

Laboratorio di Didattica Speciale di Logica-Matematica

Claudia Sortino

Componente del G.R.I.M., gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica, Università di Palermo.

‘ L’apprendimento avviene anche dal confronto di esperienze e se le esperienze vengono vissute da più sensi questo crea una maggiore consapevolezza della conoscenza ‘...

Obiettivo del laboratorio

Sulla base di un’esperienza concreta stabilire in che misura una strategia d’insegnamento riesca a realizzare gli obiettivi che vuole raggiungere

Ciò che si vuole promuovere è l’acquisizione di un modo di pensare che nasce non solo dal sapere “usare i numeri” ma, soprattutto dal “ragionare con essi e su di essi”..

Classificare, mettere in relazione e seriare
sono gli *organizzatori cognitivi* fondamentali per costruire un “contesto” o un “ambiente” per la negoziazione di significati

L’area *logico-matematica* per il **rafforzamento** e la **realizzazione** dei seguenti obiettivi:

- Capacità di focalizzare l’attenzione nel lavoro per un tempo adeguato
- Disponibilità e capacità di organizzare la propria attività spaziale, temporale, logica sia individuale sia in un gruppo
- Capacità di tradurre da un codice all’altro (parole, gesti, disegni, simboli)
- Capacità di riconoscere, individuare situazioni problematiche, riconoscere le risorse disponibili e tra queste quelle utili; ipotizzare cammini risolutivi; trovare e verificare soluzioni
- Capacità di trasferire conoscenze e procedimenti già appresi a situazioni diverse

Possiamo individuare due modi diversi di intendere
la ***didattica della matematica***:

1. come divulgazione delle idee, fissando l'attenzione sulla fase dell'insegnamento
2. come ricerca empirica, fissando l'attenzione sulla fase dell'apprendimento

Guy Brousseau (1989) definisce la concezione didattica della matematica come scienza,
<< una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche, ed
in che cosa questa produzione e questa comunicazione hanno di specifico >>,

una scienza che ha come oggetti specifici di studio:

- Le operazioni essenziali della diffusione della conoscenza, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce, sia sulle conoscenze sia sui suoi utilizzatori
- Le situazioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni

In questo senso è possibile descrivere un sistema didattico formato da tre componenti:

insegnante, allievo e sapere da insegnare

A fondamento di questa interazione si parla di *mezzo* o *ambiente* (in francese *milieu*):
si può pensare all'interazione tra allievo e milieu, in assenza di un concreto coinvolgimento dell'insegnante, come a ciò che definisce una situazione a-didattica; mentre se si prende in esame anche un sistema educativo esplicito allora si parla di situazione didattica.

A volte il *milieu* è definito sulla base di veri e propri oggetti concreti, a volte vi si aggiunge una interazione per la quale questi oggetti sono stati scelti, a volte come qualche cosa di stabile, altre come di qualcosa che si sviluppa e si modifica insieme all'allievo.

La situazione didattica

è l'insieme di relazioni stabilite in modo esplicito o implicito tra l'insegnante, l'allievo ed elementi a contorno (strumenti o materiali) avendo come scopo quello di far sì che gli studenti apprendano, cioè costruiscano una certa conoscenza stabilita in precedenza.

*Le situazioni didattiche sono quindi
specifiche
della conoscenza che si vuole far raggiungere.*

Affinché l'allievo costruisca la propria conoscenza deve occuparsi personalmente della risoluzione del problema che gli è stato proposto nella situazione didattica, deve cioè implicarsi in tale attività.

È in tal caso che si dice che l'allievo ha raggiunto la **devoluzione del problema**.

In origine (Brousseau,1986) **la devoluzione** era definita come:

l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer.

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in didattica della matematica l'idea di **contratto-didattico**:

*<< in una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo d'insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il **contratto didattico** >>.*

[Brousseau, 1980]

Che tipo di situazioni didattiche si possono costruire
nel caso di questioni riguardanti
le **matematiche speciali** ?

