"Aspetti Epistemologici delle Geometrie del Novecento"
Conferenza tenuta da T.Marino il 18/2/99

L'intento di questa conferenza è quella di illustrare le diverse problematiche di carattere generale connesse con le Geometrie non Euclidee, privilegiando un percorso che ha come obiettivo quello di giungere alla definizione di Modello e nel contempo di cercare di fornire i primi rudimenti della metodologia della ricerca storico-filosofica ed epistemologica, eventualmente esportabile anche in altre discipline.

Si ritiene utile premettere un quadro d'insieme che dà una panoramica dei vari contesti che possono portare ad un coinvolgimento delle Geometrie non-Euclidee.

Diversi, infatti, sono gli approcci e gli sviluppi che si possono privilegiare, anche perché sono convinta che nell'insegnamento si è a metà del cammino programmato se si riesce a coinvolgere anche *emozionalmente* gli allievi.

In questa conferenza mi limito a mettere in evidenza l'evolversi della Matematica relativamente alla tematica dei postulati in Aristotele, in Euclide fino ad oggi (Hilbert).

Per far ciò, percorrerò le tappe essenziali della cosiddetta *storia delle parallele*, richiamando i vari protagonisti e le loro diverse posizioni. Nell'esposizione mi sono prefissa di non dare risposte definitive, ma di presentare problematiche possibilmente intriganti su questioni che potrebbero apparire erroneamente *consolidate*.

Infine sono riportate alcune appendici per approfondimenti o per sintesi di specifiche tematiche trattate

SCALETTE	Libri guida per me:	Parole chiavi
MODELLIZZAZIONE	TRUDEAU La rivoluzione non euclidea, Boringhieri1991; AGAZZI-PALLADINO Le G.n.E. e i fondamenti della geometria, Mondadori1978	Differenze tra metodo ipotetico deduttivo classico e quello moderno Euclide - Hilbert
CRISI DEI FONDAMENTI Con l'idea nascosta ma non troppo di dare agli allievi i primi rudimenti della ricerca epistemologica	BORGA-PALLADINO Oltre il mito della crisi, Fondamenti e filosofia della Mat. nel XX secolo, La Scuola, 1997; KLINE Mat.: La perdita della certezza Mondatori 1985	Analisi del concetto di spazio, di "grandezza". Assiomatizzazione della Geometria e dell'Aritmetica Evoluzione dell'idea di Mat. Dai greci ad oggi
FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA Con l'idea nascosta ma non troppo di dare agli allievi i primi rudimenti della ricerca storica-filosofica.	TOTH Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria, Vita e pensiero1997	Assiomi -Postulati, Verità-Dimostrazione, Che significa leggere un testo Una lettura filosofica con una applicazione "concreta" al mondo delle "Geometrie" Il problema della conoscenze storica
Perché introdurre le G.n.E. nelle Scuole M.S:? e come introdurle? .	diversi articoli di F:Speranza	Interdisciplinarietà-Fisica-Filosofia-Arte, la trattazione disciplinare specifica delle G.n.E. può procedere quella degli argomenti "paralleli" del corso di Filosofia e per Speranza è un vantaggio perché in tal modo gli allievi affrontano problemi "concreti" prima dell'inquadramento filosofico, il che è metodologicamente e pedagogicamente preferibile
L'insegnamento della Geometria: Alcuni problemi aperti di Ricerca in Didattica Classificazione delle geometrie oggi. (Klein)	Piaget-Garcia,Psicogenesi e storia delle scienze,Garzanti1985	Scoprire se i meccanismi di passaggio da un periodo storico al seguente, per esempio nel contesto di un particolare sistema di nozioni di geometria, sono analoghi a quelli del passaggio da uno stadio genetico ai successivi. Concettualizzazione- Rapporto dialettico tra figure geometriche e concetti- Ipotesi Intra-Trans-Figurale.
Proposta didattica Storia del V postulato, tentativi di dimostrazione, tentativi di sostituzione	le lezioni di Storia delle Matematiche del Prof.Nastasi Il passato spiega il presente, le G.n.E. rendono comprensibili alcuni concetti della Geometria Euclidea.	Teoremi di G.n.E non validi in G:I non richiedono approfondimenti lunghi e complessi e si riesce inoltre a sviluppare anche l'attività critica e di ragionamento degli allievi.
Geometria Assoluta	(BOLYAI)	Affascinanti i risultati che si possono ottenere con i soli primi 4 postulati di Euclide
Geometria Iperbolica	L.Lombardo Radice, Nuovi principi della geometria Einaudi 1955	La geometria di Lobacevskij
Le rivoluzioni scientifiche, i paradigmi. .	Barrow, Perché il mondo è matematico? Editori Laterza, 1992. Barrow, La luna nel pozzo cosmico, Adelphi, 1994	La storia collega i vari momenti dello sviluppo del pensiero La Geometria da: conoscenza garantita del mondo a scienza astratta
Ostacoli epistemologici	Lavori di F. Speranza e di G. Brousseau	Ingegnerie didattiche

L'esperienza didattica mi ha insegnato come sia vantaggioso far percorrere alla mente degli allievi, per quanto sia possibile, le stesse tappe attraverso a cui è passata la scienza nel suo sviluppo.
(G. Castelnuovo - Prefazione alla II ed. delle *Lezioni di Geometria Analitica*, 1909) [1].

Alcune domande, apparentemente, banali:

Ogni tri-latero è anche tri-angolo?
Vi sono triangoli di qualunque grandezza?
Tutti gli angoli del quadrato sono retti?
Parallelismo è sinonimo di non incidenza?

Tutte queste domande non furono considerate delle *ovvietà* dai contemporanei di Aristotele né da quelli di Euclide, anzi furono tutte considerate dei *Teoremi* da dimostrare.

Noi oggi siamo in grado di *intuire la loro sensibilità* per queste questioni, che in apparenza sembrano delle ovvietà tali da non necessitare di dimostrazioni, grazie proprio alla "*nascita*" delle G.n.E.[2] e possiamo fare, come dice Hilbert, *meta-geometria* dandoci cioè una *cosciente metodologia* per accettare l'apparato degli *Elementi* di Euclide; pertanto oggi noi possiamo anche interpretare alcuni passi di Aristotele e di Euclide in modo diverso dagli studiosi che ci hanno preceduto.

Si era *certi* che Euclide avesse recepito ed accettato il pensiero di Aristotele[3]; oggi s'ipotizza (nel senso che crediamo possibile) che Euclide nel dire "Si chiede di accettare che …" potesse pensare che i postulati avessero il valore di semplici ipotesi.

L'ermeneutica dell'assiomatica moderna è la chiave per la decodificazione dei suoi esordi, in altre parole è *l'interpretazione* della geometria non-euclidea che si richiede per *l'interpretazione del passato geometrico***.**

La moderna acquisizione della problematica della geometria non-euclidea illumina con luce diversa alcuni frammenti rimasti di Aristotele.

Certo non dobbiamo attribuire ai geometri greci *né le premesse delle loro conseguenze, né le conseguenze delle loro premesse***,** non si può retroproiettare il presente nel passato, *tuttavia il passato che è presente solo come testo*, nasconde premesse e conseguenze che possono non essere *esplicitamente* riconosciute, né *volute* dai loro autori.

---

[1] Citata in [12] pag.7
[2] G.n.E. sta per Geometrie non Euclidee.
[3] In [7] pag.12, si ipotizza dubbia dal punto di vista storico la tesi che gli *Element*i di Euclide costituiscano un modello della metodologia aristotelica, preferendo considerare l'assiomatizzazione euclidea come un fatto interno alla matematica.

Ciò che essi effettivamente crearono nel passato *non era ancora conosciuto* o riconosciuto come parte significativa, ma oggi noi possiamo scegliere e *decidere* la sua *posizione* nel presente di *ora.*

Oggi con l'interpretazione dell'odierna G.n.E interpretiamo il passato geometrico.

È ovvio che si corre il rischio di falsificare il passato; oggi noi *facciamo il testo*, usando un *metalinguaggio* che parla sul testo stesso, ed è il linguaggio del presente, ed è ***l'unico*** di cui noi disponiamo.

Già la semplice edizione, la traduzione, implica volente o nolente una interpretazione, una immersione del testo nel metalinguaggio del presente.

Solo avendo una *distinzione* tra metalinguaggio e linguaggio del testo è possibile evitare la confusione e la retroproiezione non percepita del presente nel passato.

D'altra parte se si vuole *leggere* un testo, renderlo vivo, bisogna trasportarlo nel proprio linguaggio, riflettendo sul linguaggio del testo[4].

In appendice 1 si riportano due esemplificazioni di quanto accennato.

Per arrivare all'idea della Matematica come Modello.

Modellizzazione (definizione di Modello)

Lo sviluppo delle G.n.E. ha determinato un cambiamento concettuale nelle idee sull'essenza stessa della *geometria*.

