

L'analisi a-priori come strumento per la strutturazione di un percorso di insegnamento/apprendimento per moduli.

(M. Ajello)

Riassunto.

La strutturazione di un modulo di insegnamento rientra a pieno titolo tra le problematiche relative alla trasposizione didattica : si deve costruire un sapere da insegnare a partire da un sapere sapiente.

La scelta di una organizzazione modulare nasce dalla necessità di una programmazione scolastica che diventa più facilmente gestibile e controllabile nel momento in cui tutte le fasi del lavoro sono dettagliatamente predisposte e scandite in tappe di un unico percorso.

Definire gli obiettivi di un intervento didattico, le competenze necessarie per raggiungerli, i contenuti attraverso i quali muoversi e, in fine, gli esiti formativi in termini misurabili, è un compito che l'insegnante si assume nella piena consapevolezza che il punto di partenza non è solo la propria conoscenza dell'oggetto del sapere, ma i possibili stili di apprendimento degli allievi, pur con una ipotesi costruttiva, supponendo cioè che l'allievo costruisca le sue conoscenze matematiche passando attraverso la sua attività.

Per quanto riguarda la definizione dei "tempi" il discorso diventa ancora più controverso perché, pur riconoscendo che la pretesa di identificare il tempo di insegnamento con quello di apprendimento è uno dei maggiori motivi di fallimento scolastico, il curriculum scolastico è raramente personalizzato ed impone "tempi" che, alla fine, hanno rispondenza con l'insegnamento ma non con l'apprendimento. Si tratta allora di scelte che coinvolgono l'intera istituzione scolastica e che non possono essere fatte, in autonomia, dal singolo docente.

Con queste convinzioni le trasformazioni dell'oggetto del sapere, in vista del sapere di insegnamento, presuppongono delle scelte motivate e con una giustificazione epistemologica.

Il doppio ruolo di ricercatore-insegnante è allora il più adatto a chi si accinge a costruire i suoi percorsi di insegnamento/apprendimento, in un ottica in cui il materiale didattico prodotto diventa facilmente fruibile anche da altri perché ha una struttura che mette in luce l'intera procedura che lo ha portato a compimento.

L'analisi a-priori risponde perfettamente a quasi tutte le esigenze di una trasposizione didattica che consente di mettere a punto interventi didattici (organizzati in moduli) in linea con quanto detto in precedenza.

Le rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche daranno la possibilità di operare scelte, condivisibili e motivate, in termini di competenze da sviluppare e di contenuti da affrontare; l'analisi dei comportamenti ipotizzabili, terrà conto di errori, ostacoli della disciplina, misconcetti e conflitti, consentendo di individuare quelle attività che, nel rispetto di diversi stili cognitivi, favoriranno l'apprendimento.

Abstract.

The structuring of a teaching modulus makes part of problems concerning the didactic trasposition: it is necessary to build up a learning to teach beginning from a learned knowledge.

The choice of a modular organization starts from the need of a school programming which becomes easier to manage and control as soon as all the stages of the work are prepared in detail and scanned in stages of an only course.

One of the teacher's duties is to make clear the targets of a didactic intervention, the skills necessary to reach them, the contents

Through which to move end, finally, the formative teaching results which can be measured. In addition to this the teacher has to be aware that the starting point is not only his knowledge of the object of learning but also the possible students learning ways, maybe by a building hypothesis. That is supposing the learned builda up his mathematics knowledge passing through his activity.

As far as the definitio of "times" is concerned the argoment becomes more controversial, even admitting tha one of the most important reasons of school failure is to expect that teaching time is the same of learning time, school curriculum is rarely personalized and imposed times that finally coincide with teaching but not with learning. We have to make choices that involve the whole school institution and must not be done by the single teacher autonomously.

According to these opinios, the changes of the learning objet, in consideration of the knowledge of teaching, assume reasonable choices and are justified according to epistemology.

So the double role of researcher - teacher is the most suitable to whom is on the point of building his ways of teaching - learning, considering that the didactic material produced becomes more easily enjoyable by others as well because it has a structure which points out the whole procedure which has carried it out.

The a-priori analysis responds perfectly to almost all the requirements of didactic trasposition which permits to fix didactid interventions according to what we have already said about.