Il nostro modo di fare didattica cerca di essere particolarmente attento ai processi mentali dell'allievo secondo un percorso che, partendo dall'analisi a-priori delle possibili strategie da lui messe a punto in situazioni di apprendimento, ne prevede gli ostacoli sia psicologici sia epistemologici e, in relazione a queste previsioni, segmenta i contenuti modulandoli secondo i ritmi personali di apprendimento e i nodi concettuali suggeriti dall'analisi a-priori.

Un esempio di situazione didattica per
verificare l'acquisizione di concetto di numero

I vari passi occorrenti sono:

- **Classificare**
- **Mettere in relazione**
- **Seriare**
- **Il numero come aspetto ordinale e cardinale**

Struttura d'ordine assente:

difficoltà per l'orientamento spaziale (destra e sinistra) e temporale. Espressione linguistica frammentaria senza rispettare l'ordine cronologico degli eventi. Pochissima memoria a breve termine e le frasi sono incomplete e senza ordine logica.

➤ *Obiettivo dell'intervento:*

raggiungere un ordine mentale, una corretta successione logica e temporale e collocazione nello spazio

➤ *La metodologia e gli strumenti didattici:*

- tagliare, ordinare in successione, incollare figure per rappresentare le diverse azioni della giornata, gli indumenti che usiamo giornalmente
- una sveglia per fare percepire il passaggio del tempo, la durata dell'ora e il riconoscimento dei vari momenti

➤ *Verifica del lavoro:*

- analisi dell'ordine logico e cronologico dei racconti personali o riassunti da un brano
- test riproposto per verificare il più o meno apprendimento
- verificare l'attenzione e l'impegno nella vita scolastica

Ai fini di un'analisi qualitativa dell'intervento didattico operato per il raggiungimento degli obiettivi può risultare utile

➤ *Analisi del rapporto del ragazzo :*

- con i colleghi della classe
- con i compagni
- con la famiglia

Le conclusioni dell'intervento

mirano alla socializzazione e l'integrazione del ragazzo nella classe cercando di conciliare gli interventi individuali, necessari al suo sviluppo mentale, con l'integrazione con i compagni

in particolare

bisogna favorire i processi di Memorizzazione attraverso l'esercizio.



Tale acquisizione certamente complessa, avviene a livelli sempre più elevati di interiorizzazione e di astrazione come riferiscono i programmi che ne raccomandano la presentazione attraverso una pluralità di approcci i quali rappresentano altrettanti itinerari mentali e didattici e che si possono così sintetizzare:

- ✓ **APPROCCIO CARDINALE**
- ✓ **APPROCCIO ORDINALE**
- ✓ **APPROCCIO GEOMETRICO**
- ✓ **APPROCCIO RICORSIVO**

L'approccio Cardinale

il numero di oggetti contenuti in un insieme non attraverso un conteggio degli stessi, ma mediante un confronto con altri insiemi.

I presupposti logici che garantiscono una corretta acquisizione del concetto di numero naturale secondo l'approccio cardinale sono le attività di:

- ***CLASSIFICARE***
- ***METTERE IN RELAZIONE***
- ***EFFETTUARE PARTIZIONI SECONDO RELAZIONI DI EQUIVALENZA***

L'approccio Cardinale si sviluppa dunque attraverso l'uso della corrispondenza biunivoca per il confronto tra insiemi e la conseguente caratterizzazione di insiemi equipotenti.

È importante sottolineare che *l'acquisizione del dell'aspetto cardinale è condizionata alla comprensione del "tanti quanti", ovvero dall'intuizione del principio di invarianza.*

La comprensione del principio di invarianza è un momento determinante nel processo cognitivo del bambino perché segna il passaggio da una visione fortemente egocentrica ed irreversibile della realtà ad una visione relativa delle cose attraverso la quale comincia a farsi strada la reversibilità del pensiero.

Gli studi condotti da Piaget mostrano che il bambino tra i cinque e i sette anni incontrano difficoltà nell'accettare che alcune quantità continue (acqua, altri liquidi,..) e discontinue (insieme di monete, di palline,..) conservino la stessa entità se sono disposte in maniera differente.

Secondo Piaget la conquista del principio è un'importante tappa nell'evoluzione del pensiero che diventa "reversibile" e quindi capace di operazioni logiche.