Prima, i postulati avevano un preciso riferimento alla realtà esterna da cui venivano *dedotti* per astrazione, e le proposizioni venivano ritenute esprimere una verità assoluta purché ricavate in modo *logicamente corretto*.

Oggi nella nuova concezione della logica, i postulati diventano ipotesi arbitrarie, condizionate soltanto dalla *coerenza*, e le proposizioni acquistano una verità relativa soltanto all'insieme dei postulati da cui sono derivate**.**

Tale evoluzione della geometria ha portato a considerare quella euclidea non solo come una scienza definita da certi oggetti astratti (*modello dello spazio* che ci circonda) ma come una costruzione razionale che rende coerenti i comportamenti relativi agli oggetti materiali che si manipolano e ai fenomeni energetici che si osservano (fisica classica).

In tale visione la geometria euclidea contempla sia l'aspetto *sperimentale* sia quello *deduttivo* tale da farsi ritenere ancora oggi l'esempio più riuscito di realizzazione teorica (*scoperta-dimostrazione*; *sintesi-analisi*).

Dopo *I Fondamenti della Geometria* che Hilbert pubblicò nel 1899, dando una sistemazione rigorosa su basi assiomatiche della Geometria Euclidea, le nozioni geometriche, in accordo con i nuovi orientamenti del pensiero filosofico, non hanno più carattere di *verità assoluta*, ma sono relative al sistema assiomatico scelto, non possiedono un *significato a priori* al di fuori delle nostre costruzioni mentali (del pensiero).

Si completa così il percorso di *progressiva* astrazione iniziata dai Greci.

Nei sistemi di assiomi moderni, da Hilbert in poi, si rinuncia a definizioni esplicite e vengono postulate proprietà di certe relazioni (perpendicolarità, parallelismo, inci-

[4]Esempio: la semplice traduzione di un testo contemporaneo in un'altra lingua diversa dalla nostra.

denza,…) tra concetti base non oltre definibili e viene lasciata all'interpretazione del sistema di assiomi tutto ciò che li collega.

Prende così senso il concetto di *Modello*:

Dicesi *Modello* di un sistema assiomatico formale ogni *Interpretazione* dei termini primitivi tale che gli *Assiomi* diventino *Enunciati Veri*.

Qui *Interpretazione* si intende nel senso di *Assegnazione* di un *Significato* e non come *Spiegazione* del significato.

La definizione data di MODELLO ci offre la maniera di costruire un generico modello.

Primi approcci ad una fondazione assiomatica

Né Aristotele, né alcun altro autore dei suoi tempi, ci ha lasciato una teoria di una assiomatica specifica per la GEOMETRIA.

Noi *leggiamo tutto ciò,* leggendo gli Elementi di Euclide, e i frammenti filosofici a noi pervenuti.

Sappiamo che all'interno dell'Accademia il tema veniva discusso con vivacità:

nel *Corpus Aristotelicum* troviamo il percorso teorico che portò alla conoscenza decisiva del fatto che *una proposizione fondamentale relativa alle rette parallele, ritenuta dimostrata dai geometri precedenti*, *in realtà non era mai stata dimostrata*, perché la sua dimostrazione richiedeva una *arché*, che in quanto tale non era né esplicitamente formulata, né esplicitamente accettata, e che tuttavia rappresenterà l'assioma più importante della geometria tale da farla denominare in seguito LA GEOMETRIA EUCLIDEA.[5]

Il ruolo del V postulato[6] è decisivo nella costruzione della G.E.[7]

Le ricerche matematiche che hanno avuto luogo nell'Accademia antica si preoccupavano di determinare i criteri di identificazione, di definizione e di verità dei principi su cui i matematici, senza giustificarli, fondavano le proprie dimostrazioni e operazioni.

Un *principio* costituisce una proposizione inderivabile, di per sé indimostrabile e inconfutabile, e viene semplicemente posto, accettato come ipotesi.

Da solo non è in grado di escludere come falsa la proposizione opposta.

Aristotele parla della possibilità di costruire una geometria anche sulla proposizione opposta al principio accettato, e ne parla come di una realtà effettivamente esistente.

---

5 Per tutte le informazioni su Aristotele mi riferisco a Toht([19])

6 L'enunciato del V postulato è *: Se una coppia di rette complanari è tagliata da una terza retta, e le due rette formano con il medesimo lato della secante comune, angoli interni che sono minori di due retti, allora le due rette sono incidenti.*

7 Diversi storici riportano che prima degli Elementi di Euclide esistevano degli Elementi definiti pre-Euclidei, dove il V postulato non compariva nel novero delle proposizioni che erano conosciute e riconosciute come arché della geometria, nell'800 si parlava di XI assioma riferendosi al V in quanto nelle varie trasmissioni manoscritte si era insicuri dove collocarlo

Esiste già nel IV secolo a.C. una geometria che si fonda su una *arché*, in forza della quale si ammettono *parallele che si incontrano*, *triangoli con la somma degli angoli diversa da due angoli retti, diagonali commensurabili* e così via; ma per via della indimostrabilità e inconfutabilità di ogni *arché* in quanto tale, non si può dimostrare la falsità di questa geometria.

Per escluderla, Aristotele ricorre alle categorie etiche del *bene* e del *male*, l'alternativa fra geometria euclidea e non-euclidea non è decidibile dal punto di vista teoretico, ma dal punto di vista etico.

Nel capitolo sulla libertà dell'Etica Eudemia Aristotele definisce l'uomo come l'unico essere libero di scegliere tra il bene e il male, l'*Unico* esempio che porta è :

"è bene fare ricorso ad un parallelo preso dal campo geometrico,"

e prende come esempio il seguente:

la somma degli angoli interni di un triangolo ***è*** *uguale a due retti o la somma degli angoli interni di un triangolo* ***non è*** *uguale a due retti* (supponendo così un atto iniziale, una scelta preferenziale, una decisione fra due alternative).

Se *l'arché* è **la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti** vi sono alcune conseguenze, ma se *l'arché* è **la somma degli angoli interni di un triangolo non è uguale a due retti** ve ne sono altre**.**

Da quanto riportato da Toth si può ipotizzare che alcuni fondamenti ed alcune importanti proposizioni della G.n.E. devono essere già state conosciute prima di Aristotele.

I passi che riporta Toth *non* sono esempi casuali di qualcosa di completamente ipotetico o addirittura impossibile, ma aprono uno spiraglio su una discussione matematica sui fondamenti avente luogo ai tempi di Aristotele (e nell'Accademia), entro la quale *deve* esserci stata una variante di una geometria non-euclidea, dedotta dalla negazione del V postulato di Euclide.

Poiché Platone per ragioni ontologiche scelse la Geometria euclidea, Aristotele dice che questa scelta è stata fatta per motivi etici e quindi è un atto di libertà.

Caratteristiche di una *arché*

Per Aristotele, e non solo, una *arché* è un enunciato che non si può dimostrare, che non è divisibile in altre proposizioni più elementari.

Non si possono inserire catene inferenziali di termini medi, i caratteri distintivi erano : semplicità, priorità inferenziale, autoevidenza.

Tutto ciò non sembra esservi nel V postulato!

Come mai, in queste condizioni, si è ammesso che questa proposizione, fino allora generalmente considerata un teorema, fosse una *arché*, cioè non più ulteriormente analizzabile, irriducibile, e logicamente indivisibile?

Secondo quando riporta Aristotele, fu fatto un esame delle varie *dimostrazioni,* che condussero al risultato che tutte erano dei circoli viziosi, *tutto ciò però non è sufficiente per concludere l'indimostrabilità della proposizione***.**

Per attribuire lo *Status* di una vera *arché* si sarebbe dovuto riconoscere che fosse *Inderivabile* dalle *arché* preesistenti della Geometria (che per Aristotele significava

Indivisibilità' e la *Non-analizzabilita')* e per fare ciò era necessario seguire una strada di ricerca sistematica, una ricerca di un sapere di tipo nuovo, autonomo non dipendente dalla geometria, disciplina interessata.

Dopo Hilbert possiamo dire che si tratta di una ricerca assiomatica, cioè dobbiamo fare *Metamatematica*,

La strada indicata è quella di mostrare che:

Il postulato V è una arché se e solo se non-V[8] *è inconfutabile*[9]

Analogamente si mostra che non-V è inderivabile.

La dimostrazione della inderivabilità di una proposizione può essere compiuta *solo con* la dimostrazione della *inconfutabilità* dell'opposto.

Oggi noi sappiamo che è teoreticamente *impossibile* dimostrare l'inderivabilità di una proposizione all'interno dello stesso sistema; pertanto ad una proposizione compete il predicato metalinguistico *arché*, *se e solo se* la proposizione e la sua opposta sono entrambe inconfutabili.