The epistemologic and historic- epistemologic representation will give the probability to make choices which can be shared and motivated, according to skills to develop and contents to deal with; behaviours will consider errors, difficulties of the branch of learning and conflicts, permitting to recognize those activities that will encourage learning, in compliance with the different styles of knowledge.

1.1 Introduzione

L'insegnamento modulare prevede che l'insegnante sia in grado di operare scelte significative per quanto riguarda le competenze/abilità che gli alunni dovranno acquisire, i contenuti a cui fare riferimento, le attività e le verifiche da svolgere.

La possibilità di utilizzare uno strumento efficace della ricerca in didattica, come l'analisi a-priori, è l'idea portante di questo lavoro che, con un esempio, cercherà di mettere in relazioni le varie fasi dell'analisi a-priori (F.Spagnolo 1998) con quelle relative alla costruzione di un modulo.

L'esperienza di ricerca in didattica della matematica attraverso la teoria delle situazioni (G. Brousseau 1986) è un grande vantaggio nel momento in cui si affrontano le questioni relative ai processi che investono l'insegnamento/apprendimento, ma una buona analisi disciplinare e l'esperienza diretta nella programmazione possono ugualmente essere i presupposti per l'approccio qui proposto.

Il modulo è il primo di geometria per un primo anno del biennio superiore : *la geometria elementare*.

1.2 La necessità di un modulo di geometria elementare

I recenti lavori di raccordo tra la scuola media e le superiori all'interno di gruppi che si sono occupati della continuità e dell'orientamento, hanno messo in luce che spesso la tendenza dell'insegnante di matematica al primo anno superiore è quella di sottovalutare o addirittura non considerare affatto lo studio della geometria degli anni di scuola media ed elementare per cercare di impostare un discorso che inizia con il metodo assiomatico/deduttivo della geometria euclidea e finisce per rendere odioso lo studio di tutta la geometria degli anni a venire.

La scelta di un modulo di geometria elementare è basata su i seguenti criteri (emersi dall'analisi delle difficoltà dei ragazzi e dall'immagine che si fanno della disciplina con una impostazione tradizionale):

- recuperare le conoscenze e le abilità acquisite nel corso di studi precedenti è un punto fondamentale nell'ottica della continuità e della verticalizzazione dei curricoli;
- l'uso dei teoremi già noti (teor. di Pitagora, di Euclide, similitudine o altro) nella risoluzione di problemi non deve essere sospeso in attesa che i suddetti teoremi vengano ufficialmente dimostrati;
- stimolare attraverso il disegno le rappresentazioni di immagini, relazioni, figure e quanto altro nella risoluzione di problemi permette una consapevolezza maggiore del ruolo di primo piano della geometria elementare;
- dare un posto rilevante al disegno delle figure, alla costruzione delle stesse e alle verifiche delle proprietà geometriche serve ad agevolare il processo di consolidamento dei percorsi legati alle immagini mentali che porteranno alle congetture e da qui alle dimostrazioni;
- posticipare le dimostrazioni al momento in cui in qualche modo se ne faccia intravedere la necessità è più utile che imporlo precocemente;

- seguire un percorso che tenga conto della storia delle idee dell'uomo presenta molti vantaggi (si vedrà più avanti).

2.1 Le rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche

(F.Spagnolo 1998) per la scelta delle competenze e di contenuti e metodi.

