

# Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales.

## *Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie*

Guy Brousseau

Pour comprendre le rôle d'une leçon comme «le poids d'un récipient » il est utile de la replacer dans son contexte pédagogique<sup>1</sup> et scientifique. Comment passer du projet d'enseigner une notion mathématique aussi complexe que «la mesure » à un projet d'ensemble, un processus, puis à une situation plus ou moins générique et enfin à une leçon.

La théorie des situations didactiques semble relativement adaptée à la conception ou à la description d'un dispositif d'apprentissage et d'enseignement d'une connaissance assez bien délimitée, pouvant fonctionner pendant un court moment à un niveau scolaire assez précis. Elle fournit des éléments pour analyser des successions de leçons et les dépendances qu'elles peuvent présenter, mais elle ne paraît pas donner d'instruments pour «découper » des grands objets d'enseignement et pour réaliser effectivement des restructurations et des processus d'ensemble.

Il n'existe pas, dans ce domaine, d'algorithme produisant un résultat unique, mais seulement une série de critères pour comparer entre elles des propositions envisagées et pour éventuellement les améliorer. La réduction d'un gros objet comme la mesure en une suite de situations aura nécessairement un caractère dialectique : l'adéquation des situations au processus et celle du processus aux situations disponibles ne peut être, du moins pour l'instant, jugée qu'après coup. Mais cette réduction n'est pas non plus un tâtonnement erratique. Le chercheur l'entreprend armé d'un répertoire de connaissances mathématiques, didactiques, épistémologiques, historiques, psychologiques, pédagogiques etc. dont il fera usage au moment opportun.

Nous allons indiquer très superficiellement le cheminement qui a été suivi dans l'exemple choisi. Il commence par l'étude mathématique de la notion visée, se poursuit par le regroupement des questions et des conditions qu'il convient de prendre en considération pour constituer des « univers »<sup>2</sup> présentant une cohésion problématique raisonnable. Ces « univers » permettent ensuite d'identifier un petit nombre de situations suffisamment fondamentales qui peuvent s'articuler en processus d'ensemble. Les études locales peuvent alors commencer sous les conditions du maintien des divers équilibres - par exemple entre la quantité de concepts nouveaux intelligibles construits et la fréquence et la variété de leur utilisation dans le champ des exercices et des leçons ménagés dans le cursus - de façon à rendre les notions visées « apprenables » par les élèves. Il est utile de préciser qu'il faut distinguer pour une même notion mathématique son usage en tant que moyen, sa reconnaissance et son expression et enfin son étude et celle de la place qu'elle tient dans en tant que savoir. Les situations qui permettent ces distinctions sont différentes et le plus souvent ne se présentent pas en même temps dans une même activité et ne sont pas l'œuvre des mêmes institutions. Nous considérerons toutefois qu'elles appartiennent au même univers si la situation d'action (le milieu « objectif ») de ces différentes situations est le même, donc si elles se réfèrent à la même situation d'action.

### **Définition mathématique, les trois «univers ».**

Partons d'une définition assez répandue de la notion de mesure, un peu simple, mais qui dérive assez convenablement de la théorie moderne de la mesure.

Une mesure (il en existe plusieurs sortes) est une application d'un ensemble muni d'une structure adéquate ('espace mesurable) dans l'ensemble des réels positifs, cette application ayant des propriétés particulières.

- i) Un ensemble est mesurable s'il est composé de parties qui sont elles-mêmes des ensembles, (y compris l'ensemble vide) et s'il est tel qu'on peut trouver toujours en lui les intersections et les réunions d'un nombre quelconque de ses parties
- ii) Une application mesure, attribuée à chaque partie de cet ensemble mesurable un (unique) nombre réel positif.

---

<sup>1</sup> Voir «la mesure au CM1 » de Nadine BROUSSEAU, IREM de Bordeaux 1987

<sup>2</sup> Le terme d' « univers » doit être compris comme une simple métaphore précédant une modélisation plus précise en terme de milieux. Les tentatives de définitions du concept de milieu interdisent pour l'instant son usage naïf. Il en est de même pour la concept de « cadre », qui de plus évoque des isomorphismes plus forts.

- iii) Cette application est une mesure si, et seulement si, elle est de plus additive : le nombre associé à la réunion de deux parties disjointes quelconques est la somme des nombres associés à chacune des parties (et si la mesure de l'ensemble vide est zéro).