I concetti di *Euclidicita'* e del suo opposto di *Non-Euclidicita'* esistono simultaneamente.

La costruzione della sola via che porta a riconoscere l'autonomia assiomatica del postulato euclideo richiede, per necessità intrinseca, la costruzione della G.n.E. riconoscendo validi entrambi gli ambiti.[10]

Che cosa significa dimostrare rigorosamente il postulato delle parallele?

Si riteneva (anche oggi?) di dover fornire una dimostrazione rigorosa nella quale rendere assurda la non-V.

Invero significa dimostrare la sua incompatibilità logica con gli assiomi della geometria assoluta[11], *l'incoerenza della congiunzione di non-V con gli assiomi della G. A. porterebbe ad una dimostrazione indiretta del V postulato.*

Infatti la confutazione della negazione di V, farebbe la V formulabile nel linguaggio della G.A. e la sua verità stabilita da essa.

Pertanto V non potrebbe essere un postulato e dovrebbe essere inserito fra i teoremi dimostrabili e dimostrati della G.A.

La non-V sarebbe eliminata in quanto assurdità logica e non potrebbe servire più come punto di partenza per una G.n.E. e porterebbe anzi ad una unica Geometria, quella di Euclide: un solo mondo… .

Così nasce il *Problema delle Parallele*[12]

---

[8] Con non-V indico la negazione dell'enunciato che esprime il V postulato.

9 Si dice *Inconfutabile* una proposizione che non porta a nessuna contraddizione con il proprio contesto.

[10] Ciò è stato completamente fatto solo dopo che Beltrami [4] provò con una dimostrazione geometrica l'esistenza della geometria iperbolica con ciò fornendo un modello di una geometria non-euclidea nella geometria euclidea.

[11] Geometria costruita solo sulla base dei primi 4 postulati riportati da Euclide, studiata e messa ben in evidenza da G:Bolyai, la indichiamo con G.A..

[12] Il V postulato è chiamato anche *Postulato della Parallela* .Esso è equivalente alla proposizione che afferma l'unicità della parallela per un punto ad una retta Che significa equivalente? Significa che dalle 28 proposizioni + il V postulato si deduce l'unicità della parallela e che le 28 proposizioni + l'unicità della parallela dimostra il V. .Per questa ragione il V postulato è solitamente detto il Postulato della Parallela.

Per opinione generale, si riteneva che il problema consistesse nel trovare una prova a favore della verità assoluta del postulato delle parallele; più tardi fu poi giustamente riconosciuto che il problema sta nel decidere se V è derivabile o inderivabile dalla G.A.

La soluzione è nel riconoscere che non-V è irrefutabile e V è inderivabile a partire dagli assiomi della G.A.

La irrefutabilità di non-V implica la indimostrabilità di V, e questa dimostra anche che ogni ragionamento che presenta la V come diretta conseguenza della G.A. deve essere fatalmente viziata da un ragionamento circolare in cui compare qualche altra proposizione ad essa equivalente.

La non-V però non è incompatibile con la G.A. ma anzi è logicamente compatibile.

Da ciò con discorso simmetrico possiamo ricavare che anche V è irrefutabile e non-V è inderivabile: cioè sono *entrambe logicamente indipendenti dalla G.A.*

Ed invero Aristotele citandole entrambe in diversi passi degli Analitici Secondi, afferma che esse sono logicamente indipendenti dalla G.A. e che sono inderivabili (è stato dimostrato).

Per quanto attiene alla decidibilità della loro *verità* sostiene che questa è una decisione che occorre prendere a favore dell'una o dell'altra, *con decisione libera da qualsiasi condizione.*

Si è trovata una nota di G. Bolyai in cui egli scrive[13]:

"Dio stesso sa e può sapere anche a questo riguardo la vera verità solo immediatamente, tutta in una volta, all'improvviso, vale a dire solo assiomaticamente".

Un altro brano di una lettera di G.Bolyai al padre.

"... ho creato dal nulla un nuovo universo.."

Se non è Dio, è comunque il soggetto pensante al di sopra della geometria che possiede la capacità e la libertà di assegnare verità alla V o alla non-V.

Le G.n.E. sconvolgono il modo tradizionale di vedere la SCIENZA, quale paradigma deve guidare la ricerca in futuro, la necessità, la libertà, la fede di risultati futuri?

L'indeterminatezza dell'universo sembra dire che non c'è un modello per la conoscenza.

NOTA BENE *non dall'incapacità di conoscere della ragione umana* e dai suoi limiti, ma alla presa di coscienza di una capacità cognitiva *dell'intelletto che riconosce l'indeterminatezza dell'universo.*

Una posizione che combatte il pessimismo agnostico (non potere conoscere), scegliendo la posizione che la conoscenza è contestuale, è relativa senza fare graduatorie di merito.

Scegliere una delle geometrie, Euclidea o non-Euclidea, è un atto di arbitrio, è la ragione (anche contro la propria *volontà*) a decidere, è il soggetto libero di scegliere ciò che gli è necessario.

---

[13] In [19] pp481

La G.A è detta non-categorica[14] (infatti abbiamo dette indecidibili la V e la non-V).

In G.A. la somma degli angoli interni di un triangolo è indeterminata e indeterminabile, vi sono linee che sono determinate da tre punti, ma non sono né rette, né cerchi, né altre curve.

Nella G.A. si possono compiere tutte le costruzioni abituali di figure, come il triangolo, il cerchio, ma non è possibile assegnare valori numerici delle loro aree.

La G.A. è una geometria non-figurativa, poiché la grandezza dell'angolo è in ogni rappresentazione grafica già determinata dal disegno[15].

---

[14] Una teoria si dice *Categorica* se a ogni proposizione si può assegnare il valore di vero o di falso

[15] La G.A., inclusa sia nella G.E. che nella G.n.E., è molto più ricca di proprietà paradossali che non la G.n.E..

E. Beltrami : dimostrazione dell'indimostrabilità

Indipendenza logica, inderivabilità, indecidibilità, non sono oggetti geometrici, ma sono *predicati metageometrici*.

Nel 1868 Beltrami riuscì a svolgere con procedure prettamente geometriche una dimostrazione dell'esistenza di queste proprietà.

A nessun matematico o filosofo era prima venuto in mente che una dimostrazione del genere fosse possibile: Concetti di origine puramente speculativi e metafisici vennero trasformati in un teorema della *metamatematica.*

L'idea base del Beltrami e, per sommi capi, la seguente.

Nel piano euclideo, è possibile produrre una carta geografica del piano non-euclideo che chiamò modello.

Il modello è una superficie da lui chiamata *Pseudosfera*, in quanto le formule analitiche che descrivono le sue proprietà geometriche hanno la stessa struttura formale delle relative formule della sfera.

La pseudosfera è una superficie a curvatura costante negativa, che rappresenta una porzione del piano non-euclideo messa in corrispondenza biunivoca con i punti del piano euclideo.

Se la G.n.E. contenesse due proposizioni contraddittorie anche il piano euclideo le conterrebbe, e viceversa.

Un approccio alle geometrie non euclidee nella scuola superiore è essenziale?

Nella scuola superiore italiana la "geometria" ha un posto di rilievo, almeno per i "riformatori" (le varie commissioni del M.P.I.) che l'hanno sempre considerata un *cardine* dell'insegnamento.
I testi scolastici della fine dell'800 e dei primi del 900 hanno sempre dato interpretazioni (alcune anche interessanti e prestigiose) degli Elementi di Euclide, favorendo così un "**Ostacolo Epistemologico**" nei confronti di nuovi sviluppi dei contenuti e dei metodi della "geometria".
Fino agli inizi del 900 (e forse anche oggi), la comunità scientifica considerava la geometria di Euclide la scienza più sicura nei contenuti e più perfetta come metodo; di conseguenza nella scuola il modello euclideo ben *Sperimentato* (in relazione alla capacità di produrre strumento di valutazione) imperava; altre geometrie come quella affine o proiettiva, le trasformazioni, la geometria analitica erano quasi totalmente assenti.
L'insegnamento della geometria (cioè il modello euclideo) entrò in crisi verso la metà del 900 con la riforma (quasi rivoluzionaria) bourbakista, la quale pur richiamandosi esplicitamente alla tradizione dimostrativa della Matematica greca inizia

l'Introduction agli *Eléments de mathématique* con:

"Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit demonstration",
ed afferma tuttavia di poter ridurre la matematica alla *Teoria degli Insiemi*
(*"il est possible ...fair dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles"*),
sottoponendo la geometria a diventare un'applicazione *dell'Algebra Lineare.*
Seguita tale tendenza in molte università (anche fino ad oggi); resisteva in parte la geometria analitica.
Oggi la geometria a livello accademico è convenzionalista e formalista (assiomatica contestuale e modelli).
La crisi non fu evidenziata nelle scuole superiori, almeno nei programmi ufficiali; oggi che si parla di "nuovi" programmi si deve cercare di capire qual'é il ruolo della geometria, non solo per i suoi contenuti ma, anche per gli aspetti epistemologici e filosofici.
D'altra parte leggendo i programmi di Filosofia previsti nel triennio si hanno i seguenti argomenti:
1) La seconda rivoluzione scientifica ; nascita di nuovi modelli
2) La nuova epistemologia
3) Matematica e logica nell'800 e nel'900

Si devono giustificare frasi del tipo:
". . . *la filosofia kantiana è entrata in crisi con l'avvento delle geometrie non euclidee e con essa anche la certezza di una conoscenza perfetta e sicura. . .* "
Per tali argomenti i giovani devono **sicuramente** affrontare la questione della crisi della Geometria Euclidea e non in modo superficiale, se si vuole arrivare a pensare

per modelli diversi e a individuare alternative possibili, in relazione anche della richiesta di flessibilità nel pensare, che nasce dalle rapidità delle attuali trasformazioni scientifiche e tecnologiche.
Flessibilità nel pensiero che trae la sua lontana origine dalla nascita delle Geometrie non Euclidee.
Se l'apprendimento è una modifica della conoscenza dell'allievo che lui stesso deve attuare da solo e che l'insegnante deve provocare, bisogna costruire una **situazione conflittuale d'apprendimento** che conduca l'allievo a mettere in opera le sue conoscenze e a produrre delle nuove conoscenze come risposta personale ad una esigenza dell'ambiente e non per un desiderio dell'insegnante.
Per trasferire la problematica delle G. n. E. e farle diventare *argomento* scolastico **bisogna adoperare metodologie adeguate al grado di livello culturale acquisito dagli allievi** ed occorre inoltre individuare una presentazione *scientifica* non *nozionistica* pur mantenendo un *rigore* tale da non provocare un inevitabile rigetto agli allievi e non creare agli insegnanti tali difficoltà da decidere di sorvolare l'argomento (Cosi successe con il metodo assiomatico di Euclide, quanto con lo slogan "ABBASSO EUCLIDE" si decise di eliminare, lasciandolo come lettura, il capitolo su generalità sui sistemi ipotetici deduttivi)

I programmi Brocca per il 5° anno indicano…: "*La presentazione della G.n.E. non sarà fine a se stessa, ma servirà a chiarire il significato di assioma e di sistema ipotetico-deduttivo ….. la riflessione critica porterà l'alunno, ... a sistemare assiomaticamente la geometria euclidea, ed eventualmente anche altri contesti e quindi a recepire il concetto di teoria matematica formalizzata ed il senso delle relative problematiche metateoriche*".
Le proposte dei nuovi programmi per il triennio delle S.M Superiori includono, per quasi tutti gli indirizzi , le G.n.E. da un punto di vista elementare
Nella Scuola italiana, come abbiamo ricordato, si iniziò con solo Euclide fin dall'unità d'Italia inserendo poi altri argomenti che ponevano problemi didattici in quanto bisognava armonizzare i vari aspetti.
Oggi le G.n.E poiché non sono un argomento *diverso* ma sono un *argomento contro* impongono una riflessione critica sia sul piano epistemologico sia sul piano metodologico.
Certamente non si può dire ***Abbasso Euclide Viva Lobacevskij***

Il modo tradizionale di pensare e di insegnare va necessariamente in crisi, non più una serie di fatti sicuri, poiché si trovano fatti incompatibili, si richiede un impegno diverso in quanto le dimostrazioni di G.n.E non sono sorrette dall'intuizione, cambia l'immagine della Matematica, non più scoperta ma creazione.[16]

---

[16] I matematici greci prima di Aristotele per quanto possiamo dedurre dagli scritti di Aristotele (Analitici Secondi) dovevano pensarla diversamente poiché Aristotele afferma che una scienza deduttiva si fonda su affermazioni che non si dimostrano e precisa che questi principi primi debbono essere indimostrabili, evidenti di per sé, più sicuri delle loro conseguenze mentre per i pre-Aristotelici consideravano i postulati come semplici ipotesi.
Oggi (dopo Hilbert) è venuta fuori la questione che cosa si debba intendere "per affermazioni che non si dimostrano", cambiando di nuova l'immagine della Matematica…

Questa tema si presta ad una trattazione generale che può offrire agli allievi una visione non consueta della Matematica, non rappresentando solo un ampliamento delle conoscenze matematiche, ma fornendo soprattutto la possibilità di rivedere i fondamenti della Geometria e allacciarsi ad un percorso che pervade tutta la cultura occidentale, dando così una visione *viva*, *dinamica* della disciplina, non scienza *morta*, *statica* di verità inconfutabili.

Le G.n.E. hanno un posto di rilievo in quanto hanno ispirato (e ispirano) notevoli studi epistemologici e più in generale filosofici della cultura odierna.

Le G.n.E. contribuiscono a chiarire tante problematiche filosofiche del secolo scorso e ai loro cambiamenti, per esempio da una visione *costruttiva* della matematica si è passati nel XIX secolo ad una visione assiomatica, basata su strutture astratte ed oggi ad una visione pluralista e di *comodo* in quanto contestualizziamo ogni conoscenza e relativizziamo anche l'idea di *verità* e di *dimostrazione*.

Le G.n.E. sconvolgono le convinzioni **sulla** matematica (quindi si parla di un **Metalivello)** *rovesciano* la convinzione filosofica dell'esistenza di una sola geometria , la Euclidea o la sua opposta ed inoltre *portano la convinzione* che nuovi concetti non possono infirmare le verità già acquisite, esse possono solo mutare il loro ruolo nella disciplina assumendo o meno importanza.

Le G.n.E. portano ad affermare che non esiste una unica filosofia [17] hanno portato un cambiamento nel modo di pensare, hanno cambiato i paradigmi:

Diversamente che per la

1) Crisi degli incommensurabili
2)L'introduzione del simbolismo algebrico
3)Il metodo cartesiano (G.analitica)
4)La crisi della logica Aristotelica

questioni che si sono sviluppate per motivazioni non *distruttive* ma per *finalità pedagogiche, nel senso di sistemazione della teoria*, (dato che si trovavano delle anomalie nel percorso della teoria e sono sorte da necessità empirico-operative), le G.n.E. hanno provocato una rottura epistemologica sulla questione se:

le idee sono innate o meno

distruggendo la concezione Kantiana dello spazio come forma a priori della sensibilità.

Con Lobacevskij muta l'interpretazione, l'immagine mentale della Geometria, essa parte dal mondo concreto dal quale ricava i concetti fondamentali che si acquisiscono attraverso i sensi con cui. iniziare la Geometria; parte dai corpi, dal contatto fra i corpi, dalle sezioni dei corpi stessi.

---

[17] misero in dubbio l'affermazione Kantiana secondo cui gli assiomi della Geometria siano conseguenze necessarie di una forma trascendente, data a priori dalla nostra facoltà intellettiva e intuitiva.

Storia della teoria delle rette parallele

Traccia di un probabile percorso didattico che percorre la *naturale* strada fatta dalla storia al sorgere della problematica delle G.n.E., che va rintracciata nella secolare e vana ricerca di ricondurre ad un assioma più semplice l'assioma delle parallele di Euclide e che spinse i Matematici a:
-riesaminare i postulati di Euclide
-verificare la portata e il significato
-enucleare quelli che non erano stati enunciati
-ed inoltre mettere in discussione le definizioni degli enti geometrici *fondamentali*

I vari tentativi di dimostrazione messi in atto e che, come risulterà, saranno tutti destinati a fallire, sono spesso interessanti, perché mettono in evidenza diversi aspetti e significati e applicazioni del V postulato fornendo anche delle proprietà geometriche nuove.
In appendice 2 alcune proposizioni equivalenti al V postulato

Per Saccheri è necessario dedicare un certo spazio perché i suoi lavori rappresentano un punto di svolta, non nel senso che con Lui si cominciò a dubitare della verità del V, si cominciò a procedere in modo diverso, accettando e fornendo teoremi validi in sistemi geometrici senza il V.

