ASPETTI DIDATTICI DELLO STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE:
L'*Offerta Musicale* di J. S. Bach

di Daniela Galante[1]

Riassunto.
Ciò che oggi è oggetto di discussione è "quale matematica insegnare" e "come insegnarla".
Col presente lavoro intendo dare un modesto contributo all'attuale dibattito mettendo in evidenza, nell'ambito dell'interdisciplinarietà, alcuni aspetti paralleli fra la matematica e la musica, perchè entrambe, nate come attività intellettuali e creative fin dalle origini della specie umana, da sempre sono in stretta relazione.
Oggetto di indagine sono le trasformazioni geometriche "scoperte" nella costruzione di incisi melodici e applicate alla popolare melodia *Frère Jacques.* Nella seconda parte viene analizzata la rigorosa applicazione delle isometrie che J. S. Bach realizza, con precisione scientifica, nell'*Offerta Musicale.*

Abstract.
What today is a topic of discussion is "which mathematics to teach" and "how to teach it."
With this work I would like to give a modest contribution to the present debate by focusing, in a multi-discipline context, some parallel aspects between mathematics and music because both subjects, born as intellectual and creative activities at the dawn of mankind, have always been in close relationship.
Object of the investigation are the geometrical transformations "discovered" in the construction of tune bits and applied to the popular tune *Frère Jacques.* In the second part the application of the isometries that J. S. Bach makes, with a scientific precision, in the *Music Offer*, is analysed.

Résumé.
Ce qui aujourd'hui est l'object de discussion c'est "quelle mathématiques enseigner" et "comment les enseigner."
Pour ce travail je désire donner une petite contribution à l'actuelle discussion en mettant en évidence, dans le domain de l'interdisciplinaireté, quelques aspects parallels entre les mathématiques et la musique parce que toutes les deux, nées comme des activités intellectuelles et créatives dès les origines de l'espèce humaine, en étroite connection dès toujours.
Object d'enquete sont les transformations geometiques "découvertes" dans la construction de pièces de mélodie et appliquées à la mélodie populaire *Frère Jacques.* Dans la deuxième partie on analyse la rigoureuse application des isometries que J. S. Bach réalise, d'une précision scientifique, dans l'*Offre Musicale*.

[1]Relazione tenuta presso il Seminario del G.R.I.M. il 21-12-1998.
La sua realizzazione è stata effettuata con l'ausilio della tastiera portatile e del registratore per il riscontro uditivo degli incisi melodici e dell'*Offerta Musicale*.

INTRODUZIONE

Da sempre, la matematica ha presentato e presenta stretti legami col mondo reale. Possiamo anzi dire che storicamente la maggior parte delle teorie matematiche ha tratto origine dall'esigenza di quantificare, misurare, descrivere, schematizzare e razionalizzare particolari aspetti della realtà.

Recentemente poi, la matematica ha assunto una costante maggiore rilevanza non solo nell'ambito della fisica, dell'ingegneria, dell'economia, ma anche per numerose altre discipline, un tempo ritenute "lontane" dalla matematica, quali per esempio chimica, biologia, medicina, scienze sociali e discipline artistiche.

Un insegnamento moderno della matematica non può assolutamente ignorare questi legami fra matematica e realtà, se non vuole ridursi a uno sterile esercizio di abilità formali destinati ad un rapidissimo oblio al di fuori delle aule scolastiche.

Si tratta dunque di insegnare a riconoscere la matematica "implicita" nelle più svariate situazioni del mondo reale; occorre abituare gli allievi a scegliere essi stessi le variabili significative per la soluzione di un determinato problema; occorre stimolarli a costruire opportuni modelli matematici e a valutare l'adeguatezza o meno di un modello alla situazione che si intende schematizzare.

Con queste considerazioni, si può dunque supporre che ci si avvii a cambiare qualcosa nell'insegnamento della matematica, non solo dal punto di vista dei contenuti, ma anche, auspicabilmente, delle metodologie didattiche.

Il tema centrale della dualità contenuto-metodologia sottintende il ruolo culturale della matematica e nel caso specifico di una sua branca come la geometria, il rinnovamento contenutistico può significare una rivisitazione alla luce degli sviluppi recenti della disciplina, delle sue applicazioni e degli aspetti interdisciplinari.

In questi ultimi anni, sotto la spinta dell'evoluzione del pensiero matematico, si è aperto un vivace dibattito fra gli insegnanti e i ricercatori sulla necessità di apportare modifiche ai programmi di matematica, sia per adeguarli alle nuove esigenze dello sviluppo tecnologico, sia per dare agli allievi della scuola secondaria superiore un'idea dei temi propri della ricerca matematica moderna.

In questo senso svolgono un ruolo rilevante le trasformazioni geometriche: si pensi alle simmetrie nell'arte, nella natura e nella struttura dei cristalli e delle molecole.

Lo scopo dello studio delle trasformazioni geometriche è quello di mostrare come lo studio delle figure geometriche possa essere affrontato anche da un punto di vista diverso a quello proprio della geometria euclidea. Infatti, seguendo la proposta di Felix Klein (1849-1925) avanzata nel Programma di Erlangen del 1872, è possibile affrontare lo studio delle figure geometriche introducendo il concetto di trasformazione e individuando le loro proprietà in base agli elementi che in esse risultano invarianti. E' opportuno, tuttavia, far notare che questo nuovo metodo di studio non è antitetico a quello della geometria euclidea, bensì complementare ed anzi rispetto ad esso comprensivo e generale; com'è noto, infatti, mediante l'introduzione del concetto di gruppo di trasformazioni Klein fu in grado di fornire un quadro riunificato di tutte le geometrie costruite in precedenza.

In particolare il presente lavoro mette in risalto l'aspetto interdisciplinare dello studio delle trasformazioni geometriche con la musica.

Purtroppo il sistema scolastico italiano tende a separare le discipline per cui lo studio della musica viene ghettizzato all'interno dei Conservatori non tenendo conto che questa disciplina può essere di supporto per la comprensione e l'interiorizzazione di altre.