La question de savoir ce qui se passe lorsqu'on considère la réunion ou l'intersection d'une infinité de parties est aujourd'hui tout à fait fondamentale, mais il n'est pas nécessaire de l'envisager pour notre propos : la mesure dans la scolarité obligatoire. Ce choix est toutefois une hypothèse didactique (presque évidente) qui pourrait se discuter.

Retenons que pour concevoir une mesure il faut au moins trois notions : l'une pour décrire la structure de la chose à mesurer, une pour décrire la structure numérique qui mesure la chose, une qui décrit le moyen de faire correspondre un objet à mesurer et le nombre qui la mesure.

Les trois notions de base ne sont pas indépendantes : elles sont les composantes nécessaires aux situations d'action spécifiques de la mesure. Par contre leurs études constituent des secteurs de savoir différents et relèvent de problématiques distinctes. L'histoire montre comment il a fallu séparer progressivement et perfectionner alternativement ou conjointement l'une ou l'autre de ces notions.

Chacune de ces notions a son *univers* propre, c'est à dire ses structures, son champ de problèmes théoriques ou d'application.

- 1) ***L'univers des objets mathématiques mesurables. (1).*** La définition des propriétés des *espaces mesurables* est apparue tardivement et aujourd'hui encore la langue vernaculaire ne distingue pas toujours clairement un objet et sa mesure (exemple : la longueur et la largeur d'un rectangle sont des segments, la mesure de la longueur s'appelle aussi longueur). Mais elle est indispensable pour passer de l'univers des exemples de mesure à une définition catégorique de cette notion. C'est un autre postulat de la théorie des situations : les éléments fondamentaux d'une notion sont présents, au moins implicitement dans les situations qui la caractérisent, même si les acteurs de la situation n'en prennent pas conscience (ou plutôt connaissance).
- 2) ***L'univers des procédés de définition de l'application-mesure. (2).*** Les moyens effectifs par lesquels les fonctions mesures peuvent attribuer une valeur numérique à un objet sont par exemple les méthodes d'intégration. La théorie de l'intégration et celle de la mesure sont deux exposés d'une même théorie mathématique
- 3) ***L'univers de la structure numérique d'arrivée. (3).*** Du côté des ensembles des nombres, la construction des fractions a répondu au besoin de disposer d'un ensemble plus dense que les naturels pour « mesurer » des grandeurs non discrètes, et la construction des réels, au besoin de disposer de nombres pour « mesurer » les longueurs ou les aires obtenues par les méthodes d'intégration.

Nous allons prendre cette « définition » mathématique comme modèle de ce qu'est une mesure. Elle est définie par un triplet : une « chose à mesurer », un « moyen de mise en correspondance », et une « structure numérique positive » exprimant la mesure. Il s'agit de trouver les fonctions de cette pratique ou de cette connaissance et de les représenter par des « jeux formels » qui nous permettront d'identifier ou de concevoir les apprentissages qui nous intéressent. Par contre, nous n'allons pas nous limiter à ce que les mathématiciens assignent actuellement comme champ à cette notion et nous allons explorer des domaines plus larges, qui permettraient de discuter ce point de vue mathématique et peut être de l'expliquer.

### ***Un exemple : la mesure des ensembles finis***

Le choix de l'ensemble numérique d'arrivée est crucial pour la détermination de ce que l'on pourra mesurer ou non. Ainsi l'utilisation des fractions ne permet pas d'exprimer en même temps la longueur du côté d'un carré et celle de sa diagonale.

La mesure la plus simple est celle d'un ensemble fini. A chacune de ses parties, cette mesure (ou dénombrement) fait correspondre, un **nombre naturel**, celui de ses éléments. Le procédé effectif de correspondance est celui du comptage ou de la correspondance terme à terme avec un ensemble de cardinal connu. Le procédé de comptage ne dépend pas en théorie des objets comptés ou de leur nombre, mais la réalisation effective si, et il existe de ce fait un très grand nombre de techniques de comptage. La situation « fondamentale » de l'apprentissage du dénombrement est bien connue.<sup>3</sup>

#### **1. La situation fondamentale du dénombrement.**

Considérons la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 5 à 6 ans : "Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher des pinceaux dans la pièce voisine. Quand tu reviendras tu devras en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot

---

<sup>3</sup> « les mathématiques à l'école » G. BROUSSEAU Bulletin de l'APMEP n° 400)

sans pinceau. Tu devras porter tous les pinceaux en un seul coup, si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas et reviendras pour essayer à nouveau.

*Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".*

L'enfant saura aussi « compter » autrement dit, dire le nom des nombres, lorsqu'il pourra jouer les deux rôles suivants : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.

Il saura compter quand il sera capable de détecter et d'argumenter sur une erreur commise à son insu. Il connaîtra « le nombre naturel » beaucoup plus tard.

L'univers de l'ensemble des objets mathématiques mesurables par les naturels, celui des ensembles finis, est lui aussi bien connu. Sa structure est celle d'une algèbre de Boole. Mais il faut bien distinguer l'identification, la désignation, et l'énumération des ensembles, du comptage et de la récitation de la suite des nombres. L'énumération est l'instrument de l'exploration des collections, ce qui permet le dénombrement lui-même. Ce concepts n'avait pas d'existence culturelle jusqu'à ce que la théorie des situations ne la révèle, comme le montre l'atelier de M. BRIAND<sup>4</sup>

2. Cette situation possède des propriétés qui lui donnent un caractère fondamental.

- i) Elle permet de définir cette mesure comme connaissance, c'est à dire comme moyen de solution de cette situation.
- ii) Les concepts de nombre ou de comptage n'apparaissent pas dans l'énoncé de cette situation qui peut être comprise par un élève ne sachant pas compter
- iii) Elle permet de développer progressivement la connaissance des nombres comme réponse « spontanée » et évolutive à une suite de situations engendrées par la première, par des variantes reconnues (entre autres, augmentation du nombre d'objets, communication, écriture de nombres plus grands, perfectionnement des méthodes d'énumération)
- iv) Les variantes et les variables « didactiques » peuvent être facilement envisagées « dialectiquement » par les élèves eux-mêmes.
- v) Toutes les situations de dénombrement se déduisent de son schéma par simple modification des éléments terminaux et par des variables cognitives.

3. Il se présente alors une conjecture intéressante qui va nous guider dans notre quête : puisque le comptage est une forme de mesurage, la situation fondamentale du comptage ne pourrait-elle pas être un cas particulier d'une (hypothétique) situation fondamentale définissant une mesure en général ?.

### ***L'univers des objets et des usages (4)***

Un oiseau n'est pas mesurable, mais on peut le suspendre à un peson ou étaler ses ailes pour les placer devant une règle graduée – la technique pour ne pas estropier l'animal ne permet pas n'importe quel résultat. Nous observons ici toute une chaîne de concepts - de l'oiseau, à son poids ou à son envergure, puis à l'élongation du peson ou au segment déterminé par l'envergure sur la règle - qui s'interposent entre l'oiseau et les nombres finalement retenus, 20 centimètres ou quinze grammes. Chaque concept relève d'un *univers* différent. Tous les objets matériels sont susceptibles de donner lieu à mesure suivant les usages dans lesquels ils entrent. Ces usages sont essentiels pour déterminer la finalité la nature et les modalités des mesures.

1. Considérons des situations où les comparaisons permettent seulement des échanges (dans une même classe) mais n'aboutissent même pas à un ordre. Tous les objets qui peuvent se substituer dans un usage déterminé deviennent *équivalents* d'un certain point de vue. Par exemple, je suis le propriétaire de l'oiseau et je cherche à l'échanger, mais pas contre de l'argent. Tous les objets avec lesquels je peux l'échanger constituent une classe d'équivalence déterminée par la pratique sociale du troc. Le « prix » de cet oiseau est une classe d'objets. La modélisation de ces usages en termes de situations permet de préciser les classes d'équivalences qu'elles déterminent. La classe des objets remplaçables les uns par les autres dans une situation donnée deviendra celle des objets qui se voient attribuer la même valeur dans la mesure correspondante. S'il n'existait pas de situation qui permette de substituer une classe à une autre, notre triplet comprendrait l'ensemble des objets équivalents et leur application sur une même classe, ou sur son nom. Il s'agirait d'une **situation de tri** (suivant une classification donnée) ou **de classification** (s'il s'agit de créer la classification).
2. Considérons maintenant une classification telle que deux classes différentes d'objets peuvent être distinguées et *ordonnées*. Il est nécessaire pour cela qu'il existe au moins une **situation de comparaison** effective où ces classes d'objets entrent ensemble. Supposons de plus qu'il n'est pas possible de déterminer l'objet qui correspond à la somme de deux valeurs de mesure par une opération sur les objets eux-mêmes (comme par exemple pour les températures). La connaissance

---

<sup>4</sup> « L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement de la transposition didactique » Joël Briand (thèse, Université Bordeaux 1)

associée à ce type de situation est alors celle d'une «**grandeur**», au sens vulgaire de chose susceptible de devenir plus grande ou plus petite, mais cette « grandeur » bien qu'exprimée par des nombres (des rangs) n'est pas mesurable.