rappresentazioni epistemologiche e storico/epistemologiche	conoscenze, abilità, competenze	contenuti / metodi
dalle origini agli Elementi di Euclide: <ul style="list-style-type: none"> • (Erodoto) gli annodatori di funi: corrispondenza tra gli oggetti teorici e le operazioni sul terreno 	<ul style="list-style-type: none"> • saper costruire semplici figure • saper descrivere semplici figure • conoscere il vocabolario base della geometria 	<ul style="list-style-type: none"> • costruzione di semplici figure • descrizione di semplici figure perché siano costruite da altri
<ul style="list-style-type: none"> • disegni su terraglie e tessuti che presentano esempi di congruenze e simmetrie 	<ul style="list-style-type: none"> • saper osservare le congruenze e le simmetrie nelle immagini • saper riconoscere le simmetrie in natura e nelle figure geometriche note • saper descrivere le simmetrie di una immagine • saper far uso di simmetrie nel disegno libero e nella riproduzione di immagini 	<ul style="list-style-type: none"> • disegno di figure congruenti sul piano euclideo e sul piano cartesiano • ricerca degli assi di simmetria di una figura • costruzione di figure che presentano simmetrie
<ul style="list-style-type: none"> • la geometria connessa a problemi pratici ; gli strumenti utilizzati: <ul style="list-style-type: none"> - costruzioni - calcolo delle aree - le proporzioni - teorema di Pitagora - la similitudine 	<ul style="list-style-type: none"> • comprendere un problema geometrico • saper rappresentare attraverso figure un problema di natura geometrica (che utilizza la geometria elementare) • saper trovare un modello per la rappresentazione di un problema geometrico • saper proporre soluzioni per problemi geometrici 	<ul style="list-style-type: none"> • problemi di costruzione • problemi sulle aree dei poligoni • problemi con le proporzioni • problemi con il teorema di Pitagora • problemi con la similitudine
<ul style="list-style-type: none"> • la geometria di Talete : <ul style="list-style-type: none"> - riferimento a questioni pratiche - la misura dell'altezza delle piramidi egiziane (i triangoli simili) - inizio di una impostazione deduttiva 	<ul style="list-style-type: none"> • conoscere le linee generali della storia del pensiero matematico legate alla figura di Talete • saper misurare facendo uso della similitudine dei triangoli • saper riprodurre un disegno in scala • saper costruire un segmento 	<ul style="list-style-type: none"> • cenni di storia della matematica: Talete • utilizzo delle grandezze proporzionali nei triangoli simili per semplici misurazioni • le riproduzioni in scala • costruzioni che fanno uso del teorema di Talete

	quarto proporzionale fra tre dati	
<ul style="list-style-type: none"> • la geometria pitagorica: <ul style="list-style-type: none"> - il pentagono stellato - la divisione di un segmento in media ed estrema ragione (la sezione aurea) - i numeri figurati (i numeri triangolari, quelli quadrati, pentagonali) - i solidi regolari - rapporto di grandezze incommensurabili - il teorema di Pitagora 	<ul style="list-style-type: none"> • conoscere le linee generali della storia del pensiero matematico legate alla scuola pitagorica • saper trovare relazioni tra geometria elementare e aritmetica elementare • conoscere la differenza tra grandezze commensurabili e incommensurabili • saper costruire la sezione aurea di un segmento dato • comprendere la "potenza" delle regolarità geometriche 	<ul style="list-style-type: none"> • cenni di storia della matematica: Pitagora e la sua scuola • disegno dei numeri figurati • la sezione aurea di un segmento e i numeri di Fibonacci • i poligoni regolari in natura • i poliedri regolari in natura • le grandezze commensurabili e quelle incommensurabili • il teorema di Pitagora e le sue applicazioni
<ul style="list-style-type: none"> • I problemi di costruzione e alcune curve celebri nella Grecia: <ul style="list-style-type: none"> - i tre grandi problemi classici - le lunule - i luoghi geometrici 	<ul style="list-style-type: none"> • conoscere i grandi problemi della geometria greca • saper visualizzare semplici luoghi geometrici • conoscere figure geometriche meno usuali 	<ul style="list-style-type: none"> • cenni di storia della matematica del periodo greco classico • costruzione di "altre" figure geometriche • luoghi geometrici semplici
<ul style="list-style-type: none"> • il ragionamento deduttivo: <ul style="list-style-type: none"> - i Greci, "geometri filosofi", privilegiano il ragionamento deduttivo all'induzione, l'osservazione e la sperimentazione - disprezzo delle classi colte della Grecia classica nei confronti degli affari pratici (Platone) - la logica aristotelica 	<ul style="list-style-type: none"> • saper formulare una congettura • saper utilizzare il passaggio dal generale al particolare in una argomentazione • conoscere il vantaggio di un processo di astrazione e/o generalizzazione • comprendere il valore del "poter dimostrare" le proprietà osservate nelle figure • comprendere la differenza tra assiomi e teoremi • saper seguire i passi di semplici dimostrazioni geometriche • saper distinguere una verifica da una dimostrazione 	<ul style="list-style-type: none"> • le proprietà delle figure piane note • verifiche di proprietà geometriche • classificazione di figure in base alle loro proprietà • scelta dell'enunciato dei teoremi più noti • le conseguenze di alcune proprietà e di alcuni teoremi • introduzione ad una teoria assiomatica