Contrariamente a quanto avviene in Italia, nella comune coscienza pedagogica europea ed exstraeuropea, la conoscenza del linguaggio musicale svolge un ruolo essenziale nella formazione del cittadino contribuendo in modo significativo alla sua formazione complessiva.[2]
Infatti, le principali funzioni che la musica è in grado di svolgere possono essere così identificate: conoscitiva, linguistico-comunicativa, cognitiva, culturale, critica, estetica, affettiva. Questo insieme di potenzialità può tradursi in suggerimenti concreti fondamentali per elaborare progetti di insegnamento articolati ed organici alla logica della disciplina e collegati con gli altri rami del sapere.
Volendo fare un esempio basta tener conto del fatto che spesso i ragazzi che frequentano i licei hanno difficoltà nell'apprendimento della matematica per la mancanza dei comuni organizzatori cognitivi come mettere in relazione d'ordine, di equivalenza, di proporzione (già solo la lettura ritmica sviluppa tutte queste capacità), classificare sapendo cogliere aspetti o caratteristiche comuni, impiegare sistemi di riferimento variabili. Il problema spesso è alla base: infatti, molti di questi ragazzi non hanno avuto la possibilità da bambini di "giocare" con la musica che contrariamente alla convinzione comune è non solo una disciplina dilettevole ma un linguaggio che intrisecamente possiede regole rigorose e strettamente matematiche.
Con questo lavoro mostro un esempio di come con l'ausilio della musica sia possibile non solo vedere le possibili applicazioni delle trasformazioni geometriche ma anche ascoltare l'effetto che possono avere su una melodia e ciò a mio avviso rende lo studio della geometria decisamente più coinvolgente.
Qualcuno si chiederà come si può realizzare una lezione di questo tipo? Attualmente, è possibile realizzarla solo nella scuola media e nel liceo sociopsicopedagogico, perché in esse è presente lo studio di entrambe le discipline con una corrispondenza dei programmi. Bisogna comunque tener conto che l'interdisciplinarietà si attua con un programma di collaborazione fra gli insegnanti che può far comprendere ai ragazzi l'unità della cultura nella diversità dei linguaggi.
Quando ascoltiamo un brano musicale la prima cosa che ci attrae è il senso di equilibrio ossia la simmetria. Quando diciamo che una figura è "simmetrica" intendiamo che possiamo applicare certe isometrie, che lasciano l'intera figura immutata mentre permuta le sue parti. In geometria euclidea si definisce una isometria come un'applicazione (biunivoca e continua) del piano in se che conserva la distanza.
Esempi di isometrie sono: la traslazione, la riflessione e la rotazione.

[2] A partire degli inizi del '900 si è prodotta, principalmente in Europa, una riflessione sistematica sull'*Educazione Musicale* che ha condotto alla formulazione di metodi pedagogici altamente formativi, come quelli di E. J. Dalcroze(1865-1950), C. Orff (1895-1982), E. Willems (1890-1978), e Z. Kodàly (1882-1967).

LA TRASLAZIONE

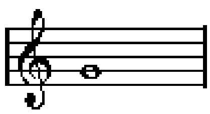
La *traslazione*[3] di un vettore **v** è l'applicazione τ_v che ad ogni punto *P* del piano associa il punto *P'*= τ_v (*P*) tale che il segmento orientato di primo estremo *P* e secondo estremo *P'* rappresenti il vettore **v**.

In musica possiamo riconoscere delle trasformazioni geometriche. Infatti, in molte forme polifoniche come il *canone* e la *fuga* una melodia o *tema principale,* intesa come una ordinata successione di suoni aventi altezze diverse, viene prima esposta da un' unica voce (o strumento) e mediante opportune trasformazioni di seguito è affidata alle altre voci.

In pratica alcune trasformazioni della melodia utilizzate nella tecnica compositiva corrispondono proprio alla traslazione.

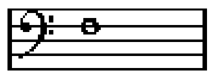
Prendiamo il piano (*x*,*y*) e riportiamo sull'asse *x* il tempo che in musica corrisponde a una successione di battiti ad intervalli costanti (quelli prodotti, per esempio, da un metronomo) e sull'asse *y* l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto. Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge *f* in modo che $y = f(x)$. Ciò premesso scegliamo come unità di misura il minuto secondo e l'abbiniamo alla figura musicale semiminima (velocità metronomica ♩ = 60) per l'asse *x* e il semitono[4] temperato per l'asse *y*; possiamo così avere una rappresentazione grafica mediante quadretti che simultaneamente indicano il valore di durata di ogni singolo suono, ossia il loro scorrere nel tempo e l'altezza assoluta di ognuno di esso riferita alla scala temperata (un quadretto rappresenta il tono).

Inoltre, nella scrittura musicale le note segnate sul pentagramma ricevono il loro nome e indicano una loro altezza assoluta grazie all'impiego delle *Chiavi*[5]*: ad esempio alla chiave di violino corrisponde la nota* *sol* nella seconda linea e alla chiave di basso la nota *fa* nella quarta linea.



Sol

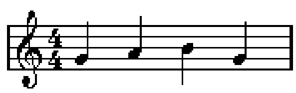
Chiave di violino o di *Sol*



Fa

Chiave di basso o di *Fa*

Di conseguenza, se poniamo come origine del nostro sistema di riferimento, cioè $y = 0$, l'altezza del suono corrispondente ad un *sol*, la seguente melodia:



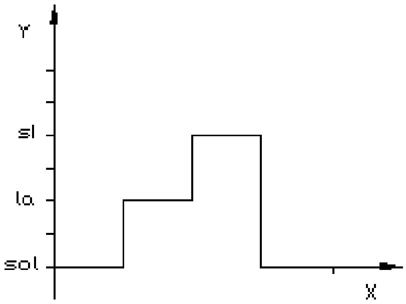
---

[3]Maria Dedò, Trasformazioni Geometriche, ed. Zanichelli, pag. 8.

[4]E' la distanza, fra un qualsiasi suono della scala temperata e il suo immediatamente successivo, sia in senso ascendente che discendente. Esso è l'intervallo più piccolo del nostro sistema musicale e corrisponde alla metà di un tono.

[5]Si tratta di simboli grafici che, fissando sul pentagramma la posizione di un certo suono, stabiliscono, in rapporto a questo, la posizione di tutti gli altri.