Dans un troc chaque partie a une préférence pour un des objets échangés. L'équivalence est une hypothèse sociale qui explique après coup pourquoi l'échange a eu lieu. Tout le commerce vit sur ce jeu entre la fiction d'une équivalence globale et la réalité d'une préférence locale.

3. Pour qu'une grandeur soit mesurable, il est nécessaire en plus qu'une certaine opération sur les objets (ou classes d'objets) qu'elle mesure corresponde à l'addition des mesures : mettre les segments bout à bout et alignés pour obtenir un segment somme, par exemple. C'est à cette dernière situation que nous réserverons le nom de **situation de mesure**.

Dès lors que je constitue la classe des objets que je peux échanger contre cet oiseau par leur prix commun, j'entre dans une situation de mesure.

En conclusion, l'univers des objets matériels peut ainsi être structuré en classes par des situations. Ces classes elles-mêmes peuvent être regroupées par d'autres situations en variables : nominales (simplement distinctes), ordinales, d'échelles (les différences de rang peuvent être additionnées) ou en mesures (à tout couple de classes on peut assigner une classe somme, l'association présentant les propriétés de l'addition).

Remarquons que nous conservons néanmoins notre triplet de départ : structuration de l'ensemble de départ, procédé d'attribution (à une classe à un rang) et structure d'arrivée (ensemble amorphe, ensemble ordonné). Aujourd'hui, l'ensemble des objets matériels ou théoriques susceptibles d'être mesurés ne cesse de s'agrandir ainsi que les méthodes et que les formes de mesure.

## ***L'univers des grandeurs et des mesures analogiques (5)***

Ne pourrait-on pas faire l'économie de cette structure numérique d'arrivée ainsi que celle de l'application ? Quelle serait « la » situation fondamentale de ce type d'étude ?

L'envergure ou le poids d'un oiseau ne sont plus des objets matériels. Quelles situations peuvent définir ces concepts ?

1. Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Appliquons la méthode utilisée ci-dessus: les choses qui peuvent se remplacer dans une même situation sont d'un certain point de vue équivalentes. Par exemple ce qui peut se comparer à l'aide des mêmes instruments. Les deux actions (mettre sur le peson et plaquer contre une règle), aboutissent à un même univers, celui des segments de droites. Mais si on examine l'effet des instruments, les classes d'objets obtenus seront différentes : la taille et le poids ne rangent pas les objets de la même façon. Les « grandeurs » sont donc aussi a priori différentes. Remarquons qu'ici encore pour déterminer une mesure, une situation doit associer la somme à la comparaison. A chaque grandeur sont associées des méthodes spécifiques pour effectuer la somme. La somme de deux vitesses ne se reconnaît pas facilement, celle des probabilités de deux événements non plus.
2. Il est possible de différencier ainsi les types de grandeurs par les situations (physiques, sociales commerciales etc. où elles s'utilisent). L'usage d'une balance au lieu d'un peson peut paraître définir la même grandeur dans certaines circonstances, mais il en existe qui différencient le poids de la masse.

Remarquons qu'il est nécessaire d'avoir bien en tête le concept d'envergure et probablement celui de segment pour savoir quoi faire avec l'oiseau, mais cela ne permet pas de conclure qu'il faut « apprendre » l'un avant l'autre. Les situations de comparaison permettront peut être de provoquer de façon dialectique l'émergence conjointe des situations et des connaissances nécessaires. Par exemple, une des situations de base de la mesure du hasard a sans doute été la notion d'équiprobabilité.