Saccheri è un notevole logico (nel 1697 pubblica la Logica demonstrativa, esempio di una esposizione del metodo assiomatico applicato alla logica stessa) usa un particolare procedimento argomentativo per dimostrare il V, una dimostrazione per assurdo dove assume per ipotesi falsa la proposizione da dimostrare per giungere alla conclusione che sia vera
La falsità è legata alla contraddizione, la verità è non contraddittoria, filosofia dell'epoca
In appendice 4 una raccolta dei risultati più interessanti raggiunti da Saccheri pubblicati in *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia*
Saccheri con l'obiettivo di dimostrare la verità della G.E. costruisce un primo esempio di G.n.E., ecco perché è anche ricordato come un precursore, involontario, delle G.n.E..
Merita un commento anche il matematico Lambert (1728-1777), lavorò analogamente a Saccheri usando dei quatrilateri trirettangoli isosceli, stesse ipotesi , stessi risultati, ma diversamente da Saccheri egli fu consapevole della debolezza di argomentazione dell'angolo acuto.
Risultato interessante raggiunto:
Nell'ipotesi dell'angolo acuto vi è una unità di misura naturale per i segmenti

Lo studio della storia delle parallele si può limitare ad alcuni obiettivi:
cioè limitarsi ad:

1) Illustrare gli assiomi della Geometria euclidea
2) Inquadrare Fisica -Relatività
3) Giustificare la Filosofia dopo Kant (certezze e perdita delle certezze)
4) Considerare il ruolo della Storia
5) Chiedersi se esistono rivoluzioni scientifiche?[18]

Un primo passo quindi può essere:
Analizzare il differente valore e ruolo del V Postulato di Euclide rispetto agli altri postulati
Nell'ambito dell'impostazione filosofica di Aristotele, anologie e differenze, la mancanza della sua evidenza e la differenza dai primi quattro postulati della G.E. per esempio i primi 4 postulati si possono verificare empiricamente attraverso l'uso di riga, compasso e goniometro, mentre riguardo al V postulato non *Esiste* un piano tanto *Grande* da fare contenere una retta, che è *infinita* (*illimitata*).

Poi :
Evidenziare le perplessità di Euclide nell'adoperare il V postulato
Perché lo introdusse solo dopo la XXVIII proposizione?
Non lo usa perché:
1) Gli appare complesso?
2) Gli appare non evidente?
3)Perché compare l'*infinito*?
Può essere utile ai fini di un coinvolgimento della classe cercare di fare percorrere agli allievi un percorso di *ricerca* che in questo caso si può ottenere facendo percorrere la filogenesi di alcuni concetti che sono attinenti alla *preistoria* della fisica, della filosofia, della geometria e non ultimo far riflettere che tali studi sono analoghi all'ontogenesi di ognuno di noi.

Sicuramente una presentazione in modo problematico, suscita interesse e partecipazione anche da parte degli allievi che non si interessano di questioni tecniche ma si interessano di questioni di tipo umanistiche.
Ipotizzare, Interpretare, Collegare, Analizzare, Certezze non se ne possono avere !
Proprio questo è il bello!,
Questo può stimolare un interesse a cercare le fonti storiche, può significare di far fare *Storia*!

[18] Sicuramente è stato un capovolgimento del "punto di vista"; per il Saccheri il V postulato era una verità immobile e assoluta, quasi tolemaica; da sottolineare che la soluzione della secolare questione sul V postulato non ha richiesto conoscenze che vadano al di là di quelle euclidee.

Un secondo percorso può essere quello di far seguire le due strade diverse che hanno adoperato i geometri per superare la scarsa intuizione del V Postulato
1) **sostituire** il V Postulato con altri postulati, *in seguito dimostrati equivalenti* [19]
2).**eliminare** il V Postulato, cercando di dimostrarlo *senza* introdurre nuovi postulati

Queste strade che non hanno portato risultati, *hanno creato l'idea* dell'esistenza di altre geometrie logicamente possibili.

Pertanto si possono dividere i Matematici che si sono occupati del problema delle parallele nel seguente modo:
i)dimostratori del V postulato
ii)precursori delle G. n. E.
iii)fondatori delle G. n. E

Tra i precursori un posto di rilievo come già abbiamo detto spetta a Saccheri.

Il tentativo di Saccheri(1667-1733) sta nel fatto di assumere il V Postulato falso e provare a trovare qualche contraddizione (vedi appendice 3)

Anche **Lambert (**1728-1777) parte da un quadrilatero trirettangolo, da interessanti contributi alla teoria delle parallele, studia il caso relativo alla II ipotesi (quello acuto), fu il primo ad ipotizzare che il caso dell'angolo acuto *potesse corrispondere* a una geometria su una superficie di tipo nuovo, come quella di una sfera di raggio immaginario, trova risultati importanti come la somma angolare di un triangolo è inversamente proporzionale alla sua area

Nel 1868 il Beltrami in [4] dimostrò che l'ipotesi di Lambert era corretta ma la superficie era reale ed era la *pseudosfera* (superficie a curvatura costante negativa generata dalla rotazione della *trattrice* intorno al proprio asintoto).

Anche il contributo di Legendre (1752-1833) che sostituisce il V Postulato con:

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti"

è importante in quanto pur ripresentando sostanzialmente i risultati di Saccheri i suoi lavori, scritti in francese, furono letti e studiati dai suoi contemporanei e pertanto fu un "*divulgatore"* di tale problematica.

[19] Per esempio studiare le critiche di Proclo e la dimostrazione di Posidonio ottenuta attraverso una nuova definizione di parallelismo basata sull'equidistanza, infatti sostituisce il V postulato con: *Date una retta e un punto esterno è possibile condurre una sola parallela alla retta data* .Studiare anche Wallis che sostituisce il V con : *Per ogni triangolo ne esiste uno simile di grandezza arbitraria.*

Infine Schweikart [20](1780, 1875) e Taurinus [21](1794, 1874) (giuristi)che stupiscono per i risultati raggiunti.:

Perché non sono famosi?

Perché non sono considerati tra i fondatori?

Essi pur avendo ammesso la possibilità logica, continuarono a ritenere la G.E come l'unica vera e non esitarono a dichiarare false le loro teorie (seppur logicamente coerenti, legittime)

Per concludere :

Le ricerche di Gauss, Bolyai e Lobacevskij che indipendentemente l'uno dall'altro, pervennero agli stessi risultati.

La nascita delle G.n.E.
I fondatori delle G.n.E.

Da GAUSS (1777-1855) **a LOBACEVSKIJ** (1793-1856)

Nasce in tre luoghi diversi all'inizio dell' 800, scoperte simultanee appartengono agli eventi abituali, ricorrenti con relativa frequenza, nell'ambito della matematica[22];

All'inizio del XIX secolo si credeva che la G. Euclidea fosse **non** un esercizio di logica, **non** una invenzione dell'uomo, ma **la reale** descrizione del mondo.

La G.Euclidea era la prova della possibilità da parte dell'uomo di conoscere la **"Verità"** assoluta, del fatto che si poteva **"spiare"** nella mente di Dio.

La G.Euclidea costituiva l'esempio paradigmatico della ricerca dei valori assoluti, la scoperta delle G.n.E. contribuì in modo fondamentale a erodere la fiducia nella verità assoluta, il termine non-euclideo venne a essere usato come sinonimo di *relativo* nel senso di forme culturali diverse e non necessariamente superiori, *questo relativismo* ebbe in seguito un ulteriore impulso dalla scoperta della possibilità di una nuova logica, non più la logica Aristotelica considerata una descrizione delle "leggi del pensiero umano".

Le G.n.E. e **le logiche** a più valori eliminarono la fiducia che si aveva nel passato sulla natura assoluta della conoscenza umana.

I vari tentativi falliti avevano portato la convinzione che il V postulato era per cosi dire indispensabile per la fondazione della geometria, visto che esso era equivalente o

[20] Partendo dall'ipotesi che la somma degli angoli di un triangolo fosse diverso di due retti, ricavò diverse proposizioni di G.I e riconobbe come l'usuale G.E potesse essere ottenuta come caso limite della G.I.
Fu pienamente consapevole della possibilità logica di una nuova geometria da lui chiamata *astrale* (si evince dal carteggio con Gauss).

[21] Nipote del precedente, pubblicò due volumi dove sviluppò la G.I (chiamata da Lui G. Logaritmico-sferica), afferma la possibilità logica della Geometria (detta in seguito Ellittica) che corrisponde all'angolo ottuso di Saccheri e di Lambert e situa la G.E tra la G.I e la G.Ellittica. inoltre ottenne introducendo le funzioni iperboliche e considerando la geometria sferica di raggio *ir*, delle nuove relazioni valide nell'ipotesi dell'angolo acuto. Taurinus trovò i risultati e quelle relazioni che Bolyai (1802-1860) e Lobacevskij (1793-1856) ottennero con molto più lavoro.

[22] Nelle arti è inconcepibile, non possono esistere due "Amleti" scritti da scrittori diversi né due "Aida" scritte da due "Verdi" diversi, Barrow fa questa osservazione per suffragare l'ipotesi che la matematica ha una qualche base obiettiva, completamente o parzialmente indipendente dalla mente umana, le arti, per contrasto ,possono vantare l'essenziale unicità che nasce dal loro essere soggettive, riflettono l'individualità della creatività umana.

dipendente da diverse importanti proposizioni, quindi si cominciò ad ipotizzare che esso fosse **indimostrabile**

Vogliamo far notare che dimostrare una proposizione è una questione che si pone dentro la teoria stessa, mentre **dimostrare la indimostrabilità** di una proposizione in una teoria significa dover dimostrare che *non la proposizione ma la sua dimostrazione nella teoria* non è possibile, cioè riguarda **la metateoria.**

Verso la soluzione, impostato il problema correttamente la storia delle parallele è avviata alla soluzione.