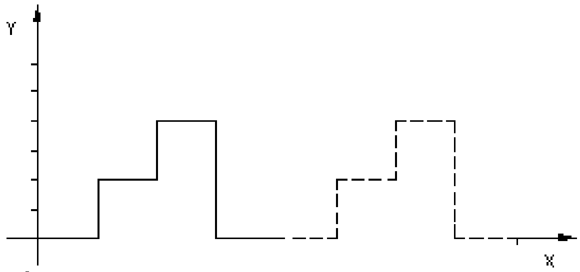
può essere rappresentata da:

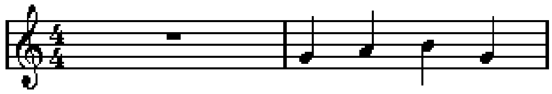


La traslazione in musica corrisponde a una tecnica compositiva adoperata da secoli per sviluppare polifonicamente una melodia.

Così la melodia già esaminata può essere:

a) traslazione rispetto all'asse *x*



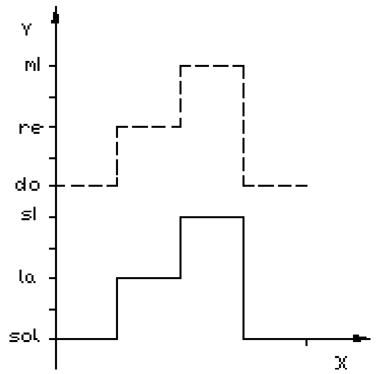


——— rappresentazione originale

_ _ _ _ rappresentazione del traslato

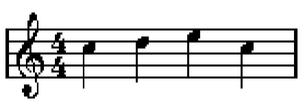
La melodia traslata viene eseguita dopo il momento di silenzio indicato dalla pausa che in questo caso corrisponde al valore dell'intera battuta.

b) traslazione rispetto all'asse *y*



——— rappresentazione originale

_ _ _ _ rappresentazione del traslato



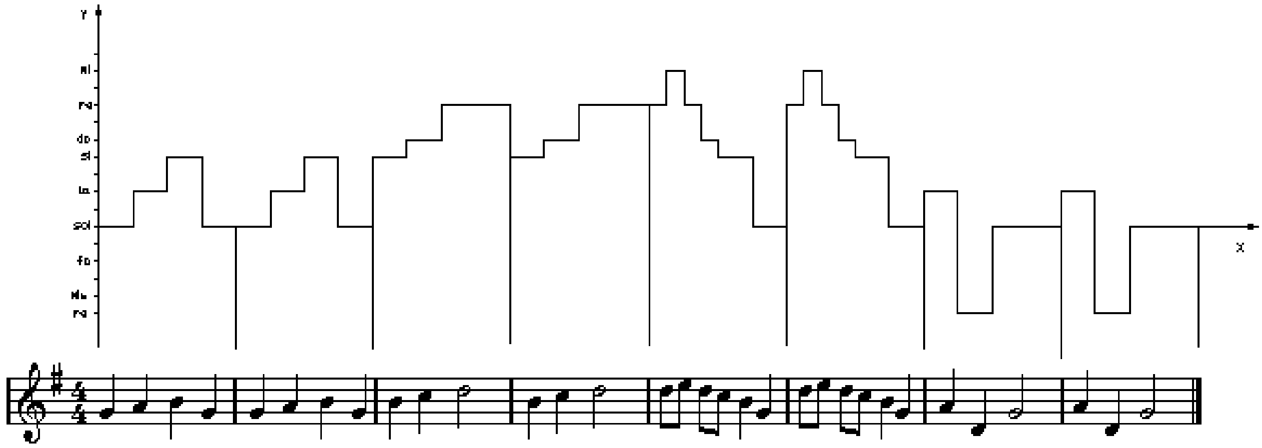
La melodia traslata viene eseguita una quarta sopra: ciò vuol dire che tutti i suoni sono stati innalzati di due toni e un semitono, riproducendola stessa melodia ad una altezza superiore.

Prendendo spunto da un articolo di Benedetto Scimemi[6] possiamo vedere un esempio completo di traslazione lungo l'asse *x* attraverso la popolare melodia *Fra Martino campanaro* (ovvero *Frère Jacques*) che è formata da quattro incisi ciascuno ripetuto due volte.

---

[6] "Contrappunto Musicale e trasformazioni geometriche", Matematica e Cultura, atti del convegno di Venezia, 1997.

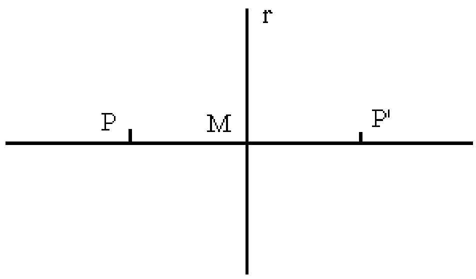
Il risultato è il seguente:



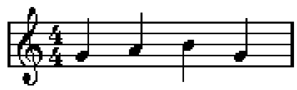
Scrittura tradizionale e grafico della melodia *Fra Martino*

LA RIFLESSIONE

La *riflessione*[7] *in una retta* r è l'applicazione $\sigma_r(P)$ che ad ogni punto P del piano associa il punto $P'=\sigma_r(P)$ che appartiene alla perpendicolare a r per P e tale che r intersechi il segmento PP' nel suo punto medio; in particolare, se $P\in r$, allora $\sigma_r(P)=P$.



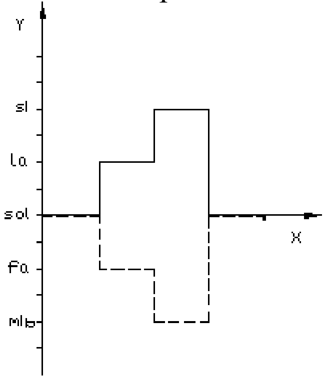
Un' altra tecnica compositiva frequentemente utilizzata per sviluppare una melodia è la *riflessione.*
Osserviamo nuovamente la melodia prima esposta:

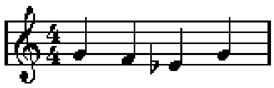


Avremo le seguenti riflessioni:

[7]Maria Dedò, op. cit., p.8.

a) riflessione rispetto all'asse *x*





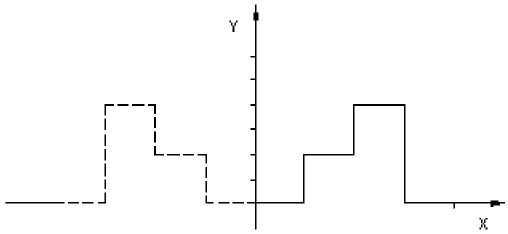
rappresentazione originale

rappresentazione del riflesso

Gli intervalli della melodia originale sono eseguiti in senso inverso: ciò vuol dire che il primo intervallo che è di un tono ascendente nella riflessione diventa un tono discendente. Per mantenere inalterata la distanza nel secondo intervallo della melodia riflessa si è dovuto alterare il mi in mi *bemolle* (*b*).

