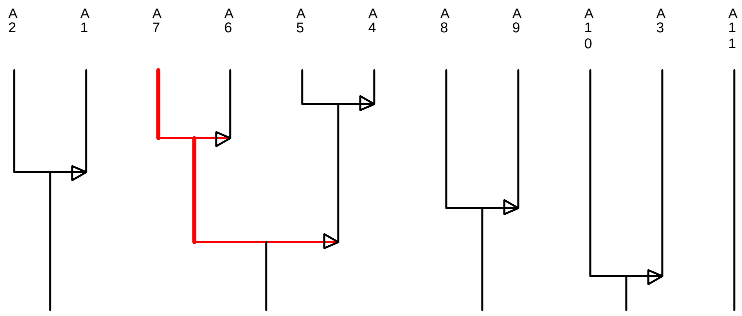
nous donnent les suivants informations:

- une relation transitive très forte (au 99% d'intensité) les variables

A7 ® A5 ® A1 ® A4 L'existence de la justification correcte implique l'existence d'une conclusion correcte, une conclusion correcte implique l'existence de la construction (générale) du vecteur, $\overrightarrow{M_i M_i'}$ qui implique l'existence d'une conclusion présente. Donc argumenter c'est très important pour le processus de changement de registre sémiotique.

- Dans le deuxième graphe on voit les deux variables A8 et A3 qui impliquent A9. Les méthodes de construction portent à la méthode vectorielle.

Le graphe hiérarchique



Arbre hiérarchique : C:\WINDOWS\Desktop\Ivan\lavoro ivan\Ivan1.csv

donnent des autres informations :

- (**A7, A6**) implique (**A5, A4**), c'est à dire que s'il y a des justifications alors il y a des conclusions;
- **A8** implique **A9**, montre un lien entre la construction de la droite $M_iM_i´$ (traité prolongé) et la methode vectorielle.

Une conclusion générale est lie à l'hypothèse 1 c'est à dire la connaissance des propriétés du calcul vectoriel ne sont que des connaissances formelles. On a confirme cette proposition.
Le résultat plus important dans le point de vue expérimental est la relation entre argumentation et changement du registre linguistique.
Il y a encore beaucoup de travail a faire surtout sur ça dernier proposition.
Mais il y a encore des autres problemes ouvertes bien liee aux résultats obtenus nous motivent à poser les problèmes suivants:

- est-ce que l´utilisation du logiciel CabriGéomètre peut faciliter de comprendre le calcul vectoriel?
- est-ce que à ce niveau de la scolarité sont capables d´utiliser le calcul vectoriel dans la physique et dans la statistique: la liaison du barycentre, du centre de l´inertie, la moyenne?

Bibliographie

1. Berthelot R., Salin M.-E, Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie, in Différents types de savoirs et leur articulation, La pensée Sauvage Publ, 1995 p. 187-204
2. Brousseau G., Fondaments et méthodes de la didactique des mathématques, Recherches en didacique des mathématiques, Paris, 1986
3. Kupková E., Konceptuálne a procesuálne uchopovanie matematickej úlohy, in Zborník príspevkov na seminári a teórie vyuèovania matematiky, ISBN 80-223-1355-6, Bratislava, 1998
4. Kupková E., Analýza problému v teórii didaktických situácií, in Zborník príspevkov na seminári a teórie vyuèovania matematiky, ISBN 80-223-1435-8, Bratislava, 2000
5. Margolinas C., Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l´analyse de situations d´enseignement, in Actes de l´Université d´été, IREM Clermont-Ferrand, 1998
6. Perrin-Glorian M.-J., Analyse d´un problème de fonction en terme de milieu. Structuration du milieu pour l´élève et pour le maître, in Actes de l´Université d´été, IREM Clermont-Ferrand, 1998
7. Spagnolo F., L'analisi a-priori e l'indice di implicazione statistica di Gras, Quaderni di Ricerca in Didattica GRIM, n.7, Palermo, 1997.
8. Spagnolo F., Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede, Quaderni GRIM di Palermo per la diffusione in Italia (Supplemento al n.5, 1995).
9. Spagnolo F., Insegnare le matematiche nella scuola secondaria (Manuale di Didattica delle Matematiche per la formazione post-universitaria), La Nuova Italia Editrice, 1998.
10. Spagnolo F., La ricerca in didattica, Sito internet della Treccani, ITER, Dialogare, 1999. (http://www.treccani.it/site/iniziative/scuola/documenti/Spagnolo.pdf)
11. Spagnolo F., La recherche en Didactique des mathématiques: un paradigme de référence, Zbornik, Bratislavskeho seminara z teorie vyucovania matematiky, Bratislava, 1999.
12. Trenèanský I., Repáš P.: Barycentrum ako prostriedok na riešenie niektorých planimetrických úloh, in Obzory matematiky,fyziky a informatiky, No. 53/1998, Bratislava
13. Trenèanský I., Repáš P.: Barycentrum ako prostriedok na riešenie niektorých stereometrických úloh, in Obzory matematiky, fyziky a informatiky, No. 53/1998, Bratislava