I fondatori sono caratterizzati dall'aver non solo ammesso logicamente ma anche accettato consapevolmente più geometrie.

Gauss espone questa posizione pluralista in più lettere anche se non la rese mai pubblica per non sollevare le "strida dei beoti" (lettera a Bessel del 1829).

Gauss nel 1817 scriveva ad Olbers:

"la necessità della nostra Geometria non può essere provata, almeno ***non dalla*** *e non* ***per la*** *, nostra ragione umana. Può darsi che in un'altra vita noi raggiungeremo delle intuizioni sull'essenza dello spazio che sono per ora oltre i nostri limiti. Fino ad allora noi dovremmo porre la Geometria non assieme all'aritmetica, che è puramente apriori ma ,diciamo, con la meccanica...."*

Questa intuizione è un momento fondamentale per la filosofia della Geometria, significa rifiutare il realismo tradizionale, mettere in crisi la filosofia di Kant.

Non pubblicò nulla sulla teoria delle parallele ma si può comunque ricavare il suo contributo dalle carte e dalle lettere che egli lasciò e per questo lo si ritiene generalmente il primo matematico che raggiunse una chiara concezione di una geometria indipendente dal V postulato di Euclide.

Gauss è da molti considerato il fondatore (o uno dei) anche per i suoi studi sulla Geometria intrinseca delle superfici, (studio delle proprietà geometriche delle superfici che dipendono solamente dal tipo di superficie considerata e non dallo spazio in cui sono immerse[23)].

Tali studi oltre a costituire gli inizi della Geometria Differenziale, fornirono gli strumenti tecnici per un diverso inquadramento concettuale dei nuovi sistemi geometrici che favoriranno la loro accettazione nel mondo scientifico.

Gauss fu il primo a adoperare la denominazione di G.n.E., dopo aver precedentemente adottata quella di Geometria *antieuclidea* e poi l'altra di Geometria *astrale*; da ciò si evince come Gauss si fosse liberato completamente dai vari preconcetti che avevano fermato nelle loro conclusioni per es. il Saccheri ed il Lambert.

Gauss trovò per primo la formula

---

[23]Gauss dimostrò che sotto particolari condizioni di regolarità , è possibile introdurre su una superficie qualunque un sistema di coordinate, mediante le quali determinare le equazioni delle linee sopra la superficie stessa. Estese il concetto di linea retta del piano ad una qualsiasi superficie,chiamandole geodetiche (arco di minima distanza), esse dipendono solamente da una proprietà intrinseca della superficie chiamata **curvatura** , variabile da punto a punto, ma può essere anche costante. Le superficie a curvatura costante hanno la proprietà che parti di essa sono applicabili (sovrapponibili) su altre parti cioè hanno la stessa geometria.
La geometria delle superficie a curvatura costante nulla coincide con la G.E., positiva con la G.ellittica, negativa con la G. di Lobacevskij e Bolyai

$L = \pi K\left(e^{r/2} - e^{-r/2}\right)$

per la lunghezza della circonferenza, dove K è una costante che dipende dalla G.n.E. ed è tale che per K tendente all'infinito, si riduce all'ordinaria formula della G.E.

Il coraggio che mancò a Gauss l'ebbero invece due giovani, indipendemente l'uno dall'altro Lobacevskij nel 1829 e Bolyai nel 1832.

Entrambi, vedendo che non era possibile dimostrare il postulato V, si convinsero che doveva essere lecito sviluppare una Geometria che lo rifiutasse.

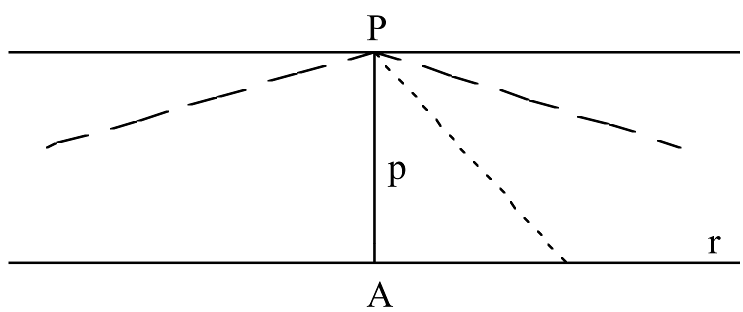
Tecnicamente, molte dimostrazioni erano già state trovate da Saccheri, ma Gauss, Lobacevskij e Bolyai ebbero soprattutto una intuizione filosofica di eccezionale importanza, *la ricerca della "verità"non più a partire dall'intuizione della mente.*

Una "RIVOLUZIONE" nata dall'invenzione di una alternativa alla tradizionale Geometria Euclidea, la Geometria di Lobacevskij e Boylai è coerente logicamente quanto quella Euclidea pertanto la si può definire "vera" anche se contraddice in larga misura la G.Euclidea.

Il Lobacevskij, parte da una osservazione relativa alla definizione di rette parallele data da Euclide mostrando come tale definizione può intendersi in due sensi ben diversi.

"Due rette sono parallele se non hanno alcun punto in comune".

Consideriamo una retta r e un punto P fuori di essa. Da P si conduca la perpendicolare p ad r e sia A il piede di questa perpendicolare.



Fra le semirette uscenti da P e appartenenti ad uno dei due semipiani di origine la perpendicolare p, vi saranno le secanti e le non secanti la retta r a destra e a sinistra del punto P.

Esiste una semiretta elemento di separazione delle due classi (Supponendo valido l'assioma di continuità di Dedekind) e diremo parallela alla r la retta di questa semiretta r, analogamente si ragiona per le semirette uscenti da P appartenenti all'altro semipiano.

Si possono verificare due casi.

Le rette parallele così definite coincidono, e quindi dal punto P esce **una sola retta parallela alla retta r,**

Le due rette parallele così definite sono distinte e quindi da P escono **due rette parallele alla r.**

La prima ipotesi corrisponde all'ipotesi euclidea, la seconda a quella iperbolica

Klein suggerì il nome "*Geometria Iperbolica*" (dal greco Iperbole che significa ECCESSO) dato che il numero delle parallele per un dato punto ad una retta è in eccesso rispetto al numero nella G.E.

Lobacevskij sviluppa la seconda ipotesi scrivendo il primo trattato di G.n.E.

Lobacevskij e Bolyai[24] non trovarono logicamente necessario l'unicità della parallela, ma conservarono l'idea che la retta si estenda all'infinito in entrambe le direzioni.

La G.n.E per parecchi decenni dopo le opere di Lobacevskij e Bolyai (i lavori dei due matematici sono molto simili, Bolyai cura di più la parte geometrica mentre Lobacevskij dà maggiore impulso alla parte analitica) continuò a rappresentare un aspetto marginale della matematica, fino a che le concezioni generale di Riemann non l'ha resa parte integrante della "matematica".

RIEMANN(1826-1866) - **HILBERT** (1862-1943) - **KLEIN** (1849-1925)

L'età dell'oro della geometria moderna

Nel 1854 Riemann diventò Professore all'Università di Gottinga e nella sua presentazione alla facoltà tenne una dissertazione sulla storia della matematica riguardante la geometria dal titolo: *Sulle ipotesi che stanno alla base della Geometria*.
Riemann sosteneva una visione globale della geometria come studio di varietà di un numero qualsiasi di dimensioni in qualsiasi genere di spazio.
Le geometrie di Riemann sono non-euclidee in un senso molto più generale di quella di **Lobacevskij**, dove si tratta semplicemente di stabilire quante rette parallele sono possibili per un punto, secondo la concezione di Riemann la geometria è l'insieme di ennuple ordinate (non solo rette e punti) che vengono raggruppate secondo certe regole, una di queste regole è la *distanza* tra due punti infinitamente vicini.
Nella G.E. ordinaria la metrica è data da $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ma si possono usare infinite altre formule come formule della distanza, che determinerà le proprietà dello spazio o la geometria.
Oggi l'espressione "Geometria di Riemann" viene usata per indicare quella geometria piana che scaturisce dall'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri e senza la prolungabilità all'infinito della retta, interpretando "piano" come superficie di una sfera e di

[24] Riemann non trovò logicamente necessario che una retta debba essere di lunghezza infinita (potrebbe chiudersi in se stessa, come i meridiani terresti)