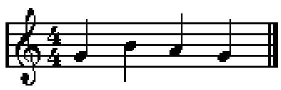
In musica questa trasformazione ha il nome di *canone per moto contrario* o *inversione* o ancora *canone a specchio* quando melodia originale e riflessa iniziano simultaneamente.

b) riflessione rispetto all'asse *y*



rappresentazione originale

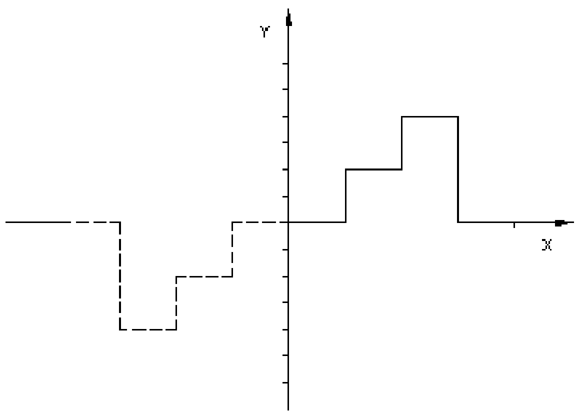
rappresentazione del riflesso



La melodia riflessa è costituita dalle stesse note alla stessa altezza di quella originale in una successione di suoni a ritroso: essa inizia dall'ultima nota della melodia originale per concludere con la prima.

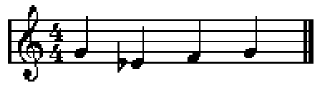
In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado* o *canone a granchio*.

c) simmetria rispetto all'origine (composizione delle riflessione rispetto all'asse *x* e all'asse *y*)



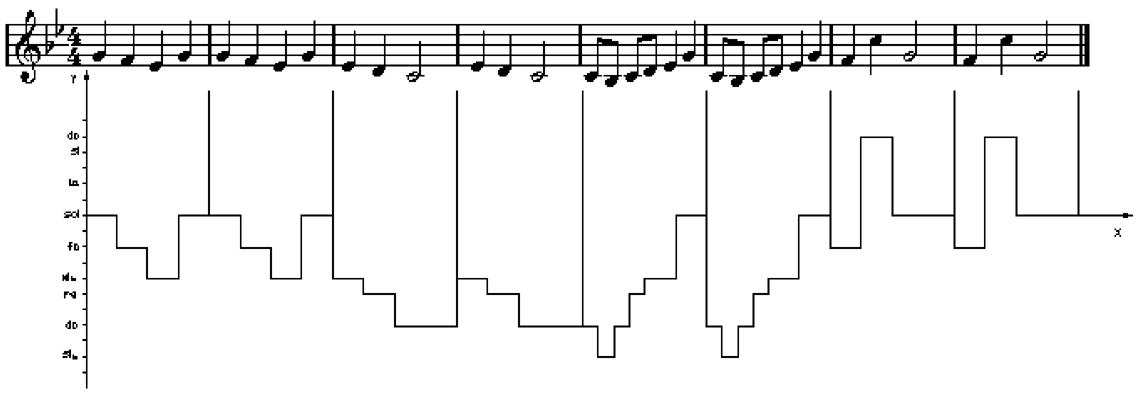
rappresentazione originale

rappresentazione del riflesso



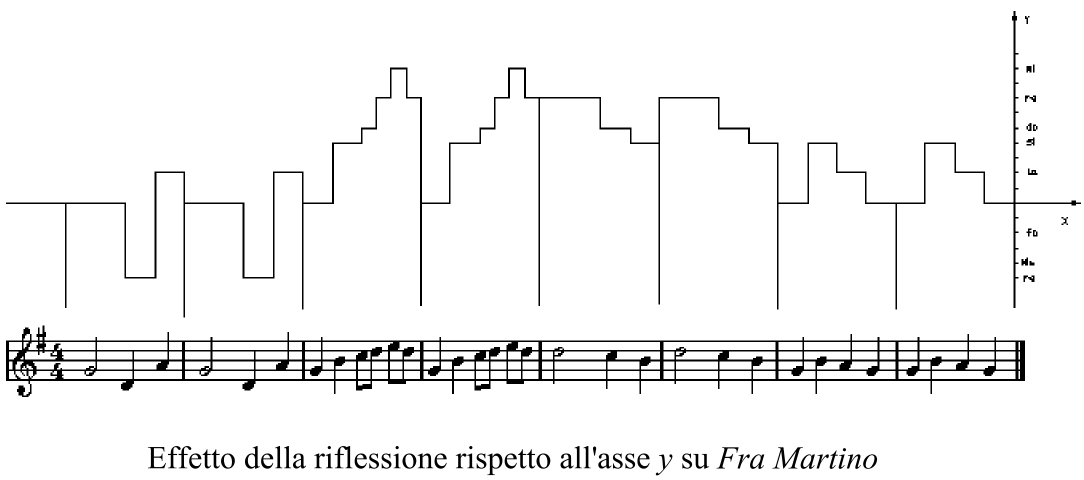
La melodia riflessa si costruisce dalla composizione simultanea delle riflessioni a)e b): in pratica si invertono gli intervalli e si procede a ritroso.