2.2 Perché la storia della matematica nella didattica?

Per tre motivi fondamentali:

1. Conoscere e avere presente l'evoluzione delle idee è per l'insegnante un valido aiuto per le rappresentazioni epistemologiche e quindi per le scelte didattiche, e in più è indispensabile per la percezione dei tempi di apprendimento e per tutti i processi che richiedono una rielaborazione personale. Un esempio: la definizione che attualmente si usa nei testi scolastici per il limite di una funzione è venuta fuori molti anni dopo rispetto al concetto di limite e anche alle sue applicazioni. Perché non aspettare quindi che l'alunno, dopo aver recepito l'aspetto concettuale, sia "pronto" ad accettare una definizione formalmente ineccepibile ma obiettivamente non semplice?
2. Far conoscere agli alunni le origini delle idee, dei problemi, delle teorie che hanno reso la matematica la disciplina che oggi studiano, la rende più concreta, più vicina alle esigenze umane e quindi, forse, anche più appassionante come metodo di indagine.
3. I racconti sui personaggi, spesso anche gli aneddoti, oltre a rimanere impressi nella memoria come le favole, servono a smitizzare la matematica e i matematici e creano un nuovo rapporto con la disciplina .

3.1 L'analisi dei comportamenti ipotizzabili per la definizione delle attività:

In ricerca in didattica, l'analisi dei comportamenti ipotizzabili (F. Spagnolo 1998) consente di formulare ipotesi circa le "responsabilità" di alcuni processi di apprendimento o, meglio del ritardo di tali processi. In questo contesto se ne farà un uso diverso ma, fondamentale, basato sullo stesso principio di "responsabilità" dell'azione didattica nei confronti della formazione dei concetti.

Prendendo in considerazione i possibili errori, e analizzando la natura degli stessi, sarà più facile definire quale tipo di attività prevedere, relativamente ai diversi contenuti, per raggiungere un apprendimento efficace e duraturo, venendo incontro alle difficoltà degli alunni con consapevolezza.

Brevemente, escludendo gli errori dovuti alla mancata applicazione allo studio, tra le possibili cause di errori, alcune sono riconducibili a misconcetti, conflitti e ostacoli (B. D'Amore 1999).

unità didattiche	comportamenti ipotizzabili	attività
costruzioni di figure geometriche piane	<ul style="list-style-type: none">• l'alunno, che non conosce le tecniche di costruzione con riga e compasso ricorre alle misurazioni di segmenti e angoli incorrendo in determinazioni imprecise e approssimative• tracciare la perpendicolare ad una retta data, non orizzontale rispetto al piano, risulta più	<ul style="list-style-type: none">• costruzioni con riga e compasso e/o con Cabri:<ul style="list-style-type: none">- punto medio e asse di un segmento- trasporto di un angolo dato- bisettrice di un angolo- perpendicolare ad una retta data, obliqua, da un punto dato- parallela ad una retta data per un punto dato

	<p>difficile che farlo quando la retta data è orizzontale (verticale e orizzontale sono il modello mentale più diffuso di perpendicolarità)</p> <ul style="list-style-type: none"> • la conoscenza approssimativa dei termini usati comporta difficoltà espressive e di comprensione • l'uso del software Cabrì favorisce il rapporto con il disegno e le costruzioni 	<ul style="list-style-type: none"> - circonferenza per tre punti assegnati - dividere un segmento dato in n parti congruenti - inscrivere poligoni regolari in una circonferenza assegnata • gioco a squadre per imparare le definizioni corrette dei termini più usati • stesura di schede per le costruzioni effettuate con la descrizione dei procedimenti
simmetrie e congruenze	<ul style="list-style-type: none"> • l'alunno considera quasi sempre, come figure, poligoni regolari e dà per scontate le simmetrie; non è abituato a cercarle e quindi non le riconosce in generale nelle immagini che osserva • riconoscere congruenze tra figure che sono rappresentate in contesti diversi è una difficoltà visiva frequente dovuta spesso ad una mancanza di attenzione nell'osservazione 	<ul style="list-style-type: none"> • ricerca di immagini che presentano simmetrie e congruenze • ricerca di simmetrie e congruenze in natura • osservazione di disegni, quadri, fotografie, ecc.. che presentano simmetrie e congruenze • disegno sul foglio a quadretti di figure che presentano simmetrie • disegni di figure congruenti e di figure che presentano simmetrie con Cabrì e descrizione scritta dei passi perché siano eseguiti da altri compagni
problemi geometrici	<ul style="list-style-type: none"> • la formulazione scolastica della maggior parte dei problemi proposti differisce qualitativamente (il modello è già implicito nella categoria a cui il problema appartiene) da eventuali problemi reali, questo è uno dei motivi per cui l'alunno non è in grado di affrontare situazioni problematiche al di fuori del contesto scolastico • la ricerca della soluzione non segue alcuna successione di passi ma procede per libere associazioni, conducendo alla soluzione solo casualmente, senza la possibilità di riprodurre un metodo di indagine e di effettuare un 	<ul style="list-style-type: none"> • strutturare problemi con gli alunni che prendano spunto da situazioni reali • cercare, con gli alunni, una metodica da seguire per la risoluzione di un problema • analizzare modelli diversi e utilizzare testi chiari • utilizzare tecniche di lavoro in gruppo per affrontare una qualsiasi situazione/problema che prevede scelte di rappresentazioni e strategie risolutive • proporre una gamma di problemi molto vasta che comprenda anche problemi con più soluzioni e problemi che non ammettono soluzioni • scegliere i problemi utilizzando anche libri diversi da quello in