"retta" come cerchio massimo della sfera stessa, in questo caso la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti (geometria ellittica)
L'idea di Riemann di uno studio generale degli spazi metrici rese possibile la teoria della Relatività generale.
Riemann realizzando sulla superficie della sfera la geometria ellittica fornì anche una dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi da cui derivava tale geometria.
In maniera molto simile E. Beltrami (1835-1900) mostrò con un modello che anche la geometria di **Lobacevskij** era non-contraddittoria considerando la pseudosfera (superficie di curvatura costante negativa generata dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto, mentre la sfera ha curvatura costante positiva.
Se definiamo la "retta" passante per due punti della pseudosfera come la geodetica passante per quei punti, la geometria che ne risulta avrà le proprietà derivanti dai postulati di **Lobacevskij**
Poiché il piano è una superficie con curvatura costante nulla, la geometria euclidea può essere considerata come un tipo intermedio tra la geometria iperbolica e quella ellittica.
Felix Klein 1849-1925, (professore ad Erlangen dal 1872-75) nel 1872 pubblica **Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti** una classificazione delle geometrie *tramite la nozione di gruppo* (<u>per Klein Geometria è lo studio delle proprietà delle figure aventi carattere invariante rispetto ad un insieme di possibili trasformazioni formanti un gruppo</u>) evidenziò così una struttura generale che comprende in sé le varie discipline geometriche
Il programma di Klein ha tolto definitivamente ogni carattere privilegiato alla G.E.ed è stato impulso per la sistemazione e per lo sviluppo delle Geometrie

Qualsiasi classificazione dei gruppi di trasformazione diventa una codificazione delle varie geometrie

Suddivisione degli studi geometrici dopo l'avvento **delle G. n. E**

1)**Indirizzo elementare**
Ad opera di **Bolyai e Lobacevskij** nasce la G. n. E e in tale fase si ha una critica radicale della tradizione euclidea (molto interessante per motivi culturali e didattici)
2)**Indirizzo metrico-differenziale**
Parte dai lavori di **Gauss** sulla Geometria differenziale delle superficie.
I rappresentati più importanti sono **Riemann e Helmholtz** (spazio è una varietà ad n-dimensioni)
3)**Indirizzo gruppale**
Il più rappresentativo è **F. Klein** (1849-1925) con il famoso Programma di Erlangen 1872 con il quale classificò tutte le teorie geometriche del suo tempo con le proprietà metriche delle figure viste come relazioni proiettive in riferimento ad una particolare conica, detta assoluto.
Oggi i Fisici seguono l'indirizzo metrico-differenziale, i Matematici (i Geometri) hanno privilegiato l'indirizzo gruppale, per i Fondamenti della Geometria è essenziale lo studio dell'indirizzo elementare.
Altra classificazione può essere:
I Classificazione (KLEIN)

G. Affine	invariante per trasformazioni che mutano rette in sé
G. Algebrica	invariante per trasformazioni birazionali
G. Proiettiva	invariante per trasformazioni-omografiche
G. E.	invariante per trasformazioni - Similitudine o movimenti rigidi

.
II Classificazione (Hilbert-), (si fissa l'attenzione esclusivamente sui postulati che legano i concetti primitivi, diede un assetto puramente formale e assiomatico quale era stato già dato per l'Algebra e l'Analisi)
)

G. Ellittica	non vale il V (non esistono parallele)
G. Iperbolica	non vale il V (esistono 2 parallele)
G. Parabolica	vale il V (esiste 1 parallela)
G non Archimedea	
G. non Desarguesiana	
G. non Pascaliana	
G. non Pitagorica	

III Classificazione (si fissa l'attenzione sul metodo)
G. Analitica
G. del compasso
G. descrittiva
G. Differenziale (Riemann)
G. intrinseca.

Appendice 1

Un esempio :

In tutte le traduzioni di Euclide, anche le più recenti, la prima proposizione degli Elementi è la seguente.

Punto è ciò che non ha parti. (Enciclopedia Utet a cura di Frajese)

Questa traduzione è forse un ***tradimento*** del pensiero di Euclide.

Dopo Hilbert è venuta fuori la questione studiata ed analizzata anche con l'ausilio dell'informatica che la parola "punto" **(στιγμη)** usata dai Pitagorici non compare mai negli Elementi di Euclide, mentre compare la parola **(σημειον)** che può essere tradotta come segno (non è mai usata come punto nel senso geometrico).

La parola **(σημειον)** arriva fino all'anno 500, con il più antico testo latino a noi noto ed è tradotta con "singnum" e non "punctum".

Il cambiamento si ha con la traduzione di BOEZIO ,che *afferma di avere tradotto rigorosamente Euclide*.

Egli ha probabilmente, retroproiettato nel passo euclideo la filosofia della matematica del suo presente romano.

Il suo punto si doveva identificare con l'atomo dei Fisici greci, tanto piccolo da non potersene trovare le parti.

Egli *non poteva accettare la tradizione pitagorica che (in maniera che oggi diremo corretta) lo definiva un "segno" a dimensione zero.*

L'interpretazione di Boezio aveva la caratteristica di essere intuitiva, chiara ed evidente e per diversi secoli si ebbero lunghe dispute sulla divisibilità e indivisibilità[25]..

Hilbert sintetizza la sua filosofia della matematica con la seguente frase:

All'inizio c'è il segno

Possiamo "preferire" la traduzione *segno* e per suffragare ciò, possiamo ritrovare in Platone alcuni riferimenti in tal senso.....

Nota Bene

La concezione di Hilbert non è la stessa di quella di Euclide.

Per Euclide *i concetti fondamentali*, punto, retta, piano sono termini *indefiniti* e sono ***definiti*** *implicitamente* ***dagli assiomi***.

É *rilevante* far notare che Hilbert formula questo metodo euclideo della definizione implicita, formalizzandola.

Noi non sappiamo che cosa pensasse in proposito Euclide.

Noi possiamo **scegliere** la parola "segno" ma non possiamo **affermare** che abbia lo stesso significato che doveva avere per Hilbert![26]

---

[25] Oggi con l'introduzione dell'analisi non-standard è divenuto possibile "sommare" sia quantità non numerabile di zeri (e la somma è naturalmente zero), ma anche quantità maggiori di zero e minore di ogni numero standard positivo (cioè gli infinitesimi) e la somma risultare diversa di zero.
Gli infinitesimi furono intuiti e studiata dai greci (ricordiamo la III-16 degli Elementi che tratta dell'angolo di contingenza) ma messi al bando in quanto non riuscirono a trovare una teoria coerente delle grandezze che includesse anche quelle infinitesime.
Risolsero l'impasse introducendo l'assioma di Archimede (def.4 del libro V), cioè interessandosi solamente alle grandezze archimedee.

Noi che vogliamo accettare questa interpretazione, dobbiamo verificare solo che essa :

-*Sia storicamente coerente con l'intero contesto,*

-*Sia più compatibile di altre interpretazioni,*

-*Sia utile per incrementare il sapere in rapporto alla comprensione del passato.*

Prima di Hilbert, tradurre la parola con "segno" al posto di "punto" forse sarebbe stato una inutile pedanteria, anzi la parola "punto" è stato uno strumento che ha reso più fruibile la Geometria Euclidea.

Oggi, **con** la prospettiva di Hilbert **e** nella prospettiva di Hilbert abbiamo ricostruito la Geometria di Euclide, così le G.n.E. e in particolare la Geometria Assoluta di Bolyai rendono possibile la comprensione della struttura del I libro di Euclide, rendono possibile capire perché le prime 28 proposizioni sono nettamente separate da tutti i restanti teoremi, e perché alcuni di esse che potrebbero essere semplici corollari di teoremi dimostrati più tardi, vengono dimostrati con ragionamenti lunghi e difficili.

La geometria assoluta così **confinata** è dovuta alla cosciente conoscenza della loro autonomia e indipendenza logica dai restanti teoremi.

Altro esempio- Relazione Dedekind e Euclide/Eudosso.

Dedekind introducendo il nuovo concetto di "sezione", che gli venne inspirandosi al V libro degli Elementi di Euclide che risale ad Eudosso **risponde ad una lettera** di Lipschitz (che lo accusava di non aver raggiunto nulla di nuovo che non si trovasse già in Euclide) **scrivendo** che la sua idea era "rivoluzionaria" in quanto quella "creazione" era stata capace di trasformare il *non-essere in essere* .

Solo dopo Dedekind **è stato possibile comprendere** correttamente e interpretare Eudosso; con la teoria delle sezioni e dei numeri irrazionali è più facile comprendere a pieno il V libro degli Elementi.

[26] F.Enriques, nel libro "Le Matematiche nella storia e nella cultura" 1938, afferma che la parola "punto" deve essere letto in Euclide "non più" come "punto accuminato " ma come "segno"

Appendice 2

Posidonio (135a.C-50a.C)

Modificò la definizione di parallelismo data da Euclide

P//: Si dicono P// le rette che, essendo complanari e venendo prolungate indefinitamente da entrambe le parti, mantengono la stessa distanza. (Equidistanti).