In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado dell'inverso*.
Utilizzando nuovamente la melodia *Fra Martino* ed applicando ad essa la riflessione lungo l'asse *x* otteniamo una sensazione malinconica caratteristica del modo minore che non sfuggirà a chi avrà l'occasione di ascoltarla.
Il risultato grafico è il seguente:



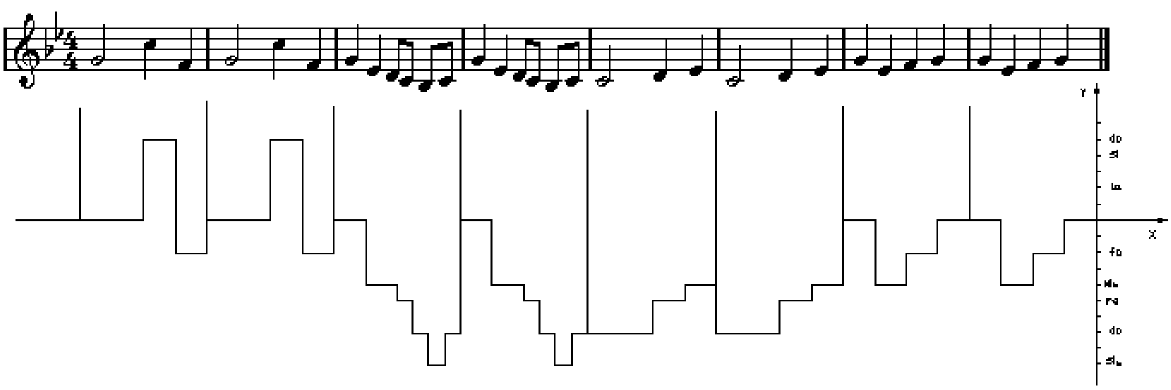
Effetto della riflessione rispetto all'asse *x* su *Fra Martino*

Per quanto riguarda la riflessione rispetto all'asse *y* va osservato che la melodia rovesciata ha un significato assai diverso da quello originale e in questo caso assume un carattere solenne e da marcia, rafforzato dal rapporto fra la struttura ritmica del brano e i valori di durata dei suoni della melodia; infatti, all'inizio di ogni inciso si trova la figura musicale di maggior valore (la minima o rispetto alla semiminima e questa rispetto alla croma) diversamente da quanto avviene nella melodia originale.
Il risultato grafico è il seguente:



Effetto della riflessione rispetto all'asse *y* su *Fra Martino*

Infine, la riflessione rispetto all'origine modifica profondamente la melodia originale. Per mantenere inalterati gli intervalli il modo maggiore è diventato minore e la melodia assume un carattere introspettivo e intimistico evidenziato dall'andamento della successione dei suoni che procede prima verso le note gravi e poi verso il punto d'origine, esattamente l'inverso della melodia originale.



Effetto della simmetria rispetto all'origine su *Fra Martino*

LA ROTAZIONE

La *rotazione*[8] *di centro* O e angolo α è l'applicazione $\rho_{O,\alpha}$ che ad ogni punto *P* del piano associa il punto $P' = \rho_{0,\alpha}(P)$ tale che $d(O,P) = d(O,P')$ e $P\hat{O}P' = \alpha$.

Anche in questo caso, l'apprendimento del concetto matematico di rotazione può essere favorito con l'accostamento alla musica nel suo duplice aspetto teorico ed uditivo.

In musica la rotazione la troviamo nelle scale.

La scala è un ordinamento per altezza di un dato numero di suoni che dividono in altrettante parti l'intervallo di *ottava*. Ogni sistema musicale ha una sua scala, le cui gradazioni variano da un caso all'altro, sia come numero di intervalli, sia come grandezza dei medesimi.

I procedimenti utilizzati nei secoli per dividere l'*ottava* in un dato numero di parti sono stati principalmente tre; il più antico risale ai primi tempi dell'antica civiltà cinese e fu in seguito usato, con autonoma ideazione, dai greco-pitagorici; il secondo procedimento fu adoperato con l'avvento della *musica tonale* e con la successiva teorizzazione formulata da Gioseffo Zarlino (Chioggia 1517-Venezia 1590) nel 1558; il terzo procedimento è forse il più semplice: basta assumere come partitore degli intervalli la $\sqrt{2}$ corrispondente al numero dei gradi che si vogliono immettere nella scala.

La nostra scala musicale venne calcolata con questo procedimento da Andrea Werckmeister (Benneckenstein, Turingia, 1645-Halberstadt, 1706) alla fine secolo XVII e fu subito divulgata da Johann Sebastian Bach (Eisenach 1685-Lipsia 1750).

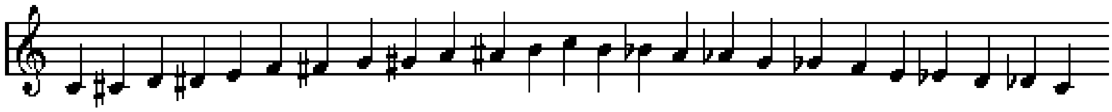
La sua base, essendo 12 i gradi da stabilire (12 semitoni) è la $\sqrt[12]{2}$.

Sin dalla sua origine tale scala prese il nome di *temperata*, o *ben temperata,* dal verbo "temperare", ossia "moderare" e ad essa è legata l'evoluzione della musica occidentale .

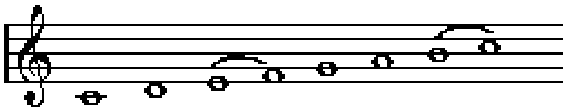
La successione dei dodici suoni della scala temperata (12 semitoni) prende il nome di *cromatica* e le alterazioni si chiamano *diesis* (#) e bemolle (*b*) rispettivamente per il senso ascendente e discendente;

[8]Maria Dedò, op. cit., p.8.

invece, la successione naturale della scala (il riferimento è ai tasti bianchi della tastiera del pianoforte) dà origine alla scala di modo maggiore o minore a seconda della posizione dei toni (T) e dei semitoni (S) all'interno dell'ottava.

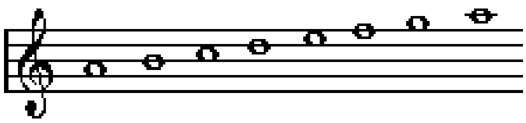


Scala Cromatica



T T S T T T S

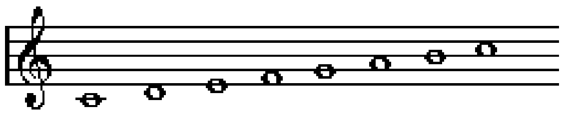
Scala Maggiore



T S T T S T T

Scala Minore

Ciascun grado della scala ha un nome che ne qualifica la funzione in rapporto alla scala stessa.