Quindi

la comprensione dell'aspetto cardinale del numero viene raggiunta dall'allievo attraverso la comprensione:

- *Dell'Irrelevanza dell'ordine*
- *Dell'Invarianza rispetto alle disposizioni spaziali*

Quando scatta la considerazione del "tanti quanti", l'allievo sarà in grado di contrassegnare con lo stesso segno gli insiemi che hanno lo stesso numero di elementi e quindi di apprendere correttamente il carattere astratto e la funzione di simbolo delle cifre.

Per il raggiungimento della comprensione e dell'uso consapevole del valore cardinale si propongono le seguenti attività (Manuale di didattica, M.Cutrera & D. Lo Verde):

- FORMARE INSIEMI: guidare l'allievo ad individuare, discriminare ed analizzare caratteristiche di elementi per poi stabilire criteri per la formazione di insiemi.
- RAPPRESENTARE INSIEMI E INDIVIDUARE RELAZIONI DI APPARTENENZA: attraverso i diagrammi di Venn, oppure attraverso l'elencazione di tutti gli elementi che appartengono all'insieme, dato un elemento qualsiasi dire se esso appartiene o no a un dato insieme.
- INDIVIDUARE L'INSIEME VUOTO, L'INSIEME UNITARIO, IL SOTTOINSIEME DI UN INSIEME.
- INDIVIDUARE RELAZIONI FRA INSIEMI: guidare l'allievo a mettere in corrispondenza, attraverso l'uso di frecce, gli elementi di due insiemi secondo una relazione data.
- CONFRONTARE INSIEMI: stabilire se un insieme ha più o meno o uguale numero di elementi di un altro insieme.
- RICONOSCERE E COSTRUIRE INSIEMI EQUIPOTENTI: invitare l'allievo ad inserire elementi in un insieme anche con l'uso delle procedure "aggiungi" o "togli" oppure dati tanti insiemi di numerosità diversa, collegare tra loro quelli equipotenti.
- INTUIRE L'ASTRATTEZZA DEL CRITERIO PER LA FORMAZIONE DEI GRUPPI NUMERICI: invitare l'allievo a collegare ciascuna cifra con il giusto gruppo numerico prescindendo dalle caratteristiche concrete di essi.

L'approccio Ordinale

numero di oggetti contenuti in un insieme ottenuti non attraverso un confronto, ma attivando un processo di conta per cui l'ultimo numero pronunciato corrisponde al numero cardinale dell'insieme.

I presupposti operativi che garantiscono una corretta acquisizione del concetto di numero naturale secondo l'approccio ordinale sono le attività di:

- *CONFRONTARE*
- *METTERE IN RELAZIONE*
- *ORDINARE*

L'approccio Ordinale si sviluppa attraverso l'uso della relazione d'ordine che consente di confrontare due numeri e di decidere, nel caso in cui siano diverse, quale dei due è maggiore.

Quindi

le basi teoriche che fanno da sfondo all'approccio ordinale sono:

- *La relazione d'ordine*
- *Il principio di induzione*

Mentre nell'aspetto cardinale il numero è visto sotto forma di quantità, nell'aspetto ordinale è visto sotto forma di sequenza ordinata.

L'uso consapevole di relazioni spazio-temporali (davanti-dietro, prima-dopo) determina il controllo della relazione d'ordine e prepara il campo alla comprensione dell'idea di successore e di predecessore.

*Per il raggiungimento della comprensione e dell'uso consapevole del **valore ordinale** si propongono le seguenti attività:*