1) Il luogo dei punti di un piano equidistanti da una retta è ancora una retta

L'idea di dimostrare il V postulato con la sola modifica della definizione di rette parallele nasconde un nuovo postulato la condizione 1)

Altre

2)Dati in un piano una retta ed un punto non appartenente ad essa , per il punto passa al più una retta che non interseca la retta data.(Unicità della //) **Proclo** (410-435d.C)

3)Due rette // ad una terza sono // tra loro. (Transitività del //)

4)Una⊥ e una obliqua a una stessa retta si incontrano sempre in un punto dalla parte dove l'obliqua forma con la retta un angolo acuto (Postulato dell'obliqua)

5) Esistono triangoli simili non congruenti(Wallis,1616-1703)

6)La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti (G.Saccheri,1667-1733)

7)Per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza (W.Bolyai)

8)Non esiste una unità di misura assoluta per i segmenti (Lambert)

9)Per un punto interno ad un angolo acuto si può sempre condurre una retta che interseca entrambi i lati dell'angolo (Legendre)

10)Esiste almeno un rettangolo G.Saccheri

11)In ogni quadrilarero avente due lati uguali e ⊥ a un terzo lato gli altri due angoli sono retti G.Saccheri

12)Si può costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data (Gauss,1777-1855)

Potrei continuare ancora per molto , per es. in Trudeau altri 20, comunque ciò che colpisce è che poi non sembrano essere più semplici e meno complessi del V.

Appendice 3

Saccheri parte dalla considerazione di un quadrilatero ABCD birettangolo (in A e in B) isoscele (AC=BD)e ricava le seguenti proprietà:

1) **Gli angoli in C e in D sono uguali**

2) La congiungente MN i punti medi della base AB e di CD **è perpendicolare ad AB e ad CD**

3) **CD è maggiore ,uguale o minore di AB**, a seconda che gli angoli **in C e in D siano acuti, retti, ottusi.**

4) Se il lato **CD è maggiore ,uguale o minore di AB** allora **gli angoli C e D** sono rispettivamente **acuti, retti, ottusi.**

5) Se ABCD in più è retto in D, **il quarto angolo C è acuto** si ha **CD>AB** e **CA>DB,** se **è retto CD=AB e CA=DB**, se **è ottuso CD<AB e CA<DB**

6) SE ABCD ha gli angoli **C e D acuti, retti, ottusi**, lo stesso **avviene in ogni altro quadrilatero birettangolo isoscele.**(in un quadrilatero in tutti i quadrilateri)

7) **La somma degli angoli di un triangolo è maggiore, uguale, o minore di due retti a seconda che valga l'ipotesi dell'angolo ottuso, dell'angolo retto o dell'angolo acuto**

8)In un triangolo in tutti i triangoli vale la stessa ipotesi.

Procede cercando di dimostrare che l'ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto conducono a contraddizione poiché fa vedere che dall'ipotesi dell'angolo retto segue la V, dapprima cerca di confutare l'angolo ottuso:

11)**Nell'ipotesi dell'angolo ottuso e retto si ha che una perpendicolare e un'obliqua ad una retta si incontrano**, cioè vale il Postulato dell'obliqua, pertanto

14) **L'ipotesi dell'angolo ottuso distrugge se stessa** (Postulato dell'obliqua implica il V che implica l'ipotesi dell'angolo retto)

Procede con l'angolo acuto, classificando le possibili posizioni che possono assumere due rette in un piano:

-1) r e s incidenti in un punto e allora non hanno alcuna ⊥ comune (altrimenti si formerebbe un triangolo rettangolo con due angoli retti

-2) r e s non incidenti è hanno una ⊥ comune

-3) r e s non incidenti è non hanno una ⊥ comune e si avvicinano indefinitamente l'una all'altra.

Saccheri dimostra che esistono le rette che si comportano come nel punto –3)

Stabilita l'esistenza di rette nella condizione -3- Saccheri enuncia la proposizione

23) **L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta**.

Per Saccheri ripugna l'idea (che lui ha dimostrato) che possono esistere rette che al finito non si incontrano e ed hanno un punto di incidenza all'infinito ed che abbiano una ⊥ comune in tal punto(rette che si toccano senza tagliarsi).

Appendice 4

	Matematica come espressione della:	*Convinzioni su:*	*Questioni, problema tipico su:*	*Abituale modo di intendere: Caratterizzata da:*
300 a. C. Certezze:	Geometria euclidea Elementi = Sapere matematico + Teorizzazione logica Modello della logica bivalente	Rappresentazione della realtà, della natura, del mondo fisico. Identità tra conoscenza e rappresentazione della stessa	V: postulato o teorema? Trisezione dell' angolo. Quadratura del cerchio.	Una sola geometria, il sistema ipotetico deduttivo
Euclide Aristotele . . . . Kant	Logica Aristotelica	Rappresentazione della ragione umana. Metodo ipotetico deduttivo	Matematizzare, come garanzia di coerenza e correttezza di ragionamento	Un solo modo corretto di pensare Un solo sistema logico e un solo modo di sapere.
"800 Crisi dei Fondamenti	Geometria non euclidea	Realtà non autoevidente La validità dell'intuizione come criterio di "verità"	Geometria euclidea non è *A PRIORI* delle nostre intuizioni	Non c'è una geometria assoluta
Peano Witehead Brouwer Hilbert	Logica formale	Sistemi assiomatici formali. "Scoperta" dell' algebra astratta come linguaggio autonomo	Criterio dell' Autoevidenza messo in crisi.	Non c'è una ragione umana in senso assoluto, un unico modo di procedere, di ragionare, di dedurre
Certezza delle incertezze	Le geometrie	Si analizzano i singoli contesti e la verità è contestualizzata	Modello le entità geometriche fondamentali sono riconcettualizzate	Le matematiche non un unico sistema(nel senso di linguaggio, modello) ma più sistemi
Gödel Cohen Tarski	Le logiche	Impossibilità di un programma formalista e logicista delle matematiche	Rendere computabile il pensiero	Le filosofie: il modo di pensare è radicalmente trasformato (ammesse nuove entità)

Riferimenti Bibliografici

[1] Agazzi E.-Palladino D, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, 1978, Milano, Mondatori

[2] Barrow J.D. *Perchè il mondo è matematico?* 1992, Bari, Laterza

[3] Barrow J.D. *Pi in the Sky Couting, Thinking, and Being.* 1992 Oxford Univ.Press [trad.Cannillo T, *La luna nel pozzo cosmico*, 1994, Milano, Adelphi]

[4] Beltrami E *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di Matematiche, vol.VI (1868), pp. 284, 312.

[5] Boyer C.B. *Storia della Matematica* Torino, Boringhieri 1984.

[6] Bonola R, *La geometria non-euclidea*. Esposizione storico-critico del suo sviluppo, Bologna, 1906, Zanichelli,(ristampa anastat.1975)

[7] Borga M. Palladino D. *Oltre il limite della crisi. Fondamenti e filosofia della Matematica nel XX secolo* Brescia, La Scuola 1997

[8] BrousseauG *Thèorie des situations didactiques* (didactique des mathèmatiques 1970-1990) ,1998, Grenoble ed. la Pensée Sauvage

[9] Enriques F. *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari,* 1900, Bologna Vol.1, parte 8.VI, Zanichelli, (ristampa 1983).

[10] Euclide, *Gli ELEMENTI* (a cura di A. Frajese e L.Maccioni), Torino, 1977, Utet

[11] Freudehantal H. *Ripensando l'educazione matematica* (a cura di F.Manara) Brescia, La Scuola, 1994.

[12] Giacardi L. Roero S.C. *La Matematica delle civiltà arcaiche* Torino, Ed. Stampatori, 1979.

[13] Kline M. *Matematica :la perdita della certezza,*, Milano, Mondatori, 1985.

[14] Kline M. *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, 1991.

[15] Lobatchevski N.*, Nuovi principi della geometria* (a cura di L:Lombardo Radice), Roma, Einaudi, 1955.

[16] Piaget-Garcia, Psicogenesi e storia delle scienze, Garzanti, 1985.

[17] Speranza F. La geometria da un glorioso passato a un brillante futuro, Atti del III incontro Internuclei delle Scuole Secondarie Superiori, Parma , 1992

[18] Speranza F. *Vedere da punti di vista diversi una teoria matematica,* Quaderni di Didattica della Matematica e dei suoi fondamenti, I, Univ. Di Parma, 1993

[19] Toth I *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria, prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel "Corpus Aristotelicum",* Milano, Vita e pensiero, 1997.

[20] Trudeau R *La rivoluzione non euclidea*, Torino, Boringhieri, 1991.