I II III IV V VI VII VIII

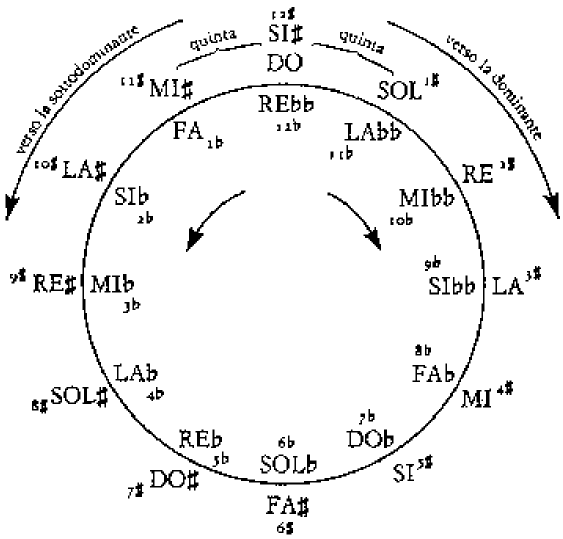
I = *Tonica*, II = *Sopratonica*, III = *Mediante*, IV = *Sottodominante*, V = *Dominante*,

VI = *Sopradominante*, VII = *Sensibile*, VIII = *Tonica*.

Il primo grado è chiamato *tonica,* dà il nome alla scala ed è la nota più importante.

Il grado che per funzione viene subito dopo è il quinto, chiamato *dominante* a causa della sua posizione centrale e del suo ruolo dominante sia sotto l'aspetto armonico sia sotto quello melodico. La *sottodominante* è il quarto grado della scala e la sua importanza è leggermente inferiore a quella della dominante. La *sensibile* è il settimo grado della scala ed ha una funzione importantissima nella musica tonale, quella di "guidare" alla tonica, che si trova un semitono sopra di essa e la attira come una calamita. La *mediante* (detta anche *modale* o *caratteristica*) è il terzo grado della scala, collocato a

metà fra la tonica e la dominante; la sua distanza con la tonica determina il modo della scala: se l'intervallo è di due toni, ossia di terza maggiore, la scala è di modo maggiore, se l'intervallo è di un tono più un semitono, ossia di terza minore, la scala è di modo minore. Il sesto grado della scala, detto *sopradominante,* ha parimenti un ruolo intermedio fra la tonica e la sottodominante. Il secondo grado della scala, posto un tono sopra la tonica, ha il nome di *sopratonica* .
Ogni grado della scala può essere il punto di partenza, cioè la tonica, di una nuova scala la cui successione di toni e semitoni deve essere identica a quella della scala naturale.
Tenendo conto che la tonica e la dominante, ossia il primo e il quinto grado, svolgono le funzioni principali all'interno della scala è possibile costruire un'ordinata successione di scale procedendo da una dominante all'altra in senso ascendente (successione di quinte ascendenti) e da una sottodominante all'altra (successione per quinte discendenti).
Il risultato è affascinante: dopo aver raggiunto dodici diesis e dodici bemolli, le due serie di scale che erano partite da *Do* si incontrano di nuovo "enarmonicamente" (grazie al temperamento equabile un suono può avere nomi diversi: *Do = Si#* oppure *Do = Rebb*) in *Do*, in modo da produrre una rotazione completa, il cosiddetto "circolo delle quinte" .
Johann Sebastian Bach fu il primo musicista che sfruttò a pieno la caratteristica rotatoria delle scale e più in generale le peculiarità del sistema tonale.

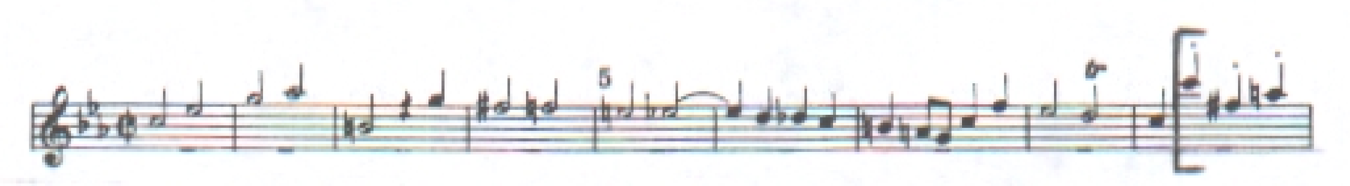


Circolo delle quinte

LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NELL' "OFFERTA MUSICALE" DI JOHANN SEBASTIAN BACH (1685-1750)

Le Opere create da J. S. Bach durante l'ultimo decennio della sua vita si distinguono per la straordinaria concentrazione con la quale egli esplora una volta per tutte le potenzialità della tecnica e della forma dello stile del contrappunto, con un risultato di perfezione e di ricchezza del disegno polifonico ineguale in tutta la storia della musica.
Fra le opere di questo periodo l' *Offerta Musicale* è la più attraente e ricca di colori. Essa deve la sua nascita ad una delle rare occasioni di riconoscimento onorifico nella vita di Bach. Nel Maggio 1747, durante l'occasione di una visita a suo figlio Carl Philipp Emanuel a Potsdam, egli fu ospite d'onore del Re di Prussia Federico II, più tardi chiamato il Grande, che lo trattò con stima e attenzione. Su richiesta dello stesso Bach, il Re, che era un musicista competente e un flautusta di talento, gli affidò un tema da sviluppare contrappuntisticamente in uno dei pianoforti di corte. Qualche mese dopo la visita, Bach

inviò una copia della sua *Offerta Musicale* all'illustre mecenate. Essa comprende una *fuga* (*ricercar*[9] *) a tre voci, una fuga* a sei voci , due *canoni* ed un *trio* composti su un unico tema il *Tema Regium*:



con la sua melodia incisiva, magnificamente rotonda, con il suo ritmo energico offre delle potenzialità eccellenti, come *canto dato*, per la costruzione del controsoggetto e delle opportunità illimitate per le variazioni, ed è in questo senso che Bach principalmente lo esplora.
L'opera è di natura teorico-scientifica e quindi senza una specifica destinazione strumentale[10](così come l'*arte della fuga*).
In essa troviamo una rigorosa applicazione delle trasformazioni geometriche e l'analisi non è artificiosa in quanto Bach si è servito intenzionalmente di esse nella stesura dell'opera. Infatti, nell'applicare il suo ingegno ai problemi ardui come quelli posti dallo sviluppo del *Tema Regium* lo fece nello spirito dei maestri fiamminghi del XV°e XVI° sec. che avevano un genere di tecnica e una disciplina compositiva fortemente logico-creativa. Il risultato è matematico e musicale, un fluire di eventi rigorosamente controllati dove con l'immaginazione e l'inventiva la composizione è sempre espressiva e originale, dove il *Tema Regium*, sempre presente è il denominatore comune di una varietà caleidoscopica di forme.