- **USARE CONSAPEVOLMENTE I TERMINI DAVANTI - DIETRO:** impostare attività che oggettivino le posizioni davanti – dietro invitando l'allievo a verbalizzare.
- **USARE CONSAPEVOLMENTE I TERMINI PRIMA–DOPO, SUBITO PRIMA– SUBITO DOPO:** fare collocare in sequenza temporale le azioni della giornata, intuire l'evolversi nel tempo, intuire gli effetti del trascorrere del tempo (crescita, aumento di quantità).
- **RICONOSCERE ED APPLICARE RELAZIONI D'ORDINE DI CARATTERE ESTENSIVO E TEMPORALE:** proporre attività del tipo “disegna gli indumenti nell'ordine in cui li indossi”.
- **CONFRONTARE QUANTITA':** invitare l'allievo a confrontare gruppi di oggetti affinché possa cogliere rapporti di maggioranza, minoranza o di uguaglianza a prescindere dalle forme concrete degli oggetti rappresentati.
- **STABILIRE UNA RELAZIONE D'ORDINE FRA DUE NUMERI USANDO I SIMBOLI $>$, $=$, $<$.**
- **ORDINARE I NUMERI DA 0 A 9:** guidare attraverso il comando “aggiungi 1”, a formare serie numeriche ascendenti da 0 a 9.
- **CONOSCERE ED UTILIZZARE LA LINEA DEI NUMERI:** può essere disegnata sul pavimento facendo muovere gli allievi stessi su di essa, oppure si può fornire all'allievo una striscia di cartone suddivisa in 10 spazi uguali e invitare gli allievi a trovare il posto di ciascun numero.

L'approccio Geometrico

il patrimonio dell'esperienza prescolare che nasce da un'attività di misura e che si accompagna alla individuazione del numero con la sua dimensione

L'intervento didattico deve agire nella direzione di non disperdere o ignorare l'aspetto percettivo legato alla misura. Attraverso attività mirate bisogna rafforzare ed estendere tutte le operazioni mentali sottese all'attività di misura.

Bisogna infatti considerare che in questo approccio, il numero indica sempre il risultato di una misurazione e deve dunque essere compreso attraverso la scoperta dell'unità di misura e del suo rapporto con la quantità da misurare.

Inoltre deve essere chiaro che il gesto iterativo della misura deve essere riproposto badando che le condizioni iniziali siano sempre le stesse.

*Per il raggiungimento della comprensione e dell'uso consapevole del **“numero dimensionato”** si propongono le seguenti attività:*

- **RICONOSCERE ED APPLICARE RELAZIONI D'ORDINE:** invitare l'allievo a mettere in ordine oggetti collocandoli con frecce in base alla dimensione (per esempio dal più piccolo al più grande) al peso, alla quantità, alla numerosità.
- **OPERARE CONFRONTI DI QUANTITA'**
- **ANCHE ATTRAVERSO I REGOLI IN COLORE:** ogni numero misura una lunghezza che varia con il colore del regolo. I regoli sono una buona rappresentazione pratica dell'approccio al numero tramite la misura. Infatti è chiaramente visibile che l'unità “sta” un preciso numero di volte in un altro numero e che ciascun numero contiene in sé la quantità numerica che lo precede.
- **OPERARE CONFRONTI FRA GRANDEZZE:** proporre attività del tipo “stabilire quale delle tre barre è più corta”



Oss.

È probabile che l'alunno guardi solo le estremità delle barre ignorando la necessità di rispettare l'allineamento per gli alti estremi.

L'approccio Ricorsivo

*è impostato sulla ricorsione e sulle leggi che la determinano.
Si fonda sulle successioni e le regole che consentono
la costruzione delle successioni stesse.*

Schemi ricorsivi sono presenti nella lingua, nell'aritmetica, nella geometria, nella musica, nel contesto delle attività motorie legate ad alcuni giochi, in talune rappresentazioni grafiche attraverso il ripetersi di elementi decorativi fondamentali ...

L'approccio ricorsivo ha alla base ***l'idea matematica di successione***, idea già presente nel bambino per tutte le sollecitazioni ricevute dall'ambiente familiare e dal contesto sociale di appartenenza che ne hanno prima suggerito l'intuizione e successivamente determinato un graduale e sempre più costruttivo radicarsi di opportuni schemi operatori.

Le successioni che entrano in un primo momento nella organizzazione mentale del bambino sono le ***successioni temporali***; successivamente si svilupperanno nello spazio attraverso giochi di movimento individuali o collettivi. Si tratta di successioni finite ma con la possibilità comunque di potere trovare sempre ancora un altro elemento dopo l'ultimo.

In questo approccio si rinuncia a dire che cosa è un numero naturale ma si precisa ***come funziona*** il sistema dei numeri naturali, basandosi sull'idea del successivo (il bambino che conta quante volte riesce a saltare a piedi untiti, a far rimbalzare la palla, a disegnare figure in fila ripete un'operazione e contemporaneamente tiene conto di quante volte la sta riproducendo).