3. La définition des grandeurs par des classes d'équivalences d'objets donne l'idée qu'il devrait exister une mesure intrinsèque de ces objets, c'est à dire indépendante de la façon dont elle s'exprime numériquement. Un segment aurait ainsi une longueur quelle que soit l'unité utilisée pour exprimer sa mesure. Cette conception conduit à des raisonnements intuitifs, assez souvent économiques et féconds mais elle s'est heurtée à des difficultés qui ont conduit à l'abandonner presque partout dans la formalisation scientifique. En mathématique, au contraire, on ne s'est intéressé bientôt qu'aux procédés indépendants de l'expression numérique des mesures, et donc on a fait disparaître l'usage des unités.
4. L'idée de représenter une grandeur par une autre vient en partie de cette conception des grandeurs intrinsèques et de la possibilité très commune de mesurer une grandeur par l'intermédiaire d'une autre. Cette possibilité s'enracine dans les dispositifs matériels eux-mêmes comme dans le peson. Un tel système constitue alors une mesure analogique. Le triplet fondamental n'a pas disparu : l'un des espaces mesurables sert d'ensemble de mesure à l'autre et le procédé de mise en correspondance

assure le rôle de fonction mesure. Cette possibilité a été utilisée pour essayer de tourner la nécessité d'expressions numériques des mesures.

5. L'exploration des propriétés des espaces mesurables est indispensable. Celle des transformations définies sur les objets d'études qui laissent invariantes certaines mesures (par exemple l'étude des isométries en géométrie) est possible sans que jamais ces mesures soient exprimées numériquement. Cette approche a ouvert de très riches champs d'études mais elle a montré très vite ses limites. Notamment avec les problèmes de quadrature puis d'intégration. Depuis l'époque de LEBESGUE, l'étude directe des grandeurs est sortie du domaine des mathématiques.
6. Concrètement, diverses situations fondamentales de divers mesurages, calquées sur celle donnée plus haut pour les nombres naturels ont été expérimentées avec un certain succès (pour les mesures de longueur, d'aire ou d'angle par exemple)<sup>5</sup>. La genèse de la notion de fréquence et de probabilité a fait l'objet d'études plus originales<sup>6</sup>.

## ***L'univers des unités et des changements d'unités (6)***

La nécessité de recourir à une mesure numérique viendra donc des avantages matériels qu'elle procure ou du rejet de la possibilité d'utiliser une mesure analogique. Le partage d'un segment en sept segments égaux est possible (par exemple avec un bon réseau de parallèles équidistantes), mais le partage géométrique d'un cône (un tas de grains) en sept cônes égaux présente quelques difficultés !

1. Formellement, dans cet univers, **la mesure dite parfois concrète d'un objet lui fait correspondre un couple formé d'un nombre et d'une unité**. Les problèmes qui vont se poser dans cet univers seront des problèmes de choix et de changement d'unités ou des problèmes de correspondance entre des mesures de différentes variables ou grandeurs (équations aux dimensions). En ce sens tout système de numération est déjà un système de mesure d'un cardinal à l'aide d'une unité auxiliaire (ou de plusieurs).
2. Nous trouverons ici aussi tous les problèmes liés aux systèmes de mesure et en particulier au système métrique, avec à l'opposé les fractions et leur système complet d'unités intermédiaires.
3. Nous y trouverons aussi l'étude des divers procédés de construction des mesures, les mesures produits (qui correspondent à des intégrales multiples) comme l'aire, le volume... ou les mesures dérivées (vitesse, densité, débit, etc.).
4. Nous y trouverons, bien qu'un peu à part, les « **grandeurs scalaires** » ou à condition d'échelle : pourcentage, fréquence, probabilité, qui apparemment n'ont pas d'unité mais où justement l'unité est « le tout ». Les grandeurs « physiques » et les « grandeurs scalaires » s'opposent au moins autant par les conceptions heuristiques qu'elles activent que par leur nature..
5. Dans cet univers encore, nous trouverons des problèmes liés à des conceptions heuristiques de la mesure : les unes correspondent à l'idée de mesurer quelque chose de grand avec quelque chose de petit, avec toutes les méthodes pour se ramener à ce schéma. les autres à l'idée de mesurer quelque chose avec une autre chose à peu près aussi grande par commensuration. (exemples de situations : la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier dans N.& G. BROUSSEAU<sup>7</sup>)
6. Les situations fondamentales pour cet univers sont représentées par celle qui est utilisée par Nadine BROUSSEAU<sup>8</sup> au début du processus. Les élèves doivent communiquer des renseignements pour faire équilibrer exactement divers objets par des quantités de sable convenables en les plaçant sur les plateaux d'une balance ROBERVAL. Cette leçon due à François COLMEZ conduit les élèves à utiliser divers objets unités « identiques » disponibles en grand nombre (des clous, des plaquettes...) mais qui ne sont pas des multiples simples les unes des autres..