	<p>feedback</p> <ul style="list-style-type: none"> • la mancanza di abitudine al confronto e allo scambio di opinioni , crea situazioni di fissità funzionale • l'alunno si aspetta che ci sia sempre una o più formule da applicare e sottovaluta altri possibili aspetti determinanti (informazioni evidenti ma inattese) 	<p>adozione per offrire maggiore varietà anche nel linguaggio</p> <ul style="list-style-type: none"> • proporre l' autocorrezione dei problemi scambiando gli elaborati tra i diversi gruppi • scegliere, con gli alunni, i problemi più interessanti e significativi e cercare una possibile classificazione (secondo l'argomento, il modello, ecc..)
la geometria di Talete	<ul style="list-style-type: none"> • l'alunno ha difficoltà a riprodurre un disegno in scala • l'alunno non sa utilizzare le proporzioni fra grandezze geometriche • riconoscere gli elementi in proporzione fra due figure geometriche presuppone un addestramento all'osservazione 	<ul style="list-style-type: none"> • le misurazioni più famose di Talete, come vengono narrate • riproduzioni di figure in scala su carta a quadretti e con Cabrì • misurazioni di figure in scala con Cabrì • costruzione di figure con elementi in proporzione con Cabrì • applicazioni del teorema di Talete in ambiti diversi
la geometria di Pitagora	<ul style="list-style-type: none"> • l'alunno, pur conoscendo bene l'enunciato del teorema di Pitagora, non ne conosce gli ambiti di applicazione • il passaggio dalla geometria all'aritmetica e viceversa mette in difficoltà molti alunni • la sezione aurea offre molte possibilità di contatti con altri campi del sapere (si può tenere conto di stili di apprendimento diversi) 	<ul style="list-style-type: none"> • il lavoro della scuola pitagorica, come viene narrato • verifica del teorema di Pitagora con Cabrì • scoprire le particolarità dei numeri di Fibonacci • applicazioni del teorema di Pitagora nella risoluzione dei problemi • riproduzione dei numeri figurati dei pitagorici con Cabrì • costruzione di poligoni regolari con Cabrì • disegno del pentagono stellato • costruzione di segmenti commensurabili e incommensurabili
le curve celebri e i problemi di costruzione	<ul style="list-style-type: none"> • l'alunno riconosce come figure geometriche solo quelle (triangoli, rettangoli, ecc..) che ha avuto modo di incontrare a scuola • alcuni semplici esempi di luoghi geometrici, anche se l'argomento sarà affrontato in modo più approfondito in un secondo momento, favoriscono 	<ul style="list-style-type: none"> • gli studi di geometria della Grecia classica, come vengono narrati • costruzione "libera" di figure con Cabrì • costruzioni di semplici luoghi geometrici con Cabrì • scoprire le proprietà delle figure geometriche "inventate" • classificare le figure con criteri diversi