14. Trenèanský I., Repáš P.: Barycentrum ako prostriedok na riešenie niektorých stereometrických úloh, in Obzory matematiky, fyziky a informatiky, No. 53/1998, Bratislava
15. Trenèanský I., Hladiny didaktických prostredí a kognitívne funkcie, in Zborník príspevkov na seminári a teórie vyuèovania matematiky, ISBN 80-223-1355-6, Bratislava, 1998
16. R. Gras, Les fondements de l'analyse statistique implicative, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.9, Palermo.

Franch Language

Annexe 1

Exercice 1.
Soit deux points A, B tels que AB = 8 cm, le couple des réels (2;3) et deux points M_1 et M_2.
Construisez les points M_1' et M_2' tels que:

$$\overrightarrow{M_1M_1'} = 2.\overrightarrow{M_1A} + 3.\overrightarrow{M_1B} \ ; \quad \overrightarrow{M_2M_2'} = 2.\overrightarrow{M_2A} + 3.\overrightarrow{M_2B}$$

Est-ce que les droites (AB), (M_1M_1') et (M_2M_2') ont-elles une propriété commune? Si oui, justifiez-la.

Exercice 2.
Est-ce qu´on peut trouver un poit M_3 tel que les droites
(AB), (M_1M_1') et (M_2M_2')
n´ont pas de propriété précedents? Donnez une explication.

Exercice 3.
Croyez-vous que votre professeur sera content avec votre explication? Si non, pourquoi?

Exercice 4.
Comme exercice 1, mais le couple (2;3) est remplacé par un autre couple (à votre choix).

Exercice 5.
Comme exercice 1, mais le couple (2;3) est remplacé par (-5;7).

Exercice 6.
Comme exercice 1, mais le couple (2;3) est remplacé par (-3;3).

Exercice 7.
Les propriétés obtenues généralisez pour le couple (a;b), a , b – réels.

Slovaque Language

Annexe 1

Úloha è. 1

Dané sú dva body A, B také, že $|AB|$ = 8 cm, dvojica èísel (2;3) a dva body M_1 a M_2. Zostrojte body M_1' a M_2' tak, aby:

$$\overrightarrow{M_1M_1'} = 2.\overrightarrow{M_1A} + 3.\overrightarrow{M_1B} \ ; \quad \overrightarrow{M_2M_2'} = 2.\overrightarrow{M_2A} + 3.\overrightarrow{M_2B}$$

Majú priamka AB, priamka M_1M_1' a priamka M_2M_2' nejakú spoloènú vlastnost'? Akú?

Úloha è. 2.

Možno nájst' bod taký, že priamky

$$\overrightarrow{M_3M_3'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{M_1M_1'}$$

nemajú vlastnost' zistenú v predchádzajúcom príklade? Vysvetlite vašu odpoved', (Bod M_3' je zostrojený ako body M_1' a M_2' v úlohe.è.1).

Úloba è. 3.

Myslíte si, že s vašim vysvetlením bude váš uèitel' matematiky spokojný? Ak nie, preèo?

Úloha è. 4.

Ako úloha è. l, avšak dvojicou èísel (2;3) nahrad'te inou dvojicou reálnych èísel (podl'a vlastného výberu).

Úloha è. 5.

Ako úloha è.l, ale použite dvojicu èísel (-5;7).

Úloha è. 6.

Ako úloha è.l, ale použite dvojicu èísel (-3;3).

Úloha è. 7.

Najdené vlastnosti sa pokúste zovšeobecnit' pre dvojicu reálnych èísel (a;b).