## ***L'univers du mesurage, métrologie, erreurs et approximations (7)***

A un objet réel, la réalisation effective d'une mesure ne fait correspondre en fait un nombre déterminé que si les conventions sociales le déclarent. Dans des situations où cette convention n'existe **pas l'image d'un objet est en fait un intervalle** (erreur, tolérance, intervalle de confiance), **ou plus précisément une distribution** (de probabilité par exemple). Nous avons donc un triplet fondamental différent.

---

<sup>5</sup> Articles de A. BESSOT, M. ARTIGUE, M.J. PERRIN, M.H. SALIN et René BERTHELOT

<sup>6</sup> Statistiques et probabilités au CM. C.R. de la \*\*\* rencontre de la CIEAEM à Bordeaux. (1974)

<sup>7</sup> Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, N.& G. BROUSSEAU, IREM de BORDEAUX (1986)

<sup>8</sup> « La mesure au CM1 » ouvrage cité

Ce modèle mathématique est plus complexe mais plus « réaliste » que les autres. L'univers qui lui est associé est celui de l'art du mesurage et de toutes les méthodes « pratiques » inventées pour mesurer commodément, et son étude celle de la métrologie.

des arts et des métiers

La taille des unités, et les propriétés ergonomiques

La forme des unités ?

La situation du verre d'eau va montrer que pour gagner en « vérité », pour dire des choses plus indiscutables, il faut qu'elles soient moins précises

### ***L'univers de la taille des mesures, de leur rareté et des ordres de grandeurs***

Mesurer un objet dans un des sens introduits ci-dessus, (un nombre, un nombre et une unité, un nombre et un intervalle de confiance ou une tolérance, ou une « erreur type » etc.) épuise-t-il complètement la question de savoir s'il est grand ou petit ? peut être que oui, si le destinataire possède une culture et des informations suffisante, mais en général non.

Par exemple

- Mon éléphant mesure deux mètres au garrot
- c'est un petit éléphant !
- mais il n'a qu'un ans
- alors c'est un jeune géant car 95% des éléphants de cet âge sont plus petits.

La question peut être cruciale lorsqu'il s'agit d'interpréter des mesures qui sont des indices important

(« votre vitesse de sédimentation est de 75 ». est ce que ça signifie que je suis malade ? ma culture dans ce domaine est nulle ! quelle vitesse de sédimentation pour les gens bien portants ? la moyenne risque de ne pas suffire quelle mesure pour l'écart ? seulement tant pour cent ont une vitesse supérieure à tant. Votre vitesse est trop élevée, il est plus vraisemblable que vous avez une inflammation par exemple peut être un rhumatisme articulaire). Il ne s'agit pas de donner l'intervalle de confiance d'une mesure, mais de comparer une valeur à une distribution qui indique avec quelles fréquence on trouve des valeurs supérieures. Ce système permet de comparer la taille d'une souris de 12 cm au garrot (énorme) avec celle de mon éléphant (moins « grand » parce que moins extraordinaire).

Mesurer un objet en mesurant son expression, sa mesure : nombre de chiffres pour les naturels (avec les décimaux le nombre de chiffres significatifs doit mesurer la qualité de la mesure) l'échelle des ordres de grandeur ...Linéariser pour mesurer : les puissances sonores...

### ***En conclusion***

Il est clair que chaque univers est caractérisé par préoccupations et des problèmes différents. Pour les identifier, il a fallu évoquer des situations différentes bien qu'elles dérivent toutes de même schéma général de la mesure. Il a fallu dire en quoi le jeu de l'homme à l'éléphant est différent de celui des enfants avec leurs clous, ou de ceux avec leur double décimètre pour mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier ?

Ce n'est pas la théorie des situations qui le dit, ce sont les mathématiques. La théorie est essentiellement un instrument de conversion des connaissances en situations sur lesquelles peuvent s'appuyer des raisonnements économiques et écologiques.

Il s'agit maintenant de les organiser en un processus didactique qui permette les apprentissages successifs. Cette question est évoquée dans le texte suivant.

Montréal, Juin 97