	la formazione del concetto di figura geometrica	<ul style="list-style-type: none"> • descrizione della costruzione delle figure inventate
Introduzione al ragionamento deduttivo	<ul style="list-style-type: none"> • l'alunno non sa utilizzare il passaggio dal generale al particolare (spesso inverte il ragionamento) • il ruolo dell'ipotesi e della tesi, in un teorema, viene spesso scambiato • dimostrare un teorema è considerata un'operazione inutile e superflua • l'alunno non riesce a seguire i passi di una dimostrazione • verifica e dimostrazione vengono spesso considerate equivalenti • il ruolo degli assiomi è spesso sottovalutato (gli assiomi sono solo proprietà che non si dimostrano) 	<ul style="list-style-type: none"> • utilizzare le classificazioni per dedurre le proprietà delle figure • visualizzazione con gli insiemi delle classificazioni delle figure • formulazione di congetture a partire dalle osservazioni • risoluzione di semplici esercizi di geometria sintetica che richiedono deduzioni come attività di gruppo • confronto tra verifiche e dimostrazioni • definizione delle regole di un giuoco • modifica delle regole : un nuovo gioco • dimostrazioni elementari di semplici proprietà geometriche come attività di gruppo

3.2 La definizione degli esiti formativi

Gli esiti di formazione, strettamente correlati al superamento delle difficoltà evidenziate dall'analisi dei comportamenti, riprendono le competenze precedentemente determinate per il modulo.

L'allievo deve:

- a. costruire semplici figure con il software Cabrì
- b. descrivere semplici figure utilizzando il linguaggio della geometria
- c. riconoscere congruenze e simmetrie
- d. affrontare, cercandone la soluzione, un problema geometrico
- e. riconoscere gli ambiti di applicazione del teorema di Talete
- f. riconoscere gli ambiti di applicazione del teorema di Pitagora
- g. conoscere semplici luoghi geometrici
- h. verificare le proprietà delle figure note
- i. classificare le figure in base alle proprietà
- j. essere in grado di formulare congetture relative alle proprietà geometriche
- k. essere in grado di seguire i passi di un procedimento deduttivo

3.3 Conclusioni

La costruzione di una verifica di fine modulo potrebbe completare il presente lavoro.

È anche possibile, però, percorrere una strada meno battuta ma forse più significativa.

Per valutare il raggiungimento degli esiti previsti si potrebbe, semplicemente, fare riferimento ai "prodotti" dei ragazzi realizzati durante lo svolgimento delle attività in classe, valorizzando così anche altre competenze che hanno, per esempio, consentito al singolo alunno di organizzare e gestire il proprio lavoro con Cabrì, e di utilizzare il patrimonio di conoscenze e abilità già in suo possesso, nello svolgimento delle attività proposte.

Aver raccolto tutti i materiali prodotti da un ragazzo in un dossier (eventualmente elettronico) consentirebbe di avere precise indicazioni sul percorso che l'alunno sta compiendo e darebbe la possibilità, quindi, di intervenire in maniera mirata e precoce. Inoltre, una prassi del genere potrebbe favorire un impatto più costruttivo, da parte dell'allievo, con le valutazioni che andrebbero a valorizzare il suo operato e le sue attitudini.

BIBLIOGRAFIA

1. M. Kline (1991), *Storia del pensiero matematico*, 2 voll. Einaudi, Torino.
2. C. B. Boyer (1980), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
3. G. Brousseau (1987), *Fondements et Methodés de la Didactique des Mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques 7, 2, 33, 115.
4. F. Spagnolo (1998) *Insegnare la matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze.
5. F. Speranza (1983), *Matematica per gli insegnanti di matematica*, Zanichelli, Bologna.
6. B. D'Amore (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna.
7. P. Freguglia (1977), *I fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano.
8. E. Giusti (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
9. U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
10. E. Castelnuovo, M. Barra (1976), *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino.
11. B. Spotorno, V. Villani (1976), *Mondo reale e modelli matematici*, La Nuova Italia, Firenze.
12. J. Piaget (1982), *Il pensiero matematico*, Emme, Milano.
13. L. S. Vygotskij (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino.
14. I. Bordallo, J. P. Ginestet (1999), *Didattica per progetti*, La Nuova Italia, Firenze.
15. P. Vayer (1999), *La dinamica dell'azione educativa*, ed. italiana a cura di M. Camuffo, Phoenix Editrice, Roma.
16. G. Gasperoni (1997), *Il rendimento scolastico*, Il Mulino, Bologna.