In questo modo si costruisce ***l'insieme dei numeri naturali*** attraverso il contare verbalmente (è come se, in maniera intuitiva, disponendo i numeri naturali in fila in ordine crescente si può, partendo dal primo, raggiungere un numero qualsiasi aggiungendo ogni volta uno, formando così la successione dei numeri naturali”).

*Per il raggiungimento della comprensione del numero naturale attraverso **l'aspetto ricorsivo** si propongono le seguenti attività:*

- **USARE CONSAPEVOLMENTE I TERMINI DAVANTI-DIETRO, PRIMA-DOPO, DESTRA-SINISTRA:** proporre attività che consentano all'allievo di sperimentare successioni di tipo sia temporale sia spaziale e che lo avviino alla formazione del pensiero sequenziale.
- **RICONOSCERE E CONTINUARE UN RITMO GRAFICO CROMATICO:** proporre attività che sollecitino l'allievo a cogliere ed a continuare ritmi di forme, colori, dimensioni e durata. I ritmi aiutano a fissare l'attenzione sulle procedure cicliche. Successivamente si potrà far verbalizzare il criterio ritmico.

- **INDIVIDUARE SEQUENZE:** guidare l'allievo a ricostruire sequenze di complessità crescente secondo un ordine dato.
- **SCOPRIRE SERIE ASCENDENTI E DISCENDENTI:** proporre attività che invitino l'allievo a ricopiare, mettendo in ordine, forme e figure dalle più piccole alle più grandi (serie ascendenti) e viceversa (serie discendenti).
- **INTUIRE CHE LA SERIE NATURALE DEI NUMERI SI FORMA CON LA SUCCESSIVA AGGIUNTA DI UNA UNITA':** invitare l'allievo ad integrare la serie proposta con il disegno, con il segno di minoranza ($<$) o con il segno di maggioranza ($>$).
- **REALIZZARE SERIE NUMERICHE ASCENDENTI E DISCENDENTI:** invitare l'allievo a completare le serie numeriche dei numeri naturali con la consapevolezza che esse si formano aggiungendo o togliendo, ogni volta, una sola unità.
- **CONSOLIDARE L'INTUIZIONE DEL "+1" COME FUNZIONE CHE FA NASCERE LA SERIE DEI NUMERI NATURALI:** guidare l'allievo ad osservare la progressione dei numeri naturali e a ricostruirla con il disegno e con le cifre, aumentando gradatamente la complessità delle attività finché non sarà in grado di lavorare con le sole cifre.

Alcune considerazioni sul contare ...

È importante sottolineare che i quattro percorsi che portano all'acquisizione del numero naturale non sono da intendersi come strade separate ed autonome. Quando infatti si deve rispondere alla domanda "QUANTI SONO" è necessario contare gli oggetti, ma nel momento stesso in cui si contano, si vanno via via ordinando (*aspetto ordinale*) e si procede nella conta aggiungendo uno in più (*aspetto ricorsivo*).

La procedura del contare esige poi il ***possesso contemporaneo delle seguenti abilità:***

- 1) conoscere i nomi dei numerali in ordine esatto (sequenza verbale numerica);
- 2) sapere toccare (o indicare o guardare) ciascun elemento di un insieme una e una sola volta (enumerazione non numerica);
- 3) saper coordinare in un'attività motoria complessa ma unitaria le due precedenti abilità (verbale e motoria).

Riguardo *alla prima* abilità bisogna tenere conto che l'allievo impara dapprima a memoria i primi numeri; successivamente ripetendo e ascoltando riesce ad individuare la struttura che gli permette di costruire da solo la sequenza.

La seconda abilità si manifesta quando l'allievo sa organizzare lo spazio percettivo e lo esplora in maniera sistematica senza omissioni o ripetizioni.

La terza abilità si manifesta con una coordinazione dell'azione del prendere in considerazione agli oggetti (toccandoli, guardandoli, ..) con quella di esprimere verbalmente la sequenza numerica in modo da far corrispondere ad ogni numero pronunciato un oggetto individuato.