"Canon à 4"[11]**: *Traslazione lungo l'asse x* e *y***
Originale: BWV 1079,7

Questo è un cerchio a quattro parti scritto con un contrappunto quadruplo. Nell'originale risultano due chiavi posizionate all'inizio del pentagramma; nella prassi esecutiva la chiave di violino è riferita alle tre voci acute mentre la chiave di basso indica la voce grave.
Il *Tema Regium*, opportunamente modificato con l'aggiunta delle note di passaggio e i cambi di valore di durata, è eseguito nelle prime otto battute[12] dalla voce più acuta (nella realizzazione proposta è affidata al violino I).
La prima traslazione lungo l'asse *x* si realizza proprio all'ottava battuta; infatti, nel secondo pentagramma il violino II ripete le stesse note con gli stessi valori di durata e alla stessa altezza proposte dal violino I mentre questi procede in un contrappunto rigorosamente rispettoso dell'armonia classica derivata dalla relazione fra i suoni stabilita dal sistema *ben temperato*. La seconda traslazione lungo l'asse *x* avviene alla quindicesima battuta dove il violino III, nel terzo pentagramma, ripete la melodia iniziale mentre le due voci superiori si sovrappongono contrappuntisticamente con un disegno melodico-ritmico assai più articolato di prima. Dopo le tre traslazioni lungo l'asse *x* di sette battute ciascuna alla ventiduesima battuta avviene l'ultima traslazione che è simultaneamente lungo l'asse *x* ed

[9]Il termine ricercar, presente nell'edizione originale, è attribuito alle due fughe a 3 ed a 6 parti.

[10]Nella edizione che prendiamo in esame viene indicata una delle possibili scelte per la prassi esecutiva.

[11]La partitura si trova in appendice.

[12]Per battuta o misura si intende lo spazio di pentagramma racchiuso fra due stanghette verticali. All'interno si trovano note e/o pause per un valore di durata complessivo pari all'indicazione di tempo stabilita all'inizio del brano: in questo caso la somma dei valori è pari a 4/4.

y perché la melodia non solo è spostata nel tempo ma anche nell'altezza. Infatti il violoncello, indicato nel quarto pentagramma, espone la melodia iniziale con le stesse note e gli stessi valori di durata ma due ottave sotto. Alla ventinovesima battuta il violoncello ha concluso la sua esposizione e il *Tema Regium* ritorna al violino I per dare inizio ad una ripetizione del canone che è detto *infinito* o *perpetuo* perché il gioco imitativo può essere riproposto senza conclusione: questo aspetto è messo in evidenza dallo stesso Bach con il simbolo di ritornello posizionato alla fine della composizione nel manoscritto originale. Nella realizzazione presa in esame il violino II ripete il tema alla battuta 36, il violino III alla battuta 43 e il violoncello alla battuta 50.

"Canon à 2"* (*Quaerendo invenietis*): *riflessione rispetto all'asse x
Originale: BWV 1079,6

In questo canone Bach indica il numero delle voci e la modalità di realizzazione esecutiva. Infatti, accanto alla chiave di Do posta sulla terza linea (chiamata chiave di contralto) si trova la chiave di Fa rovesciata; quindi la prima voce procede normalmente mentre la seconda voce e costruita con la tecnica dell'inversione. Se il lettore mette la musica originale al rovescio e legge da destra a sinistra troverà le note esatte con cui la parte imitativa deve essere costruita. Nel gioco compositivo, Bach non indica l'entrata della seconda voce e coinvolge il lettore-esecutore con l'espressione *Se cerchi troverai*; solo un esperto, come era Federico il Grande, dall'analisi dettagliata del disegno melodico riesce a individuare nella quarta battuta l'entrata della seconda voce per moto contrario mentre una variante del *Tema Regium* è esposto nelle prime sette misure. La maniera antica di scrivere il canone, il gioco di pazienza adoperato da Bach è evidenziato dall'uso delle chiavi antiche.
Il contrasto timbrico suggerito dalle due chiavi del testo originale, nella realizzazione presa in esame è affidato alla Viola per la prima voce e al Violoncello per la parte imitativa.
Questo canone non solo è un esempio concreto della applicazione rigorosa della riflessione ma nella sua "miniatura" è un modello di originalità, di equilibrio e di espressione affascinante.

" Canon à 2"* (*Cancrizans*): *riflessione rispetto all'asse y
Originale: BWV 1079,3a

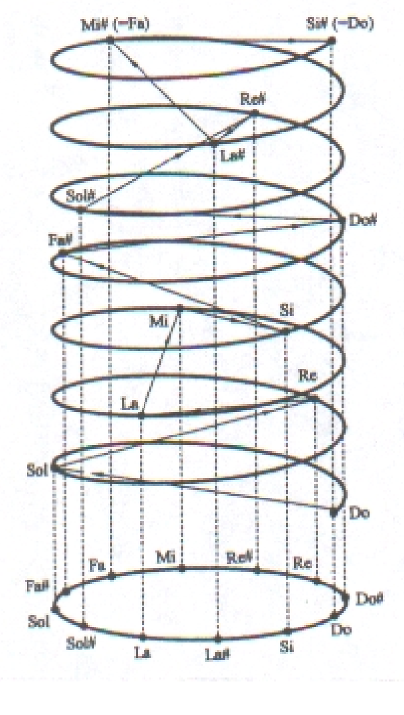
Anche i questo Canone Bach indica il numero delle voci e la procedura esecutiva. La prima voce segue le indicazioni della chiave di Do posta sulla prima linea, chiamata chiave di soprano, mentre la seconda voce trova l'indicazione alla fine della composizione. Bach dunque ha costruito questo canone con la parte imitativa che procede in senso contrario a cominciare dalla fine e lo ha chiamato cancrizante.[13]Le prime nove misure contengono una leggera variazione del *Tema Regium* e le due voci si incontrano a metà, nella battuta 10, dove il loro movimento nelle due direzioni opposte può essere chiaramente osservato nella realizzazione proposta. Le due voci sono affidate a due violini perché Bach utilizzando solo la chiave di soprano, ha escluso un contrasto timbrico per realizzare una completa riflessione rispetto all'asse y non solo nel disegno melodico ma anche nell'equilibrio ritmico e nella fusione timbrica da trasmettere al pensiero del lettore e all'ascolto dell'esecutore.

[13]Dal latino Cancer, viene chiamato canone a granchio proprio perché la parte imitativa cammina all'indietro partendo dall'ultima nota per concludere sulla prima.

"Canon à 2 per tonos" (Ascendenteque Modulatione ascendat Gloria Regis)**:**
Traslazione secondo l'asse y e rotazione
Originale: BWV 1079,3e

Dal testo originale costruito con due pentagrammi si ricava una composizione a tre voci e Bach affida il *Tema Regium*, riccamente elaborato, alla parte superiore mentre le due parti imitative sono indicate nel pentagramma inferiore e si trovano a distanza di una quinta come suggerisce la combinazione delle chiavi di *fa* e di *do* alla quarta linea. L'epigrafe latina posta da Bach nell'edizione originale, *Salga la gloria del Re come sale la modulazione*, indica il "programma" del canone.
La voce superiore espone il *Tema Regium* nella scala-tonalità di do minore mentre sotto di esso la due voci eseguono un contrappunto: la più bassa in do minore e l'altra in sol minore cioè una quinta sopra. Dopo otto battute Bach ha innalzato il *Tema Regium* di un tono, passando da do minore a re minore e le due parti imitative ripetono il loro controsoggetto la più bassa nella tonalità della voce superiore e l'altra una quinta sopra cioè in la minore. Così facendo Bach non solo inizia una traslazione lungo l'asse *x* di otto battute (il *Tema Regium* viene esposto nella scala-tonalità di re minore) ma soprattutto ha messo in pratica il principio della rotazione secondo il sistema ben temperato. La modulazione per *Tonos* si ripete sei volte nell'arco di 48 battute ogni volta sostenuto dalle parti imitative che procedono sempre per quinte e il lettore-ascoltatore avverte l'innalzamento graduale del *Tema Regium* che si allontana dalla tonalità di partenza. Poiché la composizione modula di un tono ogni 8 battute le due parti contrappuntistiche ricoprono l'intero ciclo di quinte:

I *Tema Regium* (violino)	DOm.	REm.	MIm.	FA#m.	SOL#m.	LA#m.	
II (viola)	*sol*	*la*	*si*	*do#*	*re#*	*mi#*	
III (violoncello)	*do*	*re*	*mi*	*fa#*	*sol#*	*la#*	*si# (=do)*



Alla battuta 49 il *Tema Regium* ritorna in do minore ma un'ottava sopra e potrebbe ricominciare da capo per una nuova rotazione di altre 48 battute.
A questo punto il canone si potrebbe definire musicalmente completo e l'intenzione di Bach era proprio quello di girare attraverso le dodici tonalità del temperamento equabile per ritornare al punto di partenza.
Come ha giustamente evidenziato Hofstadter[14] <<...con questo canone, Bach ci offre un primo esempio della nozione che qui definiremo degli *Strani Anelli* . Il fenomeno dello "Strano Anello" consiste nel fatto di ritrovarsi inaspettatamente, salendo o scendendo lungo i gradini di qualche sistema gerarchico, al punto di partenza....>>.
Il concetto di *Strano Anello* si può visualizzare nel seguente modo: supponiamo di disporre la successione di quinte del *sistema ben temperato* su un'elica il cui passo è rappresentato dal passo di ottava; ci accorgiamo che la proiezione nel piano della dodicesima quinta (ad esempio Si# = Do) coincide esattamente con il punto che rappresenta il suono da cui siamo partiti (in questo caso Do); di conseguenza, procedendo nella successione infinita di quinte, la proiezione sul piano dei suoni ottenuti coincide con l'insieme discreto costruito dalla proiezione dei primi dodici termini di tale successione, cioè dei dodici suoni della scala temperata.

[14]Douglas R. Hofstadter, "Godel, Escher, Bach", ed Adelphi, Milano 1994 p.11.

Il *Tema Regium* è caratterizzato dal cromatismo, cioè dalla presenza di suoni estranei alla tonalità d'impianto e solo un musicista come Bach è riuscito a realizzare un complesso e articolato contrappunto modulando per tono con un equilibrio formale e strutturale di inestimabile valore artistico.
La realizzazione presa in esame, proprio per evidenziare le sfumature di ogni voce, affida il *Tema Regium* al violino e le due parti imitative alla viola e al violoncello.

BIBLIOGRAFIA

COXETER, HAROLD SCOTT MACDONALD, Introduction to geometry,
London, John Wiley, 1961
WEYL, HERMANN, Symmetry, Princeton,
U.S.A., Princeton University Press, 1952
DEDO', MARIA, Trasformazioni geometriche,
con un'introduzione al modello di Poincaré,
Bologna, Zanichelli, 1996
FURINGHETTI, FULVIA, Matematica oggi, dalle idee alla scuola,
Genova, Mondadori, 1990
ROSSI, LUIGI, Teoria Musicale,
Bergamo, Edizioni Carrara, 1977
LA NUOVA ENCICLOPEDIA
DELLA MUSICA GARZANTI, Milano, Garzanti Editore, 1993

KAROLYI, OTTO, La grammatica della musica,
Torino, Einaudi, 1969
HOFSTADTER, DOUGLAS R.,Godel, Escher, Bach:
un' Eterna Ghirlanda Brillante,
Milano, Adelphi, 1994
EMMER, MICHELE, Matematica e Cultura,
Atti del Convegno di Venezia, 1997,
Milano, Springer, 1998
BASSO, ALBERTO, L'età di Bach e di Haendel,
Storia Della Musica a cura della
Società Italiana di Musicologia
Torino, E.D.T., 1985
JOHANN SEBASTIAN BACH, Musikalisches Opfer
Londra, ed. Bosey & Hawkes, 1952